arXiv:2301.06906v1 [quant-ph] 13 Jan 2023

量子信息几何中的指数 Orlicz 空间

Anna Jenˇcov´a 斯洛伐克科学院数学研究所

2023年1月18日

摘要

我们回顾了在冯·诺依曼代数上所有忠实正规正泛函的集合上构造量子版本的指数统计流形的方法。该构造基于态扰动的相对熵方法。我们构造了指数 Orlicz 空间的量子版本，并讨论了该空间及其相对于 Kosaki L_p-空间的对偶空间的性质。我们证明，所构造的流形具有满足勾股关系的典范散度。我们还证明，该流形结构在充分信道作用下保持不变。

1 引言

信息几何的一项基础性成就是，Pistone 和 Sempi 严谨地将参数统计模型推广到了非参数情形， [28], 他们在与给定概率测度等价的概率测度集上构造了巴拿赫流形结构。该流形结构基于与指数 Young 函数相关联的 Orlicz 空间 $\Phi(x) = \cosh(x) - 1$。此后，这一理论在许多研究中得到了进一步发展，例如参见 [7, 27]。在这一构造中，矩母函数及其共轭函数——Kullback–Leibler 散度（相对熵）——的性质发挥着核心作用。

要获得 Pistone-Sempi 构造的完整量子版本，就需要在一般（σ-有限）冯·诺依曼代数的忠实正规态集上引入类似的巴拿赫流形结构。问题在于，现有的量子奥利兹空间版本要么仅适用于半有限情形（例如[1, 21]），要么在技术上相当复杂（[22]）；而且，如何基于这些空间在状态集上引入指数结构尚不明确。

在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上有界算子代数 $B(\mathcal{H})$ 中采用态的扰动的另一种方法见于 [11, 30]。这里的流形以某类（无界）扰动算子空间为模型，并赋予其巴拿赫空间结构。在 [30], 中，巴拿赫空间由自由能泛函构造而成，可视为经典累积量母函数的对应物。

这一思想启发了相关研究 [15, 16], ，其中提出了关于冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 在忠实正规态 ρ 下的指数 Orlicz 空间的定义，

该定义采用相对熵方法来处理态扰动。其优点在于直接基于相对熵 $S(\cdot\|\cdot)$ 及其性质。特别是，所有满足 $S(\omega\|\rho) < \infty$ 的正规正线性泛函组成的集合 $\mathcal{P}_\rho$ ，被视为所构造的指数 Orlicz 空间之对偶空间中的一个生成锥，因此可以通过浸入巴拿赫空间，在冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$ 的正规态上引入一种与相对熵相容的流形结构。此外，通过用指数 Orlicz 空间中的元素扰动态 ρ ，可以得到指数流形结构；该流形的连通分支包含于 $\mathcal{P}_\rho$ 中。

本文回顾了 [15, 16]中定义的指数 Orlicz 空间及其对偶空间的构造，并以更简洁、精确的形式给出证明。我们利用共轭杨函数，明确地将对偶空间确定为一个 Orlicz 空间。我们说明所构造的空间与 Kosaki L_p-空间之间的关系。与[5]中的方法类似，我们在忠实正线性泛函的正锥上，而非态上引入流形结构。我们在该流形上定义了满足广义勾股关系的典范散度。最后，我们证明这些结构在充分信道下的不变性，这对应于经典信息几何中重要的不变性性质。

2 指数 Orlicz 空间

本节回顾指数 Orlicz 空间的定义 [15]，将其对偶构造为一个 Orlicz 空间，并研究这些空间的一些性质。

2.1 Orlicz 空间的一般构造

设 X 是一个实向量空间。若函数 $\Phi: X \to [0,\infty]$ 满足以下条件，则称其为杨函数：

(i) Φ 是凸的；(ii) 对所有 $x \in X$ ， $\Phi(x) = \Phi(-x)$，且 $\Phi(0) = 0$；(iii) 若 $x \neq 0$ ，则 $\lim_{t\to\infty} \Phi(tx) = \infty$。

对于杨函数 Φ，令 $C_\Phi := \{x \in X, \Phi(x) \leq 1\}$ ，并令 $V_\Phi := \{x \in \Phi(x) \ \exists s > 0,\ \Phi(sx) < \infty\}$。集合 C_Φ 是绝对凸的，而 $V_\Phi = \bigcup_n nC_\Phi$ 是有效定义域 $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{x \in X,\ \Phi(x) < \infty\}$ 的线性张成。我们可以在 V_Φ 上定义一个范数，将 C_Φ 的闵可夫斯基泛函作为该范数：

$$\|x\|_\Phi := \inf\{\lambda > 0,\ \Phi(\frac{x}{\lambda}) \leq 1\}, \qquad x \in V_\Phi.$$

关于此范数补全 V_Φ 后得到的空间记作 B_Φ。

设 $(\Omega\ \Sigma, \mu)$ 为测度空间， X 为可测函数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 构成的向量空间。令 φ 为 $\mathbb{R}$ 上的杨函数，并设

$$\Phi_\varphi(f) := \int_\Omega \varphi(|f|)d\mu.$$

那么，B_{Φ_φ} 就是经典 Orlicz 空间 $L^\varphi(\Omega\ \Sigma, \mu)$，而 $\|\cdot\|_{\Phi_\varphi}$ 是 Luxemburg-Nakano 范数，[29]。再举一个例子，设 $\mathcal{M}$ 是一个半有限冯·诺依曼

代数，带有忠实正规半有限迹 τ。设 X 是自伴 τ-可测算子构成的向量空间，并令 $\Phi_\varphi(x) = \tau(\varphi(|x|))$，则得到 Orlicz 空间 $L^\varphi(\mathcal{M},\tau)$，[21]。文献 [1], 还通过这种构造定义了相对于忠实正规态的 Orlicz 空间的一个版本 ρ。另请参见 [22] 关于带有忠实正规权的一般冯·诺依曼代数的情形。

命题 [15, Prop. 2] 已证明，若 X 是巴拿赫空间且 Φ 连续，则 X 连续嵌入于 B_Φ。共轭函数 Φ^* 仍是一个杨函数，满足 $V_{\Phi^*} = \mathrm{Dom}(\Phi^*) = B_{\Phi^*}$，并且存在连续嵌入$B_{\Phi^*} \sqsubseteq X^*$。此外，$B_{\Phi^*} = B_\Phi^*$，且范数等价。

2.2 基本设定与记号

我们简要介绍冯·诺依曼代数和非交换 L_p-空间的设定。有关这些主题的概述，请参阅 [13]。

设 $\mathcal{M}$ 是一个（σ-有限）冯·诺依曼代数。我们用 $\mathcal{M}^*$ 表示 $\mathcal{M}$ 的对偶空间，用 $\mathcal{M}_*$ 表示预对偶，它由 $\mathcal{M}^*$ 中的正规泛函组成。这些空间中的正锥分别记为 $\mathcal{M}^+$、$(\mathcal{M}^*)^+$ 和 $\mathcal{M}_*^+$。若对任意 $a \in \mathcal{M}^+$，$\rho \in \mathcal{M}_*^+$ 满足 $\rho(a) = 0$，则有 $a = 0$，称元素 $\rho \in \mathcal{M}_*^+$ 忠实。

对于 $1 \le p \le \infty$，我们将 $\mathcal{M}$ 上的 Haagerup L_p-空间记作 $L_p(\mathcal{M})$，其范数记作 $\|\cdot\|_p$。我们将使用 $L_\infty(\mathcal{M})$ 与 $\mathcal{M}$ 的等同，以及 $L_1(\mathcal{M})$ 与 $\mathcal{M}_*$ 的等同。设 $h_\psi \in L_1(\mathcal{M})$ 是与 $\psi \in \mathcal{M}_*$ 对应的元素，则可在 $L_1(\mathcal{M})$ 中通过 $\mathrm{Tr}\,[h_\psi] = \psi(1)$ 定义迹。

对于满足 $1/p + 1/q = 1/r$ 和 $h \in L_p(\mathcal{M})$、$k \in L_q(\mathcal{M})$ 的 p、q、$r \ge 1$，我们有 $hk \in L_r(\mathcal{M})$，并且 H¨older 不等式成立：

$$\|hk\|_r \le \|h\|_p \|k\|_q.$$

对于 $1 \le p < \infty$ 和 $1/p + 1/q = 1$，空间 $L_q(\mathcal{M})$ 可与对偶空间 $L_p(\mathcal{M})^*$ 等同，其对偶性由下式给出

$$\langle h, k \rangle = \mathrm{Tr}\,[hk], \qquad h \in L_p(\mathcal{M}),\ k \in L_q(\mathcal{M}).$$

