具有复杂增材制造节点的空间网格结构双尺度分析与设计

O. Oztoprak*[1]、A. Paolini[2], P. D'Acunto[3], E. Rank[1,4], 和 S. Kollmannsberger[1]

[1]慕尼黑工业大学计算建模与仿真讲席，德国¨SOFiSTiK AG，德国加兴[3]慕尼黑工业大学结构设计教授席，德国[4]慕尼黑工业大学高等研究院，德国

arXiv:2301.06921v1 [cs.CE] 17 Jan 2023

摘要

增材制造（AM）技术的进步，使得生产几何形状复杂且设计可定制的零件成为可能。这种灵活性有利于大型空间网格结构，因为可以针对每个结构节点进行单独设计，以满足特定的力学及其他功能要求。然而，为此类具有不同结构节点的空间框架进行设计和分析，需要高度自动化。在这一过程中，关键环节是将局部三维特征自动集成到一维大尺度模型中。本研究开发了一种双尺度建模方法，以改进具有复杂增材制造节点的空间框架设计及其线弹性分析。基于有限胞元法（FCM）和子结构法，通过自动降维过程对三维节点的力学特性进行数值降维。随后，将降阶后的刚度量组装到一维大尺度模型中，从而实现高效的结构分析。再将一维模型的响应传递至局部模型，以开展完全解析的三维线弹性分析。通过一个简化的梁示例对所提出的方法进行了数值验证。此外，还将该工作流程应用于带有螺栓连接的增材制造节点树冠结构。大型结构的形态基于组合平衡建模框架确定，而局部结构节点的不同设计则通过对设计空间进行生成式探索获得。研究表明，所提出的方法能够有效地自动完成具有复杂且各异结构节点的空间网格结构的设计与分析。

关键词：增材制造，多尺度问题，有限单元法，框架结构 s, 有限元 法

1 引言

增材制造（AM）在设计具有优良特性的高度定制化结构部件时，提供了更大的几何自由度。例如，结构节点已通过增材制造生产，以在保持轻量化的同时实现预期性能 [1]。此类节点可用于张拉整体 [2] 和空间框架结构 [3], ，后者广泛应用于各种工业领域。与采用传统制造技术生产的零件相比，增材制造构件还具有额外优势：其高度定制化的设计能够满足建筑施工不同区域的各种力学要求。

*oguz.oztoprak@tum.de，通讯作者，预印

本提交至 *Engineering Structures* 2023年1月18日

增材制造的诸多优势及近期发展带来的实际影响是，这些零件在大型建造结构中的应用日益增多 [4]。然而，传统的分析与设计方法并不适合将这类设计独特、各不相同的复杂结构部件纳入无缝且高效的工作流程 [5]。本文提出一种方法，旨在工程结构的设计与分析中，更紧密地整合传统结构分析与个性化增材制造零件。

结构工程中一种常见做法是在大型结构的整体分析中简化几何细节，从而以合理的精度实现高效计算。换言之，在基于有限元（FE）的结构分析中，即使不是不可能，要以三维单元对整个结构进行完整细节的空间离散也并不实际。多尺度建模技术通过将大型结构划分为相互关联的较小尺度部件来应对这一挑战，并根据各部件的物理复杂程度对其进行建模。

关于结构多尺度建模的研究相当丰富，根据 [6]大致可分为两类：（a）同步建模和（b）信息传递建模。同步多尺度方法在统一模型中解析现有的几何尺度。同步多尺度方法的一个子类是混合维度建模，其中在单一模型中耦合梁-壳或梁-实体等混合维度有限元。单元界面处的耦合可确保位移协调和应力平衡。为此，可采用多点约束 [7], 拉格朗日乘子 [8, 9], Nitsche方法[10] 或 Arlequin 方法 [11]。利用数学模型叠加的方法 [12, 13] 也可归入这一类，其中解空间 u 分解为局部和全局贡献 u_{local} 和 u_{global}，从而得到 $u = u_{\text{global}} + u_{\text{local}}$。在这种情况下，在局部-全局界面 u_{local} 上施加齐次边界条件可确保解的协调性。另一方面，信息传递方法通常会为精细几何尺度单独建立模型，在一定假设下计算其响应，并将其传递至大尺度模型。基于代表性体积单元（RVE）的数值均匀化技术就属于这类方法，它们进行数值材料表征分析，并将材料响应融入大尺度模型 [14–16]。

本文提出了一种用于增材制造零件空间框架结构设计与线弹性分析的双尺度信息传递方法，特别强调自动化。全局尺度模型假设采用一维线性梁单元，而局部尺度的结构节点则基于完全解析的三维模型进行建模。通过自动化降维流程，对复杂结构节点的相关力学特性进行数值降维，且不受全局尺度配置的影响；这一过程可视为子结构法。降阶后的刚度量沿由局部到全局的方向传递，从而能够高效地进行全局尺度结构分析。随后，将尺度交界处的整体解施加到局部尺度模型上，以分析结构节点的完整三维应力状态。由于有限胞元法（FCM）能够轻松、无缝地处理复杂几何形状，因此本文采用该方法进行局部尺度分析。迭代式工程设计与分析工作流程得益于有限胞元法（FCM），因为它能够减少双尺度方法所需的人工工程工作量。本文通过一个采用增材制造结构节点的树冠结构展示了所提方法的优势。该结构的全局设计是基于组合平衡建模框架 [17]进行找形后得到的。相比之下，局部结构节点采用生成式设计，以便快速探索设计空间中的其他可行设计。

本文的结构安排如下。第2节介绍所提出的双尺度建模方法的核心概念，包括第2.1节的概述、第2.2节的全局尺度建模细节，以及第2.3节中采用的局部尺度建模技术。第3节给出数值算例，其中第3.1节通过一个简单的数值算例验证该方法，第3.2节则通过一个实际应用展示完整的工作流程。

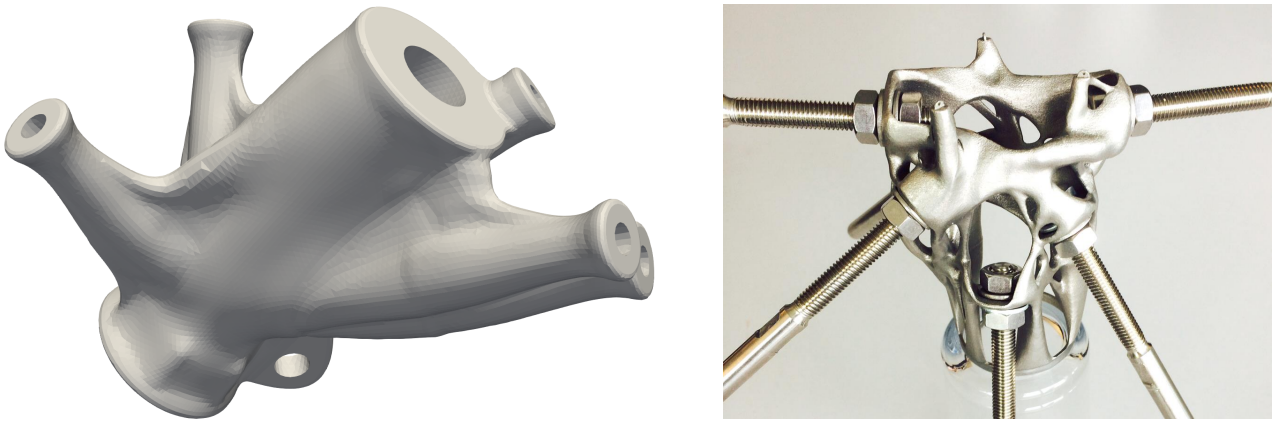


图 1： 展示几何自由度潜力的增材制造节点：左：[18],右：[1]

2 方法

2.1 双尺度模型

在多尺度建模文献中，微观尺度 和 宏观尺度 这两个术语通常用于区分相关的两种几何尺度。在本文中，微观尺度 称为局部尺度或部件尺度，而宏观尺度 则称为全局尺度或大尺度。

在计算效率较高的结构分析中，部件尺度的几何细节往往无法得到充分解析。为此，可根据对部件建模所需的现有细节程度（例如几何细节），将整个结构划分为若干部件，如 [19] 所示。对于空间框架，这种划分会得到两组不同的结构单元：

(1) 可直接用一维模型表示的梁集合 β_m 。

(2) 用于连接梁的结构节点集合 Ω_{ns} 。这些节点通常具有复杂的几何形状，而且其力学性能通常难以纳入大尺度模型。

一般而言，每个结构节点 $\omega_n \in \Omega_{ns}$ 都具有独特的材料分布和内部结构，因此形成复杂模型，其力学分析需要对完全解析的三维问题进行评估。

