有限网络中易感-感染-易感动力学的临界雪崩

Daniele Notarmuzi,[1,2] Alessandro Flammini,[2] Claudio Castellano,[3,4] 和 Filippo Radicchi[2]
[1]理论物理研究所，维也纳工业大学，维德纳大街 8-10 号，A-1040 维也纳，奥地利
[2]复杂网络与系统研究中心，卢迪信息学、计算与工程学院，印第安纳大学，美国印第安纳州布卢明顿 47408
[3]复杂系统研究所（ISC-CNR），陶里尼街 19 号，I-00185 罗马，意大利
[4]恩里科·费米研究中心，维米纳莱广场 1 号，00184 罗马，意大利

我们研究临界状态下、发生于有限随机网络上的易感-感染-易感（SIS）模型的雪崩时间统计。通过对退火拓扑进行数值模拟，我们表明，生存概率始终呈现三个截然不同的动力学区间。区分这些区间的、依赖于网络规模的交叉时间尺度，在同质网络和异质网络中的标度行为各不相同。根据已知的网络上 SIS 动力学特征，可以对这一现象学图景作定性理解。我们证明，基于朗之万理论的完整定量方法能够完美再现同质网络的结果，但在异质网络中则无法奏效。我们还将分析扩展到淬火随机网络；对于高度同质和高度异质的网络，其表现与退火情形一致。

arXiv:2301.06939v1 [cond-mat.stat-mech] 12 Jan 2023

I. 引言

经历连续吸收态相变的系统在临界点处，对局部扰动具有无限大的敏感性。这意味着，在吸收态中引入一个活性种子后，随后的演化会产生激活事件雪崩，其范围可能涵盖所有时间和空间尺度。在物理学以及其他生物、社会和技术领域中，这类雪崩动力学的例子比比皆是 [1–7]。

这些现象的多尺度特性可通过雪崩的规模分布和持续时间分布进行定量刻画。如果控制参数处于亚临界状态（即处于吸收相中），雪崩的规模和持续时间均呈指数分布，其范围不超过明确且有限的时间和空间尺度。相反，在超临界区域中，有有限比例的雪崩会遍及整个系统，从而（在无限大系统中）形成稳态活性态。在临界情形下，所有雪崩都会在有限时间内结束，但其分布具有幂律尾部，因此任意规模和持续时间的事件都有可能发生。设 z 表示雪崩的规模，t 表示其持续时间，则规模 z 和持续时间 t 的概率分布一般可写为 [8]

$$P(z) \sim z^{-\tau}\mathcal{F}(z/z_\times) \quad \text{and} \quad P(t) \sim t^{-\alpha}\mathcal{G}(t/t_\times), \tag{1}$$

其中，τ 和 α 是普适临界指数，$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是标度函数，而截断尺度 $z_\times$ 和 $t_\times$ 在临界状态下仅取决于系统规模。在固定持续时间 t 下对雪崩规模取平均，可以定义另一个指数 $\langle z\rangle \sim t^\theta$，它与其他指数的关系为 [9]

$$\theta = \frac{\alpha - 1}{\tau - 1}. \tag{2}$$

分枝过程（BP）模型 [10] 为描述一大类经历连续吸收相变的系统提供了自然的框架（至少是近似的）。在最简单的情况下，当后代的分布（即一个活跃元素激活一定数量新元素的概率）具有有限方差时，BP 理论预测

$$\tau = 3/2, \quad \alpha = 2, \quad \text{and} \quad \theta = 2. \tag{3}$$

这种平均场行为预期会出现在系统动力学发生于同质网络上的情形，此时度分布的二阶矩有限。当分支过程中后代的分布具有无限方差时，现象学便会发生变化；对于发生在度分布为 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 且满足 $2 < \gamma \leq 3$ 的异质网络上的过程，便是如此。在这种情况下，分支过程理论预测会出现异常的、依赖于 γ 的指数 [11–14]

$$\tau = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad \alpha = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2}, \quad \text{and} \quad \theta = \frac{\gamma - 1}{\gamma - 2}. \tag{4}$$

尽管在同质网络上的许多系统中可以观察到标准 BP 行为 [15–18], , 但近期研究对这一理论框架是否适用于异质网络中的许多雪崩现象提出了质疑 [19]。在所考察的所有情况下，除了可能适用于短持续时间和小规模的渐近前区间外，分布均以与标准 BP 值一致的指数衰减，且不依赖于 γ。文献 [19] 提出了导致这一 BP 预测失效的可能原因。在网络中存在环可能是造成这种失效的一个原因，因为环可能使已经处于活跃状态的节点再次被感染，从而明确违背了传播模型与 BP 之间的映射关系。此外，有限网络的度分布始终具有有限的二阶矩，这使得即使在纯 BP 中，异常指数（4）也无法在渐近极限下得到观测。文献 [19]还指出，某些模型（例如接触过程（CP））的传播机制实际上并不涉及节点的所有邻居，因此雪崩不会受到网络度分布无界涨落的影响。然而，这些假设还需要对特定系统中异常 BP 指数失效的起因开展更深入的研究，并进一步提出替代理论方法，例如文献 [15中所介绍的方法。

* daniele.notarmuzi@tuwien.ac.at

此外，有限系统中的雪崩如何依赖系统规模——这是分析真实系统时至关重要的问题——目前仍在很大程度上缺乏研究。

在本研究中，我们考察易感-感染-易感（SIS）动力学 [21], ——这是被认为可由分支过程（BP）描述的最基本（也最简单）模型之一，并在规模可变的复杂网络中开展这项研究。除 SIS 动力学本身的重要性外，我们研究的另一动机在于，人们已经认识到，异质拓扑与 SIS 动力学之间的相互作用会产生高度非平凡的现象，例如在大网络极限下阈值消失 [22–24], 不同次广延子图之间的相互作用 [25]以及长程渗流效应 [26]。稳态的这些非平凡性质是否以及如何反映在雪崩统计及其对系统规模的依赖性中，是其他值得分析的方面。

我们的研究受到文献 [27] 的启发，该文献讨论了接触过程（CP）的临界性质。CP 是一种与 SIS 类似的模型，但表现出更简单的临界动力学，其特征是对于 γ的任意取值都具有有限阈值。对于 CP，即使在 $2 < \gamma \leq 3$ 时，雪崩指数也不反常；不过，这很容易与 BP 现象学相协调，因为后代数量的有效分布不依赖于网络基底，并且始终是均匀的。然而，文献 [27] 基于朗之万方法对 CP 进行了详细的分析研究，这同样构成了研究 SIS 雪崩的解析方法的自然基础，尤其是研究其时间特性。

本文对基于构型模型（CM） [28]生成的退火网络和淬火网络上的临界 SIS 模型进行了数值模拟，所研究的网络既包括均匀网络，也包括异质网络。我们进一步提出了一种基于朗之万方程的理论方法，用于研究持续时间至少为t的雪崩发生的概率。该理论方法明确采用了退火网络近似，但我们表明，它也有助于部分理解淬火网络上的雪崩行为。本文其余部分安排如下。第 II 节简要介绍 SIS 模型的动力学以及我们所考虑网络的统计特征。第 III 节总结我们在不同网络结构上观察到的现象学特征，并对雪崩行为给出清晰的物理解释。第 IV 节讨论退火网络的数值结果。第 V 节介绍理论方法，并将其预测与上一节的结果进行比较。第 VI 节展示淬火网络的结果，并将其与上一节的理论预测进行比较。我们在第 VII 节讨论研究结果。

II. 模型定义

传播动力学

我们考虑网络上的连续时间易感者-感染者-易感者（SIS）动力学。每个节点可以处于感染（I）或易感（S）状态。感染事件，即$I + S \rightarrow I + I$，按照速率为 $\lambda \geq 0$的泊松过程发生。恢复事件，即$I \rightarrow S$，遵循速率为 μ 的自发泊松过程。无损一般性地，我们令 $\mu = 1$。所有节点均处于 S 状态的构型是一个吸收态构型：一旦系统达到这一构型，就会永远停留于此，因为不会再有新的感染发生。在无限大网络中，如果动力学从不同于吸收态的构型开始，那么控制参数 λ 存在一个临界值 λ_c，它将系统不可避免地到达吸收态构型的相（即 $\lambda \leq \lambda_c$）与存在具有非零感染节点比例的稳态的相（ $\lambda > \lambda_c$）区分开来。

