有理空间中的距离图

A. A. Sokolov[1]

arXiv:2301.06954v1 [math.CO] 17 Jan 2023

摘要

对于任意正定有理二次型 q（含 n 个变量），令 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 表示一个顶点为$\mathbb{Q}^n$ 的图，其中 x 与 $y \in \mathbb{Q}^n$ 相连当且仅当 $q(x-y) = 1$。这一概念推广了标准的欧几里得距离图。本文研究这些图，并展示如何求出 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 的团数精确值。

我们还证明了 Beckman–Quarles 定理的有理数类比： $\mathbb{Q}^n$ 上的任意保单位距离映射都是等距变换。

1. 引言

令 $\mathcal{Q}_n$ 为由 n 个变量构成的所有有理正定二次型的集合。

定义。对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $q \in \mathcal{Q}_n$ 图 $G(\mathbb{Q}^n, q) = (V, E)$定义如下：

$$V = \mathbb{Q}^n, \quad E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad | \quad q(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 1\}.$$

这个定义推广了标准欧几里得距离图。事实上，若 $I_n(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$是标准欧几里得二次型，则 $G(\mathbb{Q}^n, I_n)$和 $G(\mathbb{Q}^n, \frac{1}{d} I_n)$分别是距离为 1 和$\sqrt{d}$ 的标准欧几里得距离图。

在第 2 节中，我们研究这类图的基本性质，即非空性和连通性。

在第 3 节中，我们研究这类图的团数，即彼此相连的顶点的最大数量。文中还给出了求出 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 任意 n 和 q 的团数精确值的算法。

该算法针对 $q = \frac{1}{d} I_n$ 的情形，使用 SageMath 实现；相应的计算机程序可在 [1]找到。关于 $\omega(G(\mathbb{Q}^n, I_n))$ 和 $\omega(G(\mathbb{Q}^n, \frac{1}{d} I_n))$ 的更多内容，读者可参见 [2], [3], [4], [5], [6]。

在第 4节中，我们提出以下问题：

”给定两个有理二次型 q_1 和 q_2，图 $G(\mathbb{Q}^n, q_1)$ 与 $G(\mathbb{Q}^n, q_2)$ 是否同构？若是，这些同构是什么样的？”

这个问题与 Beckman–Quarles 定理的有理数类比密切相关。该定理指出， $G(\mathbb{Q}^n, I_n)$ 的任意自同构都是等距变换。这个类比对所有 n 都已得到证明。

关于 Beckman–Quarles 定理的更多内容，读者可参见 [7], [8], [9], [10]。

本文将用到有理二次型理论中的一些概念和定理，相关内容可见附录 A。

2. 定义和主要性质

令 $\mathcal{Q}_n$ 为所有 r 个变量上的有理正定二次型。令 $\mathcal{Q} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_n$.

[1]莫斯科物理技术学院，离散数学系，sokolov.aa@phystech.edu

定义。对于每个 $q \in \mathcal{Q}_n$， $G(\mathbb{Q}^n, q) = (V, E)$ 定义如下：

$$V = \mathbb{Q}^n, \quad E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid q(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1\}.$$

定义。若二次型 q_1 和 q_2 有理等价，记作 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$，当且仅当 $\dim q_1 = \dim q_2$，且存在从n到$\mathbb{Q}$的线性变换 $T \in GL$，使得 $q_1(\mathbf{x}) = q_2(T\mathbf{x})$，并将这样的二次型称为。

引理1。若 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$，则相应的图 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_1}, q_1)$和 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_1} q_2)$同构。

证明。设 E_1和 E_2 分别为图 $G(\mathbb{Q}^n, q_1)$和 $G(\mathbb{Q}^n, q_2)$的边集。设 $T \in GL(n, \mathbb{Q})$满足 $q_1(\mathbf{x}) = q_2(T\mathbf{x})$。我们可以看到

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E_1 \iff q_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 1 \iff q_2(T\mathbf{x} - T\mathbf{y}) = 1 \iff (T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) \in E_2,$$

由于 T 可逆，我们可以看出 T 确实是图 $G(\mathbb{Q}^n, q_1)$与 $G(\mathbb{Q}^n, q_2)$之间的同构。 □

定义。若 q_1 可以构造为与 q_2等价，我们将记作 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q_2$ ，也就是说，存在 $r \in \mathcal{Q}_{\dim q_1 - 维数 q_2}$，使二次型 $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := q_1(\mathbf{x}) + r(\mathbf{y})$ 满足 $h \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$。