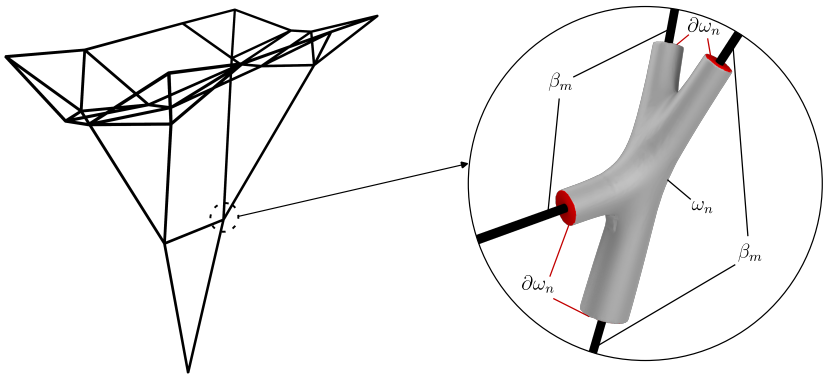


图 2： 双尺度模型示意图：全局尺度的空间桁架 [20] （左）以及部件尺度的结构节点及其与梁单元的接口（右）。

β_m 与具有 p 个连接的特定节点 ω_n 之间的界面定义为$\partial\omega_n = \bigcup_{i=1}^{p} \partial\omega_{ni}$。 $\partial\omega_n$ 中的每个界面都是与 β_m中的梁单元相连的界面，如图2所示。

其中，梁单元以黑色表示，梁-节点界面以红色表示。这些界面上的梁自由度称为边界自由度。通过将 ω_n 的三维部件尺度模型降维为零维模型，实现不同尺度的耦合；降维方式须确保所得模型能够正确组装到大尺度模型中。此降维必须保证零维降阶模型的运动学假设与大尺度模型的假设一致。本文在大尺度模型中采用铁木辛柯梁有限元 [21] 。因此，Ω_{ns} 的降阶模型是根据铁木辛柯梁单元的自由度确定的。主要假设如下：(a) 两个尺度上的变形均较小。(b) 大尺度模型中以及界面 $\partial\omega_n$ 上的平截面在变形后仍保持平面。

每个 ω_n 模型的降维过程与静力凝聚法 [22],密切相关：通过基变换，可将原始刚度矩阵表示为降维形式。有关基变换矩阵（变换矩阵）的计算细节，请参见第2.3节。随后，大尺度模型会在组装过程中将降阶刚度矩阵作为“超单元”处理。换言之，大尺度模型将每个 ω_n 视为一个由降维过程得到的零维单元。此过程可解释为将三维节点模型的自由度投影到全局尺度上的零维单元。零维单元的矩阵项不会为全局系统矩阵增加额外的自由度。相反，它们可视为一种节点刚度，用于定义 $\partial\omega_n$ 相对于彼此、在单位力作用下的位移大小。需要注意的是，每个节点的静力凝聚过程独立于结构的其余部分，即降阶模型完全取决于结构节点的物理属性。

双尺度模型的第一部分沿由局部到全局的方向，采用上述降维过程。第二部分则将解从大尺度模型传递至部件尺度模型，以便对完全解析的局部模型进行应力状态分析。为此，将边界自由度处的位移施加到完全解析的局部模型上，以求解局部线弹性问题。

2.2 全局尺度模型

2.2.1 梁模型

全局尺度结构采用三维两节点铁木辛柯梁有限元建模，每个节点有 6 个自由度，包括轴向位移（u_1, u_7）、剪切位移（u_2, u_3, u_8, u_9）、弯曲转角（u_5, u_6, u_{11}, u_{12}）和扭转转角（u_4, u_{10}），如图3所示。单元平衡方程如下，参见 [23]。

$$\boldsymbol{K_e u_e} = \boldsymbol{f_e} \tag{1}$$

其中单元刚度矩阵为:

$$\boldsymbol{K_e} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_z}{\hat{\phi}_z L^3} & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\hat{\phi}_y L^3} & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{\hat{\phi}_y L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_y}{\hat{\phi}_y L} & & & & & & & \\ 0 & \frac{6EI_z}{\hat{\phi}_z L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_z}{\hat{\phi}_z L} & & & & & & \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{-12EI_z}{\hat{\phi}_z L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{\hat{\phi}_z L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{\hat{\phi}_z L^3} & & & & \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{\hat{\phi}_y L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{\hat{\phi}_y L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\hat{\phi}_y L^3} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{\hat{\phi}_y L^2} & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_y}{\hat{\phi}_y L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\hat{\phi}_y L^2} & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_y}{\hat{\phi}_y L} & \\ 0 & \frac{6EI_z}{\hat{\phi}_z L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_z}{\hat{\phi}_z L} & 0 & \frac{-6EI_z}{\hat{\phi}_z L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_z}{\hat{\phi}_z L} \end{bmatrix} \tag{2}$$

with

$$\phi_z = \frac{12EI_z}{\kappa GAL^2} \qquad \hat{\phi}_z = 1 + \phi_z \qquad \phi_y = \frac{12EI_y}{\kappa GAL^2} \qquad \hat{\phi}_y = 1 + \phi_y. \tag{3}$$

节点位移向量 $\boldsymbol{u_e}$ 和相应的节点力向量 $\boldsymbol{f_e}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{u_e} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f_e} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \\ f_{10} \\ f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} \tag{4}$$

针对不同横截面，按照 [21] 计算剪切修正系数 κ。有关更详细的推导，请参阅 [23–25]。单元刚度矩阵的组装构成全局刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{\text{beam-global}}$。随后介绍部件尺度模型。

2.3 局部尺度模型

结构节点在部件尺度上进行分析，其中考虑每个独立节点的完整CAD几何，以基于三维线弹性静力学对力学问题进行建模。局部尺度模型有两个目的：对几何形状复杂的节点模型进行降维，使其能够集成到高效的大尺度结构分析中；并根据大尺度分析的加载条件，分析节点最终的应力状态。为此，我们采用有限单元法（FCM）自动完成局部尺度分析。对于涉及增材制造零件（例如 [15, 26]）的类似线弹性问题，以及其他多种应用，FCM在各种几何表示中的适用性均已得到广泛研究，例如 [27–30]。

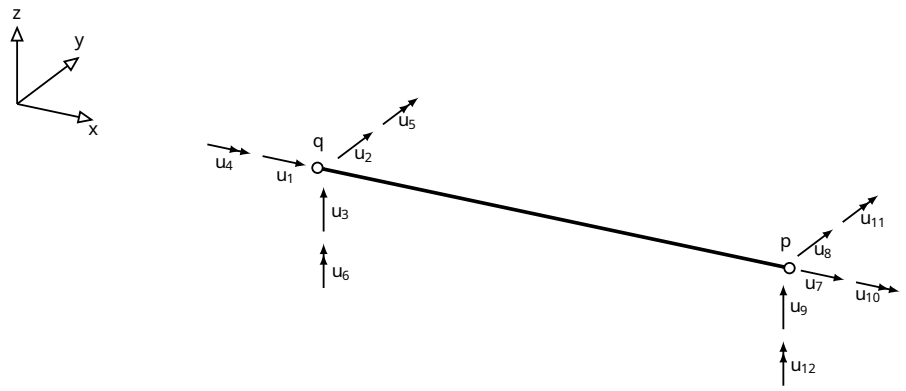


图3： 梁单元

2.3.1 有限单元法概述

以下概述线弹性问题背景下有限胞元法（FCM）的基本原理。有关更多详情，请参阅 [27, 31]。

有限胞元法是对经典有限元方法的扩展，将高阶有限元与浸入边界法相结合。有限胞元法的核心原理如图4所示。通过扩展虚拟域 Ω_{fic} ，使其与物理域 Ω_{phy} 的并集 $\Omega_{\cup}$ 成为一种简单形状，从而易于划分网格。因此，生成合适网格这一挑战（在某些情况下可能需要大量人工工作）被转化为在数值积分过程中对原始域进行解析；此时可采用空间树细分技术等积分方案，以实现精确积分。为此，通过指示函数 α 可在 $\Omega_{\cup}$ 内恢复原始问题，其定义如下：

$$\alpha(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_{phy} \\ 10^{-k} & \forall \boldsymbol{x} \notin \Omega_{phy}. \end{cases} \tag{5}$$

从物理角度看，虚拟域可以解释为一种非常柔软的材料，它包围物理域或填充其内部空隙。研究表明，当 k 足够大时（通常 k 取值在5到10之间），Ω_{fic} 的存在不会对误差 [32]产生显著影响。可在 $\Omega_{\cup}$ 上利用以下弱形式对线弹性问题进行表述