对于规模有限、大小为N的网络，SIS模型不会发生真正的相变。只要感染率λ 有限，系统最终必然会在有限时间内进入吸收态构型。尽管如此，我们仍可以确定一个伪临界点 $\lambda_c(N)$，它将两个阶段区分开来：在一个阶段中，系统到达吸收态构型所需的平均时间至多随系统规模对数增长（即 $\lambda < \lambda_c(N)$）；在另一个阶段中，到达吸收态构型所需的平均时间则随系统规模呈指数增长（即 $\lambda > \lambda_c(N)$）。

本文旨在刻画规模有限、大小为N 的网络在伪临界区间内的SIS传播，即 $\lambda = \lambda_c(N)$。我们进行了大规模数值分析，并针对一种特定的初始设置建立了理论方法：$i_0 \ll N$ 个感染节点被完全易感的系统所包围。我们的主要目标是深入理解生存概率$S(t)$的行为，即系统截至时间t尚未进入吸收态构型的概率；它与持续时间分布的关系为$P(t) = -dS(t)/dt$。为避免冗长，即使网络规模有限，我们也将其称为临界区间。此外，我们使用简洁记号 λ_c 代替 $\lambda_c(N)$，表示规模为N的网络的伪临界点。

网络

作为相互作用模式，我们考虑根据配置模型 [28]构建的网络。根据配置模型生成的网络的性质由其度分布决定，即随机选取的节点具有度k的概率$P(k)$。配置模型的每个淬火网络实现都通过从$P(k)$中抽样度序列 $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots\ldots, k_N)$获得，并在保持度序列不变的同时，以完全随机的方式对节点进行配对。我们对配对过程施加的唯一约束是禁止重边和自环。度序列的第q阶样本矩

由.....给出

$$\langle k^q \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (k_i)^q \ . \tag{5}$$

配置模型的退火版本意味着在每个时间步生成新的配对，同时保持度序列不变。在退火情形下，可以将退火邻接矩阵定义为所有可能配对的平均值：$A(k, k') = kk'/(\langle k \rangle N)$。其元素等于度为$k$ 的节点与度为k' [29]的节点相连的概率。

在这项工作中，我们关注从该分布中选取随机变量生成的幂律度序列

$$P(k) \sim \begin{cases} k^{-\gamma} & \text{if } k \in [k_{\min}, k_{\max}] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \ . \tag{6}$$

在下文中，不失一般性，我们令$k_{\min} = 3$；不过，只要$k_{\min}$ 独立于N，对于$k_{\min} \geq 3$，结果在定性上也类似。我们假设最大度$k_{\max}$ 随N按幂次增长，即

$$k_{\max} = N^{1/\omega} \ , \tag{7}$$

with

$$\omega \geq \max\{2, \gamma - 1\} \ . \tag{8}$$

配置模型的这一特定设定称为无关联配置模型（UCM）[30]。施加式（7）和式（8）的约束有若干优点。例如，当N 足够大时，可以放心地假设从$P(k)$中抽样得到的序列的有效最大度实际上为$k_{\max}$ [27]。此外，淬火无关联配置模型网络的度-度相关性可以忽略不计。

利用上述约束，可以发现大型但有限网络的q阶矩近似按以下方式标度

$$\langle k^q \rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \text{if } q < \gamma - 1 \\ \log k_{\max} = 1/\omega \log N & \text{if } q = \gamma - 1 \\ k_{\max}^{q-\gamma} = N^{(q-\gamma)/\omega} & \text{if } q > \gamma - 1 \end{cases} \ . \tag{9}$$

对于 $2 < \gamma \leq 3$，式（6）的幂律度分布具有发散的二阶矩，即 $\langle k^2 \rangle \to \infty$ ，对于 $N \to \infty$。我们将此类网络称为异质网络。相反，对于 $\gamma > 3$， $\langle k^2 \rangle$ 是有限的，我们将此类网络称为同质网络。

III. 结果总结

我们考虑在规模为N的有限网络上进行 SIS 动力学，初始时有$i_0 \ll N$ 个感染节点。i_0 个种子的度数之和为k_0。生存函数$S(t)$表现出三个主要区间，分别对应短、中、长雪崩。我们将前两个区间之间的转变点记为t^* ，而第二个与第三个区间之间的转变点记为$t_\times$。不同区间之间的转变并不明显，生存函数呈现平滑的交叉行为。无论式（6）中的度分布指数 γ 为何，这种定性行为都成立。此外，UCM 的淬火版和退火版都呈现这种定性行为。然而，均质网络与异质网络之间存在根本差异，因为转变点的实际取值取决于度指数 γ。

A. 短时雪崩机制

对于 $t < t^*$，在短时雪崩机制下，每个 i_0 雪崩的生存函数都呈现指数衰减。这是由于每个 i_0 初始传播者会立即恢复。指数衰减的特征时间尺度等于 1，这是因为我们将恢复速率设为 $\mu = 1$。如果各个 i_0 雪崩足够小，不会彼此相互作用，则可以写作 $S(t) = 1 - (1 - e^{-t})^{i_0}$，即生存概率等于在时间$t$时至少有一个 i_0 雪崩仍处于活跃状态的概率。该表达式的行为为

$$S(t) \sim i_0 \, e^{-t} \ . \tag{10}$$

如果 t 足够大。特别是，上述表达式必须至多为 1，因此只有当 $t \geq \log(i_0)$ 时才成立。

与适用于较长雪崩的其他区间相比，短时雪崩区间的相对权重最终决定了转变点 t^*，而这在很大程度上取决于动力学的初始条件和底层网络的拓扑结构。如果 $\gamma > 3$，那么 t^* 不会随网络规模变化；反之，如果 $2 < \gamma \leq 3$，则t^* 会随系统规模呈对数发散。对于 $2 < \gamma \leq 3$，处于该区间的轨迹比例也取决于初始条件。如果传播由k_0, 足够大的传播者启动，那么 $t^* \simeq 0$ ，该区间几乎不可见；而随着k_0 减小，t^* 会增大。

B. 中间时段雪崩区间

范围 $t^* < t < t_\times$ 被称为绝热区间 [19,27]。该区间描述的是持续时间足够长、已经失去对初始条件的任何记忆的雪崩。生存函数按以下方式衰减

$$S(t) \sim t^{-1} \ . \tag{11}$$

指数为 -1 的幂律衰减，是二阶矩有限的网络上临界传播的典型特征 [15, 19, 20]。我们发现，同样的衰减也描述了具有二阶矩发散度分布的有限网络中的中间时段雪崩。

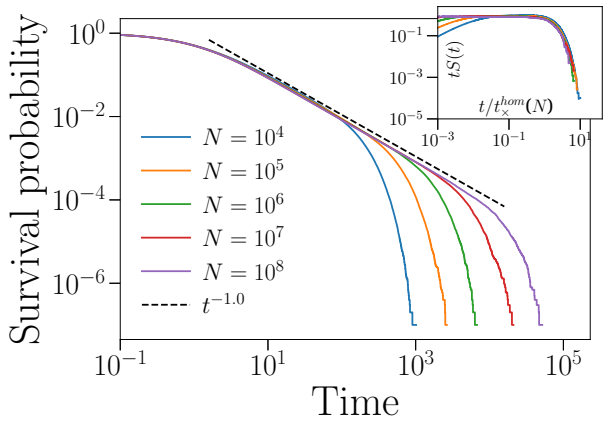


图1. 均匀退火网络中临界SIS雪崩的生存概率。我们设定 $\gamma = 5.3$, $\omega = 4.3$, $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，并针对$N$的每个取值，考虑该过程的 10^7 次实现。不同曲线展示了$S(t)$随N 变化时的生存概率。黑色虚线按t^{-1}缩放。插图中，主图的相同数据经过重新缩放，使各条曲线彼此重合。横坐标值按$t/t_\times(N)$重新缩放，其中$t_\times(N) = N^{1/2}$；纵坐标值则按$tS(t)$重新缩放。

C. 长时间雪崩状态

最后，持续时间$t > t_\times$ 的雪崩规模足够大，因而会受到网络有限规模的影响。在这一范围内，生存函数的衰减呈指数截断，即，

$$S(t) \sim e^{-t/t_\times} . \tag{12}$$

特别地，指数截断的典型时间随网络规模按幂律发散，即

$$t_\times(N) \sim N^{1/\sigma\nu} . \tag{13}$$

$\sigma\nu$ 的具体取值仅取决于 γ 和 ω，当且仅当 $\gamma \le 3$；否则为$\sigma\nu = 2$。

IV. 退火网络的数值结果

本节考虑无关联退火网络 [27]的情形。我们考察临界动力学，令 $\lambda = \lambda_c = \langle k\rangle/\langle k^2\rangle$，这就是无关联网络的精确流行病阈值。我们考虑有限尺寸的网络，因此，$\langle k\rangle$ 和 $\langle k^2\rangle$ 随N的标度遵循式（9）。由此可得，对于 $2 < \gamma \le 3$，当$N \to \infty$时，$\lambda_c \to 0$；相反，如果 $\gamma > 3$ [21]，则当$N \to \infty$时，λ_c 不会趋于零。