空间 $L_2(\mathcal{M})$ 是一个希尔伯特空间，其内积为

$$(h, k) = \mathrm{Tr}\,[h^* k], \qquad h, k \in L_2(\mathcal{M}).$$

我们将使用左作用 $\lambda(a)$ 在 $L_2(\mathcal{M})$ 上表示 $\mathcal{M}$：对于 $a \in \mathcal{M}$ 和 $h \in L_2(\mathcal{M})$，有 $h \mapsto ah$。四元组 $(\lambda(\mathcal{M})\ L_2(\mathcal{M})\ L_2(\mathcal{M})^+, J)$，其中 $L_2(\mathcal{M})^+$ 是 $L_2(\mathcal{M})$ 中正算子的锥，而 J 由 $Jh = h^*$ 定义，是 $\mathcal{M}$ ([33, 定理 3.6], [13, 定理 9.29]) 的标准形。关于标准形的更多内容，请参见 [32] 或 [13, 第 3] 节。任意正正规泛函 $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$ 在锥 $L_2(\mathcal{M})^+$ 中都有唯一的向量代表 $h_\varphi^{1/2}$，即

$$\varphi(a) = (h_\varphi^{1/2}, a h_\varphi^{1/2}), \qquad a \in \mathcal{M}.$$

现在固定一个忠实正正规泛函 $\rho \in \mathcal{M}_*^+$。关于 ρ [19] 的（对称）Kosaki L_p-空间通过复插值定义，利用连续嵌入

$$i_{\infty,\rho} : \mathcal{M} \to L_1(\mathcal{M}), \qquad a \mapsto h_\rho^{1/2} a h_\rho^{1/2}. \tag{1}$$

我们将像 $i_{\infty,\rho}(\mathcal{M})$ 记为 $L_\infty(\mathcal{M},\rho)$，其范数记为 $\|i_{\infty,\rho}(a)\|_{\infty,\rho}=\|a\|$。插值空间 $C_{1/p}(L_\infty(\mathcal{M},\rho)\ L_1(\mathcal{M}))$ [6] 记为 $L_p(\mathcal{M},\rho)$，范数记为 $\|\cdot\|_{p,\rho}$。映射

$$i_{p,\rho}:L_p(\mathcal{M})\to L_1(\mathcal{M}),\qquad k\mapsto h_\rho^{1/2q}kh_\rho^{1/2q} \tag{2}$$

其中 $1/p+1/q=1$ 是从 $L_p(\mathcal{M})$ 到 $L_p(\mathcal{M},\rho)$ 的等距同构，对于 $1\leq p\leq\infty$。根据复插值空间的性质，对于 $1\leq p'\leq p\leq\infty$，我们有连续嵌入 $L_p(\mathcal{M},\rho)\sqsubseteq L_{p'}(\mathcal{M},\rho)\sqsubseteq L_1(\mathcal{M})$。对于 $1\leq p<\infty$ 和 $1/p+1/q=1$，我们有 $L_q(\mathcal{M},\rho)\simeq L_p(\mathcal{M},\rho)^*$，其对偶性由下式给出

$$\langle\, i_{p,\rho}(k),i_{q,\rho}(l)\,\rangle=\mathrm{Tr}\,[kl],\qquad k\in L_p(\mathcal{M}),\ l\in L_q(\mathcal{M}).$$

另请注意，Kosaki L_p-空间可以按照第 2.1节中的方法构造，其中$X=\mathcal{M}^s:=\{a=a^*\in\mathcal{M}\}$ 和 $\Phi(a)=\|h_\rho^{1/2p}ah_\rho^{1/2p}\|_p$，[35]。

设 $\mathcal{N}$ 是另一个冯·诺依曼代数，并设 $T:L_1(\mathcal{M})\to L_1(\mathcal{N})$ 是一个保迹的正线性映射。这样的映射称为信道。T 的伴随是一个正的幺正规映射 $T^*:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$。

设 ρ 是 $\mathcal{M}_*^+$ 中的忠实元。可以看出（[17, 第 3.3] 节），若 $e=s(T(\rho))$ 是 $T(\rho)$ 的支撑投影，则对所有 $\omega\in L_1(\mathcal{M})$，有 $T(\omega)=eT(\omega)e$，因此我们可以将 $\mathcal{N}$ 替换为 $e\mathcal{N}e$，从而假设 $T(\rho)$ 是忠实的。

命题1. *[17]* 对任意 $1\leq p\leq\infty$，信道 T 在 $L_p(\mathcal{M},\rho)$ 上的限制是压缩映射 $L_p(\mathcal{M},\rho)\to L_p(\mathcal{N},T(\rho))$。

在 $p=\infty$ 的情形下，存在一个正线性映射 $T_\rho^*:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$，定义如下：

$$T(h_\rho^{1/2}ah_\rho^{1/2})=T(\rho)^{1/2}T_\rho^*(a)T(\rho)^{1/2},\qquad a\in\mathcal{M}.$$

映射 T_ρ^* 由 [25] 引入，称为 T 关于 ρ 的 Petz 对偶。另已证明，T_ρ^* 是保单位且正规的；此外，对任意 n，它是 n-正的当且仅当 T 是 n-正的。设 $T_\rho:L_1(\mathcal{N})\to L_1(\mathcal{M})$ 是 T_ρ^* 的预伴随。则 $T_\rho\circ T(\rho)=\rho$，且 T_ρ 的 Petz 对偶是 T^*。

2.3 相对熵及相关泛函

ω、$\rho\in\mathcal{M}_*^+$ [3, 23] 的 Araki 相对熵使用相对模算子 $\Delta_{\rho,\,\omega}(=\Delta_{\rho,\,h_\omega^{1/2}})$ 定义为

$$S(\omega\|\rho)=\begin{cases}-\langle\,\log(\Delta_{\rho,\omega})h_\omega^{1/2},h_\omega^{1/2}\,\rangle & \text{if } s(\omega)\leq s(\rho)\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里，$s(\rho)$ 表示 ρ 的支撑投影。或者，我们有如下由 Kosaki [20] 给出的变分公式：

$$S(\omega\|\rho)=\sup_n\sup\left\{\omega(1)\log n-\int_{1/n}^{\infty}(\omega(y(t)^*y(t))+t^{-1}\rho(x(t)x(t)^*)\frac{dt}{t}\right\} \tag{3}$$

此处第二个上确界取遍所有有限值域的阶梯函数 $x:(1/n,\infty)\to L$，$y(t)=1-x(t)$，且 L 是 $\mathcal{M}$ 中包含 1 的子空间，在强*算子拓扑下稠密。

相对熵 S 是一个联合凸函数 $S:\ \mathcal{M}_*^+ \times \mathcal{M}_*^+ \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，并且关于 $\sigma(\mathcal{M}_*,\ \mathcal{M})$-拓扑下半连续。此外，$S$关于第一个变量严格凸，这可由恒等式推得 [23,命题 5。22]

$$S(\omega\|\rho)+\sum_i S(\omega_i\|\omega)=\sum_i S(\omega_i\|\rho),\quad \omega=\sum_{i=1}^k \omega_i,\ \omega\in\mathcal{M}_*^+. \tag{4}$$

另请注意，由于 $\omega_i \le \omega$ 在（4）中，我们有 $S(\omega_i\|\omega) \le S(\omega_i\|\omega_i) < \infty$ 对所有 i成立。详情请参见[23, 第 5] 节，其中还列出了 S的其他重要性质。下一个陈述展示了它与 Kosaki L_p-空间的关系。

命题2. *[14, 17]* 设 $\omega,\rho\in\mathcal{M}_*^+$满足 $h_\omega\in L_p(\mathcal{M},\rho)$，其中某个 $p>1$。那么，函数 $f:(1,p]\to\mathbb{R}$,定义为

$$f(\alpha):=\frac{1}{\alpha-1}\log\frac{\|h_\omega\|_{\alpha,\rho}^\alpha}{\omega(1)}$$

是递增的，并且 $\lim_{\alpha\downarrow 1} f(\alpha)=\frac{1}{\omega(1)}S(\omega\|\rho)$。

利用 Kosaki变分公式（3），可以直接将相对熵推广为函数 $S:(\mathcal{M}^*)^+\times(\mathcal{M}^*)^+\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$。

命题 3. 设 $\rho\in\mathcal{M}_*^+$且令 $\omega\in(\mathcal{M}^*)^+$。若 $\omega\notin\mathcal{M}_*^+$，则 $S(\omega\|\rho)=\infty$。

证明。 [23] 对于（$\mathcal{M}^*$）$^+$中的元素，还可以用另一种方式定义相对熵。令（π_u, $\mathcal{H}_u$）为 $\mathcal{M}$ 的泛表示，并令 $\bar{\mathcal{M}}=\pi_u(\mathcal{M})''\cong\mathcal{M}^{**}$ 为$\mathcal{M}$ [31]的泛包络冯·诺依曼代数。于是，对偶空间 $\omega\in\mathcal{M}^*$ 中的每个元素都有唯一的延拓，它是 $\mathcal{M}$ 上的正规泛函 $\bar{\omega}$，且 $\mathcal{M}^*$ 是 $\mathcal{M}$的预对偶。此外，存在一个中心投影$z_0\in\bar{\mathcal{M}}$，使得 $\mathcal{M}_*=\mathcal{M}^*z_0$。对于 ω、$\rho\in$（$\mathcal{M}^*$）$^+$，我们可以定义相对熵 $\bar{S}$：（$\mathcal{M}^*$）$^+\times$（$\mathcal{M}^*$）$^+\to\mathbb{R}$ 如下：

$$\bar{S}(\omega\|\rho):=S_{\bar{\mathcal{M}}}(\bar{\omega}\|\bar{\rho})$$

（这里，$S_{\bar{\mathcal{M}}}$ 是相对于冯·诺依曼代数 $\mathcal{M}$计算的）。现在注意，在 $S_{\bar{\mathcal{M}}}$ 和 $L=\mathcal{M}$ 的变分公式中，对于S，我们可以使用 $L=\pi_u(\mathcal{M})$，这意味着 $\bar{S}=S$。令 $\rho\in\mathcal{M}_*^+$、$\omega\in$（$\mathcal{M}^*$）$^+$，并假设 ω 不是正规的。那么必有 $\bar{\omega}(1-z_0)>0$，但 $\bar{\rho}(1-z_0)=0$，因此 $s(\bar{\omega})\not\le s(\bar{\rho})$。根据相对熵的定义，这意味着 $S(\omega\|\rho)=\infty$。

