代数子移位中的扩张性与周期性

Jarkko Kari
jkari@utu.fi

图尔库大学数学与统计学系，芬兰

2023年1月18日

arXiv:2301.06868v1 [cs.DM] 17 Jan 2023

摘要

一个 d维构型 $c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow A$ 是将有限字母表 $A \subseteq \mathbb{Z}$中的元素着色到 d维无限网格上的结果。若对 c 的有限多个平移作非平凡线性组合可得到零构型，则称构型 c 具有湮灭子。将 c 写作d元形式幂级数后，湮灭子可方便地表示为 d元劳朗多项式 f，其与 c 的形式乘积为零幂级数。更一般地，若形式乘积是强周期构型，则称多项式 f 是 c的周期化子。一个构型集合的公用湮灭子（周期化子）称为该集合的湮灭子（分别为周期化子）。特别地，我们考察 d维子移位的湮灭子和周期化子，即通过禁止某些局部图案来定义的构型集合。我们证明：如果某个子移位存在周期化子，且其支撑在 S中恰好包含一个元素，那么该子移位的一个 $(d-1)$ 维线性子空间 $S \subseteq \mathbb{R}^d$ 就是扩张的。已知当所有 $(d-1)$ 维子空间均为扩张时，子移位是有限的；由此我们得到关于周期化子的一个简单必要条件，该条件可保证子移位有限，或者等价地，保证构型具有强周期性。我们通过将 $\mathbb{Z}^d$ 铺砌为单个瓦片的平移副本，给出了一些例子。

关键词—符号动力系统、湮灭子、周期性、扩张性、Golomb-Welch 猜想、周期铺砌问题

1 引言

本文中的构型是使用有限种颜色对 d维网格 $\mathbb{Z}^d$ 进行的着色。我们的颜色取整数值。如果构型 c 可以通过其适当平移的非平凡线性组合得到零构型，则称其具有湮灭子。换言之，湮灭意味着线性元胞自动机将该构型 c 映射为零构型。按照数字信号处理中的术语，这种映射就是通过 d维离散时间有限延伸冲激响应（FIR）滤波器进行滤波。将 c 写成d元形式幂级数后，湮灭子可以方便地表示为 d元劳朗多项式 f，其与 c 的形式乘积为零幂级数。

具有湮灭子的构型会在若干情境中出现。每个低复杂度构型都有一个湮灭子；这里的低复杂度是指，对于某个有限固定形状，构型中图案的数量 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 至多为该形状的大小 $|D|$ [1]。低复杂度构型是尚未解决的 Nivat猜想 [2], 以及近期解决的周期铺砌问题 [3] 所关注的对象；在后者中，铺砌

$\mathbb{Z}^d$ 由单个瓦片的平移像铺成的铺砌是低复杂度构型 [1]。此外，所谓的网格图的完美着色也有湮灭子 [4]。

具有湮灭子的构型具有全局刚性，但不一定是周期的。在二维情形中，已知若湮灭子没有直线多项式因子，即湮灭多项式没有非单项式因子，且该因子的单项式位于同一条直线上 [5, 6, 4]，则所有方向上的周期性都会得到保证。本文提出一个适用于所有维数 d 的类似条件。更一般地，我们给出一个关于湮灭子的条件，可保证扩张性：这是一种在多维符号动力系统中研究的方向确定性性质。已知所有方向上的扩张性意味着强周期性 [7]。

文章安排如下。第 2 节介绍必要的术语、本文所用的记号，以及我们需要的一些文献结果。第 3 节讨论一个具体应用：由单个瓦片的平移副本构成的 $\mathbb{Z}^d$ 铺砌。全文将通过这一设定中的例子展示我们的方法。第 4 节介绍新的成果。我们证明一个能够保证扩张性的湮灭子条件，并由此得到一个蕴含构型强周期性的条件。我们给出若干例子，其中包括对Golomb-Welch猜想相关问题的讨论。最后，我们在第 5 节作一些总结性评论。

2 预备知识

我们首先定义必要的术语和概念。尽管本部分在很大程度上重复了例如 [6] 中的内容，但为了方便读者，仍将其列出。

构型与周期性

有限字母表 A 上的 d 维构型 是一个赋值

$$c : \mathbb{Z}^d \longrightarrow A$$

它将符号赋予无限网格 $\mathbb{Z}^d$ 上的各个位置。对于任意构型 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 和任意单元$\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，我们用 $c_{\mathbf{u}}$ 表示 c 在单元$\mathbf{u}$ 中的字母 $c(\mathbf{u})$。

对于向量 $\mathsf{t} \in \mathbb{Z}^d$，平移 $\tau^{\mathbf{t}}$ 对构型 c 进行平移，使单元 t 移至单元 $\mathsf{0}$，也就是说，对于所有 $\mathsf{u} \in \mathbb{Z}^d$，$\tau^{\mathbf{t}}(c)_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}+\mathbf{t}}$。如果对于某个非零 $\mathsf{t} \in \mathbb{Z}^d$，$\tau\mathsf{t}(c) = c$，我们就称 c 是周期的。在这种情况下，t 是一个周期向量，c 也称为 t-周期。如果存在 d 个线性无关的周期向量（视为向量空间 $\mathbb{R}^d$ 的元素），则称 c 为强周期。我们用 $\mathsf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ 表示第 i 个基本单位坐标向量，其中 $i = 1$、.....、d。强周期的 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 自动具有某个 $k > 0$，使其沿 d 个坐标方向的周期向量为 $k\mathsf{e}1$、$k\mathsf{e}2$、.....、$k\mathsf{e}_d$。

图案与图案复杂度

令 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为一组有限的单元，即一个形状。一个 D-图案 是对形状 D中的符号 $p \in A^D$ 的一种赋值。（有限）图案 是某个形状 D上的 D-图案。我们称 D 为该图案的定义域。记号 A^* 用于表示字母表 A上的所有有限图案的集合（其中假定维数 d 已知）。

如果存在某个 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$使得 $\tau^{\mathbf{t}}(c) \restriction_D = p$，我们就称形状为 D 的有限图案 p 出现在构型 c 中。我们也称 c 在位置$\mathbf{t}$处包含图案 p 。对于固定的 D，构型 c 中出现的 D-图案集合记作 $\mathcal{L}_D(c)$。我们用 $\mathcal{L}(c)$ 表示在 c中出现的所有有限图案的集合，即对所有有限 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，$\mathcal{L}_D(c)$ 的并集。

构型 c 相对于形状 D 的图案复杂度，是其 c 所包含的不同 D-图案的数量。足够低的图案复杂度会迫使构型中出现全局规律性。一个相关的阈值是图案复杂度

至多为 $|D|$，即形状 D中的单元数。因此，如果 c 相对于形状 D 满足以下条件，我们就称其具有低复杂度：

$$|\mathcal{L}_D(c)| \leq |D|.$$

如果某个 c 构型相对于某个有限形状 D具有低复杂度，我们就称其为低复杂度构型。

子移位

设 $p \in A^D$ 是形状为 D的有限图案。定义域 D 中包含 p 的构型 $[p] = \{c \in A^{\mathbb{Z}^d} \mid c \restriction_D = p\}$ 的集合称为由 p确定的柱集。柱集的集合 $[p]$ 构成 $A^{\mathbb{Z}^d}$上的紧致拓扑——*prodiscrete* 拓扑——的一组基。有关详细信息，请参见 [8] 的前几页。例如，该拓扑等价地由 $A^{\mathbb{Z}^d}$ 上的一个度量定义：如果两个构型在单元$\mathbf{0}$周围的大区域上彼此一致，那么它们之间就很接近。柱集在该拓扑中是既开又闭的：它们既是开集，也是闭集。

