arXiv:2301.06931v1 [math.RA] 8 Dec 2022

ISOM周期无限矩阵群的同构

OKSANA BEZUSHCHAK

Abstract. 我们描述若干周期无限矩阵群的同构，以及含幺局部矩阵代数的可逆元群的同构。

Introduction

设 $\mathbb{N}$ 为正整数集。施泰尼茨数 [13] 是如下形式的无限形式乘积:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p},$$

其中 $\mathbb{P}$ 为所有素数的集合， $r_p \in \mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ 对所有 $p\in\mathbb{P}$均成立。我们可以按以下规则定义两个施泰尼茨数的乘积:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p}\cdot\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{k_p}=\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{r_p+k_p},\quad r_p,k_p\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\},$$

其中我们假设

$$r_p+k_p=\begin{cases} r_p+k_p & \text{if } r_p<\infty \text{ and } k_p<\infty,\\ \infty & \text{in other cases.}\end{cases}$$

如果存在施泰尼茨数 $s_3\in\mathbb{SN}$ 使得 $s_1=s_2\cdot s_3$., 则施泰尼茨数 s_2 整除施泰尼茨数 s_1（记作 $s_2|s_1$）

设 $\mathbb{F}$ 是一个域。下文中我们始终假设 $\mathrm{char}\ \mathbb{F}\neq 2,3$。若一个域 $\mathbb{F}$ 上的无限 $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 矩阵 A 是分块对角矩阵 $A=\mathrm{diag}(a,a,\ldots)$, 其中 a 对某个 $n\in\mathbb{N}$ 是一个 $(n\times n)$ 矩阵, 则称它为周期的。数 n 称为矩阵 A 的周期, 而矩阵 A 称为 n-周期的。

令 $M_n^p(\mathbb{F})$ 为所有 n-周期（$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$）矩阵构成的代数, 令 $M_n(\mathbb{F})$ 为域 $\mathbb{F}$ 上所有（$n\times n$）矩阵构成的代数。显然,

$$M_n^p(\mathbb{F})\cong M_n(\mathbb{F}),\quad \text{and}\quad M_n^p(\mathbb{F})\subseteq M_m^p(\mathbb{F})\quad \text{if and only if}\quad n\quad \text{divides}\quad m.$$

2020年数学主题分类：20E34，20H20。关键词和短语：无限矩阵；同构；局部矩阵代数；施泰尼茨数。

令 $GL_n^p(\mathbb{F})$ 为 $M_n^p(\mathbb{F})$ 中所有可逆矩阵构成的群，令 $GL_n(\mathbb{F})$ 为 $M_n(\mathbb{F})$ 中所有可逆矩阵构成的群。容易看出，$GL_n^p(\mathbb{F}) \cong GL_n(\mathbb{F})$。

对于施泰尼茨数 s，我们考虑代数

$$M_s^p(\mathbb{F}) = \bigcup_{n|s} M_n^p(\mathbb{F}),$$

以及群

$$GL_s^p(\mathbb{F}) = \bigcup_{n|s} GL_n^p(\mathbb{F})$$

它由代数 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的所有可逆元组成。设

$$SL_n(\mathbb{F}) = [GL_n(\mathbb{F}), GL_n(\mathbb{F})],$$

$$SL_n^p(\mathbb{F}) = [\, GL_n^p(\mathbb{F}), GL_n^p(\mathbb{F})\,] \quad \text{and} \quad SL_s^p(\mathbb{F}) = [\, GL_s^p(\mathbb{F}), GL_s^p(\mathbb{F})\,]$$

分别为群 $GL_n(\mathbb{F})$ $GL_n^p(\mathbb{F})$ 和 $GL_s^p(\mathbb{F})$ 的换位子子群。

若 $n_1 < n_2 < \cdots$ 是正整数序列，且 $n_i | n_{i+1}$、$i \geq 1$ 和 s 是 n_1、n_2、.....的最小公倍数，则

$$GL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset GL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \cdots, \quad \bigcup_{i\geq 1} GL_{n_i}^p(\mathbb{F}) = GL_s^p(\mathbb{F});$$

$$SL_{n_1}^p(\mathbb{F}) \subset SL_{n_2}^p(\mathbb{F}) \subset \cdots, \quad \bigcup_{i\geq 1} SL_{n_i}^p(\mathbb{F}) = SL_s^p(\mathbb{F}).$$