A. 同质网络

图 1 展示了通过在使用 CM 生成的同质网络上模拟临界 SIS 动力学所得的结果

其中 $P(k) \sim k^{-\gamma}$, $\gamma = 5.3$ 和 $\omega = \gamma - 1 = 4.3$。所有实现均以一个感染节点为初始状态，即 $i_0 = 1$，其度为 $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 是下取整函数。这样选择是为了确保初始条件与系统规模无关。

上文摘要中预期的三种状态清晰可见。由于网络具有同质性，短时雪崩不依赖于网络规模。这是连续时间分支过程 [31] 的标准行为，因此在同质网络上观察到这一现象并不令人意外。具体而言，我们观察到$t^* \simeq 1$。在中间时段雪崩状态下，存活概率呈现出式（10）所示的幂律衰减。经过一段时间后，指数截断开始出现

$$t_\times^{hom}(N) \sim N^{1/2} . \tag{14}$$

这一点在图 1 插图所示的有限尺寸标度分析中显而易见。这一事实与通过标准平均场描述 [32]对同质网络上的其他临界传播过程所得的结果一致。

对同质网络上的SIS模型进行分析所得到的标准平均场图景，进一步得到了以下事实的证实：雪崩规模的概率分布按指数 3/2 缩放，且其截断随系统规模线性发散，见附录 A。这两项结果都是$S(t)$的行为以及将平均雪崩规模与其持续时间联系起来的标度律 [15]的结果。

B. 异质网络

度指数为$2 < \gamma \le 3$ 的异质网络结果如图 2 所示。本例中，所有实现也都以$i_0 = 1$ 个度为$k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$的感染节点作为初始条件。尽管式 (9) 预测，对于任意 $\gamma > 2$，都有$\langle k\rangle \sim$ 为常数，但在数值研究所能考虑的小型系统中，$\langle k\rangle$ 尚未达到其极限值，并且呈现出对N的缓慢依赖。三种定性区域仍然存在，但不同区域之间的交叉强烈依赖于 ω 和 γ，这与均匀问题形成鲜明对比。

短时雪崩由式 (10) 的指数衰减描述。我们观察到，随着N 增大，t^* 也随之增大。这种行为的原因相当直观：流行病阈值的临界值会随系统规模增大而趋于零。然而，动力学的初始条件不受网络规模影响，因为我们仍在考虑由$i_0 = 1$ 个度为k_0的节点发起的传播过程。许多构型之所以会产生短时雪崩，仅仅是因为随着网络规模增大，观察到传播事件而非恢复的概率变得可以忽略不计。例如，第一个事件是传播事件的概率为$k_0\lambda_c/(1 + k_0\lambda_c)$，显然会随着系统规模增大而趋于零。

通过研究短时雪崩

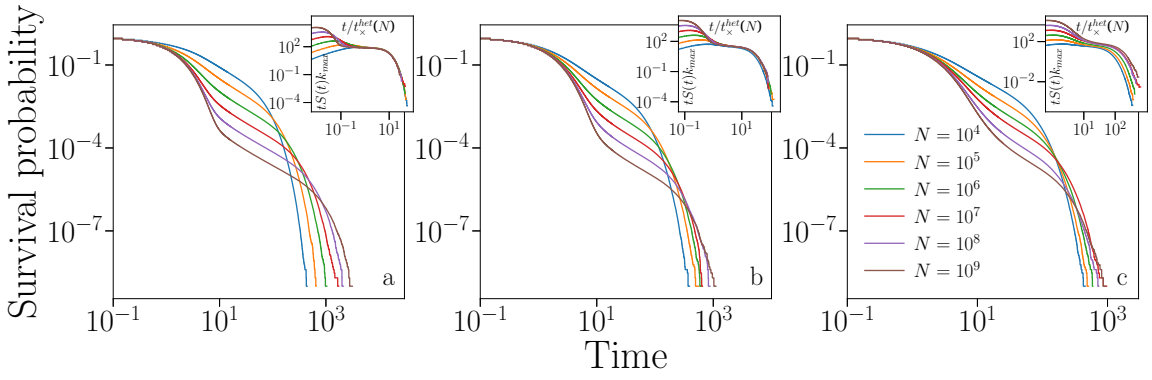


图2. 异质退火网络中临界SIS雪崩的生存概率。我们设定 $\omega = 2$，$k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，并针对系统规模$N$的每个取值，考虑SIS过程的 10^9 次实现。(a) 展示 $\gamma = 2.1$时的生存概率。插图展示与主图相同的数据，其中横坐标按$t/t_\times(N)$缩放，纵坐标按$tS(t)k_{\max}$缩放。(b) 与面板(a)相同，但对应 $\gamma = 2.5$。(c) 与面板(a)相同，但对应 $\gamma = 2.9$。

状态下生存函数对动力学初始条件的依赖，可以使这一物理上直观的图景更加精确。关于这一点，我们的主要发现是：从指数衰减到幂律衰减的交叉始于生存概率下降了一个我们推断其标度为 $k_{max}/k_0 \sim N^{1/\omega}/k_0$ 的量之后。这一发现是结合图 3a、图 3b 和图 3c 的结果 deduced 得出的。在图 3a 中，我们从单个初始种子开始动力学过程，即 $i_0 = 1$，其度为 k_0 且可变。所有模拟均在同一个网络上进行，因此 k_{max} 为常数。从图 3a 的插图可以看出，S (t) 的下降与 $1/k_0$，成正比。相比之下，在图 3b 中，我们考虑大小不同的网络，以保持 k_{max}/k_0 的比值不变。在短时雪崩状态下，不同曲线无需重新标度即可重合。最后，在图 3c 中，我们改变初始感染节点的数量 i_0，，但保持其度数之和不变：$k_0 = 60$。由于比值 k_{max}/k_0 未发生变化，S (t) 初始下降的幅度再次保持不变。对于所有设置，时间 t^* 的取值似乎相同。当 $t \geq \log(i_0)$ 时，如公式 (10) 所述，S (t) 的函数形式与 i_0，呈线性关系。

生存函数$k_{\max}/k_0$ 的初始下降标度$S(t)$，结合表征短时雪崩中$S(t)$的已知指数衰减（即式（10））， 以及对最大度N 依赖关系的设定（即式（7）），使我们可以写出

$$t^*(N) \sim \log\frac{k_{max}}{k_0} \sim \frac{1}{\omega}\log N - \log k_0\,, \tag{15}$$

因此，区分短时雪崩与中间时段雪崩的时间呈对数增长。

中间时段雪崩可由式（11）的幂律完美描述。我们的有限尺寸标度分析表明

$$t_\times^{het}(N) \sim N^{(\omega+1-\gamma)/2\omega}\,. \tag{16}$$

公式（16）的标度显然不同于同质网络的预测结果，即公式（14）。然而，它可以与公式（14）背后的相同物理解释联系起来：已知在重连网络上的SIS模型中，处于临界状态时，度最大的那部分节点起着关键作用 [21]。对于 $2 < \gamma \leq 3$，这部分节点是亚广延的，其中包含度最大的$N_h \sim N^{1+(1-\gamma)/\omega}$ 个节点 [33]。度最大的N_h 个节点构成的子图也被认为是同质的，也就是说，该子图的最小度、最大度和平均度都随系统规模以相同方式标度，与同质网络中的情况一样 [33]。事实上，我们可以将公式（16）的结果解释为$t_\times^{het}(N) \sim t_\times^{hom}(N_h) \sim N^{1/2}{}_h$，因此，它相当于含$N_h$ 个节点的同质图的截断时间，即公式（14）。请注意，公式（15）和（16）显式依赖于 ω [另见公式（7）]。这些表达式在 ω 变化时的有效性将在附录 B 中评估。

V. 退火网络的朗之万理论 ORKS

均匀网络与异质网络这两种情况下的显著差异，亟需通过解析方法进行研究。为此，一个自然的选择是建立一种基于序参量朗之万方程的理论。随机过程的一般理论 [34] 提供了一套精确的方案，可在给定序参量朗之万方程的情况下计算$S(t)$；该方案已成功用于描述接触过程 [27]中的雪崩行为。受文献 [27], 启发，我们针对退火网络上的SIS模型提出一种理论方法。