$A^{\mathbb{Z}^d}$ 的子集 X 称为子移位，如果它在该拓扑下是闭集，并且对平移封闭。注意，虽然这有些非标准，但我们允许 X 为空集。通过紧致性论证可知，任何不属于 X 的构型 c 都包含一个有限图案 p，该图案阻止它属于 X：任何包含 p 的构型都不在 X中。于是，我们也可以使用禁用图案来定义子移位：给定一个有限图案集合 P，我们定义

$$\mathcal{X}_P = \{c \in A^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{L}(c) \cap P = \emptyset\},$$

不包含 P 中任何图案的构型集合。集合 $\mathcal{X}_P$ 是一个子移位，而每个子移位都是某个 P 的 $\mathcal{X}_P$。如果对于某个有限的 P， $X = \mathcal{X}_P$，那么 X 就是有限型子移位（SFT）。

对于子移位 $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$（实际上，对于任意构型集合 X），我们将其语言 $\mathcal{L}(X) \subseteq A^*$ 定义为出现在 X 某个元素中的所有有限图案的集合，也就是说，对所有 $c \in X$，取集合 $\mathcal{L}(c)$ 的并集。对于固定形状 D，我们类似地定义 $\mathcal{L}_D(X) = \mathcal{L}(X) \cap A^D$，即对 $c \in X$ 取所有 $\mathcal{L}_D(c)$ 的并集。我们称 X 关于形状 D 具有低复杂度，如果 $|\mathcal{L}_D(X)| \leq |D|$。例如，若固定形状 D，并取一个至多含有 $|D|$ 个形状为 D 的允许图案的小集合 $P \subseteq A^D$，那么 $X = X_{A^D \setminus P} = \{c \in A^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{L}_D(c) \subseteq P\}$ 是一个低复杂度有限型子移位，因为 $\mathcal{L}_D(X) \subseteq P$，且 $|P| \leq |D|$。

构型的轨道 c 是其所有平移像组成的集合 $\mathcal{O}(c) = \{\tau^{\mathbf{t}}(c) \mid \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2\}$，而构型的轨道闭包 $\mathcal{O}(c)$是其轨道的拓扑闭包。轨道闭包是一个子移位；事实上，它是所有包含 c的子移位的交集。一就有限图案而言，当且仅当 $c' \in \mathcal{O}(c)$ $\mathcal{L}(c') \subseteq \mathcal{L}(c)$。当然，低复杂度构型的轨道闭包是一个低复杂度子移位。

湮灭子与周期化子

为了使用交换代数，我们假设 $A \subseteq \mathbb{Z}$，即构型中的符号是整数。我们还保留 A 有限这一假设。我们将一个 d维构型 $c \in A^{\mathbb{Z}^d}$ 表示为关于 d 个变量 $x_1, \ldots x_d$ 的形式幂级数，其中单项式以自然的方式标记单元 $x_1^{u_1} \cdots x_d^{u_d} \longleftrightarrow (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$，而幂级数中单项式的系数就是对应单元中的符号。采用便捷的向量记法$\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_d)$，我们用$\mathbf{x^u} = x_1^{u_1} \cdots x_d^{u_d}$表示对应单元$\mathbf{u} = (u_1, \ldots u_d) \in \mathbb{Z}^d$的单项式。注意，我们所有的幂级数和多项式都是劳朗 形式，因为我们允许变量的幂既可以为负，也可以为正。现在，构型$c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 可以编码为形式幂级数

$$c(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x^u}.$$

幂级数 $c(\mathbf{x})$ 是整数的（系数为整数），由于 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是有限的，因此它是有限的（不同系数只有有限多个）。下文我们将构形视为整数有限幂级数。

默认情况下，对于任意劳朗级数或多项式 f，我们用 $f_{\mathbf{u}}$ 表示 $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ 的系数。

请注意，这些幂级数确实是形式的：变量的作用仅仅是提供网格上的位置信息。我们可以将两个幂级数相加，也可以用多项式乘以幂级数，但绝不会给变量代入任何值。将幂级数 $c(\mathbf{x})$ 乘以单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}$，只需将所有单项式的指数加上 $\mathbf{t}$，从而得到平移构形 $\tau^{\mathbf{t}}(c)$ 的幂级数。因此，构型$c(\mathbf{x})$ 是 $\mathbf{t}$-周期的，当且仅当 $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}c(\mathbf{x}) = c(\mathbf{x})$，也就是说，当且仅当 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1)c(\mathbf{x}) = 0$，即零幂级数。因此，我们可以通过构型在与差二项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1$ 相乘时的湮灭来表达其周期性。由此自然地引入湮灭子理想

$$\mathrm{Ann}(c) = \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}] \mid fc = 0\}$$

其中包含所有湮灭 c 的多项式。这里我们用记号 $\mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ 表示复系数劳朗多项式的集合。请注意，$\mathrm{Ann}(c)$ 确实是劳朗多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ 的一个理想。

我们将劳朗多项式 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$ 的支撑 记为

$$\mathrm{Supp}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d \mid f_{\mathbf{u}} \neq 0\}.$$

备注1。如果构型 c 有一个复系数湮灭子 f，那么它也有一个整数系数湮灭子 f'，且满足 $\mathrm{Supp}(f') = \mathrm{Supp}(f)$。

要理解这个备注为何成立，请注意，湮灭条件 $fc = 0$ 可以视为关于湮灭多项式 f系数的齐次线性方程组。方程中各变量的系数来自构型c，因此都是整数。容易看出，对于任何一个整数系数齐次线性方程组的（复数值）解，都存在一个整数值解，并且原复数解中取非零值的每个变量，在新整数解中也取非零值。这个整数解给出了一个整数湮灭子 f' 的系数，且满足 $\mathrm{Supp}(f') = \mathrm{Supp}(f)$。

有时，我们发现使用周期化理想

$$\mathrm{Per}(c) = \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}] \mid fc \text{ is strongly periodic }\}$$

颇为方便，它包含所有与构型 c 相乘后得到强周期构型的劳朗多项式。显然，$\mathrm{Per}(c)$也是劳朗多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}^{\pm 1}]$的一个理想，并且有 $\mathrm{Ann}(c) \subseteq \mathrm{Per}(c)$。此外，如果 $\mathrm{Per}(c)$包含非零多项式，那么 $\mathrm{Ann}(c)$也包含非零多项式。事实上，若 $f \in \mathrm{Per}(c)$，则对于强周期fc的任一周期$\mathbf{t}$，fc都会被$\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1$湮灭，因此 $f(\mathbf{x})(\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1)$ 是 c的一个湮灭子。

我们的第一个观察揭示了低复杂度假设与湮灭子之间的关系。具体而言，利用初等线性代数很容易看出，任何低复杂度构型都至少有一些非平凡湮灭子：

引理 1 ([1])**.** 设 c 是一个低复杂度构型。那么$\mathrm{Ann}(c)$ 包含一个非零多项式。更确切地说，若 c 相对于形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 具有低复杂度，则存在一个非零的 $f \in \mathrm{Per}(c)$，使得 $\mathrm{Supp}(f) \subseteq D$。

f 的支撑前面的负号，出现在引理的陈述中，是由乘积 fc 中卷积的计算方式造成的：对于所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$

$$(fc)_{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{v} \in \mathrm{Supp}(f)} f_{\mathbf{v}} c_{\mathbf{u}-\mathbf{v}},$$