□

从现在起，固定一个忠实正规泛函 $\rho\in\mathcal{M}_*^+$。令 $\mathcal{M}^s$ 表示 $\mathcal{M}$ 中自伴元构成的实向量子空间。那么 $\mathcal{M}^s$ 在 $\mathcal{M}$ 中是闭的，其巴拿赫空间对偶是由所有满足 $\varphi(a^*)=\varphi(a)$ 的线性泛函 $\varphi\in\mathcal{M}^*$ 构成的空间 $(\mathcal{M}^*)^s$，$a\in\mathcal{M}$。注意，我们有 $(\mathcal{M}^*)^s=(\mathcal{M}^*)^+-(\mathcal{M}^*)^+$。类似地，$\mathcal{M}^s$ 和 $\mathcal{M}_*^s=\mathcal{M}_*^+-\mathcal{M}_*^+$ 的预对偶是 $\mathcal{M}_*^s=(\mathcal{M}^*)^s\cap\mathcal{M}_*$。定义函数 $F_\rho:(\mathcal{M}^*)^s\to\mathbb{R}$ 如下：

$$F_\rho(\omega):=\begin{cases}S(\omega\|\rho)-\omega(1) & \text{if } \omega\in(\mathcal{M}^*)^+\\ \infty & \text{otherwise.}\end{cases}$$

我们还定义集合

$$\mathcal{S}_C := \{\omega \in (\mathcal{M}^*)^s,\ F_\rho(\omega) \le C\},\ C \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{P}_\rho := \{\omega \in (\mathcal{M}^*)^s,\ F_\rho(\omega) < \infty\}.$$

换句话说， $\mathcal{P}_\rho$ 是 F_ρ的有效定义域。注意，根据命题 3，我们有 $\mathcal{S}_C \subseteq \mathcal{P}_\rho \subseteq \mathcal{M}_*^+$。下一个命题列出了函数 F_ρ 及这些集合的一些重要性质。

命题 4. (i) $F_\rho : (\mathcal{M}^*)^s \to \mathbb{R}$ 在 $\sigma((\mathcal{M}^*)^s, \mathcal{M}^s)$ 拓扑下是严格凸且下半连续的。

(ii) 我们有以下不等式

$$F_\rho(\omega) \ge \omega(1)(\log \frac{\omega(1)}{\rho(1)} - 1) \ge -\rho(1).$$

当且仅当存在某个 $\lambda \ge 0$ 使得 $\omega = \lambda\rho$ 时，第一个不等式取等号。特别地，当且仅当 $\omega = \rho$ 时， $F_\rho(\omega) = -\rho(1)$。

(iii) 对任意 $C \in \mathbb{R}$， $\mathcal{S}_C$ 在 $\sigma((\mathcal{M}^*)^s, \mathcal{M}^s)$ 和 $\sigma(\mathcal{M}_*^s, \mathcal{M}^s)$ 拓扑下均为凸且紧的。

(iv) 集合 $\mathcal{P}_\rho$ 是锥 $\mathcal{M}_*^+$ 的一个面，其中包含任意 $1 < p \le \infty$ 的 $L_p(\mathcal{M}, \rho)^+$.

证明。 (i)-(ii) 的证明由变分公式及 S 的性质可得。为证明 (iii)，令 $\omega \in \mathcal{S}_C$，则由 (ii) 可知，

$$\omega(1)(\log \frac{\omega(1)}{\rho(1)} - 1) \le F_\rho(\omega) \le C.$$

这意味着 $\omega(1) = \|\omega\|$ 在 $\mathcal{S}_C$ 上必定有界。由于 $\sigma((\mathcal{M}^*)^s, \mathcal{M}^s)$ 是 $(\mathcal{M}^*)^s$ 上的弱*拓扑，且 $\mathcal{S}_C$ 由 (i) 可知是闭的，因此 $\mathcal{S}_C$ 是紧的。但 $\mathcal{S}_C \subseteq \mathcal{M}_*^s$，所以它在 $\sigma(\mathcal{M}_*^s, \mathcal{M}^s)$-拓扑下也紧。

为证明最后的结论 (iv)，令 $\omega = \sum_i \omega_i$ 对某个 $\omega_i \in \mathcal{M}_*^+$成立。于是由 (4)

$$F_\rho(\omega) + \sum_i S(\omega_i \| \omega) = \sum_i F_\rho(\omega_i).$$

由于 $S(\omega_i\|\omega) < \infty$， $\omega \in \mathcal{P}_\rho$ 当且仅当所有 $\omega_i \in \mathcal{P}_\rho$，因此 $\mathcal{P}_\rho$ 是 $\mathcal{M}_*^+$的一个面。事实是 $L_p(\mathcal{M}, \rho)^+ \subseteq \mathcal{P}_\rho$ 对于 $1 < p \le \infty$ 由命题 2可得。 □

我们还有以下重要的单调性。

命题 5. 设 $T: L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 是一个信道。则

$$F_{T(\rho)}(T(\omega)) \le F_\rho(\omega), \qquad \omega \in (\mathcal{M}^*)^s.$$

证明。 该结论由 [18, 第 3.1 节和定理 4 得出。1]。 □

接下来，我们研究相对于对偶对 $((\mathcal{M}^*)^s, \mathcal{M}^s)$ 的 F_ρ 的勒让德-芬切尔共轭函数；关于凸函数的勒让德-芬切尔对偶性，更多信息见例如 [10] 或 [34] 。具体而言，我们将定义 C_ρ 在 $\mathcal{M}^s$ 上的函数如下

$$C_\rho(a) := F_\rho^*(a) = \sup_{\omega \in (\mathcal{M}^*)^s} \omega(a) - F_\rho(\omega), \qquad a \in \mathcal{M}^s. \tag{5}$$

以下结果的证明可由 [23, 第 12] 节得到。另见 [8, 26]。为方便读者，我们汇总相关论证。

定理 1。 式 (5) 中的上确界在唯一的泛函 $\rho^a \in \mathcal{M}_*^+$处取得。元素 ρ^a 是忠实的，且 $C_\rho(a) = \rho^a(1)$。此外，等式成立：

$$\omega(a) + S(\omega\|\rho^a) = S(\omega\|\rho), \qquad \omega \in \mathcal{M}_*^+ \tag{6}$$

以及链式法则

$$\rho^{a+b} = (\rho^a)^b, \quad C_\rho(a+b) = C_{\rho^a}(b), \qquad a, b \in \mathcal{M}^s. \tag{7}$$

证明。令 $a \in \mathcal{M}^s$，并令 $\xi(a)$ 表示扰动向量 [2]

$$\xi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_n} dt_n \Delta_\rho^{t_n} a \Delta_\rho^{t_{n-1}-t_n} a \ldots \Delta_\rho^{t_1-t_2} a h_\rho^{1/2}.$$

那么 $\xi(a) \in L_2(\mathcal{M})^+$ 以及由 ($\rho^a \in \mathcal{M}_*^+$给出的泛函 $\xi(a) \cdot \xi(a)$) 是忠实的。根据[4, 定理 3。10]， ρ^a 满足 (6)。因此，对于 $\omega \in \mathcal{P}_\rho$,

$$\omega(a) - F_\rho(\omega) = -F_{\rho^a}(\omega) \leq \rho^a(1),$$

等号成立当且仅当 $\omega = \rho^a$ (命题 4 (iii))。将 ρ 替换为 ρ^b 代入 (6)，得到

$$\omega(a+b) + S(\omega\|(\rho^b)^a) = \omega(b) + S(\omega\|\rho^b) = S(\omega\|\rho),$$

这意味着链式法则 (7)。

□

例 1。令 $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的有界算子代数。泛函 ρ 可表示为密度算子 $\rho \in B(\mathcal{H})^+$，其迹有限，满足 $\rho(a) = \mathrm{tr}[\rho a]$（tr 是 $B(\mathcal{H})$ 上的通常迹）。可以看出，在这种情况下，

$$\rho^a = \exp(\log \rho + a).$$

以下结果由 [10, 命题 5.3 和 5.4] 得出。

引理 1. 函数 C_ρ 是盖托可微的，在$b \in \mathcal{M}^s$ 处的盖托导数为 $C'_\rho(b) = \rho^b$. 对于 a, $b \in \mathcal{M}^s$，有

$$C_\rho(a) - C_\rho(b) \geq \rho^b(a-b).$$

2.4 指数杨函数及其对偶空间

现在，我们在巴拿赫空间 $\mathcal{M}^s$和$(\mathcal{M}^*)^s$上引入一对共轭的杨函数。定义

$$\Phi_\rho(a) := \frac{1}{2}(C_\rho(a) + C_\rho(-a)) - \rho(1), \qquad a \in \mathcal{M}^s.$$
$$\Psi_\rho(\psi) := \frac{1}{2} \inf_{\substack{\omega_\pm \in (\mathcal{M}^*)^+ \\ 2\psi = \omega_+ - \omega_-}} [F_\rho(\omega_+) + F_\rho(\omega_-)] + \rho(1), \qquad \psi \in (\mathcal{M}^*)^s.$$