引理 2. 如果 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q_2$，那么图 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_1}, q_1)$ 是 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_2}, q_2)$ 的子图。

证明。根据定义，存在 $r \in \mathcal{Q}_{\dim q_1 - 维\ q_2}$，使得二次型 $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := q_1(\mathbf{x}) + r(\mathbf{y})$ 成立$h \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$。因此 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_2}, q_2) \simeq G(\mathbb{Q}^{\dim h}, h)$。若将后一个图限制在前 q_1 个维度上，就得到 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_1}, q_1)$。

□

下面陈述一个稍后将用到的引理。

引理3 (Meyer, [11], 第四章，定理 8，推论2)。秩为 $\geqslant 5$ 的二次型在 $\mathbb{Q}$ 中表示 0，当且仅当它在 $\mathbb{R}$ 中表示 0（即存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，使得 $q(\mathbf{x}) = 0$）。

定理1. 对于任意 $n \geqslant 4$ 和 $q \in \mathcal{Q}_n$，图 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 非空。

证明. $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 非空，当且仅当方程 $q(\mathbf{x}) = 1$ 存在有理解。考虑如下二次型

$$r(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = q(x_1, \ldots, x_n) - x_{n+1}^2$$

这是一个秩为 $n + 1 \geqslant 5$ 的不定二次型。因此，根据引理 3，方程 $r(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$存在非平凡解 $x_1, \ldots, x_{n+1}$)。容易看出 $x_{n+1} \neq 0$ （否则 $q(x_1, \ldots, x_n) = 0$，因此 $x_1 = \ldots = x_n = 0$），并且 $q\left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = 1$。 □

下面的陈述表明，后一个定理是精确的，即对于 $n < 4$，存在 $q \in \mathcal{Q}_n$，使得 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 为空。

Pro位置。图 $G(\mathbb{Q}^2, 2x^2 + 3y^2)$ 和 $G(\mathbb{Q}^3, 2x^2 + 3y^2 + 3z^2)$ 为空 .

证明。反设，即存在 $2x^2+3y^2+3z^2=1$ 的有理解。令 p,q,r,s 为满足以下条件的最小整数

$$2p^2+3q^2+3r^2=s^2$$

那么 $2p^2-s^2$ 可被 3 整除，这意味着 p 和 s 可被 3 整除。于是 $2p^2-s^2$ 可被 9 整除，q^2+r^2 可被 3 整除。接着 q 和 r 可被 3 整除。这与 p、q、r、s 的最小性矛盾（我们可以将它们除以 3）。

由于 $G(\mathbb{Q}^2,2x^2+3y^2)$ 是 $G(\mathbb{Q}^3,2x^2+3y^2+3z^2)$ 的子图，因此它也是空的。 □

下面的引理给出了任意 n 和 q下 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 非空的精确判据。

引理 4. 图 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 非空，当且仅当 $I_1 \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q$，或者等价地，存在 $r\in\mathcal{Q}_{n-1}$ 使得

$$q(x_1,\dots,x_n)\overset{\mathbb{Q}}{\sim}x_1^2+r(x_2,\dots,x_n)$$

证明。若 $q(x_1,\dots,x_n)\overset{\mathbb{Q}}{\sim}x_1^2+r(x_2,\dots,x_n)$，那么根据引理 1 有 $G(\mathbb{Q}^n,q)\simeq G(\mathbb{Q}^n,x_1^2+r(x_2,\dots,x_n))$，并且我们可以在后者中找到边 $(1,0,\dots,0)$。

如果图 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 非空，考虑 $q(\mathbf{x})=1$ 的解 $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)$。我们可以取 $T\in GL(n,\mathbb{Q})$，使得 v 是坐标轴之一（例如 x_1）。现在容易看出，$q(T\mathbf{x})$ 具有 $x_1^2+r(x_2,\dots,x_n)$ 的形式。 □

Chilakamarri [2] 证明了图 $G(\mathbb{Q}^2,I_2)$、$G(\mathbb{Q}^3,I_3)$ 和 $G(\mathbb{Q}^4,I_4)$ 是非连通的。他还表明，对于 $n\geqslant 5$，图 $G(\mathbb{Q}^n,I_n)$ 也是连通的。下面的定理是这一陈述的推广。

定理 2. 对于任意 $n\geqslant 5$ 和 $q\in\mathcal{Q}_n$，图 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 是连通的。

证明。考虑 $T\in GL(n,\mathbb{Q})$，使得 $q(T\mathbf{x})$ 是对角的。我们将重新定义 $q(\mathbf{x})$ 为 $q(T\mathbf{x})$，因为根据引理1 这不会改变所考虑的图。

设 $q(\mathbf{x})=ax_1^2+r(x_2,\dots,x_n)$，$a>0$, $r\in\mathcal{Q}_{n-1}$.

