arXiv:2301.06933v1 [math.GT] 17 Jan 2023

纽结与空间图的分解

ERICA FLAPAN，HUGH HOWARDS

Abstract. Menasco 证明了一个令人惊讶的结果：如果 G 某链环 L 有一个约化、交替、连通的投影，且 G 是素的，那么 L 它就是素的。此结果已推广到其他类别的链环、缠结和空间图。我们指出了先前关于缠结和空间图的分解结果中的一些问题，并为缠结和空间图得到了新的、更一般的结果。

1. Introduction

人们不会认为，仅凭观察单个投影就能对链环得出多少结论。然而在1984年，Menasco证明了一个引人注目的结果：如果一个链环具有约化交替投影，那么就可以从该投影判断这个链环是可分的还是复合的 [7]。我们关注缠结和空间图的类似结果。下文将给出Menasco的结果及相关定义。

Menasco 定理。设 L 是一个具有约化交替投影G的链环。那么

(1) 如果 G 是连通的，那么 L 是不可分裂的。(2) 如果 L 是不可分裂的且 G 是素的，那么 L是素的。

定义 1。设 L 是一个在球面 P上具有投影 G 的链环。

- •如果将 G 的交叉点替换为奇点后得到的影图是连通的，我们就称 G 是连通的。
- • 如果每个与 L 横截相交于两点的球面都围成一个与 L 相交于一条平凡弧的球，我们就称 L 是素的。
- • 如果 P 中每个与 G 横截相交于两点的圆都围成一个与 G 相交于一条没有交叉点的弧的圆盘，我们就称 G 是素的。

Menasco 定理的（1）和（2）部分已由 Tsukamoto [16], Cromwell [2], Thistlethwaite [14], Ozawa[9] 以及 Futer、Kalfagianni 和 Purcell [4], 推广到更广泛的链环类别，也由 Cromwell [3],推广到缠结，并由 Sawollek [10] 和 Adams 等人 [1]推广到空间图。遗憾的是，对缠结和空间图投影的研究并非总是严谨。本文旨在指出以往研究中的一些问题，并进一步推广 Menasco 定理，以适用于定理 1、2 和 3 中的缠结和空间图。

Date: 2023年1月18日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 57M25、57M15、92E10、05C10。*Key words and phrases.* 手征、非手征、空间图、三维流形。第一作者部分获得美国国家科学基金会DMS-1607744号资助。

解决以往结果中的问题，并在定理 1、2 和 3 中进一步推广适用于缠结和空间图的 Menasco 定理。

特别是，在第 2 节中，我们陈述了若干适用于更广泛链环类别的推广，并指出了 Menasco 定理表述中的一些问题。随后，在第 3 节中，我们讨论了 Cromwell 将 Menasco 的结果推广到缠结的工作，并利用关于链环的结果，证明了一个适用于比 Cromwell 所考虑的范围更广的缠结类别的推广。在第 4 节中，我们讨论了 Sawollek 和 Adams 等人关于空间图的定义与结果。最后，在第 5 节中，我们以关于缠结的结果为基础，得到了关于空间八字图的结果，其范围超越了 Sawollek 和 Adams 等人的研究。

2. Generalizations of Menasco's Theorem to other links

事实上，我们在引言中给出的 Menasco 定理第（2）部分的表述，并非他陈述其结果时所用的表述。他的定理实际表述如下。

Menasco 的表述。 [7] 设 L 是一个具有约化交替投影 G的链环。则

（1）若 G 连通，则 L 不可分裂。（2）设 L 不可分裂。若对于投影平面内任意一个圆盘 D ，其边界与 G 横截相交于恰好两点时， $G \cap D$ 是一条平凡弧，则 L 是素的。

然而，照此表述，第（2）部分中的假设对于链环的非平凡投影 G 永远无法满足。具体而言，设 D 是一个圆盘，它包含 G 的全部部分，只留下一个没有交叉点的小弧段在外。那么 $G \cap D$ 必然是非平凡的。因此，上述定理的第（2）部分只能用于没有交叉点的链环。与 Menasco 定理推广相关的其他一些表述和定义中也存在同样的错误。因此，我们采用引言中给出的 Menasco 定理表述。这里我们给出一些关于链环投影的相关结果。

以下定理由 Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 于 1987 年独立证明。

Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 定理。 [5]，[8]，[13]任何具有至少一个交叉点且投影连通、约化并交替的链环，都是非平凡的。

2002 年，Ozawa 将 Menasco 定理推广到正链环，即具有一种定向投影、其中所有交叉均为正的链环。

Ozawa 定理。 [9] 设 L是一个链环，其投影 G 连通且为正。则 L 不可分裂。此外，若 L 非平凡且 G是素的，则 L是素的。

2003 年，Stoimenow 证明了 Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 定理的以下推广；该结果与 Ozawa 的结果共同表明，任何具有约化正连通投影的链环都是非平凡的。

Stoimenow 定理。 [12] 任何具有至少一个交叉点的约化正投影的纽结都是非平凡的。

Menasco 定理的第（1）部分于 1988 年由 Thistlethwaite 推广到半适宜链环；2015 年，Futer 等人将第（2）部分推广到满足一个附加条件的半适宜链环。回顾以下定义。

定义 2. 设 G 为一个链环的投影。若按图 1 中间图示的方式对所有交叉点进行分辨（忽略灰色线段），则得到一组圆，称为 G 的全-A 分辨。若按右图所示的方式对所有交叉点进行分辨，则得到一组圆，称为 G 的全-B 分辨。



FIGURE 1. 如果将这些灰色线段添加到全-A 分辨或全-B 分辨中，我们就会得到一个三价图。

定义 3. 考虑一个三价平面图，它是按照图 1 所示，将灰色边添加到链环投影 G 的全-A 分辨或全-B 分辨中得到的。如果每条这样的灰色线段的端点都位于全-A 分辨或全-B 分辨中不同的圆上，我们就称 G 为 A-适宜或 B-适宜。在任一种情况下，我们都称 G 为半充分。如果 G 同时是 A-适宜和 B-适宜的，那么我们就称 G 为适宜。

Thistlethwaite 定理。 [15] 设 L 是一个链环，其投影 G 是半充分的，且至少有一个交叉。

(1) 如果 G 是约化的，那么 L 是非平凡的。
(2) 如果 G 是连通的，那么 L 是不可分裂的。

为了陈述 Futer、Kalfagianni 和 Purcell 的结果，我们还需要一些定义。

链环投影的一个扭转区域，是投影中由二边形组成的极大序列。例如，$(2, n)$-环面链环的标准投影中，所有交叉点都位于同一个扭转区域；而一个参数为 $|p|$、$|q|$、$|r| > 1$ 的 (p, q, r)-椒盐链环标准投影则有三个扭转区域。