因此，c中位置 $\mathbf{u}$处形状为 $-\mathrm{Supp}(f)$ 的图案决定了位置 $\mathbf{u}$处的新值 $(fc)_{\mathbf{u}}$。我们在文章其余部分的其他陈述中也能看到类似的负号。

[1] 的一个主要结果指出，如果一个构型 c 被某个非零多项式湮灭（例如由于低复杂度），那么它也必然被若干差二项式的乘积湮灭。这个结果是我们研究方法的基础。

定理 1 ([1, 5])。 设 c 是一个构型，且 $f \in \mathrm{Ann}(c)$。对于每个 $\mathbf{u} \in \mathrm{Supp}(f)$，存在两两线性无关的 $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_m \in \mathbb{Z}^d$，使得每个 $\mathbf{t}_i$ 都平行于 $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}$，其中某个 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{Supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}$，并且

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1) \in \mathrm{Ann}(c).$$

在 [1] 定理 1 的陈述中，没有提及 Supp(f) 中的元素，但给出的证明表明，对于 Supp(f) 中任意的$\mathbf{u}$，都存在如上文所述的向量$\mathbf{u}_i \in$ Supp(f)。在 [5] 定理 12 中，结果以这一更强的形式给出。本文中，湮灭多项式 f 的支撑中各位置之间的方向$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}$ of $\mathbf{t}_i$ 发挥着核心作用。另请注意，根据备注1，湮灭多项式f 不必是整系数的：总存在一个具有相同支撑且系数为整数的多项式。

对于子移位 $X \subseteq A^{\mathbb{Z}^d}$，我们用 Ann($X$) 表示湮灭所有 X中元素的劳朗多项式集合，并称 Ann(X) 为 X的湮灭子理想。类似地，Per(X) 是 $c \in X$ 上各集合 Per(c) 的交集。上文针对单个构型 c 的 Ann(c) 和 Per(c) 所述的所有结果，同样适用于子移位X的 Ann(X) 和 Per(X)，证明也类似。特别地，我们有以下定理 1 的子移位变体。

定理 1′。设 X 是一个子移位，且 $f \in \mathrm{Ann}(X)$。对于每个 $\mathbf{u} \in \mathrm{Supp}(f)$，存在两两线性无关的 $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_m \in \mathbb{Z}^d$，使得每个 $\mathbf{t}_i$ 都平行于某个$\mathbf{u}_i \in \mathrm{Supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}$所对应的$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}$，并且

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1) \in \mathrm{Ann}(X).$$

3 通过平移单个铺砖进行的铺砌

作为一种具体的设定，也是贯穿本文的便捷示例来源，我们考虑使用单个有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 的平移副本对 $\mathbb{Z}^d$ 进行铺砌。在此背景下，我们称 D 为一个铺砖。由 D 进行的铺砌可表示为一个二元构型，其中符号 1 标示放置 D 的副本以无重叠地完全覆盖 $\mathbb{Z}^d$ 的位置。更准确地说，$c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 是由 D 进行的铺砌，当且仅当 $c(\mathbf{x}) f_D(\mathbf{x}) = \mathbb{1}(\mathbf{x})$，其中

$$f_D(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in D} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$$

是 D 的示性多项式，并且

$$\mathbb{1}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$$

是全为 1 的均匀构型。因此，多项式 f_D 是每种由 D 进行的铺砌的周期化子。

令 $T_D \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$ 为由 D铺砌构成的集合。显然，T_D 是一个低复杂度有限型子移位：T_D 中的元素恰好是这样的二元构型，其（$-D$）图案中符号 1 恰好出现一次，并且总共有 $|-D|$ 个这样的图案。

例1。 在图示中，我们将二维和三维铺砖分别画成若干个正 it
方形和立方体的并集。例如，图 1(a)展示了铺砖

$$D = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

这个铺砖允许存在不是强周期的 $\mathbb{Z}^3$ 铺砌。例如，可以从任意一个用 2×2 个正方形铺砖 $S = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ 对 $\mathbb{Z}^2$ 进行的铺砌 $a \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ 开始。然后，由 $c(x_1, x_2, x_3) = a(x_1 + x_3, x_2 + x_3)$ 定义的 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^3}$ 是一个用 D 对 $\mathbb{Z}^3$ 进行的 $(1,1,-1)$-周期铺砌，其在 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$ 上的切片 $(x_1, x_2) \mapsto c(x_1, x_2, 0)$ 等于 a。如果 a 不是强周期的，那么 c 也不是强周期的。参见图 1(b) 和 (c)。

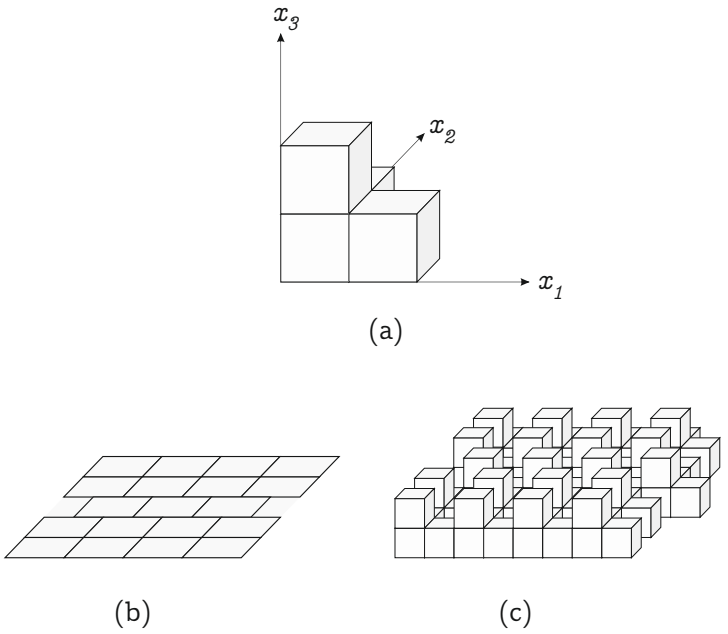


图 1：（a）例1中的铺砖 $D = \{(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\}$，（b）由 2×2 铺砌 $\mathbb{Z}^2$ 的一种铺砌，其中一铺砖行平移了一个单位，因此不是强周期的；（c）由 D铺砌 $\mathbb{Z}^3$ 的铺砌所对应的层。通过以 $(1,\ 1,\ -1)$-周期方式重复该层，可以得到 $\mathbb{Z}^3$ 的铺砌。

例2. 对于维数 d 和半径 $r \in \mathbb{Z}_+$，记作

$$B_r^d = \{(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \ \mid \ \sum_{i=1}^{d} |n_i| \leq r\}$$