有关群 $GL_s^p(\mathbb{F})$ $SL_s^p(\mathbb{F})$的更多信息，请参见 [1, 6]。

回顾一些关于局部矩阵代数的定义和事实；参见 [2, 3, 4, 5]。

带单位元 $\mathbf{1}$ 的结合 $\mathbb{F}$-代数 A 称为含幺局部矩阵代数（参见[11]），如果对于任意有限个元素 a_1、.....、$a_t \in A$，都存在一个子代数$A' \subset A$，使得 $\mathbf{1}$、a_1、.....、$a_t \in A'$属于该子代数，且$A' \cong M_n(\mathbb{F})$，其中 $n \in \mathbb{N}$.

对于含幺局部矩阵代数 A，令 $D(A)$为所有正整数 n 构成的集合，使得存在一个子代数 A'、$1 \in A' \subset A$、$A' \cong M_n(\mathbb{F})$。集合 $D(A)$的最小公倍数称为代数 A的施泰尼茨数 $\mathrm{st}(A)$；参见 [5]。

J. G. Glimm [9] 证明，每个可数维含幺局部矩阵代数都由其施泰尼茨数唯一确定。注意，代数 $M_s^p(\mathbb{F})$ 是一个可数维含幺局部矩阵代数，且 $\mathrm{st}(M_s^p(\mathbb{F})) = s$.

设 A 是域 $\mathbb{F}$ 上的含幺局部矩阵代数。我们用符号 A^* 表示代数 A 的可逆元群，并令 $[A^*, A^*]$ 为其换位子群。现在我们的目标是描述群 A^*. 的同构

设 R、 S 为环。若映射 φ : $R \to S$ 满足

(1) φ 是 R 与 S的加法群同构，(2) 对任意元素 a、$b \in R.$， $\varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$

定理 1. 设 A 和 B 是含幺局部矩阵 $\mathbb{F}$-代数。若群 $[A^*, A^*]$ 和 $[B^*, B^*]$同构，则环 A 和 B 同构或反同构。此外，对于任意同构 φ : $[A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ ，要么存在环同构θ_1 : $A \to B$ ，使得 φ 是 θ_1 在 $[A^*, A^*]$ 上的限制；要么存在环反同构 θ_2 : $A \to B$ ，使得对于任意元素 $g \in [A^*, A^*]$ ，有

$$\varphi(g) = \theta_2(g^{-1}).$$

若代数 A 和 B 是可数维的，则定理 1 可以表述得更精确。在这种情况下，不失一般性，我们可以假设 $A = M_s^p(\mathbb{F})$，其中 s 是代数 $A.$ 的施泰尼茨数。代数 $M_s^p(\mathbb{F})$在转置 t 下保持不变，而该转置是一个反同构。

定理 2. 设 A 和 B 是可数维含幺局部矩阵 $\mathbb{F}$-代数。若群 $[A^*, A^*]$ 和 $[B^*, B^*]$ 同构，则环 A 和 B 同构。此外，任意同构 φ : $[A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ 要么可扩张为环同构$A \to B$ ，要么存在环同构 $\theta : A \to B$ ，使得对任意元素$g \in [A^*, A^*]$ ，我们有

$$\varphi(g) = \theta\big((g^{-1})^t\big).$$

如果可数维含单位元局部矩阵代数作为环同构，那么它们作为 $\mathbb{F}$-代数也同构；见下文引理 2。因此，定理 2 蕴含

定理 3. 群 $SL_{s_1}^p(\mathbb{F})$ 与 $SL_{s_2}^p(\mathbb{F})$ 同构，当且仅当 $s_1 = s_2.$

为了描述群 $GL_s^p(\mathbb{F})$之间的同构，我们需要引入中心齐次变换的概念。

对于含幺 $\mathbb{F}$ 代数 A，其乘法群 A^* 的中心齐次变换是指一个乘法同态

$$A^* \big/ [A^*, A^*] \to \mathbb{F}^*.$$

定理4. 设 A 和 B 为含幺局部矩阵 $\mathbb{F}$ 代数。对于任意一个乘法群同构 $\varphi\colon A^*\to B^*$，存在一个中心齐次变换 $\chi\colon A^*/[A^*,A^*]\to\mathbb{F}^*$和一个环同构 $\theta_1\colon A\to B$，使得