定义 4。如果一个 A-适宜（分别为 B-适宜）链环投影具有以下性质，则称其为扭转 A-适宜（分别为扭转 B-适宜）：

在全-A（分别为全-B）分辨中，连接同一对圆的任意一对灰弧，均来自对同一扭转区域中的交叉点进行分辨。若链环投影是扭转 A-适宜或扭转 B-适宜，则称其为扭转适宜。

Futer、Kalfagianni 和 Purcel 的定理。 [4] 设 L 是一个投影 G 连通、约化且扭转适宜的链环。那么， L 是素链环，当且仅当 G 是素链环。

任何交替链环投影都是半充分的 [7] ，任何正链环投影也都是半充分的 [9]。因此，若不是因为对扭转区域的限制，Futer 等人的结果便能推出 Menasco 定理和 Ozawa 定理。

3. Splittings of tangles

Menasco 定理也已推广到投影（β， τ）为强交替的双弦缠结（B， T）（即 τ至少有一个交叉，且其闭合 N（τ）和 D（τ）均为约化交替缠结）。请注意，有些作者要求强交替缠结投影是连通的，但 Cromwell [3] 并无此要求。

定义 5. 设 (B,T) 是一个非有理双弦缠结。

- 如果每个与 T 横截于两点的 B 中的球面都围成一个球，且该球与 T 的交集是一条平凡弧，我们就称 (B,T) 为素。否则，称 (B,T) 为复合。
- 如果 β 中每个与 τ 横截于两点的圆都围成一个圆盘，且该圆盘与 τ 的交集是一条没有交叉点的弧，我们就称 (β,τ) 的投影 (B,T) 为素。否则，称 (β,τ) 为复合。

注意，如果 (B,T) 可分（即存在一个将两条弦分开的圆盘），那么它要么是有理的，要么存在一个与 T 相交于两点的 B 中的球面，该球面围成一个球，且该球与 T 的交集是一条打结弧。因此，每个可分裂双弦缠结要么是有理的，要么是复合的。

Cromwell 定理。（ [3] 中的定理 5(b)）设 (B,T) 是一个缠结，其投影 (β,τ) 是强交替的。那么，当且仅当 (β,τ) 是素的，(B,T) 才是素的。

Cromwell 的证明存在一些漏洞，我们在图 2 中加以说明。具体来说，他的证明断言，如果缠结的某个闭合是素结，那么该缠结也必定是素的。然而，(β_1,τ_1) 是复合的，而它的分子闭合却是素结。Cromwell 的证明还断言，如果一个强交替缠结投影可以写成缠结和，那么每个加项都是强交替的。然而，强交替投影 (β_2,τ_2) 可以拆分为两个并非强交替的缠结之和。虽然这对 Cromwell 的证明并非必要，但还值得指出，(β_2,τ_2) 是一个素缠结，而

它的闭合 $D(\tau)$ 是一个复合纽结。因此，缠结是否为素或复合，并不能由其闭合是否为素或复合来确定。

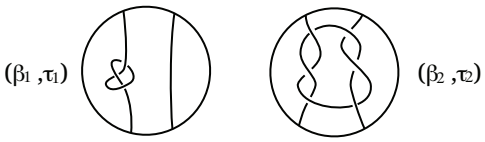

FIGURE 2. (β_1, τ_1) 是复合的，但其分子闭合是素的。(β_2, τ_2) 是强交替的，但它是若干并非强交替的缠结之和。

Shimokawa [11] 在附加假设 (β, τ) 连通的情况下，断言了与 Cromwell 相同的定理，并简言之指出该结果可用 Menasco 的方法证明。

我们关于缠结的结果强于 Cromwell 定理，并以推论的形式蕴含该定理。我们先给出两个引理。

引理1. 设 (β, τ) 是一个二弦缠结的连通投影，且 $D(\tau)$ 是约化的；再设 (β', τ') 是 (β, τ) 的一个 π-旋转。则 $N(\tau + \tau')$ 是约化且连通的；若 $D(\tau)$ 是交替的或正的，或者 $N(\tau)$ 与 $D(\tau)$ 是扭转适宜的，则 $N(\tau+\tau')$ 分别是交替的、正的或扭转适宜的。

证明. 设 P 为投影球面，设 $\gamma = \partial\beta$、$\gamma' = \partial\beta'$，并设 β_1 和 β_2 为连接 (β, τ) 与 (β', τ') 的条带，如图3所示。

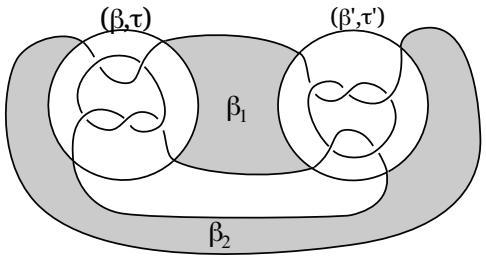

FIGURE 3. $N(\tau + \tau')$，其中标出了条带 β_1 和 β_2。

步骤1：我们证明 $N(\tau + \tau')$ 是约化且连通的。

反设存在一个圆 $C \subseteq P$，它要么是 $N(\tau + \tau')$ 的分离圆，要么与 $N(\tau + \tau')$ 横截地相交于单个交叉点。由于 $D(\tau)$ 是约化的，且 (β, τ) 是连通的，C 不能包含于 β，因此 C 也不能包含于 β'。此外，由于 C与 $N(\tau + \tau')$ 至多相交于一点，它不可能与 $\beta \cup \beta'$不相交。因此不失一般性，我们可以假设 C 与 γ 横截地相交于最少（但非零）个点。

反设 $C \cap \beta$ 的某条弧与 τ 不相交。设 A 是这样一条弧，且它在 β 中是最外侧的。由于 (β, τ) 是连通的， A 的两个端点必定位于 $\gamma - \tau$ 的同一个分支中。现在通过割补，我们可以用一条紧邻 β 外侧的弧替换 A，从而减少 $C \cap \gamma$ 上的点数。这与极小性矛盾，因此 $C \cap \beta$ 或 $C \cap \beta'$ 的任何弧都不可能与 $N(\tau + \tau')$ 不相交。