任取一个有理数 $0<c<\frac{1}{\sqrt{a}}$和二次型 $q_1(\mathbf{x})=r(x_2,\dots,x_n)-(1-ac^2)x_1^2$。根据引理 3，存在 $q_1(\mathbf{x})=0$ 的有理解。将这个解除以 x_1^2，显然该数不为零。

现在令 $(x_2^0,\dots,x_n^0)$ 为所得的 $r(x_2,\dots,x_n)=1-ac^2$ 的解。

容易看出，点 $(0,0,\dots,0)$、$(c,x_2,\dots,x_n)$ 和 $(2c,0,\dots,0)$ 在$G(\mathbb{Q}^n,q)$中构成一条长度为 2 的路径。利用这一点，我们可以找到从 $(0,0,\dots,0)$ 到 $(2kc,0,\dots,0)$ 的路径，其中 $k\in\mathbb{N}$ 任意。由于我们可以取任意小的 c 和任意大的 k，因此可以看出，对于任意 $x\in\mathbb{Q}$，都存在一条从 $(0,0,\dots,0)$ 到 $(x,0,\dots,0)$ 的路径。

应用这一结论　　于其他坐标后，我们可以看出图 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 是连通的。 □

3. $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 的团数

本章旨在求出 $G(\mathbb{Q}^n,q)$ 的团数 $\omega(G(\mathbb{Q}^n,q))$，即两两相连的顶点的最大数量。

我们将使用有理二次型理论中的概念和定理，这些内容可以在附录和书籍[11]中找到。

记

$$S_n(x_1,\dots,x_n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}x_ix_j$$

定理 3. $\omega(\mathbb{Q}^n, q) = n+1$ 当且仅当 $S_n \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q$。

证明。若 $q \overset{\mathbb{Q}}{\sim} S_n$ 则 $G(\mathbb{Q}^n, q) \simeq G(\mathbb{Q}^n, S_n)$。容易验证，在 $G(\mathbb{Q}^n, S_n)$ 中的点

$$\mathbf{e}_0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

构成一个大小为 $(n+1)$ 的团。

反过来，设 $\omega(\mathbb{Q}^n, q) = n+1$ 且 $v_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ $v_1, \ldots, v_n$ 是 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 中的 $(n+1)$-团。考虑满足 $Tv_i = e_i$ 对任意 $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都成立的 $T \in GL(n, \mathbb{Q})$。令 $r(\mathbf{x}) = q(T\mathbf{x}) = \sum_{i \leqslant j} r_{ij} x_i x_j$。由于 $r(v_i - v_0) = 1$，我们得到 $r_{ii} = 1$。由于 $r(v_i - v_j) = 1$，我们得到 $r_{ii} + r_{jj} - r_{ij} = 1$，因此 $r_{ij} = 1$。所以我们得到 $r = S_n$。 □

定理 4。

$$\omega(G(\mathbb{Q}^n, q)) = \max_{k:\, S_k \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q} k+1$$

证明。如果 $S_k \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q$ 那么 $G(\mathbb{Q}^k, S_k) \subseteq G(\mathbb{Q}^n, q)$，这意味着

$$\omega(G(\mathbb{Q}^n, q)) \geqslant \omega(G(\mathbb{Q}^k, S_k)) = k+1.$$

假设 $\omega(G(\mathbb{Q}^n, q)) \geqslant k+1$。接着考虑包含 V 的维数为 k 的仿射子空间，该子空间包含（$k+1$）团。于是，根据该子空间中的定理3，二次型 q 等价于 S_k，因此 $S_k \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q$。 □

定理 5。对于任意 $q \in \mathcal{Q}_n$，都有 $\omega(G(\mathbb{Q}^n, q)) \geqslant n-2$。

证明。根据8 附录中的引理 $S_{n-3} \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q$。利用前面的定理可得

$$\omega(G(\mathbb{Q}^n, q)) \geqslant \omega(G(\mathbb{Q}^{n-3}, S_{n-3})) = n-2.$$

□

4. 图同构

如引理1所示，如果 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$ 那么 $G(\mathbb{Q}^n, q_1) \simeq G(\mathbb{Q}^n, q_2)$。

定义。我们用 $G_0(\mathbb{Q}^n, q)$ 表示包含点 0 的 $G(\mathbb{Q}^n, q)$ 的一个连通分支 .