$$\varphi(g)=\chi(g)\theta_1(g),\quad g\in A^*,$$

或反同构 $\theta_2\colon A\to B$ 使得

$$\varphi(g)=\chi(g)\theta_2(g^{-1}),\quad g\in A^*.$$

与上文一样，在可数维情形下，我们可以给出更精确的结论。

定理5. 设 A 和 B 是可数维含幺局部矩阵 $\mathbb{F}$-代数，且 s 是 A的施泰尼茨数。对于任意乘法群同构$\varphi\colon A^*\to B^*$，存在一个中心齐次变换 $\chi\colon A^*/[A^*,A^*]\to\mathbb{F}^*$ 和一个环同构 $\theta\colon A\to B$，使得

$$\varphi(g)=\chi(g)\theta(g)\quad for\ all\quad g\in A^*,\quad or$$

$$\varphi(g)=\chi(g)\theta\big((g^{-1})^t\big)\quad for\ all\quad g\in A^*.$$

我们的最终目标是描述 $SL_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构群。$\mathbb{F}$-代数 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$ 已在 [3] 中得到描述。

定理6. 设 H 是由自同构 $\psi: g\mapsto(g^{-1})^t$, $g\in SL_s^p(\mathbb{F})$ 生成的二阶循环群。那么

$$\mathrm{Aut}\big(SL_s^p(\mathbb{F})\big)=H\cdot\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)\cdot\mathrm{Aut}(\mathbb{F}).$$

1. Isomorphisms of invertible elements groups of unital locally matrix algebras

群 $SL_n(\mathbb{F})$和 $GL_n(\mathbb{F})$的同构的描述众所周知；参见 [7]。也很容易看出，群 $SL_n(\mathbb{F})$不同构于一个无限递增链的并

$$SL_{n_1}(\mathbb{F})\subset SL_{n_2}(\mathbb{F})\subset\cdots,\quad n_1<n_2<\cdots.$$

因此，在定理 1、定理 2 和引理 1（见下文）的证明中，我们将假设代数 A 和 B 是无限维的。因此，存在一个矩阵子代数 $1\in$

$M_n(\mathbb{F}) \subset A$, $n \geq 4$. 设 A' 是子代数 $M_n(\mathbb{F})$ 在 A中的中心化子。根据 Joseph H. M. Wedderburn 的定理（见 [8, 10, 12]），代数 A同构于

$$M_n(\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} A' \cong M_n(A').$$

我们将把代数 A 与 $M_n(A')$等同起来。

回顾一下，对于任意含幺元 1 的结合环 R 以及任意正整数$k \geq 2$，初等线性群 $E_k(R)$是由所有剪切变换生成的群

$$t_{ij}(a) = I_k + e_{ij}(a),$$

其中 I_k 是单位（$k \times k$）矩阵，$1 \leq i \neq j \leq k$、$a \in R$，而 $e_{ij}(a)$是一个（$k \times k$）矩阵，它在第 i行与第 j列的交点处有元素 a，其余位置均为零。

引理 1. $[A^*, A^*] = E_n(A')$。

证明。考虑任意一个剪切变换 $t_{ij}(a)$ $1 \leq i \neq j \leq n$, $a \in A'$. 。存在一个与 i和 j. 不同的正整数 r, $1 \leq r \leq n$。于是 $t_{ij}(a) = [t_{ir}(1)\ t_{rj}(a)]$. 。我们证明了 $E_n(A') \subseteq [A^*, A^*]$.

现在，考虑任意元素 $g \in [A^*, A^*]$. 存在一个子代数 $M_n(\mathbb{F}) \subset M_q(\mathbb{F}) \subset A$ 使得 $g \in SL_q(\mathbb{F}) = E_q(\mathbb{F})$。考虑代数$M_q(\mathbb{F})$ $1 \leq i \neq j \leq q$中的剪切变换 $t_{ij}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{F}$.