因此， $C \cap \beta$ 是一条单独的弧 A，它与 τ 相交于一个交叉点，并且 $C \cap \beta' = \emptyset$。由于 $C \cap \beta_i$ 中的任何弧都不能与 $N(\tau + \tau')$ 相交， $C \cap \beta_i$ 中的任何弧的两个端点都必须位于 γ 中，因此可以通过对 C 做同痕将其移除。由此可知， A 的端点必须包含在 $\gamma - \partial(\beta_1 \cup \beta_2)$ 中。如果 A 的端点位于 $\gamma - \partial(\beta_1 \cup \beta_2)$ 的不同分支中，那么 $C - A$ 就必须与 $\beta' \cup \beta_1 \cup \beta_2$ 相交，这不可能发生。如果 A 的端点位于 $\gamma - \partial(\beta_1 \cup \beta_2)$ 的同一分支中，那么 A 与 $\gamma - \tau$ 中的一条弧将构成一个圆，该圆与 $D(\tau)$ 横截地相交于一个交叉点；但这不可能发生，因为 $D(\tau)$ 是约化的。由此可知， C 不可能存在，因此 $N(\tau + \tau')$ 如所要求的那样是约化且连通的。

步骤 2：我们证明，若 $D(\tau)$ 是交替的或为正，则 $N(\tau + \tau')$ 分别是交替的或为正。

若 $D(\tau)$ 是交替的，则（β, τ）的东北和东南端点之前的最后一个交叉点互为相反（即一个在上，另一个在下），而（β, τ）的西北和西南端点之前的最后一个交叉点也互为相反。在 $N(\tau + \tau')$ 中，（β, τ）的东北端点与（β', τ'）的西北端点相连。此外，由于（β', τ'）是（β, τ）的一个 π-旋转，（β', τ'）的西北端点之前的最后一个交叉点，与（β, τ）的东南端点之前的最后一个交叉点相同；而该交叉点与（β, τ）的东北端点之前的最后一个交叉点相反。对（β, τ）和（β', τ'）中在 $N(\tau + \tau')$ 中相连的另外三对端点采用同样的论证，可知 $N(\tau + \tau')$ 是交替的。

如果 $D(\tau)$ 是正的，那么我们将 (β, τ) 的弦定向，使其定向与 $D(\tau)$ 的定向一致；并将 (β', τ') 的弦定向为把 (β, τ) 中已定向的弦旋转 π 后所得的方向。采用这些定向后，(β, τ) 的所有交叉点因而也包括 (β', τ') 的所有交叉点都是正的。现在，(β, τ) 的 NE 和 SE 端点处的定向相反（即一个朝内，另一个朝外），而 (β, τ) 的 NW 和 SW 端点处的定向也相反。因此，与交替情形的论证相同，定向 (β, τ) 和 (β', τ') 在 $N(\tau + \tau')$ 上诱导出一个相容的定向，使所有交叉点均为正。

步骤 3：我们证明，如果 $N(\tau)$ 和 $D(\tau)$ 都是扭转 A-适宜的，那么 $N(\tau + \tau')$ 就是扭转 A-适宜的。

令 S_1 和 S_2 表示 $N(\tau + \tau')$ 的全 A 分辨中同时与 β 和 β' 相交的圆，令 $\alpha_i = S_i \cap \beta$，并令 $\tau_A = \alpha_1 \cup \alpha_2$。

现在反设，在 $N(\tau + \tau')$ 的全-A 分辨中，某条灰色弧 G 的两个端点位于同一个圆 C 上。由于 G 由对一个交叉点进行平滑得到，它必定完全包含在

β 或 β'的内部。无妨设 $G \subseteq \beta$，因此 $C \cap \beta$ 非空。假设 $C \subseteq \beta$。由于 $N(\tau)$的交叉点恰好是 $N(\tau + \tau')$中包含在 β内的交叉点，C也是 $N(\tau)$的全-A分辨中的一个圆。这不可能，因为$N(\tau)$是 A-适宜的。因此， C必定是 S_1 或 S_2，进而 G的两个端点必定都位于 α_1 或 α_2上。现在， τ_A 包含在 $N(\tau)$或 $D(\tau)$的全-A分辨中的一个圆内。由此可知， G的两个端点都位于这个圆上；但这不可能，因为 $N(\tau)$和 $D(\tau)$都是A-适宜的。因此， $N(\tau + \tau')$是 A-适宜的，证毕。

为证明 $N(\tau + \tau')$ 满足扭转区域条件，考虑 $N(\tau + \tau')$ 的全-A分辨中连接同一对圆 C_1 和 C_2 的两条灰弧 G_1 和 G_2 。不失一般性， $G_1 \subseteq \beta$。因此，C_1 和 C_2 都与 β相交。我们根据 C_1 和 C_2与 τ_A的相交方式分类讨论。

首先，假设 C_1 和 C_2 都与 τ_A不相交。由于 $G_1 \subseteq \beta$，可得 $C_1 \cup C_2 \subseteq \beta$，从而 $G_2 \subseteq \beta$。因此， C_1 和 C_2 也是 $N(\tau)$ 的全-A分辨中的圆。现在，由于 $N(\tau)$ 是扭转 A-适宜的， G_1和 G_2必定来自 $N(\tau)$ 的同一扭转区域。由于 C_1 和 C_2都与 τ_A不相交，该扭转区域位于 β的内部，因此也必定是 $N(\tau + \tau')$ 的一个扭转区域。

接下来，假设 C_1 与 τ_A 不相交，且 C_2 包含 α_1。由于$G_1 \subseteq \beta$，可知 $C_1 \subseteq \beta$。令 X 表示 $\beta - \tau_A$ 中包含 C_1的区域。那么 $G_1 \cup G_2 \subseteq X$，并且要么 ∂X 包含 $\alpha_1 \cup \alpha_2$ 且与 $\partial\beta_1 \cup \partial\beta_2$不相交，要么 ∂X 与 α_2 及 $\partial\beta - \partial\tau_A$ 的顶部和底部弧都不相交。首先考虑前一种情况。令 C_3 表示 $D(\tau)$ 的全-A 分辨中包含 α_1的圆。那么 G_1 和 G_2 在 C_1 与 C_3之间延伸。由于 $D(\tau)$ 是扭转- A适宜的，这意味着 G_1和 G_2 来自 $D(\tau)$ 同一扭转区域中的交叉点，且该扭转区域包含在 X中。现在，由于 X 与 $\partial\beta_1 \cup \partial\beta_2$不相交， $D(\tau)$ 的这个扭转区域位于 β的内部，因此也必定是 $N(\tau + \tau')$ 的一个扭转区域。