文献 [15] 已证明， Φ_ρ 是一个严格凸且连续的杨函数$\mathcal{M}^s \to \mathbb{R}$。现在我们来考察 Ψ_ρ的性质。

引理 2. Ψ_ρ 是定义域为 ^{s}的 $(\mathcal{M}^*)$ 上的严格凸且弱*下半连续函数

$$\mathrm{Dom}(\Psi_\rho) = \{\psi \in (\mathcal{M}^*)^s,\ \Psi_\rho(\psi) < \infty\} = \mathcal{P}_\rho - \mathcal{P}_\rho \subseteq \mathcal{M}_*^s.$$

证明. 显然，当且仅当存在某个 $\omega_{\pm} \in \mathcal{P}_{\rho}$， $\Psi_{\rho}(\psi)$ 才是有限的。此外， F_{ρ} 的严格凸性意味着 Ψ_{ρ} 也严格凸。对于最后一个结论，我们需要证明，对于任意 $c>0$，集合 $\{\psi \in (\mathcal{M}^*)^s, \Psi_{\rho}(\psi) \leq c\}$是弱*闭的。假设 (ψ_i) 是 $(\mathcal{M}^*)^s$ 中的一个网，使得 $\Psi_{\rho}(\psi_i) \leq c$，且 $\psi_i \to \psi$ 在弱*拓扑下收敛。对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及所有 i，都存在一些泛函 $\psi_i^{\varepsilon, \pm} \in \mathcal{M}_*^+$ 使得 $2\psi_i = \psi_i^{\varepsilon,+} - \psi_i^{\varepsilon,-}$ 并且

$$\frac{1}{2}[F_{\rho}(\psi_{i,+}^{\varepsilon}) + F_{\rho}(\psi_{i,-}^{\varepsilon})] + \rho(1) \leq c + \varepsilon.$$

根据命题 4 (ii)，我们得到 $\psi_i^{\varepsilon, \pm} \in \mathcal{S}_{K_\epsilon}$ 且 $K_\epsilon = 2(c+\varepsilon) - \rho(1)$。根据命题 4 (iii)，$\mathcal{S}_{K_\varepsilon}$ 是弱*紧的，因此存在一个子网 (ψ_j) 和某个$\psi_{\pm}^{\varepsilon} \in \mathcal{M}_*^+$，使得 $\psi_j^{\varepsilon, \pm} \to \psi_{\pm}^{\varepsilon}$。因此我们有 $\psi_+^{\varepsilon} - \psi_-^{\varepsilon} = \lim \psi_j^{\varepsilon,+} - \psi_j^{\varepsilon,-} = 2\psi$，并由 F_{ρ}的弱*下半连续性，

$$\Psi_{\rho}(\psi) \leq \frac{1}{2}[F_{\rho}(\psi_+^{\varepsilon}) + F_{\rho}(\psi_-^{\varepsilon})] + \rho(1) \leq \liminf_j \frac{1}{2}[F_{\rho}(\psi_{j,+}^{\varepsilon}) + F_{\rho}(\psi_{j,-}^{\varepsilon})] + \rho(1) \leq c + \epsilon.$$

由于这对所有 $\varepsilon > 0$ 都成立，我们有 $\Psi_{\rho}(\psi) \leq c$。

□

命题 6. Ψ_{ρ} 是相对于对偶对 $(\mathcal{M}^s, (\mathcal{M}^*)^s)$ 的 Φ_{ρ} 的勒让德-芬切尔共轭。特别地，Ψ_{ρ} 是定义在 $(\mathcal{M}^s)^*$ 上的杨函数。

证明。由于 F_{ρ} 是弱*下半连续的，我们可知 $C_{\rho}^* = F_{\rho}^{**} = F_{\rho}$。设$D_{\rho}$ 由 $D_{\rho}(a) = C_{\rho}(-a)$（对 $a \in \mathcal{M}^s$）定义，则对 $\psi \in (\mathcal{M}^s)^*$，有 $D_{\rho}^*(\psi) = C_{\rho}^*(-\psi)$。根据 [34, Cor. 2.3.5] 以及 Ψ_{ρ} 是弱*下半连续这一事实，我们得到$\Psi_{\rho} = \Phi_{\rho}^*$，因此由 [15, 引理3.4]可知， Ψ_{ρ} 是定义在 $(\mathcal{M}^*)^s$ 上的杨函数。

□

2.5 空间 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$ 和 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$

利用杨函数 Φ_{ρ} 和 Ψ_{ρ}，我们按照第 2.1 节的方式构造相应的巴拿赫空间 $B_{\Phi_{\rho}}$ 和 $B_{\Psi_{\rho}}$。以下结论是第 2.4 节的结果以及 [15,命题 2]的推论。

命题 7。我们有 $V_{\Phi_{\rho}} = \mathcal{M}^s$ 和 $B_{\Psi_{\rho}} = V_{\Psi_{\rho}} = \mathcal{P}_{\rho} - \mathcal{P}_{\rho}$。此外，$B_{\Psi_{\rho}} = B_{\Phi_{\rho}}^*$（范数等价），并且有连续嵌入

$$\mathcal{M}^s \sqsubseteq B_{\Phi_{\rho}}, \qquad B_{\Psi_{\rho}} \sqsubseteq \mathcal{M}_*^s.$$

现在来看 $\mathcal{M}$ 是交换的情形。由于 ρ 忠实， $\mathcal{M}$ 可以等同于空间 $L_{\infty}(\Omega, \Sigma, \rho)$，其中 ρ 是 (Ω, Σ) 上的有限测度。令 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \cosh(x) - 1$，并令 ψ 为它的共轭函数，则 ψ 满足 Δ_2 条件 $\psi(2u) \leq K\psi(u)$，其中某个 $K > 0$ 存在。指数 Orlicz 空间 $L^{\phi}(\Omega, \Sigma, \rho)$ 是 $L^{\psi}(\Omega, \Sigma, \rho)$ 的对偶空间。由于测度 ρ 有限，我们有 $L_{\infty}(X, \Sigma, \rho) \subseteq L^{\phi}(X, \Sigma, \rho)$，并且可以看出，由我们的构造得到的范数与 $L^{\phi}(X, \Sigma, \rho)$ 中的 Luxemburg-Nakano 范数一致。因此，$B_{\Phi_{\rho}}$ 与 $L^{\phi}(X, \Sigma, \rho)$ 中 $L_{\infty}(X, \Sigma, \rho)$ 的闭包 $E^{\phi}(X, \Sigma, \rho)$ 一致。于是我们有

$$L^{\psi}(X, \Sigma, \rho) = E^{\phi}(X, \Sigma, \rho)^* = B_{\Psi_{\rho}}$$

并且 $L^{\phi}(X, \Sigma, \rho)$ 与二次对偶 $B_{\Phi_{\rho}}^{**}$ 重合，详情见 [29]。这些事实也在 [12] 中有所指出。因此，将 L^{ψ} 的非交换对应空间认定为 $B_{\Psi_{\rho}}$ 是合理的，而非交换指数

奥利奇空间应认定为 $B_{\Phi_\rho}^{**} = B_{\Psi_\rho}^{*}$。不过，我们将使用更易处理的空间 B_{Φ_ρ}，一般而言，它是 $B_{\Phi_\rho}^{**}$ 的真子集。

记 $E_{\exp}(\mathcal{M},\rho) := B_{\Phi_\rho}$，其范数为 $\|\cdot\|_{\exp,\ \rho} := \|\cdot\|_{\Phi_\rho}$，以及 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho) := B_{\Psi_\rho}$，其范数为 $\|\cdot\|_{\log,\ \rho} := \|\cdot\|_{\Psi_\rho}$。在本节余下部分，我们将 $\mathcal{M}_*$ 与 $L_1(\mathcal{M})$ 等同，因此 $\mathcal{M}_*^s$ 等同于由自伴元构成的空间 $L_1(\mathcal{M})^s$，而 $\mathcal{M}_*^+$等同于 $L_1(\mathcal{M})$ 中由正元素构成的锥 $L_1(\mathcal{M})^+$。

定理 2. (i) $L_{\log}(\mathcal{M},\rho) = \mathcal{P}_\rho - \mathcal{P}_\rho$ 在 $L_1(\mathcal{M})^s$ 中稠密，并且有

$$L_p(\mathcal{M},\rho)^s \sqsubseteq L_{\log}(\mathcal{M},\rho) \sqsubseteq L_1(\mathcal{M})^s, \qquad 1 < p \leq \infty.$$