代数 $M_n(\mathbb{F})$ 对角嵌入于代数 $M_q(\mathbb{F})$ 中,

$$a \to \operatorname{diag}(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{k}), \quad k = \frac{q}{n}, \quad a \in M_n(\mathbb{F}).$$

因此，代数 $M_n(\mathbb{F})$ $1 \leq i \leq n$ 的矩阵单位 $e_{ii}(1)$ 被映射为元素

$$\overline{e}_i = \operatorname{diag}(\underbrace{e_{ii}(1), \ldots, e_{ii}(1)}_{k}) \in M_q(\mathbb{F}).$$

我们有 $\overline{e}_i M_q(\mathbb{F}) \overline{e}_i \cong M_k(\mathbb{F})$，并且代数 $M_q(\mathbb{F})$ 可以与代数$M_n\big(M_k(\mathbb{F})\big)$等同，其中 $M_k(\mathbb{F}) \cong A' \cap M_q(\mathbb{F})$ 是子代数 $M_n(\mathbb{F})$ 在 $M_q(\mathbb{F})$ 中的中心化子。

设整数 l 和 r 满足 $(l-1)n < i \leq ln$、$(r-1)n < j \leq rn$，并令$\overline{i} = i - (l-1)n$, $\overline{j} = j - (r-1)n$. 。那么

$$e_{ij}(\alpha) = \overline{e}_{\overline{i}} \cdot e_{ij}(\alpha) \cdot \overline{e}_{\overline{j}}.$$

若 $i-j$ 不能被 n整除，则 $\overline{i} \neq \overline{j}$，因此， $t_{ij}(\alpha)$ 是环$M_n\big(M_k(\mathbb{F})\big)$.的剪切变换

如果 $i-j$ 能被 n整除，那么存在一个整数 m, $1 \leq m \leq q$，使得 $i-m$ 不能被 n整除。在这种情况下， $t_{ij}(\alpha) = [t_{im}(1)\ t_{mj}(\alpha)]$.无论如何， $t_{ij}(\alpha) \in E_n(A')$。引理得证。□

I. Z. Golubchik 和 A. V. Mikhalev [10],以及 E. I. Zelmanov [14] 描述了环上初等线性群的同构。

定理7（I. Z. Golubchik、A. V. Mikhalev、E. I. Zelmanov）。设 R, S 为含有$1_{\ 6}$的环，且 $n \geq 4$, $m \geq 4$ 为整数。若 $\varphi: E_n(R) \to E_m(S)$是初等线性群的同构，则存在中心幂等元 e, f，分别属于矩阵环 $M_n(R)$,$M_m(S)$；还存在同构 $\theta_1: eM_n(R) \to fM_m(S)$和反同构$\theta_2 : (1-e)M_n(R) \to (1-f)M_m(S)$，使得

$$\varphi(g) = \theta_1(eg) + \theta_2((1-e)g^{-1}) \quad \textit{for an arbitrary element} \quad g \in E_n(R).$$

定理 1 的证明。设 A 和 B 是含幺局部矩阵代数，且 $\varphi: [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ 是一个同构。如上所述，我们假设代数 A 和 B 是无限维的。选取正整数 $n \geq 4$ 和 $m \geq 4$，分别整除施泰尼茨数 $\mathrm{st}(A)$ 和 $\mathrm{st}(B)$。于是，代数 A 和 B 可分别与矩阵代数 $M_n(A')$ 和 $M_m(B')$ 等同，其中 A'、B' 分别是 A 和 B 中子代数 $1 \in M_n(\mathbb{F})$ 和 $1 \in M_m(\mathbb{F})$ 的中心化子。

根据引理 1,

$$[A^*, A^*] = E_n(A'), \quad [B^*, B^*] = E_m(B'),$$

且 $\varphi: E_n(A') \to E_m(B')$ 是一个同构。由于代数 A、B 是单代数，它们仅有的中心幂等元为 0 和 1。根据 Golubchik-Mikhalev-Zelmanov 定理（见定理 7），存在一个同构 $\theta_1: A \to B$，使得对于任意 $g \in [A^*, A^*]$，$\varphi(g) = \theta_1(g)$；或者存在一个反同构 $\theta_2: A \to B$，使得

$$\varphi(g) = \theta_2(g^{-1}) \quad \text{for an arbitrary element} \quad g \in [A^*, A^*].$$