接下来，假设 ∂X 与 α_2 以及 $\partial\beta - \partial\tau_A$的顶部和底部弧不相交。令 C_3 表示 $N(\tau)$的全-A分辨中包含 $\alpha_1 \cup \alpha_2$的圆。那么， G_1和 G_2连接 C_1与 C_3。由于 $N(\tau)$是扭转 A-适宜的，这意味着 G_1 和 G_2 来自 $N(\tau)$中同一扭转区域内的交叉点，而该扭转区域包含在 X中。现在，由于 X 与 $\partial\beta - \partial\tau_A$的顶部和底部弧不相交， $N(\tau)$的这个扭转区域位于 β的内部，因此也必定是 $N(\tau + \tau')$的一个扭转区域。

最后，假设 $\alpha_1 \subseteq C_1$ 和 $\alpha_2 \subseteq C_2$。由于 $G_1 \subseteq \beta$，这意味着 G_1位于 α_1 和 α_2之间。因此，在 $N(\tau)$的全-A分辨中，G_1 的两个端点都在由 τ_A 以及 $\partial\beta - \partial\tau_A$的顶部和底部弧组成的圆上。但这不可能发生，因为 $N(\tau)$是 A-适宜的。因此， $N(\tau + \tau')$是扭转 A-适宜的，从而我们证明了该引理。□

引理 2. 设 (B,T) 是一个缠结，其投影 (β,τ) 不是素的，且至少包含一个交叉。若 $D(\tau)$ 是约化的，并且是交替的、正的或半充分的，则存在一个圆盘 $\delta \subseteq \beta$，其与 τ 的交集是 T中一条打结弧的投影。

证明。回想一下，由于 (β,τ) 不是素的，按定义，存在一个圆$C \subseteq \beta$ 与 τ 相交于两点，使得 C 围成一个圆盘 $\delta \subseteq \beta$，其与 τ 的交集是一条至少有一个交叉点的弧。我们需要确认弧 $\tau \cap \delta$ 实际上是某条打结弧的投影。

设 S 是通过在 B 中 C 的弧上方和下方各加盖而得到的球面，使得 B 中由 S 围成的球投影为 δ，而弧$T \cap \Delta$ 投影为弧 $\tau \cap \delta$。由弧 $T \cap \Delta$ 得到 K：在 $\partial\Delta$ 中连接其端点，使其投影κ 中的所有交叉点都位于 $\tau \cap \delta$中。由于 $D(\tau)$是约化的，且为交替、正或半充分的，因此 κ也具有相同性质。由 Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 定理可知，当 κ为交替时，K 是一个非平凡结；由 Stoimenow 定理可知，当κ 为正时，K 是一个非平凡结；由 Thistlethwaite 定理可知，当 κ 为半充分时，K 是一个非平凡结。因此，$T \cap \Delta$ 是一条打结弧，从而 $\tau \cap \delta$ 是某条打结弧的投影。□

接下来，我们在以下定义中汇集 Menasco (M)、Ozawa (O) 以及 Futer 等人 (F) 的假设。

定义 6. 设 (β,τ) 是一个二弦缠结的投影。若 $N(\tau)$ 和 $D(\tau)$ 均为约化的，且以下条件至少有一个成立，则称 (β,τ) 满足 MOF。

(M) $N(\tau)$ 或 $D(\tau)$ 中至少有一个是交替的。

(O) $N(\tau)$ 或 $D(\tau)$ 中至少有一个是正的。

(F) $N(\tau)$ 和 $D(\tau)$ 是连通的，并且二者均为扭结 A-适宜的，或二者均为扭结 B-适宜的。

现在我们利用上述引理来证明以下结论。

定理 1. 设 (B,T) 为一个非有理缠结，其投影 (β,τ) 满足 MOF。那么 (β,τ) 是素的，当且仅当 (B,T) 是素的。

注意，如果 (β,τ) 是强交替且连通的，根据 Lickorish 和 Thistlethwaite [6] 可知，(B,T) 不可能是有理的。

证明. 假设 (β,τ) 不是素的。若满足假设 (M) 或 (O)，则必要时可用一次 $\frac{\pi}{2}$ 旋转替换 (β,τ)，使得 $D(\tau)$ 是交替的或正的。由此可知 (β,τ) 满足引理 2 的假设。因此，存在一个圆盘 $\delta \subseteq \beta$，其与 τ 的交集是 T中一条打结弧的投影。由此可知 (B,T) 不是素的。

为证明逆命题，假设 (B,T) 不是素的。如果 (β,τ) 不连通，那么存在一条弧 $A \subseteq \beta - \tau$，将τ的弦分隔开。令 A_1 和 A_2 为 $\partial\beta - A$的弧。那么对于每个 i，令 $C_i = A \cup A_i$

并令 β_i 为 β 中由 C_i围成的圆盘。那么 τ 的一条弦位于每个 β_i中。如果这两条弦都是平凡的，那么 (β,τ) 就是平凡的，因此也是有理的。因此，这两条弦中至少有一条是非平凡的，所以 (β,τ) 不是素的。

因此，我们假设（β,τ）是连通的。设（β',τ'）是（β,τ）的一个 π-旋转，设（B',T'）是一个缠结，其投影为（β',τ'），设 $L=N(T+T')$的投影为 $G=N(\tau+\tau')$。由于（β,τ）是连通的且满足 MOF，引理1表明 G是约化且连通的，并且是交替的、正的或扭转适宜的。此外，若 G 是交替的，则根据 Menasco 定理的第一部分， L 是不可分裂的。

由于（B,T）既不是素的，也不是有理的，因此它必定是复合的。因此， B 中存在一个球与 T 相交于一条打结弧。由于（B',T'）也有同样的性质，链环 L 是复合的。现在，我们可以应用 Menasco、Ozawa 或 Futer 等人的定理，得出 G 不是素的。因此，投影球面 P 上存在一个圆 C，它与 G 横截地相交于两点，并且 $P-C$ 的两个分支都不与 G 相交于一条平凡弧。若 C 包含于 β或 β'中，则（β,τ）不是素的，这样我们就完成了证明。

我们假设情况并非如此。由于 C 仅与 G 相交于两点， C不可能包含在 $P-(\beta\cup\beta')$ 中。因此，不失一般性，我们假设 C 与 $\partial\beta$ 相交于最少但非零个点。设 $C\cap\beta$ 的一条弧 A在 β 中是最外侧的。若 A 与 τ 不相交，那么由于 (β,τ) 连通， A可以同痕至 $\partial\beta$ 中，因此 $C\cap\partial\beta$就不是最小的。由此，每条 $C\cap\beta$的弧都必须与 τ相交。