(ii) $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)^+ := L_{\log}(\mathcal{M},\rho) \cap L_1(\mathcal{M})^+ = \mathcal{P}_\rho$ 是 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 中的闭凸锥。(iii) 设 $\psi \in L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$。那么 $\|\psi\|_{\log,\ \rho} \leq 1$ 当且仅当存在某些 $\omega_\pm \in \mathcal{P}_\rho$使得 $\psi = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$，并且

$$F_\rho(\omega_+) + F_\rho(\omega_-) \leq 2 - 2\rho(1).$$

证明。由命题 4 (iv) 可知，对于任意 $p > 1$，$\mathrm{Dom}(\Psi_\rho) = \mathcal{P}_\rho - \mathcal{P}_\rho$ 包含 $L_p(\mathcal{M},\rho)$ 的自伴部分 $L_p(\mathcal{M},\rho)^s = L_p(\mathcal{M},\rho)^+ - L_p(\mathcal{M},\rho)^+$，因此 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 在 $L_1(\mathcal{M})^s$ 中稠密。这也表明 Ψ_ρ 在$L_p(\mathcal{M},\rho)^s$上取有限值。由于 $L_p(\mathcal{M},\rho)^s \sqsubseteq L_1(\mathcal{M})^s$，且 Ψ_ρ 在 $L_1(\mathcal{M})^s$ 上下半连续，Ψ_ρ 的限制定义了一个凸且下半连续的杨函数$L_p(\mathcal{M},\rho)^s \to \mathbb{R}$，根据 [10, Cor. 2.5]，它必为连续函数。设 B 为相应的巴拿赫空间，则根据构造，B 是$L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$中的闭子空间；再次利用 [15, Prop. 2], ，我们有

$$L_p(\mathcal{M},\rho)^s \sqsubseteq B \sqsubseteq L_{\log}(\mathcal{M},\rho).$$

现在令 $\omega \in L_{\log}(\mathcal{M},\rho)^+$，则存在一些 $\omega_\pm \in \mathcal{P}_\rho$使得 $2\omega = \omega_+ - \omega_-$。由此可得 $2\omega + \omega_- = \omega_+ \in \mathcal{P}_\rho$。根据命题 4 (iv)，这意味着我们也必须有 $\omega \in \mathcal{P}_\rho$。锥在 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 中是闭的，这一事实由到 $L_1(\mathcal{M})^s$ 的连续嵌入得出。

假设$\|\psi\|_{\log,\rho} \leq 1$，等价地，$\Psi_\rho(\psi) \leq 1$。那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，都存在一些 $\omega_{\pm,n} \in \mathcal{P}_\rho$使得 $\psi = \frac{1}{2}(\omega_{+,n} - \omega_{-,n})$ 且 $F_\rho(\omega_{+,n}) + F_\rho(\omega_{-,n}) \leq 2(1+1/n-\rho(1))$。因此可得 $\omega_{\pm,n} \in \mathcal{S}_C$，对某个 C 及所有 n 均成立。根据命题4 (iii)，存在一个子序列使得 $\omega_{\pm,n_k} \to \omega_\pm$ 在 $\sigma(\mathcal{M}_*,\mathcal{M})$-拓扑下收敛。因此 $\psi = \frac{1}{2}(\omega_+ - \omega_-)$，并且由下半连续性，

$$F_\rho(\omega_+) + F_\rho(\omega_-) \leq \liminf F_\rho(\omega_{+,n_k}) + F_\rho(\omega_{-,n_k}) \leq 2 - 2\rho(1).$$

反过来显然成立。

□

现在回顾由（1）给出的嵌入 $i_{\infty,\ \rho} : \mathcal{M}^s \to L_1(\mathcal{M})^s$。注意，对于所有 $1 \leq p \leq \infty$，$i_{\infty,\ \rho}(\mathcal{M}^s) = L_\infty(\mathcal{M},\rho)^s \sqsubseteq L_p(\mathcal{M},\rho)^s$。

定理 3. 对于任意 $1 \leq p < \infty$, $i_{\infty,\ \rho}$ 可扩展为一个连续嵌入

$$i_{\exp,\rho} : E_{\exp}(\mathcal{M},\rho) \to L_p(\mathcal{M},\rho)$$

且 $i_{\exp,\ \rho}(E_{\exp}(\mathcal{M},\rho))$ 在 $L_p(\mathcal{M},\rho)^s$ 中稠密。

证明。 设 $a \in \mathcal{M}^s$， $1 \leq p < \infty$ 并设 $1/p + 1/q = 1$。由定理 2，我们有$L_q(\mathcal{M}, \rho)^s \sqsubseteq L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$。因此，对于任意 $k \in L_q(\mathcal{M}, \rho)$，我们有

$$\langle i_{\infty,\rho}(a), k \rangle = \mathrm{Tr}\,[ak] \leq \|a\|_{\exp,\rho}\|k\|_{\log,\rho}.$$

由于$\|k\|_{\log,\rho} \leq M\|k\|_q$, ρ对于某个 $M > 0$ 成立，这表明 $i_{\infty,\rho}: \mathcal{M}^s \to L_p(\mathcal{M}, \rho)^s$关于 $\mathcal{M}^s$ 中的范数$\|\cdot\|_{\exp,\rho}$是连续的，因此存在唯一的连续延拓 $i_{\exp,\rho}$。其余部分由以下事实得出：对于任意 p，$i_{\infty,\rho}(\mathcal{M}^s) = L_\infty(\mathcal{M}, \rho)^s$在 $L_p(\mathcal{M}, \rho)^s$ 中稠密。

□

总之，对于 $1 < p < \infty$，我们有：

$$L_\infty(\mathcal{M}, \rho) \sqsubseteq E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \sqsubseteq L_p(\mathcal{M}, \rho) \sqsubseteq L_{\log}(\mathcal{M}, \rho) \sqsubseteq L_1(\mathcal{M}). \tag{8}$$

注意，经典指数Orlicz空间也具有类似性质，[27,命题 8]。

命题8. 设 $T: L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 为一个信道。将 T 限制在 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 上，是从 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 到 $\to L_{\log}(\mathcal{N}, T(\rho))$ 的一个压缩映射。其伴随 T^* 可唯一延拓为从 $E_{\exp}(\mathcal{N}, T(\rho))$ 到 $\to E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$ 的一个压缩映射。

证明。 根据命题 5，我们有 $F_{T(\rho)}(T(\omega)) \leq F_\rho(\omega)$。令 $\psi \in L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$，则

$$\begin{aligned}\Psi_{T(\rho)}(T(\psi)) &\leq \frac{1}{2} \inf_{2\psi=\psi_+-\psi_-} (F_{T(\rho)}(T(\psi_+)) + F_{T(\rho)}(T(\psi_-))) + T(\rho)(1) \\ &\leq \frac{1}{2} \inf_{2\psi=\psi_+-\psi_-} (F_\rho(\psi_+) + F_\rho(\psi_-)) + \rho(1) = \Psi_\rho(\psi).\end{aligned}$$

根据 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 的定义和对偶性，这就得出了该结论。

□

3 量子指数流形

令 $\tilde{\mathcal{F}}$ 表示锥 $\mathcal{M}_*^+$中所有忠实泛函的集合。本节中，我们将利用定理 1向 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$ 中的扰动进行扩展，从而在 $\mathcal{F}$上构造巴拿赫流形结构。

3.1 扩展扰动

由于相对熵函数 F_ρ 的有效定义域是正锥$\mathcal{P}_\rho = L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)^+$，因此可将其视为定义在 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 上的严格凸函数。本节将研究函数 F_ρ 及其关于对偶对 $(L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho))$ 的共轭函数。

我们首先注意到 F_ρ 作为定义在 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 上的函数是弱*下半连续的。事实上，由于 $\mathcal{M}^s$ 在 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$ 中范数稠密， $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 上的弱*拓扑与范数有界子集上 $\sigma(\mathcal{M}_*^s, \mathcal{M}^s)$-拓扑的限制相同。根据命题 4 (iii)，由下面的引理即可得出结论。

引理3. 对每个 $C \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}_C$ 在 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 中都是范数有界的。

证明. 我们可以假设 $C \geq -\rho(1)$，否则 $\mathcal{S}_C$ 为空。若 $\omega \in \mathcal{S}_C$，则$\omega \in \mathcal{M}_*^+$，并且我们有（利用分解 $2(\frac{1}{2}\omega) = \omega - 0$）

$$\Psi_\rho(\frac{1}{2}\omega) \leq \frac{1}{2}F_\rho(\omega) + \rho(1) \leq \frac{1}{2}C + \rho(1).$$

若 $\Psi_\rho(\frac{1}{2}\omega) \leq 1$，则$\|\omega\|_{\log,\ \rho} \leq 2$；否则，根据 [15,引理3.3]，有 $\|\frac{1}{2}\omega\|_{\log,\ \rho} \leq \Psi_\rho(\frac{1}{2}\omega) \leq \frac{1}{2}C + \rho(1)$。因此 $\|\omega\|_{\log,\ \rho} \leq \max\{2, C + 2\rho(1)\}$。