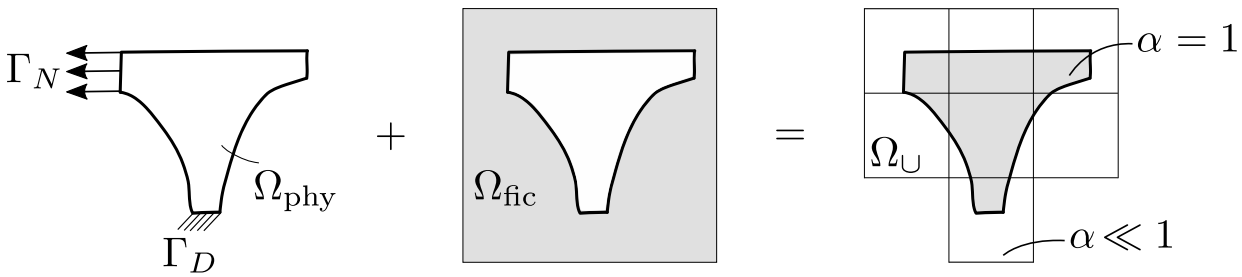


图 4： 有限单元法示意图 [33]。不与物理域相交的单元不予考虑。

形式 [34]:

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}). \tag{6}$$

双线性形式如下:

$$
\begin{aligned}
a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= \int_{\Omega_{phy}} 1\ \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \mathbb{C} : \varepsilon(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_{fic}} \alpha\ \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \mathbb{C} : \varepsilon(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\Omega_{\cup}} \varepsilon(\boldsymbol{v}) : \alpha\mathbb{C} : \varepsilon(\boldsymbol{u})\, \mathrm{d}\Omega,
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中， ε、 $\mathbb{C}$、 $\boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{v}$ 分别表示工程应变张量、弹性材料张量、位移向量和测试函数向量。右端项为:

$$
f(\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_{\cup}} \alpha\, \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{f}\, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}\Gamma, \tag{8}
$$

其中， $\boldsymbol{f}$ 表示体力。牵引向量 $\boldsymbol{t}$ 在Γ_N上作为诺伊曼边界条件。规定位移 $\boldsymbol{u_p}$ 作用于狄利克雷边界 Γ_D ，如下所示:

$$
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_p} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_D.
$$

位移向量 $\boldsymbol{u}$ 和测试函数 $\boldsymbol{v}$ 可在离散形式下近似表示为形函数 N_i的线性组合；在有限胞元法（FCM）中，这些形函数具有较高阶次，并乘以相应的未知系数:

$$
\boldsymbol{u} = \sum_i N_i \hat{u}_i = \boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{u}} \tag{9}
$$

$$
\boldsymbol{v} = \sum_i N_i \hat{v}_i = \boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{v}} \tag{10}
$$

按照布勃诺夫-伽辽金法 [35]，可得到式（6）中问题的离散表示:

$$
\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f} \tag{11}
$$

其中， $\boldsymbol{K}$、$\hat{}\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 分别表示刚度矩阵、（未知）位移系数向量和载荷向量。由于有限胞元网格与物理域的边界不相符，施加边界条件时需要格外谨慎。与经典有限元法类似，齐次诺伊曼边界条件无需特殊处理；而非齐次诺伊曼边界条件可通过显式离散化 Γ_N的表面，并据此计算式（8）中的第二项（边界积分项）来施加。另一方面，可通过在式（7）和式（8）的弱形式中增加约束，以弱意义施加狄利克雷边界条件。为此，可采用Nitsche方法 [36]或罚函数法 [37] ，例如 [38]。

2.3.2 子结构分析

结构节点的子结构法基于静力凝聚方法。我们将该过程表述为基降阶。降阶操作作用于一个记为 $\boldsymbol{K}_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的全维矩阵；在本例中，该矩阵表示部件尺度上完全解析的节点模型的无约束刚度矩阵。目标是确定 $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ 的降维表示，并以大尺度模型中相应的自由度来描述。我们将这个降维矩阵称为子结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{k\times k}$ ，其中 $k \ll n$。

令 V 表示 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维向量子空间，其基由 k 个基向量 $B = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\ \ ...\ \ \boldsymbol{v_k}\}$组成。此外，我们将 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ 定义为位移向量。我们可以

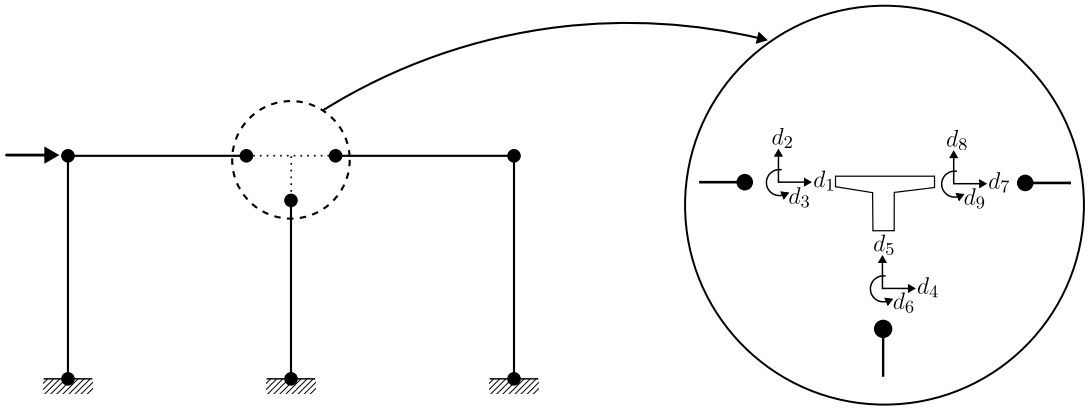


图 5： 二维子结构方法示意图，左侧：采用降阶结构节点的全局尺度梁模型；右侧：局部尺度下具有边界自由度的节点。

将 $\boldsymbol{u}$表示为：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_{n\times k}\,[\boldsymbol{u}]_B, \tag{12}$$

其中，$[\boldsymbol{u}]_B$ 是相对于降阶基 B的 k 维位移向量，$\boldsymbol{N}_{n\times k}$是一个线性映射，其列为基向量 $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3} \quad \dots \quad \boldsymbol{v_k}\}$。在我们的案例中，$k$ 表示梁-节点界面 $\partial\omega_n$处梁自由度的总数，如二维案例的图 5 和三维案例的图 2 所示。例如，图 5 中的节点连接了 3 根梁，共有 $k = 9$ 个边界自由度。更具体地说，子结构通过 k 个边界自由度与大型结构的其余部分耦合，因此，k 个线性无关的基向量必须能够表示相应的自由度。因此，列向量 $\boldsymbol{v_i} \in \boldsymbol{N}_{n\times k}$ 具有如下物理含义：它表示完全解析的节点在相应全局尺度自由度 i方向上发生单位变形时的位移场，同时约束所有其他自由度。请注意，相关的 k 个边界自由度是在全局坐标系中定义的，因为子结构无法直接对应于局部坐标系。

根据虚功原理 [23]，可以得到子结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{k\times k}$。因此，虚应变能可写为：

$$\delta U_i \;=\; \delta\boldsymbol{u}^T\,\boldsymbol{K}_{n\times n}\,\boldsymbol{u}. \tag{13}$$

将式（12）代入式（13），得到：

$$\begin{aligned}\delta U_i \;&=\; \delta[\boldsymbol{u}]_B^T\;\boldsymbol{N}_{n\times k}^T\;\boldsymbol{K}_{n\times n}\;\boldsymbol{N}_{n\times k}\;[\boldsymbol{u}]_B \\ &=\; \delta[\boldsymbol{u}]_B^T\;\boldsymbol{K}_{k\times k}\;[\boldsymbol{u}]_B,\end{aligned}$$

其中，子结构刚度矩阵定义为：

$$\boldsymbol{K}_{k\times k} = \boldsymbol{N}_{n\times k}^T\;\boldsymbol{K}_{n\times n}\;\boldsymbol{N}_{n\times k}. \tag{14}$$

式 (14) 具有对双线性形式 [39–41]进行基变换的规范结构。此处的挑战在于计算基变换矩阵 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$，这涉及根据上述对 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$ 的解释，在部件尺度的完全解析模型上求解 k 个线弹性问题。由于 FCM 能够稳健地处理复杂几何形状，因此采用 FCM 进行上述局部尺度计算，从而实现对具有不同几何特征的每个独立结构节点进行自动降维。图 6 展示了计算

使用 FCM 基于图 5 所示示例计算二维结构节点 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$ 时所涉及的九个列向量 $\boldsymbol{v_1}$、 $\boldsymbol{v_2}$、 $\boldsymbol{v_3}$ … $\boldsymbol{v_9}$ 。

注释 2.1 完全解析的三维模型的无约束刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ 的计算是工作流程中计算量最大的环节之一。另一方面，如图 *6* 所示，与计算 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$ 相关的 k 线弹性问题仅在边界条件方面有所不同，即 $\boldsymbol{K}_{n\times n}$ 保持不变。因此，与完全解析的部件尺度模型相关的无约束刚度矩阵只需计算一次，即可在一系列计算中重复使用。