定理 1的证明至此完成。 □

定理 2 的证明。设 A、B 是可数维含单位元局部矩阵代数，且 $\varphi: [A^*, A^*] \to [B^*, B^*]$ 是一个同构。我们已经提到，代数

A 可以与代数 $M_s^p(\mathbb{F})$ 等同，其中 $s = \mathrm{st}(M_s^p(\mathbb{F}))$，并且代数 $A = M_s^p(\mathbb{F})$ 在转置 t. 下保持不变

若 $\theta\colon A \to B$ 是反同构，则映射 $\theta'\colon A \to B$, $\theta'(a) = \theta(a^t)$ 是同构，并且对于任意元素 $g \in [A^*, A^*]$. ， $\theta(g^{-1}) = \theta'\big((g^{-1})^t\big)$ 。定理 2 的证明至此完成。□

引理 2. 设 A 和 B 是可数维含单位元局部矩阵代数。若 A 和 B作为环同构，则它们作为 $\mathbb{F}$-代数也同构。

证明. 由于代数 B 是可数维的，不失一般性，可设 $B = M_s^p(\mathbb{F})$，其中 $s = \mathrm{st}(M_s^p(\mathbb{F}))$。域 $\mathbb{F}$的任意自同构 τ都可扩张为环 $M_s^p(\mathbb{F})$的自同构 $\widetilde{\tau}$，

$$\widetilde{\tau}\colon (a_{ij})_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \mapsto \big(\tau(a_{ij})\big)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}.$$

设 $\theta\colon A \to B$ 是一个环同构。那么 θ 将代数 A 的中心 $\mathbb{F}\cdot 1_A$ 映射到代数 B. 的中心 $\mathbb{F}\cdot 1_B$。于是存在域 $\mathbb{F}$ 的一个自同构 τ，使得对于任意元素 $\alpha \in \mathbb{F}.$， $\theta(\alpha\cdot 1_A) = \tau(\alpha)\cdot 1_B$。复合映射 $\theta\circ\widetilde{\tau}^{-1}$ 是 $\mathbb{F}$-代数 $A \to B.$ 的一个同构。引理得证。□

在证明定理 4 和定理 5 之前，我们将说明中心伸缩如何在局部矩阵代数中出现。

设 s 是一个施泰尼茨数。假设对于所有满足 $n|s$ 的整数 $n \geq 1$ ，都存在同态 $\tau_n\colon \mathbb{F}^* \to \mathbb{F}^*$ ，使得

(i) $\big(\tau_n(\alpha)\big)^n = \alpha$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{F}^*$ 都成立；(ii) 若 $m|n$、$n|s$、 $n = m\cdot k$，则对所有 $\alpha \in \mathbb{F}^*.$， $\tau_n(\alpha) = \tau_k\big(\tau_m(\alpha)\big)$

例如，如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 是实数域，且 s 是不能被 2 整除的施泰尼茨数，那么映射 $a \mapsto a^{\frac{1}{n}}$、$a \in \mathbb{R}$是定义良好的，并满足 (i)、(ii)。

对于任意元素 $a \in A$，我们将按如下方式定义其相对行列式 $\det_r(a)$。存在一个矩阵代数 $M_n(\mathbb{F}) \subset A$ ，使得 1, $a \in M_n(\mathbb{F})$。令 $\det_{M_n(\mathbb{F})}(a)$表示矩阵 a 在 $M_n(\mathbb{F})$中的行列式。于是

$$\det\nolimits_r(a) = \tau_n\big(\det\nolimits_{M_n(\mathbb{F})}(a)\big)$$

它不依赖于子代数 $M_n(\mathbb{F})$的选择。事实上，若 1, $a \in M_m(\mathbb{F}) \subset M_n(\mathbb{F})$，则子代数 $M_m(\mathbb{F})$ 对角嵌入到 $M_n(\mathbb{F})$中。因此，

$$\det_{M_n(\mathbb{F})}(a) = \big(\det_{M_m(\mathbb{F})}(a)\big)^k, \quad k = n/m.$$