猜想 1. 如果 $G_0(\mathbb{Q}^n, q_1) \simeq G_0(\mathbb{Q}^n, q_2)$，那么 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q_2$。此外，这些图之间的任意同构都是一个线性变换 T，满足 $q_1(\mathbf{x}) = q_2(T\mathbf{x})$。

这个猜想确实推广了有理 Beckman–Quarles 定理，因为如果我们取 $q_1 = q_2 = I_n$，它将表明 $G_0(\mathbb{Q}^n, I_n)$ 的任意自同构都是一个保持二次型I_n的线性变换，也就是说，是一个等距变换。

引理 5. 设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 中的线性无关向量。那么，矩阵为

$$M = \left\{(v_i, v_j)_q\right\}_{i,j=1}^n := \left\{\frac{q(v_i) + q(v_j) - q(v_i - v_j)}{2}\right\}_{i,j=1}^n$$

的二次型有理等价于 q。

证明. 考虑带有内积 $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (q(\mathrm{x}) + q(\mathrm{y}) - q(\mathrm{x} - \mathrm{y}))/2$ 的希尔伯特空间 $\mathbb{Q}^n$。设 $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n$ 是 $\mathbb{Q}^n$ 的标准基。

容易看出，M 是向量 $v_1, \ldots, v_n$ 的格拉姆矩阵，而二次型 q 的矩阵 Q 是向量 $e_1, \ldots, e_n$ 的格拉姆矩阵。由于 T 将 $e_1, \ldots, e_n$ 变换为 $v_1, \ldots, v_n$，我们可以看出 $M = T^T Q T$，它等价于 $m(\mathrm{x}) = q(T\mathrm{x})$。因此 $m \overset{\mathbb{Q}}{\sim} q$。 □

定义. 令 $p_G(a, b, k)$ 表示从 a 到 b 的长度为 k 的路径数。

引理 6. 设 $G = G_0(\mathbb{Q}^n, q)$。那么 $p_G(a, b, k) = 1 \iff q(a - b) = k^2$。

证明。设 $a = x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} = b$ 是从 a 到 b、长度为 k 的路径上的顶点。对于 $1 \leqslant i \leqslant k$，考虑将 $y_i = x_{i+1} - x_i$ 视为这条路径的边。那么，对于任意 i，都有 $q(y_i) = 1$ 且 $y_1 + \ldots + y_k = b - a$。若并非所有边都相等，则存在 $y_i \neq y_{i+1}$。那么，在 a 和 b 之间将会有另一条由边组成的路径

$$y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, y_i, y_{i+2}, \ldots, y_n.$$

若 $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$，则 $q(a - b) = q(k \cdot y_1) = k^2$。 □

猜想 2。对于任意 $q \in \mathcal{Q}_n$，如果图 $G_0(\mathbb{Q}^n, q)$ 非空，那么在 $(\mathbb{Q}^n, q)$ 中存在一个具有有理长度的 $(n+1)$-单形。

定理 6。猜想 2蕴含猜想 1。

证明。设 q_1、$q_2 \in \mathcal{Q}_n$，使得 $G_1 = G_0(\mathbb{Q}^n, q_1)$ 与 $G_2 = G_0(\mathbb{Q}^n, q_2)$ 同构。根据猜想 2，存在一个在 $(\mathbb{Q}^n, q_1)$ 中具有有理边长的单形。由于我们可以找到一个边长为有理数的单形，因此也可以找到一个具有自然数长度的单形，也就是说，存在点 $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}^n$，使得对于任意 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，都有 $q_1(x_i - x_j) = \ell_{ij}^2$，其中 $\ell_{ij} \in \mathbb{N}$。

这意味着存在点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}^n$，使得 $p_{G_1}(x_i, x_j, \ell_{ij}) = 1$。由于 $G_1 \simeq G_2$，存在点 $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{Q}^n$，使得 $p_{G_2}(y_i, y_j, \ell_{ij}) = 1$，且 $q_2(y_i - y_j) = \ell_{i,\ j}^2$。