注释 2.2 本文采用罚函数法 *[37]*，以弱意义施加狄利克雷边界条件。这适用于与第 *2.3.2* 节子结构分析相关的局部尺度问题，也适用于第 *2.3.3* 节最终应力状态的计算。

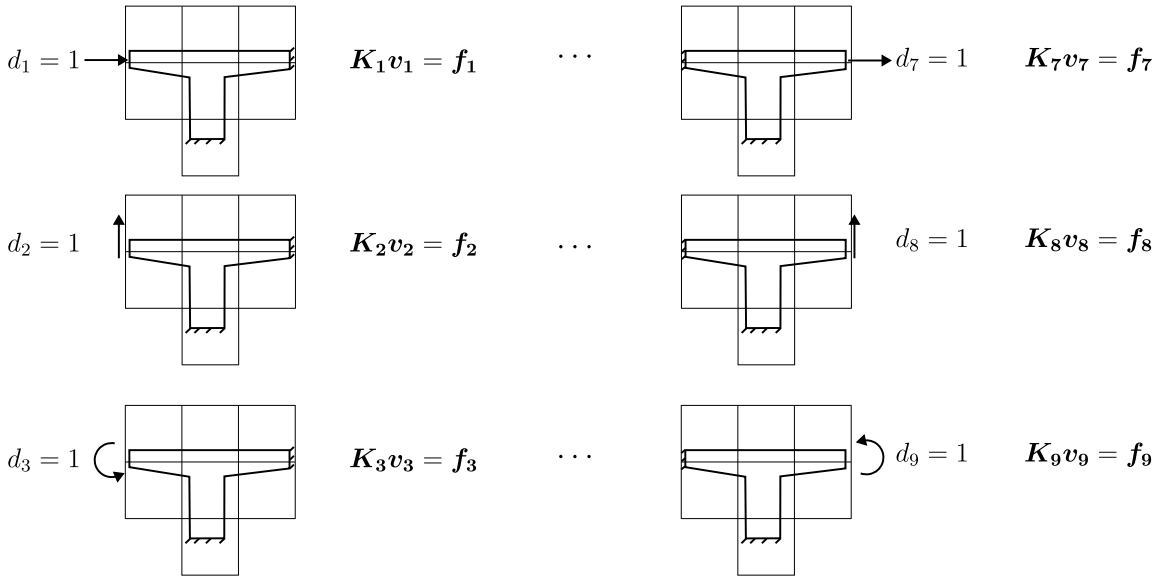


图 6： 计算图 5 中二维节点的基变换矩阵 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$ 。图示有限单元胞问题的解$\boldsymbol{v_1}$， $\boldsymbol{v_2}$， $\boldsymbol{v_3}$ … $\boldsymbol{v_9}$ 构成了基变换矩阵的各列。

2.3.3 全局到局部的转换

结构节点的子结构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{k\times k}$ （式（14））与梁单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K_e}$ （式（2））组装在一起，形成全局刚度矩阵$\boldsymbol{K}$，然后按照式（11）求解系数 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 。结合式（9），该解表示全局尺度模型中的位移和转动，可映射回局部尺度模型。为此，根据叠加原理，将边界自由度处的解施加到三维模型上。如图 7 所示，零维位移和转动以分布方式施加在局部模型的边界表面上。

3 数值算例

本节通过两个示例展示所提出的多尺度方法。第 3.1 节演示并验证了针对三维载荷作用下简单悬臂梁的工作流程。该梁的双尺度模型通过全局尺度下的经典铁木辛柯梁模型进行了验证。在第 3.2 节中，

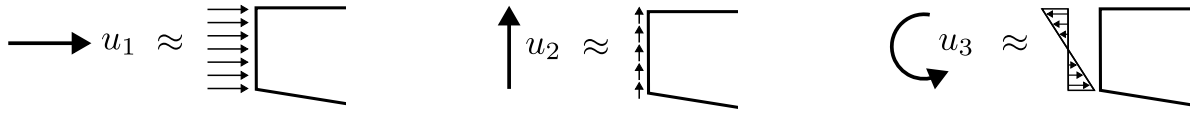
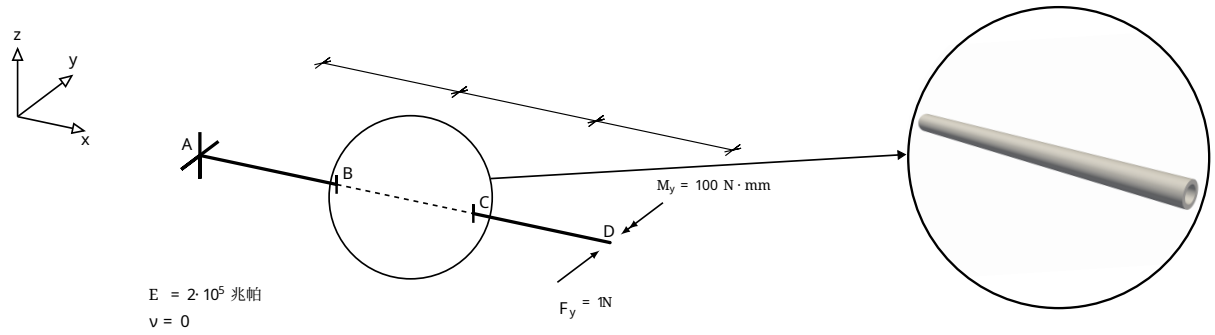


图 7：局部尺度模型上狄利克雷边界条件的施加方式（以二维形式展示）。将逐点轴向位移（左）、剪切位移（中）和弯曲转角（右）以分布形式施加于局部尺度模型。

采用多尺度方法分析具有多个几何形状复杂的结构节点的树冠结构。这类结构非常适合采用增材制造，但使用传统工具进行分析和设计却尤具挑战性。

3.1 悬臂梁

图 8 展示了三维悬臂梁示例的问题设置。采用双尺度建模方法，选择仅有两个连接的最简单结构节点作为局部尺度模型（图 8 中 B 点与 C 点之间），并在全局尺度模型中以其刚度值表示。梁在 A 点固定，并在 D 点承受 1 N 的横向力和 100 N·mm 的弯矩。假设 AB 段和 CD 段的梁截面为半径 30 mm 的圆形梁截面，而 BC 段为内半径和外半径分别为 20 mm 和 30 mm 的空心截面，如图 8 所示。全局模型采用三维铁木辛柯梁单元离散，每个单元长度为 100 mm；与 B 点和 C 点对应的节点则通过子结构耦合，并采用第 2.3.2 节所述的静力凝聚法。参考模型按照第 2.2.1 节所述，将整个结构均采用铁木辛柯梁单元建模，每个单元的分辨率同样为 100 mm。参考模型充分考虑了 BC 段修改后的截面特性。普遍认为，对于此处所研究的细长梁，参考模型具有足够高的近似精度 [42]。



(a) The beam model in *Global Scale* (b) The resolved 3D model in *Local Scale*

图 8：悬臂梁的问题设置。

双尺度方法的精度通过全局尺度上的逐点 L^2 范数误差来衡量：

$$e(x) = \frac{\sqrt{\left(u_{ref}\left(x\right) - u_{ts}\left(x\right)\right)^2}}{\left|u_{ref}\left(x\right)\right|}, \tag{15}$$

其中， $u_{ref}(x)$ 是参考模型计算得到的位移场， $u_{ts}(x)$ 是双尺度模型计算得到的位移场。图 9 绘出了梁沿 x 轴的误差 e 。沿梁全长，误差始终低于 0.05%。与其他假设（例如固支端假设）引入的误差相比，该误差可以忽略不计，