对于 Lee度量（也称为曼哈顿度量）下的 d 维半径为 r 的球。 B_2^3 和 B_3^2的示意图见图 2。

若 $d \leq 2$ 或若 $r = 1$，则存在由铺砖 B_r^d [9] 形成的强周期铺砌：它们是 Lee度量下的完美码。在 [9] 中，有人猜想对于其他的 d和 r 取值，铺砖 B_r^d 不能铺砌 $\mathbb{Z}^d$。这个猜想有两个自然的变体：强Golomb-Welch猜想认为不存在任何铺砌，而弱Golomb-Welch猜想则认为不存在强周期铺砌。对于维数 $d \geq 6$，这些猜想仍未解决。已知当半径足够大时，该猜想在每个维数下都成立，因此半径为 $r = 2$ 的情形似乎最具挑战性。更多详情请参见 [10] 。

最近，文献 [3] 证明，对于某个维数 d，存在一个铺砖 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得 T_D 是一个非周期的有限型子移位，即存在铺砌，但不存在强周期铺砌。这为周期铺砌问题 [11] 给出了否定答案。相反，任何能够铺砌 $\mathbb{Z}^2$ 的二维铺砖 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 也能够以周期方式铺砌 $\mathbb{Z}^2$ [12, 13]。

有趣的是，如果 $|D|$ 是素数，那么每个由 D 铺砌而成的铺砌都是强周期的 [14]。利用我们的代数方法，这一事实也有一个简单的证明，见 [1]中的例2。在 [14]中还证明了，对于所有铺砖 D， $T_D = T_{-D}$ 即，将每块铺砖原地旋转，就能把由 D 构成的铺砌变成由 $-D$构成的铺砌。因此， $f_D(\mathbf{x})$ 和 $f_{-D}(\mathbf{x})$ 都是由D构成的合法铺砌的周期化子。

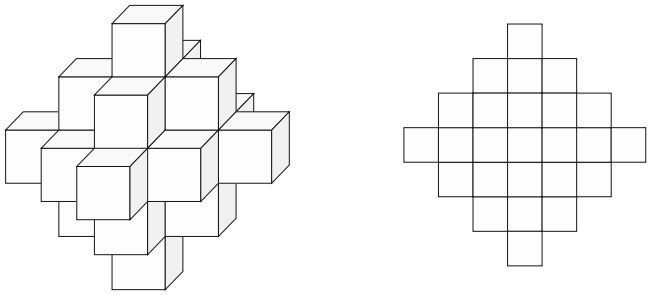


图 2：维数为 $d = 3$ 的半径为2的李球 B_2^3 （左侧），以及维数为 $d = 2$ 的半径为3的李球 B_3^2 （右侧）。

4 扩张性与确定性

我们需要了解一些关于 $\mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{R}^d$ 的离散几何基本概念。我们使用记号 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ 的内积。对于非零向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$，我们记

$$H_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle < 0\}$$

表示沿$\mathbf{u}$方向的开离散半空间。二维示意图见图 3。

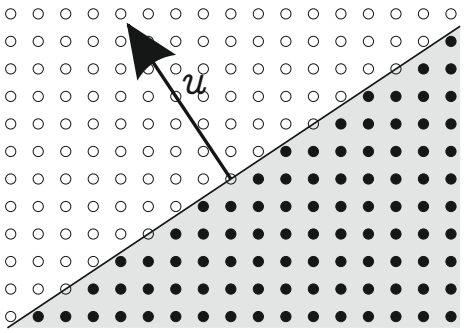


图 3：维数为 $d = 2$ 的开离散半空间 $H_{\mathbf{u}}$。

子移位 X 在确定性 $\mathbf{u}$ 方向上成立，当且仅当对所有 $c, c' \in X$

$$c \restriction_{H_{\mathbf{u}}} = c' \restriction_{H_{\mathbf{u}}} \quad \Longrightarrow \quad c = c',$$

也就是说，如果离散半空间 $H_{\mathbf{u}}$ 中某个构型的内容能够唯一确定其余单元中的内容。注意，只需验证半空间边界上的值 $c_{\mathbf{0}}$ 能由 $c \restriction_{H_{\mathbf{u}}}$ 唯一确定即可——其余部分可由 X 在拓扑上闭合且具有平移不变性这一事实推出。

以下观察显而易见且广为人知。它指出，如果一个子移位有一个多项式 f 作为湮灭子（甚至作为周期化子），且其负支撑 $-\mathrm{Supp}(f)$ 在向量 $\mathbf{v}$ 的方向上存在一个最大位置$\mathbf{u}$（意即内积 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ 取得最大值），那么 X 在$\mathbf{u}$的方向上是确定的。用术语来说，集合 $-\mathrm{Supp}(f)$ 对该子移位是生成的，因为在 $\mathcal{L}(X)$ 中，若已知形状为 $-\mathrm{Supp}(f)$ 的图案中除一个符号以外的所有符号，就能唯一确定该图案中未知的符号。在定理 3 中，我们将此引理推广到 $-\mathrm{Supp}(f)$ 含有一个与$\mathbf{u}$的内积唯一（但不一定最大）的位置的情形。

引理 2. 设 X 是一个 d维子移位，并设 $f \in \mathrm{Per}(X)$ 满足 $\mathbf{0} \in \mathrm{Supp}(f)$。设$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ 是一个非零向量，满足 $-\mathrm{Supp}(f) \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq H_{\mathbf{u}}$。那么 X 在$\mathbf{u}$的方向上是确定的。

证明。令 $c,\ c' \in X$满足 $c \upharpoonright_{H_{\mathbf{u}}} = c' \upharpoonright_{H_{\mathbf{u}}}$。将多项式 $f(\mathbf{x})$ 替换为$f(\mathbf{x})(\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1)$，其中 $\mathbf{t} \in -H_{\mathbf{u}}$是 $f(\mathbf{x})c(\mathbf{x})$ 和 $f(\mathbf{x})c'(\mathbf{x})$ 的一个公周期，这样我们可以假设 $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ann}(c)$ 且 $f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ann}(c')$。由

$$0 = (fc)_{\mathbf{0}} - (fc')_{\mathbf{0}} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(f)} f_{\mathbf{x}} c_{-\mathbf{x}} - \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(f)} f_{\mathbf{x}} c'_{-\mathbf{x}} = f_{\mathbf{0}} c_{\mathbf{0}} - f_{\mathbf{0}} c'_{\mathbf{0}}$$

将 $f_{\mathbf{0}} \neq 0$ 除过去，得到 $c_{\mathbf{0}} = c'_{\mathbf{0}}$。 □

如果子移位 X 在方向 $\mathbf{u}$ 和 $-\mathbf{u}$ 上是确定的，那么 $(d-1)$ 维子空间 $S = \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d \mid \langle \mathbf{u},\ \mathbf{v} \rangle = 0\}$ 称为 X 的一个扩张 空间。否则，它是非扩张的。利用 X 的紧致性，容易看出，构型 $c \in X$ 在扩张空间 S 的有界距离范围内的内容能够唯一确定c：存在 $\delta > 0$，使得对所有 $c,\ c' \in X$，

$$c \upharpoonright_B = c' \upharpoonright_B \quad \Longrightarrow \quad c = c',$$

其中，$B = \cup_{\mathbf{s} \in S} B^{\delta}(\mathbf{s})$ 和 $B^{\delta}(\mathbf{s}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d \mid \langle \mathbf{v} - \mathbf{s},\ \mathbf{v} - \mathbf{s} \rangle < \delta^2\}$ 是以 δ为半径、以 $\mathbf{s}$ 为中心的球，采用通常的欧几里得度量。关于多维子移位的扩张空间的结果，参见 [7] 。特别是，来自 [7] 的以下经典结果对我们至关重要：它指出，如果一个 d维子移位 X的所有（$d-1$）维子空间都是扩张的，那么 X 只包含强周期构型。这一结果将确定性方向与周期性联系起来。