根据引理 5，我们得到二次型 q_1 和 q_2 都等价于矩阵为$\left\{\frac{\ell_{1i}^2 + \ell_{1j}^2 - \ell_{ij}^2}{2}\right\}_{i\ ,j=1}^n$的二次型，因此它们彼此等价。 □

定理7. 猜想 2 和 1 在 $n = 2$ 的条件下成立。

证明。考虑 $q \in \mathcal{Q}_2$ 使得 $G_0(\mathbb{Q}^2, q)$ 非空。根据定理 4，我们可以说 $q \overset{\mathbb{Q}}{\sim} x^2 + ny^2$，并且可以验证，在 $(\mathbb{Q}^2, x^2 + ny^2)$ 中存在一个有理数边长三角形。

为此，我们需要考虑顶点坐标为 (0, 0)、$(n-1, 2)$、$(-n+1, 2)$ 的三角形。其边长分别为 $n+1$、$n+1$ 和 $2n-2$。 □

定理 8 (有理 Beckman–Quarles 定理)。 猜想 2 和 1 成立 $q_1 = q_2 = I_n$ $(n > 1)$。

证明。 根据定理 6 我们需要在 $\mathbb{Q}^n$ 中找到一个有理单纯形，其边长为有理数。对于偶数 n 我们可以考虑以下单形：

$$\begin{array}{ccccccc}
(1, & 1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0), \\
(1, & -1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 1, & 1, & \dots & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 1, & -1, & \dots & 0, & 0), \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & 1), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & -1), \\
(1, & 1/15, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0)
\end{array}$$

对于奇数 n，我们可以考虑以下单形：

$$\begin{array}{cccccccc}
(1, & 1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0), \\
(1, & -1, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 1, & 1, & \dots & 0, & 0, & 0), \\
(0, & 0, & 1, & -1, & \dots & 0, & 0, & 0), \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & 1, & 0), \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \dots & 1, & -1, & 0), \\
(1, & 1/15, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 0) \\
(0, & 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & 0, & 7/4)
\end{array}$$

很容易看出，这些单形的所有边长都是有理数。

□

引理 2表明 如果 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q_2$，那么 $G(\mathbb{Q}^{\dim q_1}, q_1) \subseteq G(\mathbb{Q}^{\dim q_2}, q_2)$。反过来也成立吗 ？

命题。考虑 $q(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + 2z^2)$。那么 $G(\mathbb{Q}^2, I_2) \subset G(\mathbb{Q}^3, q_3)$，但 $I_2 \overset{\mathbb{Q}}{\not\hookrightarrow} q_3$。

证明。正如文章 [12], 图 $G(\mathbb{Q}^2, I_2)$ 中所示，该图是二分图，令 $G(\mathbb{Q}^2, I_2) = G_1 \sqcup G_2$，其中 G_1, G_2 — 是该图的两个部分。考虑以下映射 φ: $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (x_1, x_2, 0), & \text{if } (x_1, x_2) \in G_1 \\ (x_1, x_2, 1), & \text{if } (x_1, x_2) \in G_2 \end{cases}$$

容易看出，若 (x, y) 是 $G(\mathbb{Q}^2, I_2)$ 的边，则 (φ(x) φ(y)) 是 $G(\mathbb{Q}^3, q_3)$ 的边。

现在利用该结论7 可得 $I_2 \overset{\mathbb{Q}}{\not\hookrightarrow} q_3$。

□

附录 A. 有理二次型

设 $\mathcal{V}=\{p:\ p\text{是素数}\}\cup\{\infty\}$。我们用 $\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{R}$ 表示，并用 $\mathbb{Q}_p$ 表示素数 p 对应的 p-进数域。我们还用 $\mathbb{Q}_*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ 和 $\mathbb{Q}_*^2=\{x^2|x\in\mathbb{Q}_*\}$ 表示。

令 $A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$，其中 $a_i\in\mathbb{Q}$ 和 $a_i>0$。那么

- $D(A)=\prod^n a_i$ 是 $A_{i=1}$的行列式
- 对于任意 $\nu\in\mathcal{V}$，我们记 Hasse–Minkowski 不变量为

$$E_\nu(A)=\prod_{i<j}(a_i,a_j)_\nu\in\{\pm1\}$$

其中 $(a,b)_\nu:\ \left(\mathbb{Q}_*/\mathbb{Q}_*^2\right)^2\to\{\pm1\}$ 是定义在 $\mathbb{Q}_\nu$上的 Hilbert 符号。