记 $\alpha = \det_{M_m(\mathbb{F})}(a)$。那么，由 (i) 和 (ii) 可得，

$$\tau_n(\alpha^k) = \tau_m\big(\tau_k(\alpha^k)\big) = \tau_m(\alpha).$$

容易看出，对于任意元素 a、$b \in A$，$\det_r(ab) = \det_r(a)\det_r(b)$，且 $\det_r(1) = 1$。元素 $a \in A$ 可逆当且仅当 $\det_r(a) \neq 0$. 。该映射

$$A^* \to \mathbb{F}^*, \quad a \mapsto \det_r(a),$$

是中心齐次变换。

设 R 是一个含幺元 1 的环，$n \geq 2$ 是一个整数。除初等线性群$E_n(R)$ 外，考虑由 $E_n(R)$ 和所有 $R.$ 上的可逆对角矩阵生成的群 $GE_n(R)$

以下结果归功于 I. Z. Golubchik 和 A. V. Mikhalev [10], 以及 E. I. Zel- manov [14]。

定理 8（I. Z. Golubchik、A. V. Mikhalev、E. I. Zelmanov）。设 R、S 是具有$1\ 6$的环，$m \geq 4$、$n \geq 4$ 是整数，并设 $\varphi : GE_n(R) \to GE_m(S)$ 是一个同构。那么，存在矩阵环 $M_n(R)$ 和 $M_m(S)$ 的中心幂等元 e 和 f，一个同构 $\theta_1 : eM_n(R) \to fM_m(S)$，一个反同构 $\theta_2 : (1-e)M_n(R) \to (1-f)M_m(S)$，以及一个同态 $\chi : GE_n(R) \to Z(GE_m(S))$，其映入群 $GE_m(S)$ 的中心，使得

$$\varphi(g) = \chi(g)\big(\theta_1(eg) + \theta_2((1-e)g^{-1})\big) \quad \textit{for an arbitrary element} \quad g \in GE_n(R).$$

设 A 是一个含幺局部矩阵代数，$1 \in M_n(\mathbb{F}) \subset A$，并设 $n \geq 4.$ 。考虑子代数 $M_n(\mathbb{F})$ 在 $A.$ 中的中心化子 A' 。如上所述，我们将代数 A 视为矩阵代数 $M_n(A')$。

引理 3。 $A^* = GE_n(A')$。

证明。设 $g \in A^*$. 存在一个矩阵子代数 $M_q(\mathbb{F}) \subset A$ 使得 $M_n(\mathbb{F}) \subset M_q(\mathbb{F})$,$g \in M_q(\mathbb{F})$。那么 $g \in \big(M_q(\mathbb{F})\big)^* = GL_q(\mathbb{F})$。众所周知，群 $GL_q(\mathbb{F})$ 是

由换位矩阵和对角矩阵生成的

$$d_{11}(\alpha) = \operatorname{diag}(\underbrace{\alpha, 1, 1, \ldots, 1}_{q}), \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{F}.$$

如引理 1 的证明所示，考虑代数 $M_n(\mathbb{F})$ 的矩阵单位 $e_{ii}(1)$ $1 \leq i \leq n$。它们作为幂等元嵌入在 $M_q(\mathbb{F})$ 中

$$\overline{e}_i = \operatorname{diag}(\underbrace{e_{ii}(1), \ldots, e_{ii}(1)}_{q/n}).$$

显然,

$$d_{11}(\alpha) - I_q = \overline{e}_1 \left(d_{11}(\alpha) - I_q\right) \overline{e}_1.$$

因此， $d_{11}(\alpha)$ 是 $M_n\big(A' \cap M_q(\mathbb{F})\big)$, $d_{11}(\alpha) \in GE_n(A')$ 的可逆对角矩阵。我们证明了 $GL_q(\mathbb{F}) \subset GE_n(A')$，因此， $g \in GE_n(A')$。引理的证明至此完成。□

现在，定理 4 和定理 5 直接由代数 A 和 B的单性、引理 3，以及 I. Z. Golubchik 和 A. V. Mikhalev [10], 以及 E. I. Zelmanov [14]的结果（定理 8）得出。