定理 2 ([7])。 在每个方向上都具有确定性的子移位是有限的，因此只包含强周期构型。

例 3。 考虑通过铺砖的平移对 $\mathbb{Z}^3$ 进行铺砌，其中铺砖为 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^3}$

$$D = (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

来自例1，如图 1(a)所示。假设 c 是 t-周期的，其中 $\mathsf{t} = k(1,1,1)$，且 $k \in \mathbb{Z}_+$。我们来证明 c是强周期的。多项式 $f_D(\mathbf{x}) = 1 + x_1 + x_2 + x_3$和 $f_{-D}(\mathbf{x}) = 1 + x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1}$，以及 $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1$ 和 $\mathbf{x}^{-\mathbf{t}} - 1$ 都是 c的周期化子，因此它们也属于轨道闭包 $X = \mathcal{O}(c)$ 的 $\mathrm{Per}(X)$，其中该轨道闭包对应于 c。引理 2 中使用周期化子（实际上是湮灭子）$\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1$ 和 $\mathbf{x}^{-\mathbf{t}} - 1$，表明 X 在任何不垂直于 t 的方向 u 上都是确定的。接下来考虑任意非零的 $\mathsf{u} \perp \mathsf{t}$，即 $\mathsf{u} = (a,b,c)$，其中 $a + b + c = 0$。若 $a = 0$，则对于 $b \neq 0$，$\mathsf{u} = (0,b,-b)$。若 $b > 0$，则 $(0,1,0)$；若 $b < 0$，则 $(0,0,1)$；两者之一是与 u 的内积最大的唯一 $\mathsf{v} \in D$。因此，根据引理 2，X 的周期化子 $\mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f_D(\mathbf{x})$ 表明 X 在方向 u 上是确定的。$b = 0$ 和 $c = 0$ 的情形类似。最后，若 a、b 和 c 都不为零，则其中一个（设为 a）与另外两个符号不同。因此，$\mathsf{v} = (1,0,0)$ 是 D中与 u 的内积最大或最小的唯一元素。因此，根据引理 2，$\mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f_D(\mathbf{x})$ 或 $\mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f_{-D}(\mathbf{x})$ 证实 X 在方向 u 上是确定的。由此我们证明了 X 在每个方向上都具有确定性。根据定理 2，X的所有元素（包括 c）都是强周期的。

扩张性的一个充分条件

现在我们准备好构建主要工具，用以证明带有湮灭子的子移位的扩张空间，从而证明构型的强周期性。我们首先指出，定理 $1'$给出的特殊湮灭子 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1)$ 表明，若 X满足对所有 $i \in \{1, \ldots, m\}$都有 $\mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle \neq 0$，则 $\langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}$对 X是扩张的。

引理 3. 设 X 是一个 d 维子移位，且 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}-1)\cdots(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m}-1) \in$ 湮灭子(X)。对于每个 $(d-1)$ 维线性子空间 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，若对所有 $i \in \{1,\ldots,m\}$ 都有 $\mathbf{t}_i \notin S$，则 S 是 X的一个扩张空间。

证明。这直接由引理 2 得出。设 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ 满足 $S = \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}$。注意到 $\mathbf{x}^{\mathbf{t}} - 1 = -\mathbf{x}^{\mathbf{t}}(\mathbf{x}^{-\mathbf{t}} - 1)$，我们可以在湮灭子$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1)$中将任意 $\mathbf{t}_i$ 替换为 $-\mathbf{t}_i$。

根据假设，对所有 i，都有 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle \neq 0$。若 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle < 0$，我们就在湮灭子 f中将 $\mathbf{t}_i$ 替换为 $-\mathbf{t}_i$。因此，我们可以假设，对所有 $i \in \{1,\ldots,m\}$，都有 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{t}_i \rangle > 0$。但此时湮灭子 f 满足 $\mathbf{0} \in \mathrm{Supp}(f)$ 和 $-\mathrm{Supp}(f) \setminus \{\mathbf{0}\} \subseteq H_{\mathbf{u}}$，因此根据引理 2，子移位 X 在 $\mathbf{u}$方向上具有确定性。由于 $S = \langle -\mathbf{u} \rangle^{\perp}$，我们在 $-\mathbf{u}$方向上也有确定性。 □

下面的定理给出了一个以湮灭多项式（或周期化多项式）表述的扩张性充分条件。它推广了引理 2。

定理 3. 设 X 是一个 d 维子移位，且 S 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个真线性子空间 . 若 $f \in \mathrm{Per}(X)$ 满足

$$\mathrm{Supp}(f) \cap S = \{\mathbf{0}\} \tag{1}$$

则存在两两线性无关的 $\mathbf{t}_1$、$\ldots$、$\mathbf{t}_m \in \mathbb{Z}^d$，使得对于所有$i \in \{1,\ldots,m\}$，$\mathbf{t}_i \notin S$，且 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}-1)\cdots(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m}-1) \in \mathrm{Ann}(X)$。特别地，若 S 是$(d-1)$维的，则 S 对于 X 是扩张的。

证明。我们先证明存在 $g \in \mathrm{Ann}(X)$，使其满足 $\mathrm{Supp}(g) \cap S = \{\mathbf{0}\}$，即满足周期化子 f 所满足的同一个方程 (1)。令 $Y = \{fc \mid c \in X\}$ 为仅包含强周期构型的子移位。这样的子移位是有限的。（对于有限型二维子移位，这一点已在 [16] 中证明；该证明可直接推广到任意维数 d 的子移位。）由于 S 的维数至多为 $d-1$，某个单位坐标向量 $\mathbf{e}$ 不属于 S。由于 Y 是由强周期构型组成的有限集合，其中的元素沿 $\mathbf{e}$ 方向具有共同的周期。周期的倍数仍然是周期，因此存在任意大的整数 k，使得 $(\mathbf{x}^{k\mathbf{e}} - 1)f(\mathbf{x}) \in \mathrm{Ann}(X)$。由于 $\mathbf{e} \notin S$，对于所有足够大的 k，$\mathbf{x}^{k\mathbf{e}} f(\mathbf{x})$ 的支撑与 S 的交集为空。因此，某个 $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{k\mathbf{e}} - 1)f(\mathbf{x})$ 满足 $\mathrm{Supp}(g) \cap S = \{\mathbf{0}\}$，且 $g \in \mathrm{Ann}(X)$。

应用定理 $1'$，取湮灭子 g，并用 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$，即可得到所需的特殊湮灭子（$\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1$）$\cdots$（$\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1$），因为 $\mathbf{u}_i - \mathbf{u} \notin S$ 对 $\mathbf{u}_i \in \mathrm{Supp}(g) \setminus \{\mathbf{u}\}$ 成立。最后一个结论现在可直接由引理 3 得出。 □

定理 2 和定理 3 直接给出了以下用于强制实现强周期性的工具。

推论 1. 设 X 是一个 d 维子移位，并且对每个非零的 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$，都存在 $f \in \mathrm{Per}(X)$ 以及 $\mathbf{v} \in \mathrm{Supp}(f)$，使得 $\langle \mathbf{v}、\mathbf{u} \rangle \neq \langle \mathbf{v}'、\mathbf{u} \rangle$ 对所有 $\mathbf{v}' \in \mathrm{Supp}(f) \setminus \{\mathbf{v}\}$ 均成立。则 X 是有限的，因此只包含强周期构型。