这表明双尺度方法足以满足工程应用的精度要求。图 10 展示了参考模型和双尺度模型在 z方向上的整体挠度。

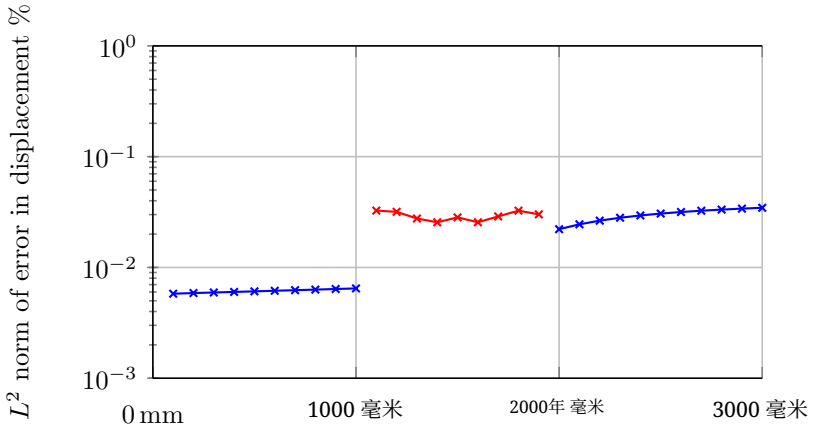


图 9： L^2 沿梁的位移误差范数：局部尺度误差以红色表示，全局尺度误差以蓝色表示。

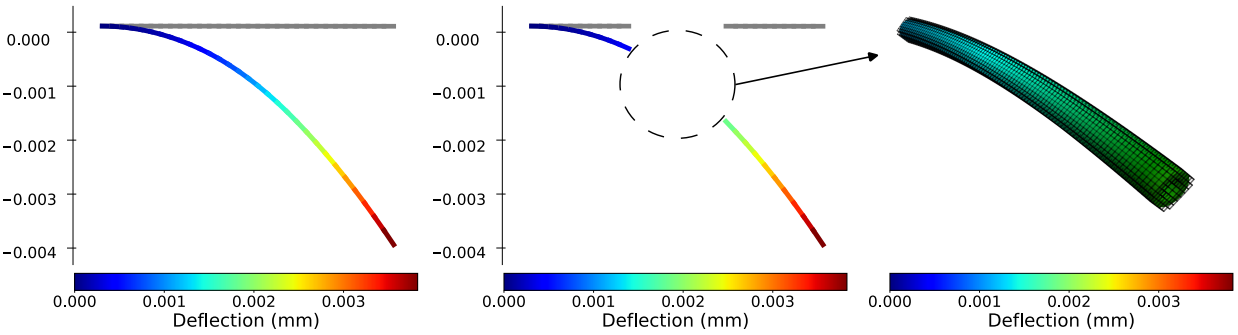


图 10： 简支梁在 z方向上的挠度：参考解（左）、采用双尺度方法的全局尺度解（中），以及对应的采用 FCM网格的局部尺度解（右）。

3.2 复杂树冠结构

组合平衡建模（CEM） [17] 方法用于在全局尺度上设计树冠结构的初始几何形态。CEM 是一种基于平衡的找形方法，以图论和基于向量的图解静力学 [43]为基础。该方法尤其适用于生成承受拉力和轴向压力的空间铰接框架，其依据是用户定义的初始设计输入：拓扑图及其相关的度量参数。拓扑图是结构的图表示（图 11），由顶点和边组成，分别对应结构的节点和杆件。顶点分为起始顶点、普通顶点和支撑顶点；边则分为路径边和偏差边。度量参数包括：拓扑图中起始顶点对应的结构节点位置、路径边对应的杆件长度，以及偏差边对应的杆件内力大小。在 CEM 的标准形式中，静力平衡状态下的结构形态

从与起始顶点对应的节点开始，逐节点依次生成，直至与支撑顶点对应的节点。如果对结构形态施加了特定的几何约束（例如固定节点），则会采用优化程序 [44]。在扩展版 CEM [20], 中，可以在拓扑图中引入辅助轨迹边。这些元素对应于施加在结构上的残余力，并在找形过程中将其最小化（例如通过自动微分进行基于梯度的优化）。为在全局尺度上生成树冠的初始几何形态，在树冠顶部节点施加 0.5 kN 的集中荷载（总计 15 kN），同时固定底部节点的位置（图 11）。拓扑图的每个顶点均引入辅助轨迹。使用 COMPAS CEM [45]进行找形。

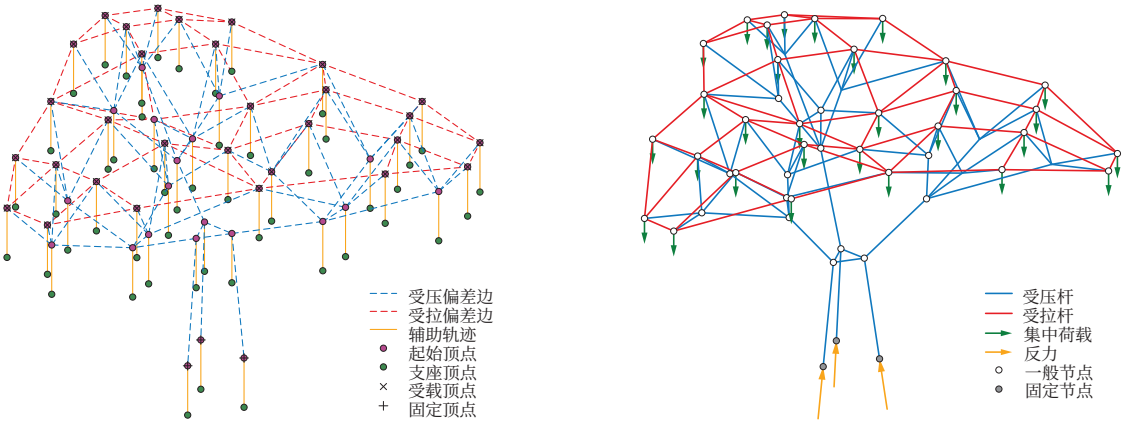


图11： 组合平衡建模 (CEM) [17, 20]：拓扑图（左）以及找形过程后处于静力平衡状态的结构形态（右）

最终的整体设计如图12所示。结构高度为5米，杆件采用圆形横截面，半径范围为14 mm至50 mm，具体取值取决于找形所得的内力。通过确保杆件受压时承受的压缩载荷低于相应的欧拉临界屈曲荷载 [46]，将杆件的受压屈曲纳入考量。

该结构的初始设计基于杆单元的轴向荷载。不过，后续分析将采用梁单元，考虑相关几何尺度，研究结构在图13所示偏心设计荷载作用下的行为。

随后，针对选定的三个节点构建局部尺度结构节点模型，如图12中灰色部分所示。尽管本示例重点关注选定的结构节点，但所提出的工作流程同样适用于结构中的其他任何复杂结构节点。

在设计早期阶段，对结构节点进行完整的拓扑优化是一项具有挑战性的任务，尤其是因为问题具有多准则特性，必须考虑力学性能、可制造性、功能集成及其他相关方面。因此，我们采用基于壳体-填充结构的生成式设计方法，这种结构在增材制造中十分常见 [47]，并且已知有助于实现具有良好力学性能的轻量化设计 [48–50]。该设计由实心外壳和开放式内部结构组成，其中填充密度、壳体厚度和填充图案等参数用于控制设计。我们使用算法工程平台 Hyperganic™ Core [51]生成采用壳体-填充物组成的可行设计。此外，该尺度下还考虑了所需的梁-节点连接，并开发了一种简单的螺栓连接，如图12所示；连接尺寸则作为额外的设计参数。我们在此尺度下对连接进行建模，以便更好地纳入连接的影响，因为连接的刚度会显著影响整体行为 [52]。需要指出的是，生成式建模工作流经过设置后，可根据几何输入参数，直接从初始全局尺度设计生成节点变体，例如图中所示的

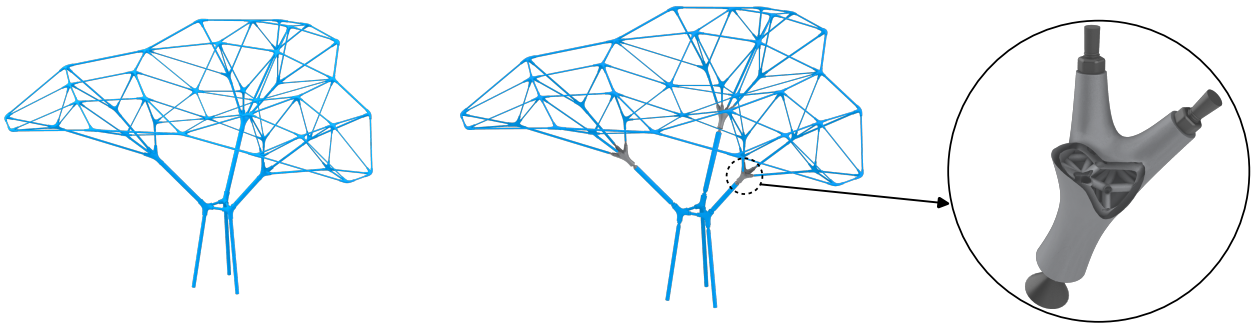


图12： CEM形态寻优得到的初始设计（左），以及采用壳体-填充复合节点和螺栓连接的优化设计（中、右）

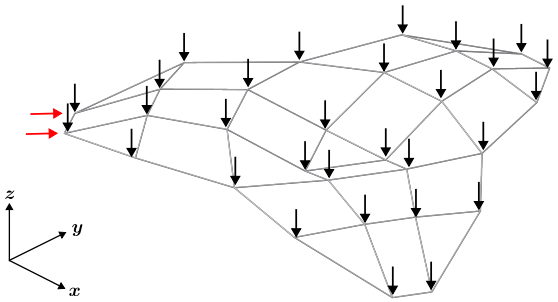


图13： 全局模型（此处为俯视图）承受压缩力（黑色）和剪切力（红色）的组合载荷。结构承受的压缩载荷总计为15 kN，剪切载荷为0.2 kN。

图12所示的节点变体由带螺栓连接的壳体-填充结构组成，可根据几何输入参数直接从初始全局尺度设计生成。生成 STL（三角形标准语言）格式的节点变体约需 5 分钟。

针对选定节点的局部尺度分析，考虑了两组设计参数。第一种设计方案记为 V_I，壳体厚度为6 mm，体积比约为0.41。第二种设计方案记为 V_{II}，壳体厚度为7 mm，体积比约为0.39。此外，V_I 变体的连接设计尺寸大于V_{II} 变体。因此，节点变体 V_I 的质量比相应的节点变体 V_{II}约大5%。图14展示了设计方案及其对应的填充图案和连接，其中上、下两行分别展示了依据设计方案 V_I 和 V_{II} 设计的节点。简而言之，三个选定节点各有一个 V_I变体和一个 V_{II} 变体，因此总共有六种不同的节点模型。