假设 $\beta-A$ 的一个分支是圆盘 D，且它与 τ相交于一条弧。若 $D\cap\tau$是非平凡弧，那么 (β,τ) 就不是素的，我们也就再次得证。因此，我们假设 $\beta-A$ 的一个分支是圆盘 D，且它与 τ 相交于一条平凡弧。若 A 与 τ的那条弦相交于两点，则 $C-A$ 必与 G不相交。因此，包含 D 的 $P-C$ 分支会与 G 相交于一条平凡弧，这与 C的定义矛盾。但若 A 与 τ 仅相交于一点，则我们可以假设A 相对于这一性质是 β 上的最外侧的。现在，由于 $D\cap\tau$ 是一条平凡弧，我们可以用一条紧邻 β 外侧、且同样与 G 仅相交于一点的弧来替换 A。这与 $C\cap\partial\beta$的最小性矛盾，因此我们可以假设 $\beta-A$ 的每个分支都与 τ 相交于两条弧。

由此可知， $\partial\beta-\partial A$ 的每个分支都包含 T的两个端点，它们可能是也可能不是同一条弦的端点。现在（参照图 6 中的条带 β_1 和 β_2），要么 A 的一个端点位于 $\partial\beta_1$中，另一个端点位于 $\partial\beta_2$ 中；要么 A 的两个端点位于 $\partial\beta-(\partial\beta_1\cup\partial\beta_2)$ 的不同分支中。但由于 A 与 G 相交于两点， $C-A$必须与 G不相交；然而这不可能，因为（β， τ）和（β'， τ'）是连通的。由此可知， C包含于 β或 β'中，因此（β， τ）不是素的。□

现在，我们将 Cromwell 定理证明为上述定理及其证明的一个推论。

推论1. 设 (B,T) 为一个缠结，其投影 (β,τ) 是强交替的。当且仅当 (B,T) 是素的，(β,τ) 才是素的。

证明。由于 (β,τ) 是强交替的，(β,τ) 满足 MOF。注意，引理 2 和定理 1 证明的前两段都不要求 (B,T) 是非有理的。因此，如果 (β,τ) 不是素的，那么 (B,T) 也不是素的；如果 (B,T) 不是素的且 (β,τ) 不连通，那么 (β,τ) 也不是素的。

因此，我们假设 (B,T) 不是素的，且 (β,τ) 是连通的。现在，根据 Lickorish 和 Thistlethwaite，[6], 由于 (β,τ) 是强交替且连通的，(B,T) 不可能是有理的。因此，我们可以应用定理 1，得出 (β,τ) 不是素的。□

4. Splittings of spatial graphs

空间图是指嵌入在 S^3 中的图；我们允许图包含环边，也允许同一对顶点之间有多条边。如果图的一条边是环，那么将环上与顶点相邻的两段视为两条独立的边。

Menasco 定理被 Sawollek [10] 和 Adams 等人 [1] 分别推广到了约化交替空间图（两者采用了不同的定义）。不过，Sawollek 考虑了穿过顶点的分裂球面和圆，而 Adams 等人则没有考虑（见图4）。

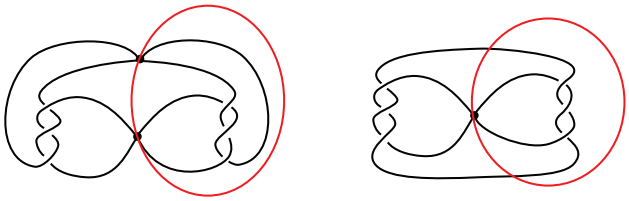

Figure 4. Sawollek 考虑穿过顶点的分裂球面和圆。

下面给出 Sawollek 的定义。

定义7. 设 Γ 为一个四价空间图。

(1) 若存在一个球面 $\subseteq S^3 - \Gamma$ 将 Γ 分隔开，则称 Γ 可分。(2) 假设 Γ 不可分。若存在一个球面 $S \subseteq S^3$ 与 Γ 相交于非零个顶点，且 $S^3 - S$ 的每个分支都包含 $S \cap \Gamma$ 中与每个顶点关联的两条边，则称 Γ 可进行顶点分裂。(3) 假设 Γ 既不可分，也不可进行顶点分裂。若存在一个球面 $S \subseteq S^3$ 与 Γ 横截地相交于任意数量（可能为零）的顶点，并且恰好交于边内部的两点，使得 $S^3 - S$ 的任一分支都无法在逐点固定 S 的情况下同痕至 S，则称 Γ 为复合图。否则，称 Γ 为素图。

定义 8. 设 G 是四价空间图在投影球面 P 上的一个投影。

(1) 若 G 存在一个将 G分隔开的圆 $C \subseteq P - G$，则称 G 是可分的。(2) 假设 G 不可分。若存在一个圆$C \subseteq P$，它与 G 横截地相交于非零个顶点（即 $P - C$ 的每个分支都包含与 $C \cap G$各顶点关联的两条边），则称 G 是顶点可分的。(3) 假设 G 既不可分，也不可作顶点分裂。若存在一个圆 $C \subseteq P$，它与 G 横截地相交于任意数量（可能为零）的顶点，并且恰好交于边内部的两点，且 $P - C$ 的两个分支都不会与 G 相交于没有交叉点的子图，则称 G是复合的。否则， G 是素的。

事实上，我们修正了 Sawollek 对空间图及其投影的复合定义，因为原始定义并未要求分裂后图的各分支或其投影的各分支是非平凡的。在这种情况下，任何不可分或不可作顶点分裂的四价空间图及其投影都是复合的，因为总能选择分裂球面或分割圆，将单条边上的一小段平凡弧截取出来。这与我们提到的 Menasco 对其定理的原始表述中的问题类似。