□

现在回顾勒让德-芬切尔共轭函数 C_ρ，其定义见（5）。容易看出，C_ρ 在关于$\|\cdot\|_{\exp}$的单位球上是有界的，ρ 属于$\mathcal{M}^s$。根据 [10, 推论2.4], ，这意味着 C_ρ 关于该范数连续（事实上是局部利普希茨连续）。因此，C_ρ 可唯一延拓为连续函数 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \to \mathbb{R}$，并仍记作 C_ρ。下一个结果表明，这个延拓是 F_ρ 关于对偶对 $(L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)\ E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho))$ 的共轭函数。

定理 4. 对于 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$，我们有

$$C_\rho(h) = \sup_{\omega \in L_{\log}(\mathcal{M},\rho)} \omega(h) - F_\rho(\omega).$$

上确界在唯一的泛函 $\rho^h \in \mathcal{P}_\rho$ 处取得。此外，ρ^h 是忠实的，$C_\rho(h) = \rho^h(1)$，且映射 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \ni h \mapsto \rho^h \in \mathcal{M}_*$ 是范数到范数连续的。

证明。令 $a_n \in \mathcal{M}^s$ 为满足 $\|h - a_n\|_\rho \to 0$的序列。令 $a = 2a_n$并令 $b = a_n$ 代入引理 1，可得不等式

$$C_\rho(2a_n) - C_\rho(a_n) \geq \rho^{a_n}(a_n), \qquad \forall n.$$

由 C_ρ 的连续性可知，$\{\rho^{a_n}(a_n)\}_n$ 是有界序列，因此

$$\{F_\rho(\rho^{a_n}) = \rho^{a_n}(a_n) - C_\rho(a_n)\}_n$$

有界，因此对某个 K，$\rho^{a_n} \in \mathcal{S}_K$。由命题 4 (iii)，我们可以假设（取一个子序列）存在某个 $\sigma \in \mathcal{S}_K$，使得 $\rho^{a_n} \to \sigma$ 在 $\sigma(\mathcal{M}_*, \mathcal{M})$-拓扑下收敛。由于 $\mathcal{S}_K$ 在 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 中范数有界（引理3），且弱*拓扑在 $\mathcal{S}_K$ 上与 $\sigma(\mathcal{M}_*, \mathcal{M})$-拓扑一致，因此可见 $\rho^{a_n}(a_n) \to \sigma(h)$。对于 $\omega \in \mathcal{P}_\rho$，根据 ρ^{a_n} 的定义及下半连续性，我们得到

$$\begin{aligned}\omega(h) - F_\rho(\omega) &= \lim_n(\omega(a_n) - F_\rho(\omega)) \leq \lim_n C_\rho(a_n) = \lim_n(\rho^{a_n}(a_n) - F_\rho(\rho^{a_n})) \\ &\leq \sigma(h) - F_\rho(\sigma).\end{aligned}$$

由此可知，σ 是 $\omega(h) - F_\rho(\omega)$的最大化者；又由于 F_ρ的严格凸性，该最大化者是唯一的。我们记 $\rho^h := \sigma$。注意，我们有 $C_\rho(h) = \lim_n C_\rho(a_n) = \lim_n \rho^{a_n}(1) = \rho^h(1)$，上述计算还意味着

$$C_\rho(h) \leq \rho^h(h) - F_\rho(\rho^h) = \sup_{\omega \in \mathcal{P}_\rho} \omega(h) - F_\rho(\omega).$$

另一方面，利用（6）以及 S 的下半连续性，我们得到：

$$S(\omega\|\rho) = \lim_n(\omega(a_n) + S(\omega\|\rho^{a_n})) \geq \omega(h) + S(\omega\|\rho^h), \quad \forall \omega \in \mathcal{P}_\rho. \tag{9}$$

令 $\omega = \rho$，可知 $S(\rho\|\rho^h)$ 有限，因此 ρ^h 必须是忠实的。此外，令 $\omega = \rho^h$，可得 $\rho^h(h) - F_\rho(\rho^h) = \rho^h(1) = C_\rho(h)$。我们还得到 $\lim_n S(\rho^h\|\rho^{a_n}) = 0$，因此 $\rho^{a_n} \to \rho^h$ 在 $\mathcal{M}_*$ 中强收敛。显然，这可推广到 $E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$ 中的所有序列 $h_n \to h$。

□

现在将定理 1 中的等式扩展到 $E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$ 中的所有元素。

引理 4。设 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$。

(i) 对于 $a \in \mathcal{M}^s$，我们有链式法则

$$\rho^{h+a} = (\rho^h)^a, \qquad C_\rho(h+a) = C_{\rho^h}(a).$$

(ii) 范数 $\|\cdot\|_{\exp,\ \rho^h}$ 关于 $\|\cdot\|_{\exp,\ \rho}$ 在 $\mathcal{M}^s$ 上是连续的。

证明。设 $a_n \in \mathcal{M}^s$ 是满足 $\|h - a_n\|_{\exp,\ \rho} \to 0$ 的一个序列。对于 $a \in \mathcal{M}^s$，我们有 $C_\rho(a_n + a) \to C_\rho(h+a)$，并且根据定理 4，$\rho^{a_n+a} \to \rho^{h+a}$ 强收敛。由于 $\rho^{a_n} \to \rho^h$ 也强收敛，因此根据 [9, 定理 1。1]，由链式法则（7），我们得到

$$\rho^{h+a} = (\rho^h)^a, \qquad C_\rho(h+a) = \rho^{h+a}(1) = (\rho^h)^a(1) = C_{\rho^h}(a).$$

为证明 (ii)，注意到 (i) 蕴含

$$\Phi_{\rho^h}(a) = \frac{1}{2}(C_\rho(h+a) - C_\rho(h) + C_\rho(h-a) - C_\rho(h)), \qquad a \in \mathcal{M}^s.$$

根据 C_ρ 的连续性，这表明存在某个 $\delta > 0$，使得只要 $\|a\|_{\exp,\ \rho} < \delta$，就有 $\Phi_{\rho^h}(a) < 1$，从而证明了 (ii)。

□

定理 5。设 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$。则

$$\omega(h) + S(\omega\|\rho^h) = S(\omega\|\rho), \qquad \omega \in \mathcal{P}_\rho. \tag{10}$$

此外，$E_{\exp}(\mathcal{M},\rho) = E_{\exp}(\mathcal{M},\rho^h)$（等价范数），并且我们有链式法则

$$\rho^{h+k} = (\rho^h)^k, \qquad C_\rho(h+k) = C_{\rho^h}(k), \qquad h,k \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho). \tag{11}$$

证明。设 $a_n \in \mathcal{M}^s$, $\|a_n - h\|_{\exp,\ \rho} \to 0$。由引理 4 和定理 4，我们还可得 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho^h)$ 且 $\|a_n - h\|_{\exp,\ \rho^h} \to 0$。此外，

$$(\rho^h)^{-h} = \lim_n (\rho^h)^{-a_n} = \lim_n \rho^{h-a_n} = \rho^0 = \rho.$$

将 ρ 替换为 ρ^h，并将 h替换为 $-h$ 在 (9) 中，我们得到

$$S(\omega\|\rho^h) \geq -\omega(h) + S(\omega\|\rho).$$

结合（9），可得（10）。同样，在引理4（ii）中作此替换，可得 $E_{\exp}(\mathcal{M},\ \rho) = E_{\exp}(\mathcal{M},\ \rho^h)$，且二者范数等价。现在，从（10）出发，完全按照定理 1的证明，即可证明链式法则（11）。

□

推论 1. 关于对偶对 $(L_{\log}(\mathcal{M},\rho)\ E_{\exp}(\mathcal{M},\rho))$，有 $C_\rho = F_\rho^*$ 和 $F_\rho = C_\rho^*$。此外，C_ρ 在 $E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$ 上严格凸且盖托可微，其盖托导数为 $C_\rho'(h) = \rho^h$，并且 $h \mapsto \rho^h$ 定义了一个单射且范数到弱*连续映射 $E_{\exp}(\mathcal{M},\rho) \to L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$。

证明。第一部分由定理 4 以及 F_ρ 的弱*下半连续性可直接得出。由此可得 C_ρ 的可微性：[10, 命题 5。3]映射 $h \mapsto \rho^h$ 的单射性由定理 5 得出，这也意味着 C_ρ 严格凸（例如参见 [15, 定理 7 的证明3]）。关于连续性，可参见例如 [34]。

□

3.2 $\mathcal{M}_*^+$ 中的指数族

设 $E \subseteq E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$ 为一个闭子空间。集合

$$\mathcal{E}_\rho(E) := \{\rho^h,\ h \in E\}$$

将称为（在 ρ 处的）指数族。集合 $\mathcal{E}_\rho := \mathcal{E}_\rho(E_{\exp}(\mathcal{M},\ \rho))$ 将称为（在 ρ 处的）完整指数族。为刻画 $\mathcal{E}_\rho$ 中的元素，请注意，由（4）

$$\omega \mapsto S(\omega\|\rho) - S(\omega\|\sigma)$$

定义了一个仿射映射 $h_{\sigma,\ \rho}\colon \mathcal{P}_\rho \to [-\infty,\infty)$，使得 $h_{\sigma,\ \rho}(0) = 0$。

推论 2. 设 $\sigma \in \mathcal{M}_*^+$。那么，存在某个 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$ 使得 $\sigma = \rho^h$，当且仅当存在某个 $C > -\rho(1)$，使得 $h_{\sigma,\rho}$ 有界，且在集合 $\mathcal{S}_C$ 上关于 $\sigma(\mathcal{M}_*,\mathcal{M})$ 连续。在此情形下，h 与 $h_{\sigma,\rho}$ 在 $\mathcal{P}_\rho$ 上重合。