2. Isomorphisms of groups of periodic infinite matrices

现在来描述 $SL_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构群。

定理6的证明。令 $\mathbf{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$ 为 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的环自同构群。

我们断言

$$\operatorname{Aut}\big(SL_s^p(\mathbb{F})\big) = H \cdot \operatorname{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big).$$

事实上，根据定理 2，任意自同构 $\varphi \in \mathbf{Aut}\big(SL_s^p(\mathbb{F})\big)$ 要么可以扩展为环 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构，此时 $\varphi \in \mathbf{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$; 要么存在自同构 $\theta \in \mathbf{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$，使得

$$\varphi(g) = \theta\big((g^{-1})^t\big) \quad \text{for all} \quad g \in SL_s^p(\mathbb{F}),$$

此时 $\varphi = \psi \circ \theta \in H \cdot \mathbf{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$.

我们来证明

$$\operatorname{Aut}_{\text{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big) = \operatorname{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big) \cdot \operatorname{Aut}(\mathbb{F}).$$

在引理 2 的证明中，我们证明了，域 $\mathbb{F}$ 的任意自同构 τ 都会导出环 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构 $\widetilde{\tau}$。映射 $\tau \mapsto \widetilde{\tau}$ 是群 Aut($\mathbb{F}$) 到群 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{ring}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big)$. 的一个嵌入。

若 φ 是环 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的自同构，则其在环 $M_s^p(\mathbb{F})$ 的中心 $\mathbb{F}\cdot 1$ 上的限制 $\varphi\big|_{\mathbb{F}\cdot 1}$ 是域 $\mathbb{F}$ 的自同构，并由此得到自同构 $\widetilde{\varphi\big|_{\mathbb{F}\cdot 1}}$. 显然，

$$\varphi\cdot\big(\widetilde{\varphi\big|_{\mathbb{F}\cdot 1}}\big)^{-1}\in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}\big(M_s^p(\mathbb{F})\big),$$

这就推出了定理6的结论。 □

References

[1] O. Bezushchak，关于对角局部 SL群，基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学学报。物理与数学系列，4 (2019)，8–11.[2] O. Bezushchak，局部矩阵代数与群的导子和自同构，乌克兰国家科学院通报，9 (2020)，19–23.[3] O. Bezushchak，局部矩阵代数的导子和自同构，代数学杂志，576 (2021)，1–26.[4] O. Bezushchak，B. Oliynyk，含幺局部矩阵代数的初级分解，数学科学通报 10 (2020)，第1期。DOI 10.1142/S1664360720500006X.[5] O. Bezushchak，B. Oliynyk，含幺局部矩阵代数与施泰尼茨数，代数学应用杂志，19 (2020)，第9期。DOI 10.1142/SO219498820501807.[6] O. O. Bezushchak，V. I. Sushchans'kyi，无限维向量空间上的周期定义线性变换群，乌克兰数学杂志，67 (2016)，第10期，1457–1468.[7] A. Borel，线性代数群，（数学研究生教材，126），第2版，施普林格，纽约，（1991）。[8] Yu. A. Drozd，V. V. Kirichenko，有限维代数，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，（1994）。[9] J. G. Glimm，关于一类算子代数，美国数学会汇刊，95 (1960)，第2期，318–340.[10] I. Z. Golubchik，A. V. Mikhalev，结合环上的一般线性群的同构，莫斯科大学学报第1辑：数学与力学，3 (1983)，61–72.[11] A. Kurosh，单环的直分解，数学文集 /数学文集/ 新系列，11(53)，第3期 (1942)，245–264.[12]R. S. Pierce，结合代数，数学研究生教材，88，施普林格出版社，柏林-海德堡-纽约，（1982）。[13] E. Steinitz，代数域理论，纯粹与应用数学杂志，137 (1910)，167–309.[14] E. I. Zelmanov，结合环上线性群的同构，西伯利亚数学杂志，26 (1985)，第4期，49–67。

Oksana Bezushchak: Faculty of Mechanics and Mathematics,
Taras Shevchenko NationalUniversity of Kyiv, Volodymyrska,60, Kyiv 01033, Ukraine电子邮箱：bezushchak@knu.ua