下面给出 Sawollek 对约化和交替的定义，以及他将 Menasco 定理推广到四价空间图的结果。

定义 9. 设 G 是一个四价空间图的投影。若对投影球面上各顶点进行任意平滑，所得结果都是链环的约化交替投影，则称 G 是约化交替的。

Sawollek 定理。 [10] 设 G 是四价空间图 Γ 的约化交替投影。那么

（1） Γ 可分，当且仅当 G 可分。（2） Γ 可顶点分裂，当且仅当 G 可顶点分裂。（3） Γ 是复合的，当且仅当 G 是复合的。

第（2）部分和第（3）部分值得注意，因为它们涉及穿过顶点的球面，因此似乎不能直接从关于纽结和链环的结果或技巧推出。然而，尽管 Sawollek 对第（1）部分的证明正确，而且三个部分的逆向结论都很容易验证，但对于含有多个顶点的四价图，第（2）部分的正向结论不成立；当分裂球面至少包含一个顶点时，第（3）部分的正向结论也不成立。问题在于，证明假设当分裂球面 S 与一个顶点相交时，位于 S 同一侧的两条边在投影中彼此相邻。一般而言，这并不成立，如图5和图6所示。

特别地，对于图5中具有 $n > 1$ 个顶点的4价图的投影，存在一个顶点分裂球面经过所有顶点，并围成一个球，其中恰好包含每个



FIGURE 5. 当顶点多于一个时，这个空间图是顶点可分的，但其约化交替投影不是。若只有一个顶点，则该投影不是约化的。

顶点处的两条灰色边。然而，这个投影是约化且交替的，并且没有顶点分裂圆。当只有一个顶点时，该图不满足 Sawollek 定理的假设，因为如右图所示，对该顶点进行平滑后，其中一种平滑方式会得到一个非约化链环。

图 6 表明，无论顶点有多少个，只要分裂球面包含一个顶点，Sawollek 定理第（3）部分的正向结论就是错误的。具体而言，左侧的投影是约化的、交替的且为素投影。然而，如右侧所示，有一个灰色球面 S 与图相交于一个顶点以及边内部的两个点。该球面 S 将图分成两部分，使得这两个分支中没有一个与 $S^3 - S$ 相交于一条或两条弧，且这些弧不能同痕到 S中。因此，这个空间图是复合的，尽管其约化交替投影不是。

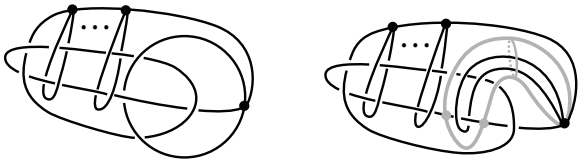

FIGURE 6. 这个空间图是复合的，但其约化交替投影不是。

在第 5 节中，对于只有一个 4价顶点且分裂球面与该顶点不相交的图，我们将证明定理 2 第（2）部分正向结论以及定理 3 第（3）部分正向结论的一个更强版本。

接下来，我们考察 Adams 等人对 Menasco 定理的推广；该推广是借助 Menasco 的方法证明的。Adams 等人的结果与 Sawollek 的结果不同，不仅因为两者的定义不同，而且因为前者允许任意价数的顶点，还因为他们不允许球面穿过顶点。Adams 等人的文献中给出了以下定义[1]。

定义10。设 G 为空间图的一个投影。

(1) G 是约化的，当且仅当投影球面上不存在圆 C，使得 C 与 G 在单个交叉点处横截相交。

(2) G 的区域 R 是 $S^2 - G$ 与 $\partial R \subseteq G$的一个连通分支。(3) 给定 G的一个区域 R， R 的线段 E 是 ∂R 的一个连通子集，其内部不与 G 的任何交叉点相交，并且 ∂E 是一个非空的交叉点集合。(4) 交替线段是恰有两个端点的线段，其中一个端点是下交叉，另一个端点是上交叉。(5) 交替区域是其中每条线段都是交替线段的区域。

根据这个定义，含有1价顶点的图的任何部分都不能是线段。例如，图7中的灰弧不是线段。因此，图7中的所有线段都是交替的，故所有区域也都是交替的。Adams 等人还定义了交替投影，并指出一个投影是交替的，当且仅当它的所有区域都是交替的。由此可知，图7中的投影是约化且交替的。

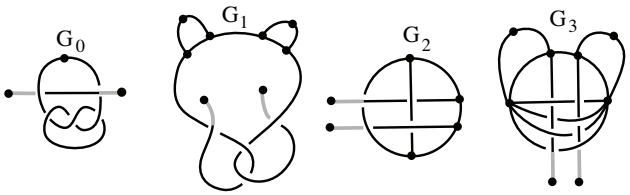

FIGURE 7.灰弧不是线段，因此根据上述定义，这些图投影是交替的。

然而，Adams 告知我们， [1] 中给出的区域和线段定义并非作者原本的意图。作者原本想将区域 R 定义为 G的正则邻域之补集的一个连通分支，并将 R 的线段定义为 G 的正则邻域边界上的一个区间，该区间不含交叉点，且两端均由交叉点界定。在图7中，每条灰弧的正则邻域边界都是一条U形弧，环绕着1价顶点，其端点是一对相同的交叉点。按照这个线段定义，图7中的灰弧是线段，但它们不是交替的，因此这些投影不是交替的。事实上，按照这个定义，任何含有1价顶点且至少有一个交叉点的连通空间图投影都不是交替的。

定义11. 设 Γ是一个空间图， F 是一个与 Γ横截相交于边内部 n 个点的球面，且 B 是 $S^3 - F$的一个分支。如果 $B \cap \Gamma$ 包含一个价数至少为3的顶点，或包含一个无法在固定其边界点的情况下同痕到 F 中的子图，则称$B \cap \Gamma$ 是非平凡的。如果$(S^3 - F) \cap \Gamma$ 的两个分支都是非平凡的，且 n 是极小的，则称 Γ 是 n-复合的。

Adams 等人的定理。（ [1]的定理3.1）设 G 是一个具有 $n < 4$的 n-复合空间图的约化交替投影。那么存在一个圆 C，与 G 横截相交于 n个点，使得 $S^2 - C$的每个分支都包含一个价数至少为3的顶点或至少一个交叉。

请注意，这是对 [1], 中陈述的修正版；原陈述存在与 Menasco 最初陈述相似的问题。

与此定理相反，图7中的每个空间图都是 n-复合的，然而根据 [1] 中的定义， G_n 是约化且交替的，并且不存在一个圆 C，使其与 G_n 相交于 n 个点，且 $S^2 - C$ 的每个分支都包含一个价数至少为3的顶点或至少一个交叉。另一方面，按照 Adams 等人原本意图的定义，图7中的投影并非交替投影，因此上述定理不适用。

本节最后，我们比较 Sawollek 与 Adams 等人对四价图的一些定义。具体而言，Sawollek 对约化和交替的定义比 Adams 等人的定义更严格，因为如果顶点的所有平滑方式都产生约化交替投影，那么就不可能存在一个圆与图投影相交于单个交叉，也不可能存在一个不交替的图投影区域。例如，图8左侧的投影按照 Adams 等人的定义是约化且交替的，但中间和右侧的顶点平滑结果表明，按照 Sawollek 的定义，它既非约化，也非交替。