证明. 对于每个 $(d-1)$ 维子空间 S，我们取$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$，使得 $S = \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}$。令$f$ 以及 $\mathbf{v}$ 如推论陈述所述，则 $\mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f(\mathbf{x})$ 是 X 的周期化子，并满足 (1)。由定理 3，子空间 S 对 X 是扩张的。由于 S 任意，结论现在由定理 2 得出。 □

对于低维子空间，我们还可以得到以下推论。

推论 2。设 X 是一个 d 维子移位，并且设 $k \leq d-2$。假设对于每个 k 维线性子空间 $S \subseteq \mathbb{R}^d$，都存在 $f \in \mathrm{Per}(X)$ 使得 $\mathrm{Supp}(f) \cap S = \{\mathbf{0}\}$。那么存在有限多个 $k+1(k+1)$ 维线性子空间 S_1，...，S_n，使得每个 $d-1(d-1)$ 维非扩张空间都包含某个 S_i 作为其子空间。

证明。我们对 k 使用数学归纳法。基础情形 $k=0$ 很容易：对于 $S=\{\mathbf{0}\}$ 存在 $f\in \mathrm{Per}(X)$ 使得 $\mathrm{Supp}(f)\cap S=\{\mathbf{0}\}$ 的假设意味着 X 具有非零湮灭子。根据定理 $1'$，存在一个特殊湮灭子 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}-1)\cdots(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m}-1)$。根据引理 3，不包含向量 $\mathbf{t}_i$ 中任何一个的 $(d-1)$ 维空间，对于 X 是扩张的，因此对于 $i\in\{1,\dots,m\}$，空间 $S_i=\langle \mathbf{t}_i\rangle$ 满足该断言。

于是考虑 $k\geq 1$，并假设将 $k-1$ 代入 k后，该命题成立。假设对于每个 k维线性子空间 $S\subseteq\mathbb{R}^d$，都存在 $f\in\mathrm{Per}(X)$，使得 $\mathrm{Supp}(f)\cap S=\{\mathbf{0}\}$。那么，将 $k-1$代入 k后，相应的假设也成立，因此根据归纳假设，存在 k维线性子空间 $S_1,\dots,S_n$，使得每个非扩张空间都包含某个 S_i。根据假设，对于每个 S_i，都存在 $f_i\in\mathrm{Per}(X)$，使得 $\mathrm{Supp}(f_i)\cap S_i=\{\mathbf{0}\}$。这意味着，根据定理 3，对于每个 $i\in\{1,\dots,m\}$，子移位 X 都有一个特殊湮灭子 $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1^{(i)}}-1)\cdots(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_{m_i}^{(i)}}-1)$，使得对所有 $j\in\{1,\dots,m_i\}$，$\mathbf{t}_j^{(i)}\notin S_i$。同样，根据引理 3，若一个 $(d-1)$维空间对于某个 i不包含向量 $\mathbf{t}_j^{(i)}$（其中 $j\in\{1,\dots,m_i\}$），那么它对于 X 是扩张的。由此可知，每个非扩张的 $(d-1)$ 维子空间 S，对于某个 $i\in\{1,\dots n\}$，都包含 k维子空间 S_i，并且对于某个 $j\in\{1,\dots,m_i\}$，包含向量 $\mathbf{t}_j^{(i)}$。因此，S 包含由 S_i 和 $\mathbf{t}_j^{(i)}\notin S_i$生成的 $(k+1)$维子空间。i 和 j的取值只有有限种。

□

特别地，如果一个 d 维子移位 X 具有这样的性质：对于 $\mathbb{R}^d$ 的每个 $(d-2)$ 维子空间 S，都存在满足条件 (1) 的 $f\in\mathrm{Per}(X)$，那么除了有限多个 $(d-1)$ 维空间外，其余空间对于 X 都是扩张的。

纤维

满足条件 (1) 的 $f\in\mathrm{Per}(X)$ 的存在性，通常可以方便地用与 S 平行的周期化子的“切片”的线性组合来表示。设 $S\subseteq\mathbb{R}^d$ 为一个线性子空间。若一个劳朗多项式 f 满足 $\mathrm{Supp}(f)\subseteq S$，则称其为 S-纤维 。由于 S-纤维的乘积与和仍是 S-纤维，所有 S-纤维构成劳朗多项式环的一个子环。

我们将劳朗多项式 f 在子空间 S 上的限制 定义为 S-纤维

$$\sum_{\mathbf{u}\in\mathrm{Supp}(f)\cap S} f_{\mathbf{u}}\mathbf{x}^{\mathbf{u}},$$

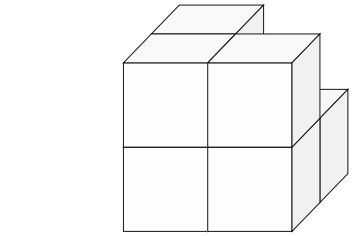
并将其记为 $f\restriction S$。因此，限制就是 f 中位于 S 内的单项式之和。劳朗多项式理想 I 的 S-纤维，是由所有满足 $f\in I$ 的 $f\restriction S$ 构成的集合 $I\restriction S$。集合 $I\restriction S$ 是 S-纤维环的一个理想。所谓单个多项式 f 的 S-纤维，是指限制 $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})\restriction S$，其中$\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d$；也就是说，是沿着平移后的 S 对 f 取的“切片”。

理想 I 的某个元素 f 满足 $\mathrm{Supp}(f)\cap S=\{\mathbf{0}\}$，条件 (1) 仅仅是在说明 $I\restriction S$ 含有单项式 1，也就是说，它就是完整的 S-纤维环。因此在实践中，要验证子移位的周期化理想 $\mathrm{Per}(X)$ 是否满足这一条件，只需找到一个非零单项式，使其成为若干不同 $f\in\mathrm{Per}(X)$ 的 S-纤维的线性组合。

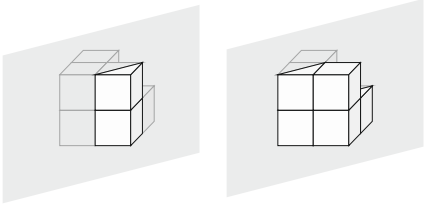
例4。 </style}令 和 (，n_2，n_3)} 是某个 n_1，n_2，$n_3\geq 2$ 的铺砖。该铺砖是一个大小为 $n_1\times n_2\times n_3$、缺少角点 $(n_1$，n_2，$n_3)$ 的长方体。图 4(a) 展示了 $n_1=n_2=n_3=2$ 情形下的示意图。我们来证明，$\mathbb{Z}^3$ 的每一种由 D 平移而成的铺砌都是强周期的。我们通过证明以下结论来完成证明：对于每个二维线性子空间 $S=\langle\mathbf{u}\rangle^{\perp}$，周期化子 f_D 的 S-纤维会生成一个非零单项式。于是还存在一个周期化子 f 满足 $\mathrm{Supp}(f)\cap S=\{\mathbf{0}\}$，由此我们可以利用$X=\mathcal{O}(c)$ 的推论 1 得出强周期性。

令$\mathbf{u}=(a$，b，$c)$, 并根据以下分类讨论 关于 a、b 和 c:

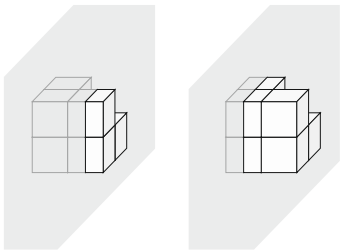
- 如果 $a\neq 0$、$b\neq 0$和 $c\neq 0$，那么 D 的四个角 $(1$，1，$1)$、$(n_1$，1，$1)$、$(1$，n_2，$1)$ 或 $(1$，1，$n_3)$ 中有一个与$\mathbf{u}$具有唯一内积的角，因此给出 f_D的一个单项式 S-纤维。
- 若 $a\neq 0$且 $b\neq 0$，但 $c=0$，则 $f(\mathbf{x})=1+x_3+x_3^2+\cdots+x_3^{n_3}$是 f_D 的一个纤维。不过，还存在另一个纤维 $g(\mathbf{x})=1+x_3+x_3^2+\cdots+x_3^{n_3-1}+p(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$，由经过切片得到



(a)



(b)



(c)

图4：(a) 例4中研究的缺失一个角的 $2 \times 2 \times 2$ 立方体；(b) 两条平行于一条棱的纤维，它们共同生成一个单项式；(c) 两条平行于一个面的纤维，它们生成一个单项式。

该切片经过 D 缺失的角，其中 $p(\mathbf{x})$ 是一个多项式，用于表示与缺失角位于同一平面上的完整列的位置。图4(b)展示了这种情况。纤维 f 和 g 生成一个非零单项式 $(1 + p(\mathbf{x}))f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) = x_3^{n_3}$。将 $a = 0$ 或 $b = 0$ 替换为 $c = 0$ 时，情况是对称的。

• $\sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_3} x_2^i x_3^j$ f $-x_2^{n_2} x_3^{n_3}$ = 最后，

考虑 $a \neq 0$ 但 $b = 0$ 且 $c = 0$的情形。在这种情况下， f_D 有纤维 $f(\mathbf{x})$和$(\mathbf{x})$，它们的差是一个非零单项式。这些纤维分别由不包含缺失角的切片，以及包含D缺失角的切片得到。此情形的示意图见图4(c)。以 $b \neq 0$ 或 $c \neq 0$代替 $a \neq 0$ 的情形是对称的。

例5. 令 $D = B_2^d$ 为例2中定义的维数为 $d \geq 2$的半径为2的李球。我们来证明，子空间 $S = \langle (1, 1, \ldots\ldots, 1) \rangle^{\perp}$ 对于由 D铺砌 $\mathbb{Z}^d$ 所构成的合法铺砌子移位$X = T_D$ 是扩张的。注意，确定性方向$\mathbf{u} = (1, 1, \ldots\ldots, 1)$垂直于 D的一个 $(d - 1)$ 维离散面，因此直观上，它是所有方向中“非确定性最大”的方向。我们证明， f_D 的两个 S 纤维所生成的一个单项式分别对应于 D 中与

$\mathbf{u}$ =(1，1，.....，1)。第一个纤维包含满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0$ 的$\mathbf{v} \in D$对应的单项式$\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$，其为

$$f(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{\substack{1 \le i,j \le d \\ i \ne j}} x_i x_j^{-1}.$$

第二个纤维，对应于位置 $\mathbf{v} \in D$，其中 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 1$ 是（一个单项式的倍数）

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{1 \le i \le d} x_i.$$

因为

$$(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \ldots x_d^{-1}) g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (d-1),$$

我们有，非零单项式 $d-1$ 是 Per(X) 的一个 S-纤维。

注 2. 未来的研究仍需确定，对于 *Lee* 球$D = B_2^d$， f_D 的 S-纤维是否会为所有$(d-1)$维子空间 S生成一个非零单项式。如果确实如此，那么 $D = B_2^d$ 只能容许强周期铺砌，从而证明对于半径为2的 *Lee* 球，弱 *Golomb-Welch* 猜想与强 *Golomb-Welch*猜想等价。

请注意，我们的方法表明，某些子移位只能包含强周期构型。这并不意味着这些子移位中必然存在任何元素——子移位也可能是空的。例如，已知例5中考虑的 Lee 球$D = B_2^d$在 $d \le 5$这些情形下不能铺砌 $\mathbb{Z}^d$，因此例5在这些情形中讨论的是空子移位!

例 6. 继续考虑维数为 $d = 3$的半径为2的 Lee 球 $D = B_2^3$，如图 2 所示。我们来证明，对于每个平面 $S = \langle \mathbf{u} \rangle^{\perp}$， S-纤维 f_D都会生成一个非零单项式。这意味着 $\mathbb{Z}^3$ 被 D 铺砌的合法铺砌都是强周期的。然而，正如上文所指出的，不存在由 D 铺砌的合法铺砌，因此这个推论意义不大。但更广泛地说，该结果意味着所有被 f_D周期化的构型 c 都是强周期的，而不仅仅是由 D铺砌的铺砌。

令$\mathbf{u}$ =(a， b， c)。根据 D的对称性，不妨设 $a \ge b \ge c \ge 0$。基于 a、 b 和 c，进行如下分类讨论:

• 如果 $a > b \ge c \ge 0$，那么$\mathbf{v}$ =(2，0， 0)是 D中唯一满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 2a$的元素，因此$\mathbf{x_v}$ $= x_1^2$ 给出了一个单项式 S-纤维。

• 如果 $a = b > c > 0$ 我们取 f_D 中对应于 D 与 $\mathbf{u}$ 的内积为 $2a$ 和 $a + c$ 的位置的两个 S-纤维。第一个纤维包含单项式 $\mathbf{x_v}$，其中 $\mathbf{v} \in D$满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 2a$，它是.....的（一个单项式倍数）

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2,$$

而第二个纤维对应于满足 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = a + c$ 的位置 $\mathbf{v} \in D$，它是（.....的一个单项式倍数）

$$g(\mathbf{x}) = x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

它们的线性组合 $f(\mathbf{x}) - x_1 x_3^{-1} g(\mathbf{x}) = x_2^2$ 是一个单项式。

• 如果 $a = b > c = 0$，那么我们需要三个纤维，分别对应内积值 $2a$、 a 和 0。这些纤维是（单项式倍数）

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \\ g(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 x_3^{-1} + x_2 x_3^{-1}, \\ h(\mathbf{x}) &= x_3^2 + x_3 + 1 + x_3^{-1} + x_3^{-2} + x_1 x_2^{-1} + x_1^{-1} x_2. \end{aligned}$$

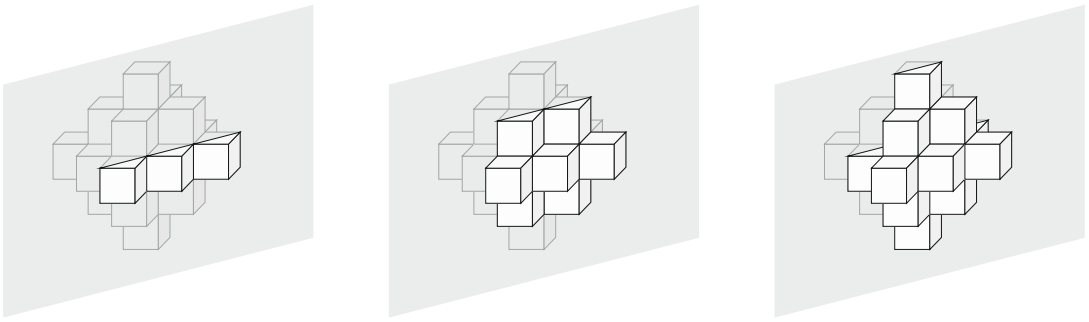


图 5：在 $a = b > c = 0$ 的例 6 中，切过 f、 g 和 h 纤维的三个平面。

见图 5。将这些纤维线性组合后，我们得到纤维

$$p(\mathbf{x}) = x_1^{-2}(1 + x_3 + x_3^2)f(\mathbf{x}) - x_1^{-2}x_2x_3g(\mathbf{x}) = 1 + x_3 + x_3^2,$$