双尺度分析的第一步是计算相应结构节点的子结构刚度矩阵$\boldsymbol{K}_{k\times k}$。为此，我们使用有限胞元法为每种节点变体计算全维无约束刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_{n\times n}$。随后，我们针对每种节点变体分别进行 k 次模拟，以计算相应的基变换矩阵 $\boldsymbol{N}_{n\times k}$。由于这些节点与五个梁单元相连，且每个梁单元有六个边界自由度，因此接口处的梁自由度数量为 $k=30$。随后，根据公式（14）计算子结构刚度矩阵。为准确解析节点精细的几何细节，我们采用 $110\times 90\times 132$（用于节点 1 和 3）和 $91\times 125\times 133$（用于节点 2）的有限胞元法离散；每个单元的积分勒让德多项式次数为 3，因此共有 $\backsim 2.10^6$ 个自由度。此外，八叉树积分细分深度设为 4，指示函数 α 设为 10^{-10}，罚参数 β 设为 10^{14}。

子结构分析在一台配备 Intel™ Xeon™ Gold 6230 处理器的双路插槽计算机上进行，该计算机共有 80 个逻辑核心，时钟频率为 2.1 GHz。计算

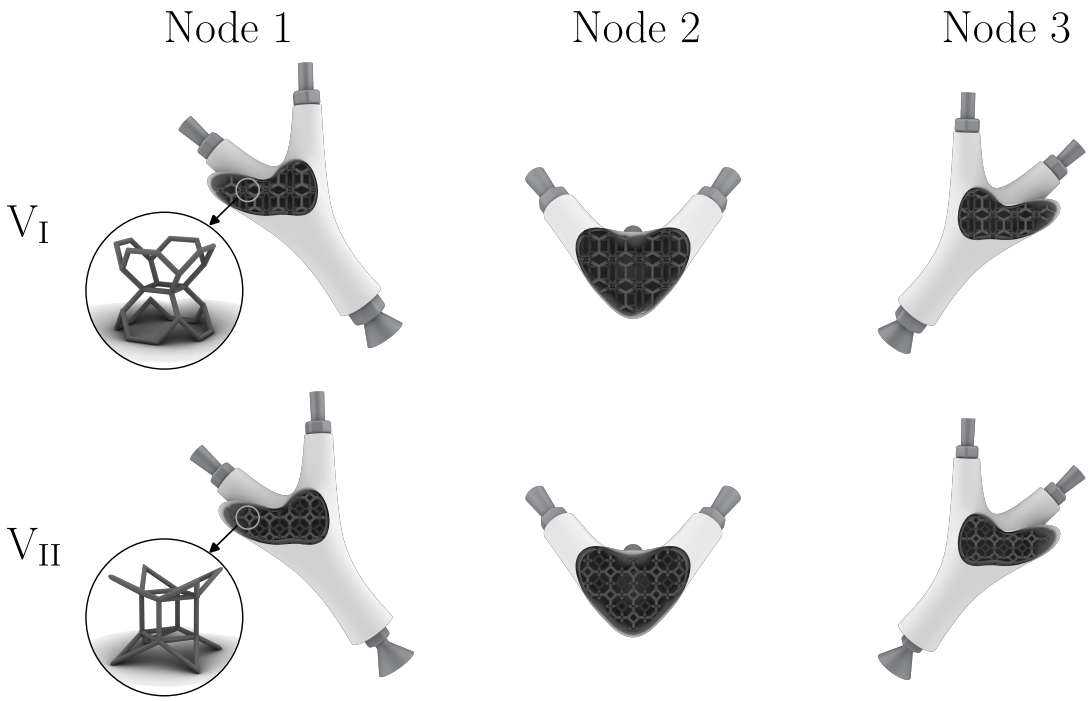


图14：三个结构节点及其对应的设计 V_I 和 V_{II}。

上述仿真参数下，计算结构节点的子结构刚度矩阵耗时 $\backsim$ 2.5 小时。此时长包括求解线性系统 $k = 30$ 次以及执行基变换操作。大量计算时间用于在复数域上进行数值积分，采用先进技术可大幅提高这一过程的效率，例如 [53, 54]。需要注意的是，节点设计的生成及后续子结构分析过程均已实现自动化，无需人工投入即可对复杂节点模型进行分析。

我们介绍了采用两种节点设计 V_I 和 V_{II}的全局尺度模型。模型由 985 个铁木辛柯梁单元构成，杨氏模量为 $E = 2.0 \cdot 10^5$ MPa。第一种情况下，将与节点变体 V_I 对应的子结构矩阵与梁单元组装在一起。随后，在指定的设计荷载下对所得模型进行分析（图13）。为展示该方法的通用性，我们还分析了第二种情况：将节点变体 V_{II} 的子结构刚度与梁单元组装在一起，同时保持其他所有建模和分析参数不变。具有节点设计 V_I 和 V_{II} 的相应全局系统的位移和弯矩如图15和图16所示。可以看出，所提出的方法有助于评估大尺度力学响应，同时考虑局部设计决策的影响。

3.2.1 全局尺度响应

采用第一组节点设计 V_I 进行的初步全局分析表明，最大节点位移为 0.9 mm；而当全局模型纳入节点变体 V_{II}时，最大位移则增至 1.1 mm 以上，如图 15 所示。事实上，第二组节点变体会导致结构产生更大的整体变形。位移显著增加（超过 15%）可归因于连接刚度较低以及壳体-填充物组成不同。另一方面，不同的节点设计对内弯矩 M_y影响不大，如图 16 所示。这可归因于两种节点设计刚度不同所导致的内力重新分布。例如，当全局模型采用节点设计 V_I 时，图 16（左）中的 A 点内弯矩 M_y 约为 3 kN m；而