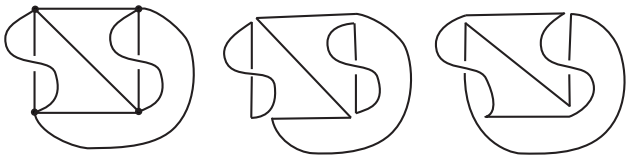

FIGURE 8. 根据 Adams 等人的定义，左侧的投影是约化且交替的；但根据 Sawollek 的定义，它既非约化，也非交替。

Sawollek 对复合的定义与 Adams 等人对 2-复合的定义互不蕴含。例如，图 9 中的图根据 Adams 等人的定义是 2-复合的，但根据 Sawollek 的定义是顶点分裂的，因此不是复合的。此外，对于任意一个与这些空间图之一交于两个非顶点点的球面，在球面的一侧，子图可以经同痕嵌入球面内。因此，按照 Sawollek 的定义，该球面并未将图分成两个非平凡子图；尽管按照 Adams 等人的定义，这样的球面确实将其分成了两个非平凡图。

另一方面，图 6 中的空间图按照 Sawollek 的定义是复合的，但分裂球面经过该顶点，因此按照 Adams 等人的定义，它不是 2-复合。



FIGURE 9. 这些空间图是顶点分裂的，因此按照 Sawollek 的说法并非复合图；但按照 Adams 等人的说法，它们是 2-复合的。

5. OUR RESULTS FOR FIGURE EIGHT GRAPHS

本节中，我们考察八字图（即只有一个顶点的4价图），并证明 Sawollek 定理第（2）部分的正向结论，以及在分裂球面与顶点不相交时第（3）部分的正向结论。回想一下，图5表明，对于具有多个顶点的4价图，第（2）部分的正向结论不成立；图 6 则表明，若分裂球面包含顶点，第（3）部分的正向结论不成立。

我们称空间图 Γ含有一个局部纽结，如果存在一个球面 S 与 Γ 相交于一条边内部的两个点，并且 $(S^3 - S) \cap \Gamma$ 的一个分支是一条打结弧。图 10 中的嵌入都含有局部纽结，并且具有约化交替投影。然而，左侧的嵌入及其投影是顶点分裂的，因此不是复合的。如果 Γ 含有局部纽结且不是顶点分裂的，那么 Γ就是复合的。

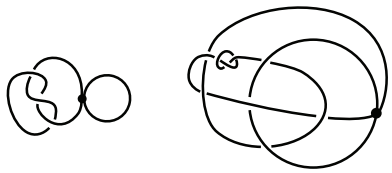

FIGURE 10. 这些嵌入含有局部纽结。左侧的是顶点分裂的，右侧的是复合的。

定理 2. 设 Γ 是一个顶点分裂的八字图的嵌入，其投影 G是约化且交替的，并且至少包含一个交叉点。那么 Γ 中存在一个局部纽结，其投影包含在一个圆盘内，且圆盘的边界与该顶点横截相交。

注意，该定理比 Sawollek 定理关于八字图的第（2）部分更强，因为它指出，约化的交替顶点分裂图包含一个可以在投影中看到的局部纽结。它也独立于 Adams 等人的结果，因为 Adams 等人没有考虑穿过顶点的球面。

证明。令 $N(v) \subseteq S^3$ 为 v 的一个邻域，其投影 $n(v)$ 不包含 G的交叉点。令 $B = \mathrm{cl}(S^3 - N(v))$、 $T = B \cap \Gamma$ 和 (β, τ) 为

缠结 (B,T) 的投影。由于 G 是约化的、交替的，且至少包含一个交叉点，因此 (β, τ) 是强交替的。

假设 (β,τ) 不连通。那么存在一条弧 α，它将 τ 的弦分隔开来。因此，不失一般性，$N(\tau)$ 是链环 $N(T)$ 的一个不连通投影。由于 G 至少包含一个交叉点，$N(T)$ 的一个分支的投影 K 至少包含一个交叉点。此外，由于 $N(\tau)$ 是约化交替投影，且 τ 的弦之间没有交叉点，K 是约化交替投影。因此，根据 Kauffman、Murasugi 和 Thistlethwaite 定理，K 是一个非平凡结的投影。现在，我们通过添加一条穿过 v 的弧，将弧 α 延伸至 $n(v)$，从而得到投影球面上的一个圆 C。该圆将 G 的环分隔开来，并且 C 围成一个圆盘，其中包含一个非平凡结的投影。

接下来，为了导出矛盾，我们假设 (β,τ) 是连通的。设 S 是 Γ 的一个顶点分裂球面。那么，S 将 Γ 的环分隔开来。因此，如有必要，可将 $N(v)$ 缩小，从而假设 S 与 $N(v)$ 相交于一个圆盘，该圆盘与 Γ 的交集仅为 v；并且 S 与 B 相交于一个圆盘 Δ，该圆盘将 (B,T) 的弦分隔开来。

根据 Lickorish 和 Thistlethwaite [6],，由于（β,τ）是强交替且连通的，（B,T）不可能是有理的。因此（B,T）必定是复合的，于是我们可以应用定理 1，得到一个圆 C，它围成一个圆盘$D_1 \subseteq \beta$，其与 τ 的交集是一条非平凡弧 α。现在有一个球 $B_1 \subseteq B$，其投影为 D_1，使得 $B_1 \cap T$ 是一条弧 A，投影为 α。令 A_1 为 ∂B_1 中的一条弧，其端点与 A 相同，且 A_1单射地投影为 C的一条弧 α_1；令（B,T_1）由（B,T）通过将 A 替换为 A_1得到。那么（B,T_1）的投影（β,τ_1）由（β,τ）通过将 α 替换为 α_1得到，因此（β,τ_1）的其中一条弦上的交叉点比（β,τ）更少。