对于退火网络，度序列完全决定了网络性质：具有相同度的节点具有完全相同的动力学行为。因此，定义变量 $n_k(t)$ 和 $\rho_k(t) = n_k(t)/[NP(k)]$ 是很方便的；它们分别表示在时间 t 时度为 k 的感染节点数，以及在时间t 时从度为 k 的节点中随机选取一个节点后，该节点被感染的概率。流行病相变可以通过序参量 $\rho = \sum_k n_k/N = \sum_k \rho_k P(k)$ 来描述，它表示随机节点被感染的概率；也可以通过

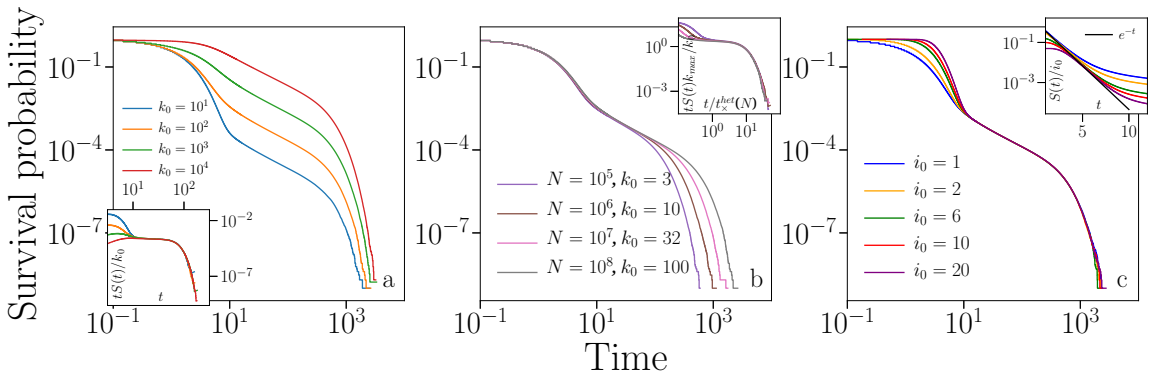


图3. 异质退火网络中临界SIS雪崩的生存概率。我们设定 $\omega = 2, \gamma = 2.1$，并对每条曲线考虑该过程的 10^9 次实现。过程从 i_0 个种子开始；这些种子的度数之和为 k_0。(a) 过程从 $i_0 = 1$ 开始。不同曲线对应 k_0 的不同取值。此处网络规模为 $N = 10^8$。插图显示与主图相同的数据，纵坐标重新缩放为 $tS(t)/k_0$。(b) 过程从 $i_0 = 1$ 个种子开始。我们考虑不同的 k_0 值以及不同的网络规模 N。这两个参数的取值使得比值 $k_{max}/k_0 = 100$。插图显示与主图相同的数据，横坐标重新缩放为 $t/t_\times(N)$，其中 $t_\times(N)$ 由公式（16）给出。纵坐标也重新缩放为 $tS(t)k_{max}/k_0$。(c) 过程从 i_0 个可变数量的种子开始，这些种子的度数相同，但我们保持 $k_0 = 60$ 不变。插图显示与主图相同的数据，纵坐标重新缩放为 $S(t)/i_0$。黑色实线表示单位速率下的指数衰减 e^{-t}。

序参量 $\Theta = \sum_k k\rho_k P(k)/\langle k\rangle$ 来描述，它表示节点的随机邻居被感染的概率。

理论方法基于这样一个观察：变量n_k，以及由此得到的 ρ_k，都是大量二元随机变量之和；对于退火网络，这些变量彼此独立 [27]。根据中心极限定理，这些变量的时间演化可以用适当的朗之万方程来描述。

紧随文献 [27]中适用于接触过程的方法，我们得出适用于临界 SIS 模型的朗之万方程：

$$\dot{\Theta} = -\frac{\langle k\rangle\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle^2}\Theta^2 + \sqrt{\frac{2\Theta}{N}\frac{\langle k^3\rangle}{\langle k\rangle\langle k^2\rangle}}\,\xi\,, \tag{17}$$

其中，ξ 是均值为零、方差为单位值的高斯白噪声。该结果的推导见附录C，基于三个主要假设。我们假设动力学发生在退火无关联网络上，变量 ρ_k 在高斯白噪声作用下随时间演化，并且重要的是，绝热近似成立。

这种近似是指，在序参量 Θ 的演化方程中，将微观变量 ρ_k 的值替换为准稳态值；这些值依赖于 Θ，通过在相应的演化方程中令时间导数为零得到。其依据是，Θ 在临界状态下演化缓慢，而 ρ_k 则以指数速度快速弛豫（见附录C）。我们的理论只能正确描述足够长时间的雪崩。尤其是，朗之万理论无法解释短时雪崩的状态，在该状态下会观察到指数衰减。这是因为绝热近似尚未成立。

式 (17) 可改写为关于$S(t)$ 的偏微分方程，进而可用于计算生存函数的有限尺寸性质。具体计算见附录 D。在临界状态下，该理论预测

$$S(t) = 1 - e^{-\bar{t}/t} \tag{18}$$

其中

$$\bar{t} = k_0\langle k^2\rangle/\langle k^3\rangle\,, \tag{19}$$

并且由于网络有限规模，长时间处存在截断，其标度为

$$t_\times(N) \sim \sqrt{N\langle k^2\rangle}\left(\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k^3\rangle}\right)^2. \tag{20}$$

对于$t \gg \bar{t}$，公式（18）预测$S(t) \sim t^{-1}$。这一预测适用于所有网络，包括同质网络和异质网络，并且与数值模拟的结果一致。我们强调，$\bar{t}$ 并不代表与t^*相同的量：短时雪崩的阶段无法用绝热近似描述，而且我们不认为绝热近似在短时雪崩阶段有效。事实上，对于$t = 0$，公式（18）的累积概率等于 1，这符合当前这种条件概率的预期。公式（18）中的$S(t)$以t 大于绝热弛豫时间为条件。$\bar{t}$ 在异质网络中趋于零，这表明幂律衰减在绝热弛豫时间之后立即开始；而在同质网络中，幂律衰减则在经过一段随k_0 增长的时间后才开始。

对于同质网络，式（19）预测 $\bar{t}$ 的量级为k_0，而式（20）表明 $t_\times(N) \sim N^{1/2}$。这些预测与第三节所呈现的数值结果完全一致。

然而，对于异质网络，预测结果与数值模拟仅部分一致。式（19）中预测的标度 $\bar{t} \sim k_0/k_{max}$ 与

事实 $tS(t)k_{\max}/k_0$ 为常数相符，见图 2 和图 3b。然而，该理论错误地预测了大时间 $t_\times$ 下截断的标度。事实上，对于 $2 < \gamma \leq 3$二者 $\langle k^2\rangle$ 和 $\langle k^3\rangle$ 都如式（9）所述发散，而式（20）给出$t_\times(N) \sim N^{(\omega-\gamma-1)/2\omega}$，只有在 $\omega > \gamma + 1$ 时才会随 N 发散，否则趋于零。后一个结果不仅与数值模拟结果形成鲜明对比，而且在物理上也不合理，表明该理论存在某种根本缺陷。我们认为，朗之万方法之所以失效，是因为它假设整个系统都参与临界动力学，并且未能捕捉到最高度节点构成的亚广延图所发挥的特殊作用，正如上一节所述。因此，通过启发式地将 $t_\times$ 中的 N 替换为 N_h，并采用均匀问题的标度，我们可以恢复正确的标度。

VI. 淬火网络的数值结果

对退火网络上现象学的理解，使我们能够解释淬火网络上传播实验中发生的情况。

研究大规模网络的主要限制在于估计网络临界阈值的计算成本。不同于退火网络的情况，λ_c 并不简单地由度序列的一阶矩与二阶矩之比给出，而是需要通过数值方法进行估计 [35]。我们采用标准做法，将 λ_c确定为与 ρ 相关的易感性达到最大值时所对应的 λ 值，参见附录 E。对λ_c 的数值估计需要很高的精度，最多要达到六位小数[1], ；即使使用高效的准稳态方法进行最大值求解 [35]，这些估计的计算成本仍然很高。我们能够研究的网络规模最大为$N = 10^7$。一旦估计出 λ_c 的值，就可以以相对较低的计算成本对 $\lambda = \lambda_c$ 开展传播实验。

我们的分析结果如图 4 所示。我们首先在随机正则图上验证了我们的方法；预计其现象学应与标准平均场图景完全一致，即与朗之万理论对同质网络的预测以及对均匀退火网络的研究结果一致（图 1）。图4a所示的数值结果证实了这一预期，因为$S(t)$遵循公式（18），且截断由公式（20）给出。有趣的是，标度函数在截断之前不久出现了一个隆起。该隆起足够大，即使在未经重新标度的数据中也能观察到，并且妨碍了对相对较小系统中指数 -1 的直接观测；当标度函数呈现较大的峰值时，这种情况经常发生 [9]。