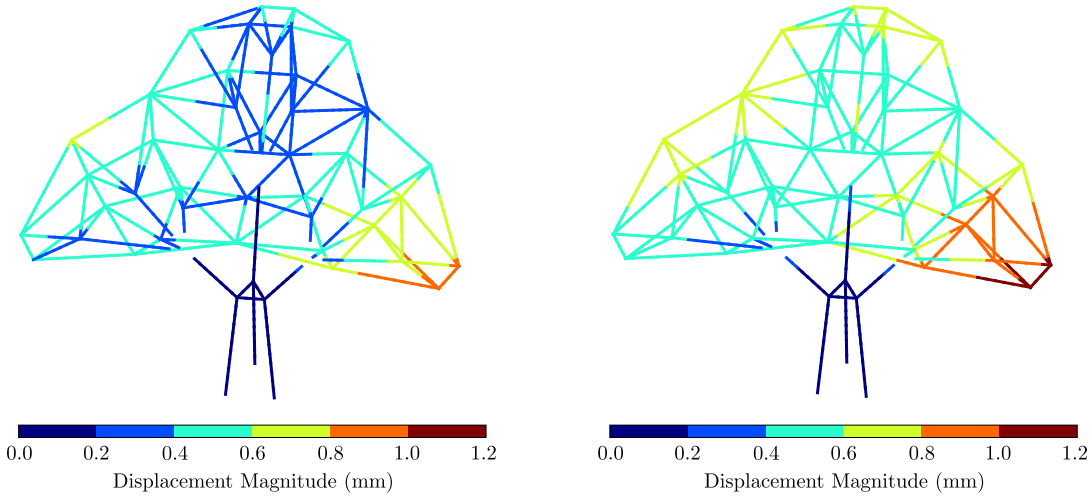


图 15：全局分析得到的位移：带有节点 V_I （左）和节点 V_{II} （右）的整体系统变形。

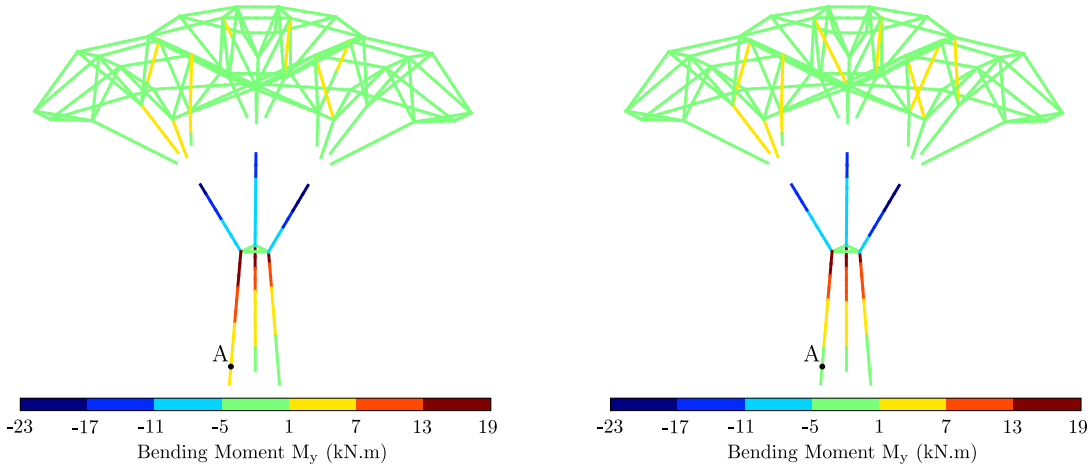


图 16：全局分析得到的弯矩：带有节点 V_I （左）和节点 V_{II} （右）的整体系统弯矩 M_y 。

如图 16（右）所示，采用节点变体 V_{II} 时，A 点的 M约为 -1 kNm。这种行为是结构静力超静定 [42]的常见响应。

3.2.2 局部尺度响应

随后，按照第2.3.3节，将子结构边界处的整体解映射回局部尺度模型，以分析局部层级上的解析应力状态。根据全局尺度分析结果，可以观察到，节点的 V_{II} 变体会产生显著更大的变形。图 17 展示了对两种节点 3 设计（图 14）进行局部尺度应力分析的结果，其中应力是在相应的 STL 表面上进行后处理得到的。结果表明，V_{II} 变体经历的较大变形会导致更高的局部应力。具体而言，V_I 变体承受的最大应力低于 60 MPa，而 V_{II} 变体承受的应力则超过 70 MPa。

备注 3.1 图 *17* 展示了两种结构节点变体的内部剖面，几何形状通过其边界表面（*STL*）表示。请注意，剖视图无法完整显示节点内部的实体填充，因为填充仅由其边界定义。这纯粹是后处理伪影。

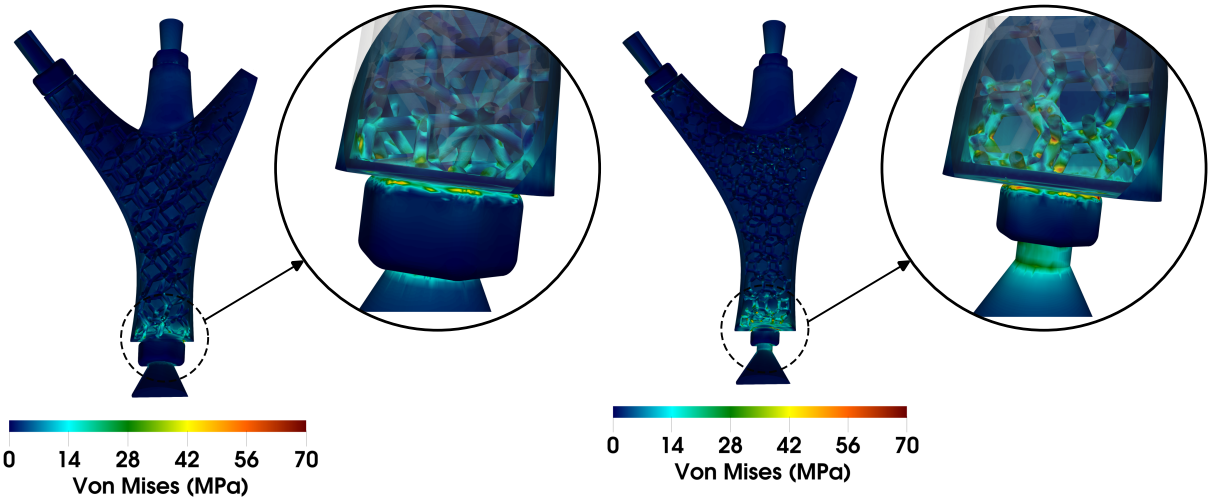


图 17: 局部应力分析的结果，展示了最关键的连接处的应力状态的末端，对应于节点 3 的 V_I （左）和 V_{II} （右）变体。

4 结论

本研究提出了一种用于增材制造零件空间框架结构设计与分析的双尺度方法，并着重强调强大的自动化能力。在该方法中，全局尺度模型采用一维线性梁单元，而增材制造结构节点则基于完全解析的三维模型建模为子结构。通过自动化降维过程，对结构节点的相关力学特性进行数值降维。将降阶后的刚度量组装到全局模型中，从而能够在全局尺度上高效地进行结构分析。再将整体解施加到局部尺度模型上，以便使用有限胞元法（FCM）分析结构节点的局部应力状态。该多尺度工程设计与分析工作流程受益于有限胞元法（FCM）的应用，因为它减少了分析局部尺度复杂增材制造构件所需的人工工程工作量。

首先，通过悬臂梁示例验证了所提出的方法，结果表明该方法引入的位移误差为 0.05%，能够满足工程应用所需的精度。随后，利用具有增材制造结构节点的树冠结构展示了该方法的优势。该结构的整体设计采用基于组合平衡建模框架的找形方法，而局部结构节点则通过生成式设计探索其他可行设计。最后，结果表明，该方法可用于分析结构的力学响应，从而根据设计决策评估其局部和整体行为。

本研究仅限于对空间框架进行线弹性分析。未来需要进一步研究，将该方法扩展至此类结构的非线性响应分析，并考虑相关尺度。这一点尤为重要，因为钢等延性材料常用于空间框架建筑施工。此外，利用先进的数值积分技术 [53, 54]可以缩短子结构分析所需的计算时间。

此外，目前局部尺度分析尚未考虑增材制造工艺可能导致的几何缺陷。研究表明，设计状态与制造状态产品之间的几何差异会影响增材制造零件的力学行为 [15, 26]。因此，将结构节点精确的制造状态几何形状纳入分析工作流程，并研究其在相关尺度上的力学影响，是一个值得关注的研究课题。

致谢

我们衷心感谢德国研究联合会（DFG，德国）通过项目 414265976 TRR 277 C-01 提供的支持。我们还感谢 Tao Sun 为树冠模型的开发作出的贡献，并感谢 Hyperganic 向我们提供其 Hyperganic Core 平台的教育许可证。

参考文献

[1] S. Galjaard、S. Hofman、N. Perry 和 S. Ren，《通过增材制造优化金属建筑结构构件》，第 12 页，2015年。[2] C. Sultan 和 R. Skelton，《张拉整体结构的部署》，《国际固体与结构杂志》，第 40 卷，第 4637–4657 页，2003年9月。[3] T. T. Lan，《空间框架结构》，第 59 页，1999年。[4] G. A. Pacillo、G. Ranocchiai、F. Loccarini 和 M. Fagone，《建筑施工中的增材制造：三维和 4D 打印的技术、工艺、材料及其应用综述》，《材料设计与加工通讯》，第 3 卷，2021 年 10 月。[5] A. Paolini、S. Kollmannsberger 和 E. Rank，《建筑施工中的增材制造：工艺、应用与数字化规划方法综述》，增材制造，第 30 卷，第 100894 页，2019年12月。[6] J. Fish，《复合材料与结构的多尺度建模和仿真》，载于《计算力学中的多尺度方法》（R. de Borst 和 E. Ramm 编），第 55 卷，第 215–231 页，施普林格·荷兰，2011年。[7] R. W. McCune、C. G. Armstrong 和 D. J. Robinson，《有限元模型中的混合维度耦合》，《国际工程数值方法杂志》，第 49 卷，第 725–750 页，2000年10月。[8] P. J. Halliday 和 K. Grosh，《采用混合方法分析复杂结构交界面的动力响应》，《应用力学杂志》，第 66 卷，第 653–659 页，1999年9月。[9] I. Romero，《非线性梁与连续体的耦合：变分原理与有限元近似》，第 27 页，2018年。[10] T. Yamamoto、T. Yamada 和 K. Matsui，《采用 Nitsche 方法耦合壳单元与实体单元的数值过程》，《计算力学》，第 63 卷，第 69–98 页，2019年1月。[11] H. B. Dhia 和 G. Rateau，《Arlequin 方法：灵活的工程设计工具》，《国际工程数值方法杂志》，第 62 卷，第 1442–1462 页，2005年3月。[12] R. Krause 和 E. Rank，《结合有限元法 h 版和 p 版的多尺度计算》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 192 卷，第 3959–3983 页，2003年8月。[13] A. D¨uster、A. Niggl 和 E. Rank，《将有限元法的 hp–d 版本应用于局部增强降维模型》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 196 卷，第 3524–3533 页，2007年8月。[14] N. Korshunova、J. Jomo、G. L´ek´o、D. Reznik、P. Bal´azs 和 S. Kollmannsberger，《复杂微结构增材制造结构的基于图像的材料表征》，《计算机与应用数学》，第 80 卷，第 2462–2480 页，2020年12月。