证明。假设对于 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$，$\sigma = \rho^h$，那么由定理 5 可知，对于 $\omega \in \mathcal{P}_\rho$，$h(\omega) = h_{\sigma,\ \rho}(\omega)$。由于 $\sigma(\mathcal{M}_*,\mathcal{M})$-拓扑与 $\mathcal{S}_C$ 上的弱*拓扑重合，结论由 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho) = E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)^*$ 得出。

反过来，假设 $h_{\sigma,\rho}$ 对某个 $C > -\rho(1)$ 在 $\mathcal{S}_C$ 上具有上述性质。那么对任意 $C' \in \mathbb{R}$ 也同样成立，因为对于 $C' > C$，存在某个 $t \in [0,1]$，使得对于任意 $\omega \in \mathcal{S}_{C'}$，$F_\rho(t\omega + (1-t)\rho)$ $\leq tC' - (1-t)\rho(1) \leq C$。

现在注意到，由定理 2 (iii) 和命题 4 (ii)，$L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 中的单位球是 $\mathcal{S}_C - \mathcal{S}_C$ 的子集，对于 $C = 2\rho(1) - 1$，因此 $h_{\sigma,\rho}$ 可延拓为 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 上的有界线性映射。此外，由于在 $L_{\log}(\mathcal{M},\rho)$ 的有界子集上，弱*拓扑与 $\sigma(\mathcal{M}_*,\mathcal{M})$-拓扑一致，该延拓是弱*连续的，因而定义了一个元素 $h \in E_{\exp}(\mathcal{M},\rho)$。对于 $\omega \in \mathcal{P}_\rho$，我们得到

$$\omega(h) - F_\rho(\omega) = -F_\sigma(\omega) \leq \sigma(1) = \sigma(h) - F_\rho(\sigma),$$

因此 $\sigma = \rho^h$。

□

˜现在我们可以使用参数化 $\mathcal{F}$ 在 $h \mapsto \rho^h$ 上引入巴拿赫流形结构，其方式与 [15] 中忠实态集合的处理类似。对于 $\rho \in \tilde{\mathcal{F}}$，令 V_ρ 为 $E_{\exp}$（$\mathcal{M}$，ρ）中的开单位球，并令 s_ρ：$V_\rho \to \tilde{\mathcal{F}}$ 映射 $h \mapsto \rho^h$。我们˜在 C^∞ 上构造一个 $\mathcal{F}$ 图册如下：

$$\{(U_\rho, e_\rho),\ \rho \in \tilde{\mathcal{F}}\}$$

其中 $U_\rho = s_\rho(V_\rho)$ 且 $e_\rho = s_\rho^{-1}|_{U_\rho}$。要证明这确实是一个 C^∞ 图册，只需注意：如果 $U_{\rho_1} \cap U_{\rho_2} \neq \emptyset$，那么对于某个 $k = E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho_2)$，必有 $\rho_1 = \rho_2^k$，并且

$$e_{\phi_1}(U_{\rho_1} \cap U_{\rho_2}) = \{h_1 \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho_1),\ \|h_1\|_{\exp,\rho_1} < 1,\ \|h_1 + k\|_{\exp,\rho_2} < 1\}.$$

证明过程与[15], 类似，利用两个范数等价这一点$\|\cdot\|_{\exp,\ \rho_1}$ 以及$\|\cdot\|_{\exp,\ \rho_2}$即可。显然， $\mathcal{F}$ 的连通分支~恰好是完整指数族 $\mathcal{E}_\rho$, $\rho \in \mathcal{F}$。

3.3 典范散度

利用推论1，我们可以在连通分~支 $\mathcal{E}_\rho$， $\rho \in \mathcal{F}$中引入典范散度，它是与 C_ρ相关联的 Bregman散度：

$$D_\rho(h\|k) := C_\rho(h) - C_\rho(k) - \langle C'_\rho(k), h - k \rangle, \qquad h, k \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho).$$

~定理6。设 $\rho \in \mathcal{F}$, $h, k \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$。则

(i) $D_\rho(h\|k) = S(\rho^k\|\rho^h) - (\rho^k - \rho^h)(1)$。(ii) $D_\rho(h\|k) \geq 0$，当且仅当 $h = k$ 时取等号。(iii) 函数 D_ρ：$E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \times E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \to \mathbb{R}$ 是联合连续的，并且关于第一个变量严格凸且盖托可微。

(iv) D_ρ 满足广义勾股关系

$$D(h\|k) + D(k\|l) = D(h\|l) + (\rho^k - \rho^l)(k - h), \quad h, k, l \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho).$$

证明。由定理 5 可得陈述 (i)。其余部分由 Bregman散度的性质推出。更具体地说，(ii) 可由 [10,Prop. 5.4] 以及 C_ρ的严格凸性得出。为证明联合连续性，设 h_n 和 k_n 是两个序列，使得 $h_n \to h$, $k_n \to k$ 属于 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$。由推论 1，我们有$C'_\rho(k) = \rho^k$。由于 $k \mapsto \rho^k$ 是范数到弱 * 连续的，因此 ρ^{k_n} 是 $L_{\log}(\mathcal{M}, \rho)$ 中的有界序列，这意味着 $\rho^{k_n}(h_n - k_n) \to \rho^k(h - k)$；于是由 C_ρ的连续性可得 $D_\rho(\rho^{k_n}\|\rho^{h_n}) \to D_\rho(\rho^h\|\rho^k)$。(iii) 的其余部分由 C_ρ的性质可直接得出。由定义可知勾股关系 (iv) 显然成立。

□

3.4 充分信道与不变性

设 $\mathcal{E}$ 是 $\mathcal{M}_*^+$ 中非零元素的子集，且 $T: L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 是一个信道。若存在信道 $S: L_1(\mathcal{N}) \to L_1(\mathcal{M})$ 使得 T 对 $\mathcal{E}$ 充分，则称 T 对 $\mathcal{E}$ 充分。

$$S \circ T(\sigma) = \sigma, \qquad \forall \sigma \in \mathcal{E}.$$

在这种情况下， S 将称为 $\mathcal{E}$ 上 T 的恢复信道。

充分信道的概念由 Petz 提出 [24, 25]，当 $\mathcal{E}$ 是状态集时。由于信道是保迹的，因此将其推广到正泛函是显而易见的。

定理7（[24, 25]）。设 T 为2-正信道，并假设存在某个忠实元 $\rho \in \mathcal{E}$ 使得 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}_\rho$。以下各项等价。

（i） T 对 $\mathcal{E}$是充分的；（ii） $S(T(\sigma)\|T(\rho)) = S(\sigma\|\rho)$；（iii）相对于 ρ 的 T 的Petz 对偶 T_ρ 是 $\mathcal{E}$的恢复信道。

˜我们将研究这样的情形：对于某个 $\rho \in \mathcal{F}$， $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\rho(E)$ 是一个指数族。此时，上述定理的条件均得到满足。

˜定理 8. 设 $\rho \in \mathcal{F}$, $h \in E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$。设 T: $L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 是一个 2-正信道，并设 T_ρ 是关于 ρ 的 T 的 Petz 对偶。以下各条件等价。

(i) T 关于 $\{\rho, \rho^h\}$ 是充分的。(ii) 对某个 $h_0 \in E_{\exp}(\mathcal{N}, T(\rho))$ 和 $h = T^*(h_0)$， $T(\rho^h) = T(\rho)^{h_0}$。(iii) $T^* \circ T_\rho^*(h) = h$。

证明. 由于 T_ρ^* 定义了一个映射 $E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho) \to E_{\exp}(\mathcal{N}, T(\rho))$，因此对于 $\omega_0 \in \mathcal{P}_{T(\rho)}$，我们有：

$$\begin{aligned}\omega_0(T_\rho^*(h)) - F_{T(\rho)}(\omega_0) &= F_\rho(T_\rho(\omega_0)) - F_{\rho^h}(T_\rho(\omega_0)) - F_{T(\rho)}(\omega_0) \\ &\le -F_{\rho^h}(T_\rho(\omega_0)) \le \rho^h(1) = C_\rho(h). \end{aligned} \tag{12}$$

这里我们用到了定理5、相对熵的单调性，以及 $\rho = T_\rho \circ T(\rho)$ 这一事实，还有命题 4 (ii)。假设 (i) 成立，则由定理 8 (ii) 和 (iii) 可得

$$T(\rho^h)(T_\rho^*(h)) - F_{T(\rho)}(T(\rho^h)) = \rho^h(h) - F_\rho(\rho^h) = C_\rho(h).$$

由此可知，(12) 中的最大值在 $\omega_0 = T(\rho^h)$ 处取得，因此 $T(\rho^h) = T(\rho)^{h_0}$，其中 $h_0 = T_\rho^*(h)$。通过类似的计算，我们得到

$$\omega(T^*(h_0)) - F_\rho(\omega) \le C_{T(\rho)}(h_0), \qquad \forall \omega \in \mathcal{P}_\rho$$