当 γ 取较小值时，结果与异质退火网络中得到的结果完全类似。例如——

例如，在 $\gamma = 2.1$ 的情况下，图 4b 中，采用针对退火网络的重标度方法，可以得到插图所示的清晰数据塌缩。这一发现并不令人意外，因为只要 $\gamma < 5/2$ [33, 35]，退火网络理论就同样适用于淬火网络上的易感者-感染者-易感者模型。在附录 E 中，我们将说明，要获得图 4 所示的清晰结果，最大化易感性是必要的一步。

用于退火网络的重新标度对 $\gamma = 2.7$同样效果很好（见图 4c）。在这种情况下，我们也发现$S(t)$在较小t 处的下降与$k_{\max}/k_0$ 成正比，并且截断再次由公式（16）给出。然而，对于我们能够模拟的相对较小的网络规模而言，这种一致性才成立，即$N \leq 10^7$。根据文献 [26, 33, 35], 的研究结果，我们预计，对于任意值 $\gamma > 5/2$，退火网络理论将不再能够描述足够大淬火网络上的临界SIS雪崩，并且对于$N \to \infty$，将遵循不同于公式（16）的标度。

VII. 结论

本文对有限尺寸随机网络上的 SIS 临界雪崩动力学进行了全面分析。对于退火均质网络，理论理解已经完备且具有定量性；然而，当动力学发生在退火异质基底上时，我们必须借助启发式论证来修正朗之万方法的某些不足。特别是，有必要假设节点所扮演的角色不同，这取决于它们是否属于大小为 N_h 的次广延子图，该子图包含高度节点。这样的网络子集正是邻接矩阵的主特征向量发生局域化的区域 [33]。对于 SIS 动力学的稳态性质，这种局域化决定了流行病阈值的位置，但不会影响节点被感染的概率；对于任意 k，该概率都与度成正比。然而，我们的结果表明，对于雪崩统计等非稳态性质，局域化十分重要：该子集之外的节点对长时间雪崩的演化不起作用，因此，将所有节点一视同仁的朗之万方法会失效。

这一失败与接触过程中的情况形成鲜明对比。在物理上，接触过程与SIS模型的差异在于，节点i以速率 λ 传播活动，而与其度无关；相比之下，SIS模型则以速率 λk_i传播活动。因此，接触过程的临界点为 $\lambda_c^{CP} = 1$，即与网络无关；而SIS模型的临界点并非如此，尤其是在异质网络中会消失。然而，描述这两个过程的朗之万方程的结构非常相似。变量 ρ_k 的方程相同，唯一的差异在于，方程（C2）中出现的序参量 Θ 被因子 $\rho/\langle k\rangle$ 所替代，而方程（C3）与接触过程中 ρ 的方程具有相同的结构；根本差异在于，非线性项在接触过程中包含$\sum_k kP(k)\rho_k$，而在SIS模型中则包含$\sum_k k^2P(k)\rho_k$。这一差异反映了两个模型在物理上的不同传播机制。此外，ρ_k 的方程与序参量方程之间的类比，使得我们能够

[1] 要获得令人满意的结果所需的位数取决于网络。

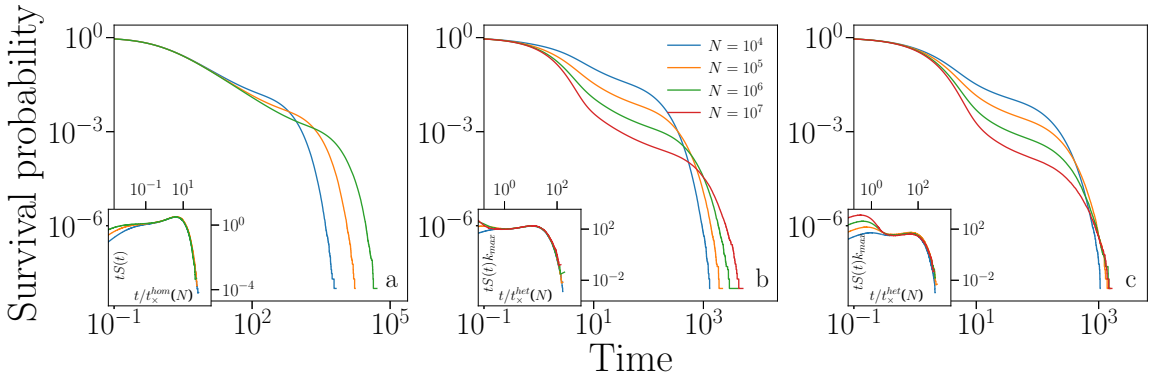


图4. 淬火网络中临界SIS雪崩的生存概率。我们设定 $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma - 1)/(\gamma - 2) \rfloor = \lfloor \langle k \rangle \rfloor$。(a) 在度为 $k = 10$ 的随机正则图上进行模拟。对于每个N值，我们考虑传播过程的 10^8 次实现。插图展示了与主图相同的数据，其中横坐标缩放为$t/\bar{t}(N)$，纵坐标缩放为$tS(t)$。(b) 与(a)相同，但在满足 $\gamma = 2.1$和 $\omega = 2$的配置模型网络上进行。对于每个N值，我们考虑SIS过程的 10^9 次实现。插图展示了与主图相同的数据，其中横坐标缩放为$t/\bar{t}(N_h)$，纵坐标缩放为$tS(t)k_{\max}$。(c) 与(b)相同，但参数为 $\gamma = 2.7$和 $\omega = 2$。

在两种情况下都进行绝热近似，而 ρ_k 的稳态值确实具有相同的形式。由此可知，这两个过程的朗之万方程的闭式表达式相同。然而，两个过程之间的物理差异体现在漂移和扩散系数随系统规模变化的标度不同。特别是在序参量较小的极限下，SIS模型涉及$P(k)$的矩，最高达到三阶（见式（17））， 而接触过程中的最高阶矩为二阶。得到朗之万方程后，写出关于$S(t)$的偏微分方程，取其大N极限，并对其进行积分以计算$t_\times$；对于两个模型，这一过程是类似的。研究发现，无论网络为何，接触过程始终具有一个t^*，且不随系统规模变化（因为在任意网络上，λ_c^{CP}都是有限的）。然而，截断时间$t_\times$对于接触过程能够得到正确预测，但对于SIS模型则不能。要探索这一范围，仍有待建立坚实的数学框架。

我们已验证，对于 $\gamma < 5/2$，淬火网络上的雪崩统计与退火网络的情形几乎完全相同，这与稳态性质 [35] 中的结果一致。对于更大的 γ，淬火网络上易感者-感染者-易感者模型的稳态性质（例如流行病阈值的值）由枢纽节点之间的相互作用所支配；这些节点实际上会“远距离相互作用”，从而形成长程渗流模式 [26]。从数值和解析角度来看，研究这些高度非平凡效应如何影响 $\gamma > 5/2$ 时淬火网络的临界雪崩统计，仍是一项极具挑战性的开放问题。

致谢

F.R. 感谢陆军研究办公室（W911NF-21-1-0194）和空军科学研究办公室（FA9550-21-1-0446）的资助。资助方未参与研究设计、数据收集与分析、发表决定，也未参与对稿件中表达的任何观点、研究结果、结论或建议的形成。

附录A：雪崩规模分布

图 5 展示了在退火网络上得到的雪崩规模分布。如正文所述，幂律指数 $\tau = 3/2$ 可由式（11）以及平均雪崩规模随雪崩持续时间呈二次增长这一事实轻易理解 [15]。两类网络的雪崩规模截断值 $z_\times$，同样可借助 $\theta = 2$ 理解，具体而言，它们是生存概率截断值的平方。异质网络中，当 z 较小时，$P(z)$ 的下降反映了第一个时间阶段的指数衰减。在此类衰减过程中，雪崩规模和持续时间呈线性标度；因为对于短时雪崩，一次使z增加 1 的感染事件，通常只会使t 增加新感染节点的愈合时间，即平均为 $1/\mu = 1$。因此，对于短时雪崩$\langle z \rangle \propto t/\mu$。由此可知，这两个观测量采用相同的重标度。

附录 B：度分布上限截断的作用

在同质网络中，截断$t_\times$ 预计仅取决于N，见公式（14）；而在异质网络中，它明确取决于 γ 和ω，见公式（16）。图 2 明确评估了$t_\times$ 与 γ 之间的关系。图 6 通过固定除 ω以外的所有参数，验证$t_\times$ 与 ω 之间的关系。当 γ 取值较大时，无论 ω 取何值，网络都是同质的。而对于异质网络，N_h 则取决于 γ、 ω 和N [36]。