[15] N. Korshunova、G. Alaimo、S. Hosseini、M. Carraturo、A. Reali、J. Niiranen、F. Auricchio、E. Rank 和 S. Kollmannsberger，《八面体桁架晶格结构拉伸行为的基于图像的数值表征与试验验证》，增材制造，第 41 卷，第 101949 页，2021年5月。[16]A. Sciegaj、P. Grassl、F. Larsson、K. Runesson 和 K. Lundgren，《将三维钢筋混凝土代表性体积单元上尺度化为有效梁和板模型》，《国际固体与结构杂志》，第 202 卷，第 835–853 页，2020年10月。[17] P. O. Ohlbrock 和 P. D'Acunto，《基于图解静力学与组合变化的平衡设计计算机辅助方法》，计算机辅助设计，第 121 卷，第 102802 页，2020年4月。[18]A. Ghantasala、J. Diller、A. Geiser、D. Wenzler、D. Siebert、C. Radlbeck、R. W¨uchner、M. Mensinger 和 K. U. Bletzinger，《采用激光粉末床熔融制造的复杂金属构件与支撑结构的基于节点的形状优化及机械试验验证》，载于《制造、生产管理与过程控制进展》，2021年。[19] P. Mata、A. H. Barbat 和 S. Oller，《局部变截面部件钢筋混凝土结构非线性动力分析的双尺度方法》，《工程结构》，第 14 页，2008年。[20] R. Pastrana、P. O. Ohlbrock、T. Oberbichler、P. D'Acunto 和 S. Parascho，《采用自动微分的拉压结构约束找形》，2022年9月。[21] G. R. Cowper，《铁木辛柯梁理论中的剪切系数》，《应用力学杂志》，第 33 卷，第 335–340 页，1966年6月。[22] M. Paz 和 W. Leigh，《结构综合矩阵分析》。Springer US，2001年。[23] J. S. Przemieniecki，《矩阵结构分析理论》。1968年。[24] L. Andersen 和 S. R. K. Nielsen，《三维弹性梁》，第 104 页。[25] C. Chinwuba Ike，《中等厚度梁弯曲分析的铁木辛柯梁理论——变分公式与闭式解》，《意大利技术—意大利工程科学杂志》，第 63 卷，第 34–45 页，2019年3月。[26] N. Korshunova、G. Alaimo、S. Hosseini、M. Carraturo、A. Reali、J. Niiranen、F. Auricchio、E. Rank 和 S. Kollmannsberger，《八面体桁架晶格结构的弯曲行为：建模选项、数值表征与试验验证》，《材料与设计》，第 205 卷，第 109693 页，2021年7月。[27] A. D¨uster、J. Parvizian、Z. Yang 和 E. Rank，《有限单元法在三维固体力学问题中的应用》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 197 卷，第 3768–3782 页，2008年8月。[28] L. Kudela、S. Kollmannsberger、U. Almac 和 E. Rank，《对由点云定义的域进行直接结构分析》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 358 卷，第 112581 页，2020年1月。[29] B. Wassermann、N. Korshunova、S. Kollmannsberger、E. Rank 和 G. Elber，《基于 V 模型和均质化微结构的功能梯度材料有限单元法》，《工程科学高级建模与仿真》，第 7 卷，第 49 页，2020年12月。[30] B. Wassermann、S. Kollmannsberger、S. Yin、L. Kudela 和 E. Rank，《整合计算机辅助设计与数值分析：“脏几何”的有限单元法处理》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 351 卷，第 808–835 页，2019年7月。

[31] A. D¨uster、E. Rank 和 B. Szab´o，《有限元法与有限单元法的 p 版本》，载于《计算力学百科全书》第二版（E. Stein、R. de Borst 和 T. J. R. Hughes 编），第 1–35 页，约翰·威立父子出版公司，2017年12月。[32] M. Dauge、A. D¨uster 和 E. Rank，《有限单元法的理论与数值研究》，《科学计算杂志》，第 65 卷，第 1039–1064 页，2015年12月。[33] J. Parvizian、A. D¨uster 和 E. Rank，《有限单元法》，《计算力学》，第 41 卷，第 121–133 页，2007年4月。[34] N. Zander，《多层次 Hp-FEM：通过任意悬挂节点动态改变高阶网格细化》。博士论文，慕尼黑工业大学，2017年。[35] O. C. Zienkiewicz 和 R. L. Taylor，《有限元法》。Butterworth-Heinemann，第5版，2000年。.[36] J. Nitsche，《采用不受边界条件约束的子空间求解狄利克雷问题的一种变分原理》，《汉堡大学数学研讨会论文集》，第 36 卷，第 9–15 页，1971年7月。[37] I. Babuska，《带罚项的有限元法》，《计算数学》，第 27 卷，第 221–228 页，1973年4月。[38] M. Ruess、Y. Bazilevs、D. Schillinger、N. Zander 和 E. Rank，《基于 NURBS 的有限单元法中的弱施加边界条件》，载于欧洲应用科学与工程计算方法大会（ECCOMAS），2012年。[39] R. J. Guyan，《刚度矩阵与质量矩阵的缩减》，《美国航空航天学会期刊》，第 3 卷，第 380–380 页，1965年2月。[40] M. J. Turner、R. W. Clough、H. C. Martin 和 L. J. Topp，《复杂结构的刚度与挠度分析》，《航空科学杂志》，第 23 卷，第 805–823 页，1956年9月。[41] J. H. G. Kreutz，《结合横截面有限元离散与单位挠度形状的增强梁单元》。博士论文，2013年。[42] J. J. Connor 和 S. Faraji，《结构工程基础》。施普林格纽约，2013年。[43] P. D’Acunto、J.-P. Jasienski、P. O. Ohlbrock、C. Fivet、J. Schwartz 和 D. Zastavni，《基于向量的三维图解静力学：一种基于形态与力关系的空间结构设计框架》，《国际固体与结构杂志》，第 167 卷，第 58–70 页，2019年8月。[44] P. O. Ohlbrock、P. D’Acunto、J.-P. Jasienski 和 C. Fivet，《采用组合平衡建模的约束驱动设计》，国际壳体与空间结构协会会议论文集，2017年。[45] R. Pastrana、P. Ohlbrock、P. D’Acunto 和 S. Parascho，《COMPAS CEM：面向 COMPAS 的组合平衡建模框架》，2021年。[46] B. J. Goodno 和 J. M. Gere，《材料力学》。圣智学习，第9版，2018年。[47] A. Mitchell、U. Lafont、M. Ho-ly´nska 和 C. Semprimoschnig，《增材制造——4D打印及未来应用综述》，《增材制造》，第 24 卷，第 606–626 页，2018年12月。[48] A. du Plessis、C. Broeckhoven、I. Yadroitsava、I. Yadroitsev、C. H. Hands、R. Kunju 和 D. Bhate，《美观且实用：增材制造中仿生设计综述》，《增材制造》，第 27 卷，第 408–427 页，2019年5月。

[49] A. Panesar、M. Abdi、D. Hickman 和 I. Ashcroft，《基于拓扑优化的增材制造功能梯度晶格结构设计策略》，增材制造，第 19 卷，第 81–94 页，2018年1月。[50] L. Cheng、J. Liu 和 A. C. To，《采用特征演化优化的并发晶格填充：面向增材制造的热传导设计》，结构与多学科优化，第 58 卷，第 511–535 页，2018年8月。[51] 《Hyperganic 平台组成部分 Hyperganic Core。https://www.hyperganic.com/》Hyperganic，2022年。[52] M. Hadianfard 和 R. Razani，《连接半刚性行为对钢框架可靠性的影响》，结构安全，第 25 卷，第 123–138 页，2003年4月。[53] L. Kudela、N. Zander、S. Kollmannsberger 和 E. Rank，《智能八叉树：在三维空间中精确积分不连续函数》，《计算力学与工程中的计算方法》，第 306 卷，第 406–426 页，2016年7月。[54] W. Garhuom 和 A. D¨uster，《针对发生大变形的切割有限元与单元的非负矩拟合求积》，《计算力学》，2022年6月。