Hilbert 符号（a，b）$_\nu$等于 1 当且仅当方程 $z^2=ax^2+by^2$ 有非平凡解（x，y，z）在 $\mathbb{Q}_\nu^3$上。该值很容易计算，并具有以下性质 [11]:

- $(a,b)_\nu=(b,a)_\nu$;
- $(a,c^2)_\nu=1$;
- $(a,-a)_\nu=(a,1-a)_\nu=1$;
- $(a,bc)_\nu=(a,b)_\nu\cdot(a,c)_\nu$;
- $(a,ab)_\nu=(a,-b)_\nu$;
- $\prod_{\nu\in\mathcal{V}}(a,b)_\nu=1.$

在 [11] 中，证明了对于 $\nu\in\mathcal{V}$，D 模 $\mathbb{Q}_*^2$ 和 E_ν 是有理正定二次型的唯一不变量。

引理 7. $A\overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow}B$ 当且仅当存在矩阵 X 使得

- 维数 $X=$维数 $B-$维数 A;
- $D(X)\equiv D(A)D(B)$ 模 $\mathbb{Q}_*^2$;
- 对于每个 ν，都有 $E_\nu(X)=E_\nu(B)\cdot E_\nu(A)\cdot(D(A)\ -D(B))_\nu$。

证明。不失一般性，我们假设 $A=\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n)$ 且 $B=\operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_m)$。$A\overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow}B$当且仅当存在 $X=\operatorname{diag}(x_{n+1},\ldots,x_m)$，使得 $C=\operatorname{diag}(a_1,\ldots a_n,x_{n+1},\ldots,x_m)\overset{\mathbb{Q}}{\sim}B$。

A如上所述，对于 $C\overset{\mathbb{Q}}{\sim}B$，我们需要满足以下两个条件:

- $D(C)\equiv D(B)$ 模 $\mathbb{Q}_*^2$

对每个 $\nu\in\mathcal{V}$，• $E_\nu(C)=E_\nu(B)$。

$D(C) = D(A)D(X) \equiv D(B)$ 模 $\mathbb{Q}_*^2$，因此 $D(X) \equiv D(A)D(B)$ 模 $\mathbb{Q}_*^2$。

那么对每个 $\nu \in \mathcal{V}$，我们得到

$$E_\nu(B) = E_\nu(C) = \prod_{i<j\leqslant n} (a_i, a_j)_\nu \cdot \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=n+1}^{m} (a_i, x_j)_\nu \cdot \prod_{n+1\leqslant i<j} (x_i, x_j)_\nu = E_\nu(A) \cdot (D(A), D(X))_\nu \cdot E_\nu(X)$$

$$E_\nu(X) = E_\nu(A) \cdot E_\nu(B) \cdot (D(A), D(A)D(B))_\nu = E_\nu(A) \cdot E_\nu(B) \cdot (D(A), -D(B))_\nu$$

□

现在我们需要陈述 [11]中的第 4 章命题 7。

命题。设数 D、E_ν 和 (r,s) 满足以下条件：

1 $E_v = 1$ $\nu \in \mathcal{V}$ $\prod_{\nu\in\mathcal{V}} E_\nu = 1$。对于几乎所有的 和。

2 $E_\nu = 1$ $n = 1$ $n = 2$ D_v

若 或若 且 D 在 $\mathbb{Q}_\nu / \mathbb{Q}_\nu^2$ 中的 的像等于 -1。3. $r, s \geqslant 0$ 和 $r + s = n$

4. $D_\infty = (-1)^s$, $E_\infty = (-1)^{s(s-1)/2}$

那么存在一个在 $\mathbb{Q}$ 上秩为 n 的二次型，其不变量为 D、E_ν 和 (r,s)，其中 (r,s) 是型 X 的符号。

结合这些陈述，我们得到以下引理。

引理 8。考虑 $q_1 \in \mathcal{Q}_n$ 和 $q_2 \in \mathcal{Q}_m$。若 $m \geqslant n+3$，则 $q_1 \overset{\mathbb{Q}}{\hookrightarrow} q_2$.