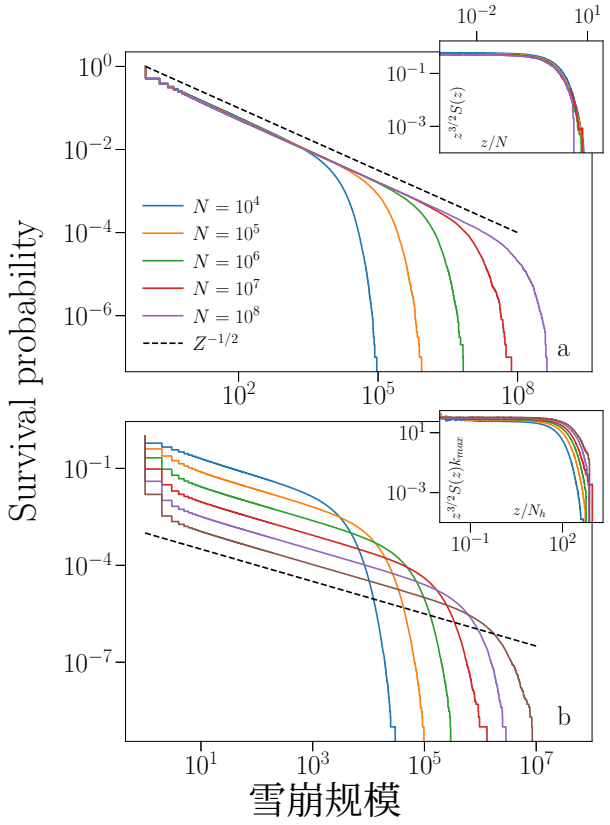


图 5. 退火网络中临界SIS雪崩的雪崩规模生存概率。(a) 设定 $\gamma = 5.3$, $\omega = 4.3$, $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，并针对每个系统规模 N 的取值，考虑 10^7 次SIS过程实现。插图显示了与主图相同的数据，其中横坐标按 z/N 重标度，纵坐标按 $z^{3/2}S(z)$ 重标度。(b) 设定 $\gamma = 2.1$, $\omega = 2$, $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，并针对每个系统规模 N 的取值，考虑 10^9 次SIS过程实现。插图显示了与主图相同的数据，其中横坐标按 z/N_h 重标度，纵坐标按 $z^{3/2}P(z)k_c$重标度。

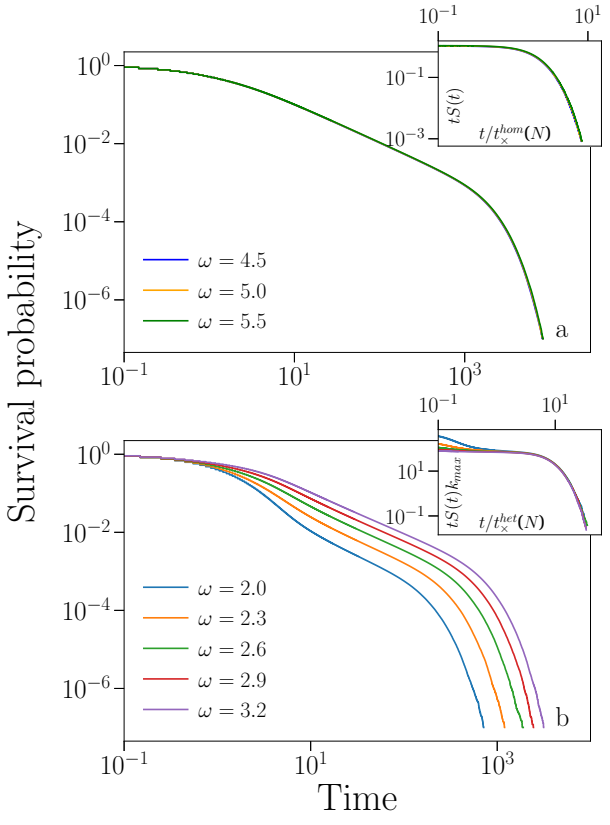


图6. 退火网络中临界SIS雪崩的生存概率。(a) 设 $\gamma = 5.3$, $N = 10^6$, $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，对于每个 ω 值，我们考虑 10^7 次SIS过程实现。插图展示了与主图相同的数据，其中横坐标按 $t/t_c(N)$ 重标度，纵坐标按 tS (t) 重标度。(b) 设 $\gamma = 2.1$, $N = 10^6$, $k_0 = \lfloor k_{min}(\gamma-1)/(\gamma-2)\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$，对于每个 ω 值，我们考虑 10^7 次SIS过程实现。插图展示了与主图相同的数据，其中横坐标按 $t/t_c(N_h)$ 重标度，纵坐标按 $tS(t)k_{max}$ 重标度。

附录C：朗之万方程的推导

朗之万方程的推导过程与 [19, 27]中的相同。变量n_k的朗之万方程为

$$\dot{n}_k = -n_k + \lambda\frac{k}{\langle k\rangle}(1-\rho_k)\sum_{k'}k'P(k')n_{k'} + \sqrt{n_k + \lambda(1-\rho_k)\frac{k}{\langle k\rangle}\sum_{k'}k'P(k')n_{k'}}\,\xi_k\,, \tag{C1}$$

将 $NP(k)$ 相除，得到

$$\dot{\rho}_k = -\rho_k + \lambda k(1-\rho_k)\Theta + \sqrt{\frac{1}{NP(k)}\left[\rho_k + \lambda k(1-\rho_k)\Theta\right]}\,\xi_k\,, \tag{C2}$$

并利用 Θ 的定义

$$\dot{\Theta} = \Theta\left(-1 + \lambda\sum_k\frac{k^2}{\langle k\rangle}(1-\rho_k)P(k)\right) + \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_k kP(k)\sqrt{\frac{1}{NP(k)}\left[\rho_k + \lambda k(1-\rho_k)\Theta\right]}\,\xi_k\,. \tag{C3}$$

注意，方程 (C2) 中的首阶项关于 ρ_k 呈线性，与 λ 的取值无关，这意味着它们会快速指数衰减至其渐近（平均）值；而在方程 (C3) 中，通过令 $\lambda = \lambda_c$，线性项被抑制，因此 Θ 在临界状态下是一个缓慢变化的变量。因此，可以在临界点进行绝热近似。令

$\dot{\rho}_k = 0$和 $\lambda = \lambda_c$ 可得

$$\rho_k = \frac{\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta} + \frac{1}{1+\lambda_c k\Theta}\sqrt{\frac{1}{NP(k)}\left[\rho_k + \lambda_c k(1-\rho_k)\Theta\right]}\,\xi_k\,. \tag{C4}$$

在上式中，随机项在热力学极限下消失。因此，我们可以将 ρ_k 替换为其首阶（确定性）项，从而改写方程 (C4) 中的根号内表达式，使 ρ_k 完全表示为 Θ 的函数，得到

$$\rho_k = \frac{\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta} + \sqrt{\frac{2\lambda_c k\Theta}{NP(k)(1+\lambda_c k\Theta)}}\,\xi_k. \tag{C5}$$

将此表达式代入方程 (C3) 的确定性项，得到

$$\Theta\left[-1+\lambda_c\sum_k \frac{k^2P(k)}{\langle k\rangle}\frac{1}{1+\lambda_c k\Theta}\right] - \lambda_c\Theta\sum_k \frac{k^2P(k)}{\langle k\rangle}\sqrt{\frac{1}{NP(k)}\frac{2\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta}}\xi_k\,, \tag{C6}$$

而随机项的形式为

$$\sum_k \frac{kP(k)}{\langle k\rangle}\sqrt{\frac{1}{NP(k)}\frac{2\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta}}\,\xi_k\,. \tag{C7}$$

方程中 $\dot{\Theta}$ 对应的新随机项的总贡献为

$$\sum_k \frac{kP(k)}{\langle k\rangle}\sqrt{\frac{1}{NP(k)}\frac{2\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta}}\,(1-\lambda_c k\Theta)\;\xi_k = \sqrt{\sum_k \frac{k^2P(k)}{N\langle k\rangle^2}\frac{2\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta}\left(1-\lambda_c k\Theta\right)^2}\;\xi\,. \tag{C8}$$