并且当 $\omega = \rho^h$ 时等号成立。因此 $\rho^h = \rho^{T^*(h_0)}$，从而由映射 $h \mapsto \rho^h$ 的单射性可得 $h = T^*(h_0) = T^*(T_\rho^*(h))$。这证明了 (i) 蕴含 (ii) 和 (iii)。假设 (ii) 成立，则有

$$\begin{aligned} C_\rho(h) &= \rho^h(1) = T(\rho^h)(1) = T(\rho)^{h_0}(1) = C_{T(\rho)}(h_0) = T(\rho^h)(h_0) - F_{T(\rho)}(T(\rho^h)) \\ &= \rho^h(h) - F_{T(\rho)}(T(\rho^h)) \ge \rho^h(h) - F_\rho(\rho^h) = C_\rho(h). \end{aligned}$$

由定理 8 (ii) 可得 (i)。最后，由 (iii) 和 $T_\rho \circ T(\rho) = \rho$，我们有 e

$$\begin{aligned} C_\rho(h) &\ge \sup_{\omega_0 \in \mathcal{P}_{T(\rho)}} T_\rho(\omega_0)(h) - F_\rho(T_\rho(\omega_0)) \ge \sup_{\omega_0} \omega_0(T_\rho^*(h)) - F_{T(\rho)}(\omega_0) \\ &\ge T(\rho^h)(T_\rho^*(h)) - F_{T(\rho)}(T(\rho^h)) \ge \rho^h(T^* \circ T_\rho^*(h)) - F_\rho(\rho^h) = C_\rho(h). \end{aligned}$$

这表明 $F_\rho(\rho^h) = F_{T(\rho)}(T(\rho^h))$，由此根据定理 8可得 (i)。

□

推论 3. 设 $\rho \in \tilde{\mathcal{F}}$，并令 $\mathcal{E} = \{\rho^h,\ h \in E_0\}$ 为某个子集 $E_0 \subseteq E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$。令 $E \subseteq E_{\exp}(\mathcal{M}, \rho)$ 为 E_0 的闭线性张成。设 T: $L_1(\mathcal{M}) \to L_1(\mathcal{N})$ 是一个关于 $\mathcal{E}$ 充分的 2-正信道。那么

(i) T 是指数族 $\mathcal{E}_\rho(E)$ 的充分统计量。(ii) $T_\rho^*|_E$是从 E到 $T_\rho^*(E)$ 的等距同构，并且有 $T(\mathcal{E}_\rho(E)) = \mathcal{E}_{T(\rho)}(T_\rho^*(E))$，且 $T(\rho^h) = T(\rho)^{T_\rho^*(h)}$，对于 $h \in E$。

4 结论

˜我们在冯·诺依曼代数上忠实正泛函的集合 $\mathcal{F}$ 上构造了指数流形结构；在交换情形下，该结构与 Pistone-Sempi 构造的一个限制相一致。该流形以 Araki 相对熵及其共轭函数 C_ρ为基础，后者扮演经典理论中的矩母函数的角色。我们阐明了所得结构与 Kosaki L_p 空间之间的关系，并证明了指数流形的不变性。请注意，我们仅证明了函数 C_ρ 是盖托可微的，因此无法获得 Pistone-Sempi 构造的全部效力。尽管如此，该流形仍具有满足广义勾股关系的典范散度。

致谢

本研究得到资助项目 VEGA 1/0142/20 和斯洛伐克研究与发展署资助项目 APVV-20-0069 的支持。

参考文献

[1] M. Al-Rashed 和 B. Zegarlinski. 与态相关联的非交换 Orlicz 空间. Studia Mathematica, 180:199–209, 2007. doi:10.4064/sm180-3-1.[2] H. Araki. 冯·诺依曼代数中忠实正规态的相对哈密顿量. Publ. Res. I. Math. Sci., 9(1):165–209, 1973.[3] H. Araki. 冯·诺依曼代数中态的相对熵 I. Publ. Res. I. Math. Sci., 11(3):809–833, 1976.[4] H. Araki. 冯·诺依曼代数中态的相对熵 II. Publ. Res. I. for Math. Sci., 13(1):173–192, 1977.[5] N. Ay、J. Jost、H. Vˆan Lˆe 和 L. Schwachh¨ofer. 信息几何，第 64 卷. Springer，施阿姆，2017. doi:10.1007/978-3-319-56478-4.[6] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om. 插值空间：导论. Springer，柏林，1976.[7] A. Cena 和 G. Pistone. 指数统计流形. Ann. I. Stat. Math., 59(1):27–56, 2007. doi:10.1007/s10463-006-0096-y.[8] M. J. Donald. 不存在上界的相对哈密顿量. J. Funct. Anal., 91(1):143–173, 1990. doi:10.1016/0022-1236(90)90050-U.[9] M. J. Donald. 连续性与相对哈密顿量. Commun. Math. Phys., 136(3):625–632, 1991.[10] I. Ekeland 和 R. Temam. 凸分析与变分问题，第 28 卷. SIAM，纽约，1999.[11]M. Grasselli 和 R. F. Streater. ε-有界型的量子信息流形. Rep. Math. Phys., 46(3):325–335, 2000. doi:10.1016/S0034-4877(00)90003-X.

[12] M. R. Grasselli. 非参数经典信息几何中的对偶联络. Ann. I. Stat. Math., 62(5):873–896, 2010. doi:10.1007/s10463-008-0191-3. arxiv:math-ph/0104031v1, 2001.[13] F. Hiai. 冯·诺依曼代数精选专题讲座. EMS Press，柏林，2021. doi:10.4171/ELM/32.[14] F. Hiai. 冯·诺依曼代数中的量子 f-散度：量子操作的可逆性. Mathematical Physics Studies. Springer，新加坡，2021. doi:10.1007/978-981-33-4199-9.[15] A. Jenˇcov´a. 非参数量子信息流形的一种构造. J. Funct. Anal., 239(1):1–20, 2006. doi:10.1016/j.jfa.2006.02.007.[16] A. Jenˇcov´a. 关于量子信息流形. 载于《统计学中的代数与几何方法》. 剑桥大学出版社，剑桥，2010. doi:10.1017/CBO9780511642401.[17] A. Jenˇcov´a. R´enyi 相对熵与非交换 L_p-空间. Annales Henri Poincar´e, 19:2513–2542, 2018. doi:10.1007/s00023-018-0683-5.[18] Anna Jenˇcov´a. R´enyi 相对熵与非交换 L_p-空间 II. Annales Henri Poincar´e, 22:3235–3254, 2021. doi:10.1007/s00023-021-01074-9.[19] H. Kosaki. 复插值方法在冯·诺依曼代数中的应用：非交换 L_p-空间. J. Funct. Anal., 56:26–78, 1984. doi:10.1016/0022-1236(84)90025-9.[20] H. Kosaki. 态的相对熵：一个变分表达式. Journal of Operator Theory, 16:335–348, 1986.[21] W. Kunze. 非交换 Orlicz 空间与广义 Arens 代数. Math. Nachr., 147(1):123–138, 1990. doi:10.1002/mana.19901470114.[22] L. E. Labuschagne. Orlicz 空间的一种交叉积方法. P. London Math. Soc., 107(5):965–1003, 2013. doi:10.1112/plms/pdt006.[23] M. Ohya 和 D. Petz. 量子熵及其应用. 计算机科学讲义. Springer-Verlag，柏林，1993.[24] D. Petz. 冯·诺依曼代数中充分子代数与态的相对熵. Commun. Math. Phys., 105(1):123–131, 1986.[25] D. Petz. 冯·诺依曼代数上的信道的充分性. Q. J. Math., 39 (1):97–108, 1988.[26] D. Petz. 相对熵的一个变分表达式. Commun. Math. Phys., 114(2):345–349, 1988.[27] G. Pistone 和 M. Rogantin. 指数统计流形：均值参数、正交性与空间变换 . Bernoulli, 5(4):721–760, 1999. doi:10.1214/aos/1176324311.

[28] G. Pistone 和 C. Sempi. 在与给定概率测度等价的所有概率测度空间上构造无限维几何结构。《统计年鉴》，第 1543–1561 页，1995 年。
doi:10.1214/aos/1176324311。[29] M. M. Rao 和 Z. D. Ren. Orlicz 空间理论。M. Dekker，纽约，1991 年。[30] R. F. Streater. 信息几何中的量子奥利兹空间。《开放系统与信息动力学》，11(4):359–375，2004 年。
doi:10.1007/s11080-004-6626-2。[31]M. Takesaki. 算子代数理论。I，数学科学百科全书第 124 卷。Springer-Verlag，柏林，2002 年。
doi:10.1007/978-1-4612-6188-9。[32]M. Takesaki. 算子代数理论。II，数学科学百科全书第 125 卷。Springer-Verlag，柏林，2003 年。
doi:10.1007/978-3-662-10451-4。[33] M. Terp. L_p 与冯·诺依曼代数相关的空间。讲义，哥本哈根大学，1981 年。[34] C. Zalinescu. 一般向量空间中的凸分析。世界科技出版公司，新加坡，2002 年。[35] A. A. Zolotarev. 关于冯·诺依曼代数上的态的 L_p-空间及插值。《高校数学学报》，26:41–50，1982 年。