对于每个 k，我们定义

$$\lambda_k = \begin{cases} k+1, & k \text{ is even;} \\ (k+1)/2, & k \text{ is odd.} \end{cases}$$

我们可以看到，$D(S_k) = \frac{k+1}{2^k} \equiv \lambda_k$ 模 $\mathbb{Q}_*^2$

引理 9。

$$E_\nu(S_k) = (k+1, \lambda_{k-1})_\nu = \begin{cases} (k+1, -2)_\nu, & k \text{ is even;} \\ (k+1, -1)_\nu, & k \text{ is odd.} \end{cases}$$

证明。我们通过对 k 进行归纳法来证明此命题。对于 $k = 1$，我们得到 $E_\nu(S_k) = 1$，并且 $(2,-2)_\nu = 1$。于是，对于每个 k，我们得到

$$E_\nu(S_{k+1}) = E_\nu(S_k) \cdot \left(D(S_k), \frac{k+1}{2(k+2)}\right)_\nu = E_\nu(S_k) \cdot \left(\lambda_k, \frac{(k+2)(k+1)}{2}\right)_\nu =$$

$$= (k+1, \lambda_{k-1})_\nu \cdot \left(\lambda_k, \frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)_\nu = (k+1, \lambda_k)_\nu \cdot (k+1, \lambda_{k-1}\lambda_k)_\nu \cdot \left(\lambda_k, \frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)_\nu =$$

$$= \left(\lambda_k, \frac{k+2}{2}\right)_\nu \cdot \left(k+1, \frac{k(k+1)}{2}\right)_\nu = \left(\lambda_k, \frac{k+2}{2}\right)_\nu \cdot (k+1, 2)_\nu = (\lambda_k, k+2)_\nu \cdot (\lambda_k, 2)_\nu \cdot (k+1, 2)_\nu$$

因此，我们需要验证对于每个 k，都有 $(\lambda_k, 2)_\nu = (k+1, 2)_\nu$。

如果 k 是偶数，那么此等式成立，因为 $\lambda_k = k+1$。

若 k 为奇数，则 $(\lambda_k, 2)_\nu = \left(\frac{k+1}{2}, 2\right)_\nu = (k+1, 2)_\nu \cdot (2, 2)_\nu$。现在我们只需利用 $(2,2)_\nu = 1$ 对每个 $\nu \in \mathcal{V}$都成立这一事实。

□

参考文献

[1] A. Sokolov, 《 $\mathbb{Q}^n$中的团》。 https://sokolovartemy.github.io/cliques_in_Qn.html.[2] K. B. Chilakamarri, 《有理 n空间中的单位距离图》, 离散数学, 第 69 卷, 第 3 期, 第 213–218 页, 1988 年。[3] C. Elsholtz 和 W. Klotz, 《单位单纯形的最大维数》, 离散与计算几何, 第 34 卷, 第 167–177 页, 2005 年。[4] S. Bau、P. Johnson 和 M. Noble, 《欧几里得空间中有理点上的单距离图》, 加拿大数学通报, 第 64 卷, 第 1 期, 第 13–24 页, 2021 年。[5] M. Noble, 《 $\mathbb{Q}^3$中的等腰三角形》, Integers, 第 18 卷, A9 页, 2018 年。[6] M. Noble, 《在 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{Q}^n$中嵌入欧几里得距离图》, arXiv 预印本 arXiv:2108.07713, 2021 年。[7] F. S. Beckman 和 D. A. Quarles, 《关于欧几里得空间的等距变换》, 美国数学学会会刊, 第 4 卷, 第 5 期, 第 810–815 页, 1953 年。[8] J. Zaks, 《有理空间中 Beckman–Quarles 定理的一种离散形式》, 几何学杂志, 第 72 卷, 第 1 期, 第 199–205 页, 2001 年。[9] J. Zaks, 《有理空间中的 Beckman–Quarles 定理》, 离散数学, 第 265 卷, 第 1-3 期, 第 311–320 页, 2003 年。[10] J. Zaks 和 R. Connelly, 《有理 d空间中的 Beckman–Quarles 定理, d 偶数维和 $d \geqslant 6$》, 载于《离散几何》（A. Bezdek 编）, 第 13 章, 佛罗里达州博卡拉顿: CRC Press, 2003 年。[11] J.-P. Serre, 《算术教程》。数学研究生教材第 7 卷, 纽约 [等地]: Springer, 1973 年。[12] M. Benda 和 M. Perles, 《度量空间的着色》, Geombinatorics, 第 9 卷, 第 3 期, 第 113–126 页, 2000 年。