请注意，在将求和项代入根号时，我们还利用中心极限定理，将各个噪声 ξ_k 替换为一个整体噪声 ξ。定义 $\Delta = \lambda_c\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} - 1$，并加上再减去量 $\lambda_c\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle}\Theta$，则 Θ 的朗之万方程的闭式形式为

$$\dot{\Theta} = \Theta(\Delta - \lambda_c\Omega[\Theta]) + \sqrt{\frac{2\lambda_c\Theta}{N}\Lambda[\Theta]}\,\xi\,, \tag{C9}$$

其中

$$\begin{cases}\Omega[\Theta] = \sum_k \frac{k^2P(k)}{\langle k\rangle}\frac{\lambda_c k\Theta}{1+\lambda_c k\Theta} \\ \Lambda[\Theta] = \sum_k \frac{k^3P(k)}{\langle k\rangle^2}\frac{(1-\lambda_c k\Theta)^2}{1+\lambda_c k\Theta}\end{cases}. \tag{C10}$$

如果 $\Theta \ll 1/\lambda_c k_{max}$，上述两个求和很容易计算。在此假设下，我们有 $\Omega = \lambda_c\Theta\langle k^3\rangle/\langle k\rangle$以及 $\Lambda = \langle k^3\rangle/\langle k\rangle^2$。将这些表达式代入式 (C9)，即可得到式 (17)。图7表明，如果动力学以足够小的 Θ值初始化，则假设 $\Theta \ll 1/\lambda_c k_{max}$ 成立；我们的模拟始终如此初始化。

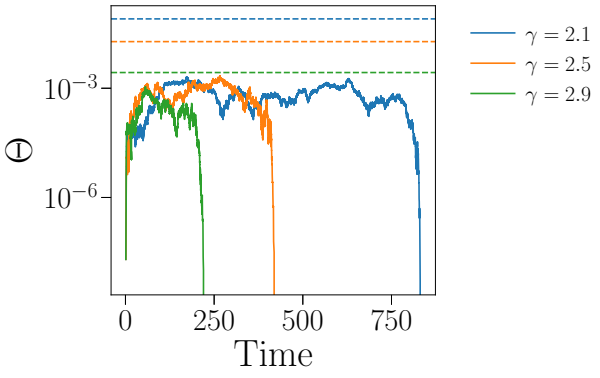


图7. 序参量 Θ 的轨迹。此处我们使用 $N = 10^8$ 和 $\omega = 2$。每次实现均以 $k_0 = \lfloor k^2\rfloor = \lfloor\langle k\rangle\rfloor$ 为初始状态。实线表示不同 γ 值下序参量的一条单独轨迹。虚线表示界限 $1/\lambda_c k_{max}$。

附录 D：生存概率函数

利用标准方法，可以从式 (17)推导出关于$S(t|\Theta_0)$的方程 [34]

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t|\Theta_0) = -\frac{\langle k\rangle\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle^2}\Theta_0^2\frac{\partial}{\partial\Theta_0}S(t|\Theta_0) + \frac{\langle k^3\rangle}{\langle k\rangle\langle k^2\rangle}\frac{\Theta_0}{N}\frac{\partial^2}{\partial\Theta_0^2}S(t|\Theta_0)\,, \tag{D1}$$

满足边界条件

$$S(t|\Theta_0 = 0) = 0 \;\text{ and }\; \frac{\partial}{\partial\Theta_0}S(t|\Theta_0)\Big|_{\Theta_0=1} = 0\,, \tag{D2}$$

它们分别表示 $\Theta = 0$ 中势垒的吸收性和 $\Theta = 1$ 中势垒的反射性。Θ 上的初始条件显式依赖系统规模，形式为 $\Theta_0 = k_0/(N\langle k\rangle)$。我们关注 $S(t)$ 随时间的衰减，因此需要取热力学极限，所以初始条件不能依赖系统规模 [27]。我们将变量从 Θ_0 换为 $k_0 = \Theta_0 N\langle k\rangle$。这样，若将初始条件设为仅有一个度为 $k_0 = \langle k\rangle$ 的节点被感染，则 $\Theta_0 = 1/N$。我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}S(t|k_0) = -\frac{\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle^2}\frac{k_0^2}{N}\frac{\partial}{\partial k_0}S(t|k_0) + \frac{\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle}k_0\frac{\partial^2}{\partial k_0^2}S(t|k_0)\,. \tag{D3}$$

此时可以取热力学极限$N \to \infty$。漂移项的系数按如下方式缩放：

$$\frac{\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle^2}N^{-1} \sim k_{max}^{\gamma-(2+\omega)} \tag{D4}$$

若 $2 < \gamma \le 3$，其按$k_{max}^{-\omega}$ 的尺度变化 $4 < \gamma$。类似地，扩散系数按

$$\frac{\langle k^3\rangle}{\langle k^2\rangle} \sim k_{max} \tag{D5}$$

若 $2 < \gamma \le 3$，则当 $\gamma > 4$ 时收敛到一个常数。

对于 $\gamma > 4$，我们有一种“标准”的（参见文献 [15]）扩散情形，其中漂移项趋于零（对任意$\omega > 0$均成立），而扩散系数收敛于常数。对于 $2 \le \gamma < 3$，扩散系数发散，漂移项则再次趋于零，除非 $\gamma > 2+\omega$；但若 $\omega \ge \gamma - 1$，这不可能成立。当 $2 < \gamma < 3$ 时，我们的数值模拟始终满足这一条件。因此，对于较大的N，无论是均匀网络还是异质网络，动力学都由扩散项主导，这与接触过程 [27]完全类似。在N 较大但有限的极限下，可以忽略漂移项，由此得到的方程的解即为式（18）。

$S(t)$ 的有限尺寸截断可根据雪崩的平均持续时间 [27] 估算。要计算该截断，我们首先需要计算$T_1(k_0) = \int_0^\infty S(t|k_0)dt$。对式（D3）关于时间积分，得到

$$\frac{d^2T_1(k_0)}{dk_0^2} - \frac{k_0}{N\langle k^2\rangle}\frac{dT_1(k_0)}{dk_0} = -\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k^3\rangle k_0}, \qquad \text{(D6)}$$

满足边界条件，对方程 (D2) 积分后得到：$T_1(0) = 0$ 和 $T_1'(k_{tot}) = 0$，其中 $k_{tot} = N\langle k\rangle/2$ 是边的总数。解为

$$T_1(k_0) = \sqrt{2N\langle k^2\rangle}\int_0^{k_0/\sqrt{2N\langle k^2\rangle}} du\, e^{u^2}\int_u^{\sqrt{N\langle k\rangle^2/8\langle k^2\rangle}} \frac{\langle k^2\rangle}{\langle k^3\rangle}\frac{dv}{v}e^{-v^2}, \qquad \text{(D7)}$$

通过直接代入即可验证。

定义$T_2(k_0) = 2\int_0^\infty tS(t|k_0)$，再对方程 (D3) 积分一次，得到

$$\frac{d^2T_2(k_0)}{dk_0^2} - \frac{k_0}{N\langle k^2\rangle}\frac{dT_2(k_0)}{dk_0} = -\frac{2}{k_0}\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k^3\rangle}T_1(k_0). \qquad \text{(D8)}$$

解为

$$T_2(k_0) = 2N\langle k^2\rangle\int_0^{k_0/\sqrt{2N\langle k^2\rangle}} du e^{u^2}\int_u^{\sqrt{N\langle k\rangle^2/8\langle k^2\rangle}} G(t)e^{-t^2}dt, \qquad \text{(D9)}$$

with

$$G(t) = 2\left(\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k^3\rangle}\right)^2 t^{-1}\int_0^t e^{u^2}du\int_u^{\sqrt{N\langle k\rangle^2/8\langle k^2\rangle}}\frac{dv}{v}e^{-v^2}. \qquad \text{(D10)}$$

对于较大的N，可将方程 (D9) 中外层积分的上限近似为 0，并注意到 $\sqrt{N\langle k\rangle^2/8\langle k^2\rangle}$ 发散，因此得到

$$T_2(k_0) \approx k_0\sqrt{2N\langle k^2\rangle}\int_0^\infty G(t)e^{-t^2}dt, \qquad \text{(D11)}$$

因此，依赖于系统规模的截断时间$t_\times(N)$ 按照方程 (14) 的关系标度，条件是 $\langle k^3\rangle$ 渐近有限（$\gamma > 4$）；而在 $2 < \gamma \le 3$ 时，则按照方程 (20) 的关系标度。