然后进一步

$$h(\mathbf{x}) - (1 + x_3^{-2})p(\mathbf{x}) - x_1^{-1}x_2^{-1}f(\mathbf{x}) = -2,$$

一个非零单项式。

- 情形已在例5中演示。

最后，我们对二维情形 $d = 2$作一些说明。在这种情况下，我们用来推断构型强周期性的工具，本质上是利用湮灭子理想和周期化理想的结构在 [5, 6]中得到证明的。对于一维线性子空间 $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ，非单项式 S-纤维被称为直线多项式，因为它们至少含有两个单项式，且所有单项式都沿同一直线排列。对于任意二维构型c，周期化理想 $\mathbf{Per}(c)$ 已知是一个主理想 $\langle \phi_1\phi_2 \cdots \phi_m \rangle$，由直线多项式的乘积 ϕ_i [5, 6]生成。如果 c 有一个周期化子 f ，且该周期化子在任何方向上都没有直线多项式因子，那么由 $f \in \langle \phi_1\phi_2 \cdots \phi_m \rangle$ 我们得到 $m = 0$，从而 $\mathbf{Per}(c) = \langle 1 \rangle$，这意味着 c 是强周期的。在 [4] 中指出，无需借助 $\mathbf{Per}(c)$ 的结构，也可以证明这一事实；只需注意到 f 和定理 1 所保证的特殊湮灭子 $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_m} - 1)$没有任何公因子，因为 f 没有直线多项式因子，而 g 的所有不可约因子都是直线多项式。由此可知， f 和 g 存在非零线性组合，其中两个变量之一已被消去。（这些线性组合分别由 f 和g 关于变量 x_1 和 x_2的结式给出。）因此，存在不含变量 x_1 或 x_2的非零湮灭子，这意味着 c 在水平方向和垂直方向上具有周期性，即具有强周期性。

本文为这一事实提供了第三种证明：没有直线多项式因子的周期化子意味着二维构型具有强周期性。本文的证明有一个优点，即可推广至高维。不过需要注意的是，在高维情形中，不能用（$d-1$）维的 S纤维没有公因子来表述这一结论，而应表述为 S纤维生成单项式 1，即生成整个环。由于直线多项式本质上是单变量劳朗多项式，在二维情形中这两个条件等价：一组单变量劳朗多项式生成 1，当且仅当这些多项式没有非平凡公因子。但对于含有两个或更多变量的多项式，这一结论不再成立。（考虑$x-1$和 $y-1$：它们没有公因子，但由于它们有一个公共零点 $x = 1$、 $y = 1$，因此无法将 1 表示为它们的线性组合。）

5 结论

我们讨论了一种根据多维构型的湮灭子或周期化子推断其强周期性的方法。该方法将 [5, 6, 4] 中使用的二维方法推广到了任意维数 $d > 2$。事实上，这种新方法基于湮灭子或周期化子所满足的一个更一般的条件，该条件可以推出多维子移位在给定方向上的扩张性。随后，我们利用一个众所周知的事实：在所有方向上都具有扩张性，意味着子移位中的元素具有强周期性。

我们通过若干例子展示了这种方法，这些例子设定为用单个瓦片的平移副本铺砌 $\mathbb{Z}^d$。著名的 Golomb-Welch 猜想可以在这一背景下表述，我们也给出了与该猜想相关的例子。未来一个值得研究的问题是，我们的方法能否证明该猜想的弱变体与强变体等价，即证明所有由半径为 $d \geq 2$ 的 Lee 球构成的铺砌都是强周期的。在我们考察的所有情形中，从 Lee 球提取的纤维生成了单项式 1。

参考文献

[1] J. Kari 和 M. Szabados. 对 Nivat猜想的一种代数几何方法. In*ICALP 2015*论文集, 第二部分, 《计算机科学讲义》第9135卷, pages 273–285, 2015.[2] M. Nivat. 在第24届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 1997）上的特邀报告, 1997.[3] R. Greenfeld 和 T. Tao. 周期铺砌猜想的一个反例, 2022.[4] Elias Heikkil¨a、Pyry Herva 和 Jarkko Kari. 关于二维网格的完美覆盖. In Volker Diekert 和 Mikhail V. Volkov, editors, 语言理论的发展——第*26*届国际会议 *DLT 2022*，美国佛罗里达州坦帕，*2022*年*5*月*9*日至*13*日，论文集, 《计算机科学讲义》第13257卷, pages 152– 163. Springer, 2022.[5] J. Kari 和 M. Szabados. 对 Nivat猜想的一种代数几何方法.《信息与计算》, 271:104481, 2020.[6] J. Kari. 平面的低复杂度铺砌. In 形式系统描述复杂性——第*21*届*IFIP WG 1.02*国际会议, *DCFS 2019*, 《计算机科学讲义》第11612卷, pages 35–45. 施普林格, 2019.[7] Mike Boyle 和 Douglas Lind. 扩张子动力系统.《美国数学会汇刊》, 349(1):55–102, 1997.[8] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert.《元胞自动机与群》.《施普林格数学专著》. 施普林格柏林海德堡 , 2010.[9] S. W. Golomb 和 L. R. Welch. Lee 度量中的完美码与多格骨牌的铺砌.《暹罗应用数学杂志》, 18:302–317, 1970.[10] P. Horak 和 D. Kim. Golomb–Welch猜想的50年.《*IEEE*信息论汇刊》, 64(4):3048–3061, 2018.[11] J. C. Lagarias 和 Y. Wang. 用一个铺砖的平移像铺砌直线.《数学创见》, 124:341–365, 1996.[12] S. Bhattacharya. $\mathbb{Z}^2$的铺砌的周期性与可判定性.《美国数学杂志》, 142:255–266, 2016.[13] R. Greenfeld 和 T. Tao. $\mathbb{Z}^d$中平移铺砌的结构.《离散分析》, 2021.[14] M. Szegedy. 用有限簇铺砌无限网格的算法. 第*39*届计算机科学基础年度研讨会论文集（目录号 *98CB36280*）, pages 137–145, 1998.

[15] V. Cyr 和B. Kra. 非扩张的 $\mathbb{Z}^2$子动力系统与 Nivat猜想. 《美国数学会汇刊》, 367(9):6487–6537, 2015.[16] A. Ballier、B. Durand 和 E. Jeandal. 铺砌的结构方面. In Susanne Albers 和 Pascal Weil, editors, 第*25*届计算机科学理论方面国际研讨会, 《莱布尼茨国际信息学会议论文集》（LIPIcs）第1卷, pages 61–72, 德国达格施图尔, 2008. 达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心.