注意，由于分裂圆盘 Δ 与 T的弦不相交，且与B_1 在 T 处相交于一条弦的一段弧，因此可以消去 Δ 与∂B_1的任何交圆，从而得到一个与之同位的分裂圆盘 Δ_1，用于（B，T），且它与 B_1不相交。由此可知，Δ_1 也是（B，T_1）的分裂圆盘。由于 α是 N（τ）和 D（τ）的一条非平凡弧，而它们是交替的，因此与其一端相邻的最后一个交叉必定是上交叉，与另一端相邻的最后一个交叉必定是下交叉。因此，N（τ_1）和 D（τ_1）也必定是交替的。此外，τ_1 的任何可消去交叉都将与 D_1 不相交，因此也将是τ的可消去交叉。由此，（β，τ_1）是强交替的。最后，由于 τ_1 的弦与 τ 的弦在相同的点处交叉，因此（β，τ_1）是连通的。

因此，我们可以重复上述两段论述，用（B，T_1）替换（B，T），从而得到一个新的缠结（B，T_2），其投影（β，τ_2）是连通且强交替的，并且其中一条弦上的交叉点少于（β，τ_1）中的交叉点。我们重复这一过程，每一步都减少其中一条弦上的交叉点数。但这一过程不可能无限持续，因为

每条弦上的交叉点都只有有限个。因此，事实上，（β，τ）不可能是连通的。□

定理 3. 设 Γ 是一个八字图的嵌入，其顶点为 v，投影为 G，且 Γ 含有一个局部纽结。设 $N(v)$ 是 v 的一个邻域，其投影 $n(v)$ 不含 G 的交叉点、$B = \mathrm{cl}(S^3 - N(v))$ 和 $T = B \cap \Gamma$，并假设 (B,T) 的投影 (β,τ) 满足 MOF。那么 β 中存在一个圆盘，其与 G 的交集是一个打结弧的投影。

请注意，对于八字图，定理 3 比 Sawollek 定理的第（3）部分和 Adams 等人的定理更强，因为它适用于不一定是交替的嵌入。例如，定理 3 适用于图 11 中的嵌入图；在该图中，我们移除了顶点的一个邻域，从而得到一个二弦缠结 (B,T)，其投影为 (β,τ)。注意，$N(\tau)$ 和 $D(\tau)$ 是约化且为正的，但不是交替的。

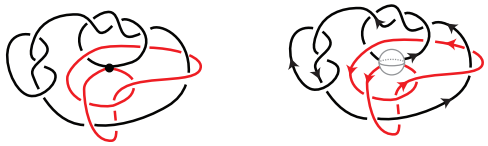

FIGURE 11.我们可以将定理 3 应用于这个嵌入图，但 Sawollek 定理和 Adams 等人的定理并不适用。

证明。由于 Γ 包含一个局部纽结，因此存在一个球面 S，它与 Γ 相交于某条边内部的两个点，并且 $S^3 - S$ 的一个分支与Γ 相交于一条打结弧。如果有必要，可以缩小 $N(v)$，从而假设 S与 $N(v)$ 不相交。因此，与 Γ 相交于一条打结弧的 $S^3 - S$分支包含在 B中，故（B，T）不是素的。

现在假设（B，T）是有理的。那么，关于如何移动 T在 ∂B 上的端点以得到一个平凡缠结的指引，也为我们提供了如何移动 Γ 的边绕着 v 移动以使 Γ 成为平面的指引。但这是不可能的，因为 Γ包含一个局部纽结。因此，（B，T）不可能是有理的。

因此，由于（β，τ）满足 MOF，我们可以应用定理 1，得出（β，τ）不是素的。最后，根据引理 2，β 中存在一个圆盘，其与 G 的交是一个打结弧的投影。□

定理 2 能否推广到具有多个顶点的四价图，仍是一个悬而未决的问题。

ACKNOWLEDGEMENT

作者谨此感谢 Colin Adams 阅读本文的初稿，并给予有益的讨论。

References

1. Colin Adams、Ryan Dorman、Kerryann Foley、Jonathan Kravis 和 Sam Payne, *Alternating graphs* **77** 1999 1, 96 120 1710534 , 《J. Combin. 2 *Homogeneous links* 2 **39** 1989 3, 535 Theory Ser. B》（ ），第 – 期。MR 。P. R. Cromwell, , 《J. London Math. Soc.》（ ）（ ），第 – 552 页。MR 1002465 3. , *Lonely knots and tangles: identifying knots with no companions*, 《Mathematika》38 1147~~833 4 19~~91 2, 第334–347页 1992（ ），第 – （ ）期。MR 。David Futer、Efstratia Kalfagianni 和 Jessica S. Purcell, *Hyperbolic semi-adequate links* **23** 2015 5, 993 1030 , 《Comm. Anal. Geom.》（ ），第 – 期。MR 3458811 5 . Louis H. Kauffmann, *State models and the Jones polynomial* **26** 1987 3, , 《Topology》（ ），第 – 395 407 899057 期。MR 6. W. B. R. Lickorish 和 M. B. Thistlethwaite, *Some links with nontrivial polynomials and their crossing-numbers* **63** 1988 4, 527 539 , 《Comment. Math. Helv.》（ ），第 – 期。MR 966948 7. W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, 《Topology》23 721450 8 1984年 1, 第37–44页（ ），第 – 期。MR 。Kunio Murasugi, *Jones polynomials and classical conjectures in knot theory*, 《Topology》26 895570 9 1987 年 2, 第187–194页（ ），第 – 期。MR 。Makoto Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, 《Comment. Math. Helv.》 **77** 2002 2, 235 243 1915040（ ），第 – 期。MR 。Jorg Sawollek, 10 ¨ *Alternating diagrams of* 4*-regular graphs in* 3*-space*, 《Topology Appl.》93 1688477 11 1999 3, 第261–273 页（ ），第 – 期。MR 。Koya Shimokawa, *Parallelism of two strings in alternating tangles*, 《J. Knot Theory Ramifications》 **7** 1998 4, 489 502 1633011（ ），第 – 期。MR 。Alexander Stoimenow, 12 , *closed braids and the Jones polynomial*, 《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.》（5 2004964 13 2 2003 2, 第237–285页）（ ），第 – 期。MR 。Morwen B. Thistlethwaite, *Positive knots A spanning tree expansion of the Jones polynomial*, 《Topol- ogy》26 899051 14 1987 3, 第297–309页（ ），第 – 期。MR 。, *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, 《Invent. Math.》93（1988），第2期，第 285 948102 15 296–页。MR 。, *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, 《Invent. Math.》93（ 1988），第2期，第285 948102 16 296–页。MR 。Tatsuya Tsukamoto, *A criterion for almost alternating links to be non-splittable*, 《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》137（ 2004），109–133。

Emerita Professor, Department of Mathematics, Pomona College, Claremont, CA 91711, USA

Department of Mathematics, Wake Forest University, Winston-Salem, NC 27109, USA