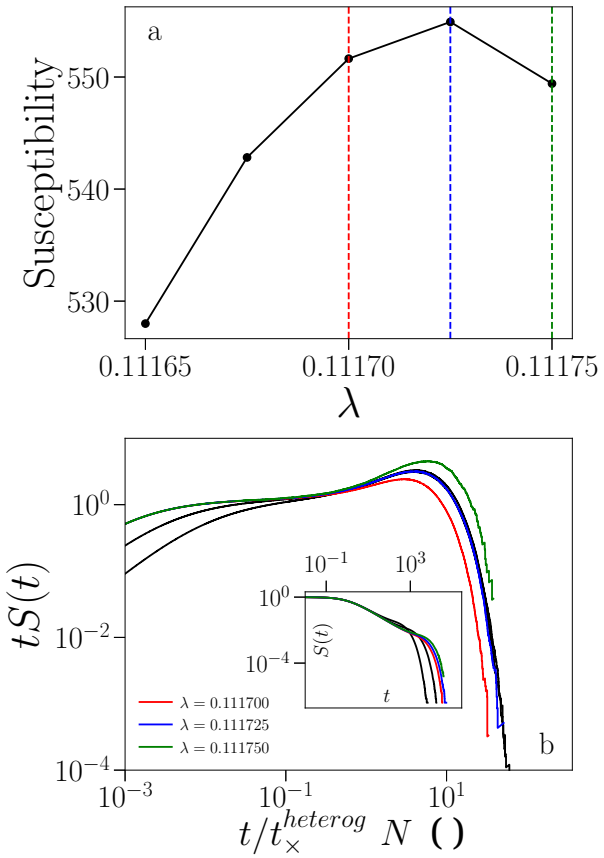


图 8. 临界点确定及其重要性。(a) 对随机正则图在不同 λ 值下的易感性进行计算，其中 $N = 10^6$ 且$k = 10$，分辨率为 $2.5\cdot10^{-5}$。(b) 随机正则图的重标度生存概率，其中$k = 10$。横坐标重标度为$t/t_\times(N)$，纵坐标重标度为$tS(t)$。插图展示相同的数据，但坐标轴未进行重标度。两条黑色曲线分别表示$N = 10^4$ 和$N = 10^5$。红色、蓝色和绿色曲线表示$N = 10^6$ 的数据，这些数据分别使用 λ 的三个取值计算得到；这些取值在 (a) 图中以相同颜色的虚线标出。

附录 E：淬火网络中临界点的确定

图8展示了在淬火网络上精确估计临界点的重要性。图8a展示了在随机图上获得的易感性，其中$N = 10^6$，并改变 λ。临界点被确定为使易感性达到最大值的传播率，其位置用蓝色虚线标出。图8b展示了使用 λ的三个不同取值获得的三条曲线：临界值，以及我们研究易感性时最接近临界值的两个取值（分辨率设为$2.5\cdot10^{-5}$）。尽管这些曲线看起来极为相似（插图），但数据坍缩受到 λ的显著影响。图8b通过相对于临界值略微增大或减小 λ，展示了这一点。

参考文献

[1] J. Beggs和D. Plenz，新皮层回路中的神经元雪崩，J. Neurosci. **23**，11167（2003年）。[2] F. Wang和Z. Dai，伽马射线暴余辉X射线耀斑中的自组织临界性，Nat. Phys. **9**，465（2013年）。[3] P. Bak、K. Christensen、L. Danon和T. Scanlon，地震的统一标度律，Phys. Rev. Lett. **88**（2002年）。[4] R. Kinney、P. Crucitti、R. Albert和V. Latora，北美电网中的级联故障建模，EPJB **46**，101（2005年）。[5] R. Nishi、T. Takaguchi、K. Oka、T. Maehara、M. Toyoda、K. Kawarabayashi和N. Masuda，Twitter中的回复树：数据分析与分枝过程模型，SNAM **6**，26（2016年）。[6] K. Wegrzycki、P. Sankowski、A. Pacuk和P. Wygocki，为什么级联规模服从幂律?，第26届国际万维网大会论文集（2017年）。[7] K. Lerman和R. Ghosh，信息传染：Digg和Twitter社交网络中的新闻传播实证研究，载于第四届国际*AAAI*网络日志与社交媒体会议（2010年）。[8] L. P. Kadanoff、S. R. Nagel、L. Wu和S.-m. Zhou，雪崩中的标度与普适性，Phys. Rev. A **39**，6524（1989年）。[9] J. P. Sethna、K. A. Dahmen和C. R. Myers，爆裂噪声，《自然》**410**，242（2001年）。[10] T. E. Harris等，《分枝过程理论》，第6卷（Springer Berlin，1963年）。[11] C. Adami和J. Chu，临界与近临界分枝过程，Phys. Rev. E **66**，011907（2002年）。[12] K.-I. Goh、D.-S. Lee、B. Kahng和D. Kim，无标度网络上的沙堆，Phys. Rev. Lett. **91**，148701（2003年）。[13] A. Saichev、A. Helmstetter和D. Sornette，地震触发分枝模型中的后代与代数的幂律分布，Pure Appl. Geophys. **162**，1113（2005年）。[14] J. Gleeson、J. Ward、K. O'Sullivan和W. Lee，模因流行度模型中的竞争诱导临界性，Phys. Rev. Lett. **112**，048701（2014年）。[15] S. di Santo、P. Villegas、R. Burioni和M. A. Mu˜noz，分枝过程统计的简单统一视角：平衡对数势中的随机游走，Phys. Rev. E **95**，032115（2017年）。[16] S. Zapperi、K. B. Lauritsen和H. E. Stanley，自组织分枝过程：雪崩的平均场理论，Phys. Rev. Lett. **75**，4071（1995年）。[17] J. P. Gleeson和R. Durrett，网络上雪崩的时间轮廓，《自然·通讯》**8**，1（2017年）。[18] S. Matin、T. Tenzin和W. Klein，中性模型中因果神经雪崩的标度，Phys. Rev. Research **3**，013107（2021年）。

[19] F. Radicchi、C. Castellano、A. Flammini、M. A. Mu˜noz 和 D. Notarmuzi，《复杂网络中的临界雪崩动力学类别》，Phys. Rev. Research 2, 033171（2020）。[20] D. B. Larremore、M. Y. Carpenter、E. Ott 和 J. G. Restrepo，《网络中雪崩的统计性质》，Phys. Rev. E 85, 066131（2012）。[21] R. Pastor-Satorras、C. Castellano、P. Van Mieghem 和 A. Vespignani，《复杂网络中的流行病过程》，Rev. Mod. Phys. 87, 925（2015）。[22] R. Pastor-Satorras 和 A. Vespignani，《无标度网络中的流行病传播》，Phys. Rev. Lett. 86, 3200（2001）。[23] C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《网络中流行病传播的阈值》，Physical Review Letters 105, 218701（2010）。[24] M. Bogu˜n´a、C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《网络中易感-感染-易感动力学的流行病阈值本质》，Phys. Rev. Lett. 111, 068701（2013）。[25] C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《网络流行病中的竞争性激活机制》，Scientific Reports 2, 00371（2012）。[26] C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《累积合并渗流与网络中易感者-感染者-易感者模型的流行病转变》，Phys. Rev. X 10, 011070（2020）。[27] M. Bogu˜n´a、C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《退火无标度网络上接触过程动力学的朗之万方法》，Phys. Rev. E 79, 036110（2009）。[28] M. Molloy 和 B. Reed，《具有给定度序列的随机图的一个临界点》，Random Structures & Algorithms 6, 161（1995）。[29] S. N. Dorogovtsev、A. V. Goltsev 和 J. F. F. Mendes，《复杂网络中的临界现象》，Rev. Mod. Phys. 80, 1275（2008）。[30] M. Catanzaro、M. Bogu˜n´a 和 R. Pastor-Satorras，《无关联随机无标度网络的生成》，Phys. Rev. E 71, 027103（2005）。[31] R. Garcia-Millan、J. Pausch、B. Walter 和 G. Pruessner，《分枝过程普适性的场论方法》，Phys. Rev. E 98, 062107（2018）。[32] M. Henkel、H. Hinrichsen、S. L¨ubeck 和 M. Pleimling，《非平衡相变》，第1卷（Springer，2008）。[33] R. Pastor-Satorras 和 C. Castellano，《网络中不同类型的特征向量局域化》，Scientific Reports 6, 18847（2016）。[34] C. W. Gardiner 等，《随机方法手册》，第3卷（Springer Berlin，1985）。[35] S. C. Ferreira、C. Castellano 和 R. Pastor-Satorras，《网络上易感者-感染者-易感者模型的流行病阈值：数值结果与理论结果的比较》，Phys. Rev. E 86, 041125（2012）。[36] S. N. Dorogovtsev、A. V. Goltsev 和 J. F. F. Mendes，《复杂网络的k核组织结构》，Phys. Rev. Lett. 96, 040601（2006）。