arXiv:2301.06980v1 [math.DS] 17 Jan 2023

平移曲面分层中的准对角线

Christopher Zhang

2023年1月18日

1 引言

对于平移曲面模空间中某个层的一个分支，$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$作用在 $\mathcal{H}$上。Eskin、Mirzakhani 和 Mohammadi 的突破性工作 [EM18] 和 [EMM15] 表明，平移曲面的 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$轨道闭包是由周期坐标中的线性方程定义的浸入子流形；此外，Filip [Fil16] 证明了它们也是子簇。对于一个多分支分层 $\mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$，我们有一个对角 $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$作用。

定义 1.1. 令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ 为平移曲面各层的若干连通分支的乘积。多分支曲面上的一个**不变子簇**是一个闭的、$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-不变的不可约簇 $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$，它由周期坐标图中的实系数线性方程定义。除非另有说明，均假设不变子簇是单分支的。不变子簇一词也包括整个层。

定义 1.2. 若一个多分支曲面的不变子簇 $\mathcal{M}$ 不能写成两个其他多分支不变子簇的乘积 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$，则称其为**素不变子簇**。

这类多分支不变子簇的一个来源，是 Mirzakhani 和 Wright 的所见即所得边界 [MW17]。从单分支平移曲面的一个层出发，取边界时可能会产生多分支曲面。Chen 和 Wright 在 [CW21, 定理 1.2] 中证明，不变子簇的边界是多分支不变子簇。

引理 1.3. 设 $\mathcal{M}$ 为一个不变子簇。那么，在 $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ 中定义的对角线

$$\mathcal{D} := \{(M, M) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : M \in \mathcal{M}\}$$

是不变子簇。定义如下的反对角线

$$\overline{\mathcal{D}} := \{(M, -\mathrm{Id}(M)) \in \mathcal{M} \times \mathcal{M} : M \in \mathcal{M}\}$$

也同样是不变子簇。

证明。 $\mathcal{D}$是 $GL^+(2,\mathbb{R})$-不变的，因为该作用是对角作用。设 $a_1, \ldots, a_n$为第一个曲面的周期，而 $b_1, \ldots, b_n$为第二个曲面上相同鞍点的周期。那么， $a_i = b_i$是刻画 $\mathcal{D}$的方程。关于 $\mathcal{D}$ 的证明类似。 □

注记 1.4。 在超椭圆分层中，对角线和反对角线相同。

我们在下面的定义中推广上述例子。

定义 1.5. 设 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 为不变子簇。若素不变子簇 Δ 满足投影映射 $\mathrm{proj}_i\colon \Delta \to \mathcal{M}_i$是支配映射，则称其为 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$中的**准对角线**。简而言之，我们将写作“$\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$是准对角线”。根据下文的命题 2.4 和注记 2.5，每条准对角线都有一条相应的准对角线，其两侧面积相等。因此，除非另有说明，本文始终假设两个分支面积相等。

Re注 1.6. 任意素不变子簇 Δ 都是 $\mathrm{proj}_1(\Delta) \times \mathrm{proj}_2(\Delta)$中的准对角线 $\overline{\qquad\qquad}$ $\overline{\qquad\qquad}$.

定义 1.7。 若存在一个双曲对合$j:\ X \to X$ 使得 $j^*(\omega) = -\omega$，则 $(X,\ \omega)$ 是一个**双曲平移曲面** 。令 $\mathcal{H}$ 为平移曲面分层的一个分支。 $\mathcal{H}$ 中的**双曲轨迹** 是不变子簇，由$\mathcal{H}$的所有双曲平移曲面组成。

以下是本文的主定理，并在阿贝尔微分的情形下证明了 Apisa 和 Wright 的猜想 [AW21c，猜想 8。35] 。

定理 1.8。 令 $\mathcal{M}_i$ 为亏格至少为2 的平移曲面分层的一个连通分支（不带标记点），或为此类分层中的双曲轨迹，其中 $i = 1,\ 2$。仅当 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$时，才存在（等面积的）准对角线 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 。在此情况下， Δ 必为对角线或反对角线。

例1.9. 我们不允许出现标记点，因为这会产生许多乏味的准对角线例子。例如，设 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 是一个准对角线。那么 $\{((M_1,\ p)\ M_2) : (M_1,\ M_2) \in \Delta,\ p \in M_1\}$ 是 $\mathcal{M}_1^* \times \mathcal{M}_2$ 中的一个准对角线。（这里 $\mathcal{M}_1^*$ 表示由 $\mathcal{M}_1$ 与一个自由标记点构成的不变子簇。）

对拟对角线进行分类有助于运用所见即所得边界的归纳论证。此外，这一分类也很有意思，因为拟对角线揭示了 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$之间的关系。

定义 1.10. 不变子簇 $\phi:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 之间连续且具有 $SL(2,\ \mathbb{R})$-不变性的映射，如果在周期坐标下是线性的，则称为**态射**。

不变子簇之间的态射 $\phi:\ \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 给出一个拟对角线 $\{(M,\ \phi(M)) :\ M \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{M} \times \phi(\mathcal{M})$。例如，当 $\mathcal{H}$ 不是双曲的时， –Id 会产生 $\mathcal{H}$ 的一个非平凡自同构。这对应于反对角线。

推论 1.11. 设 $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ 为分层。除 $\mathrm{Id}\ -\mathrm{Id} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 外，不存在支配态射 $\phi:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$。

以上结果支持如下启发式观点：存在拟对角线 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 当且仅当 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ “相关”。

例1.12. 设 $\widetilde{\mathcal{H}}(2, 0^2) \subset \mathcal{H}(2^2, 1^2)$ 为 $\mathcal{H}(2)$ 中曲面的所有双重覆盖所构成的空间，这些覆盖在两个标记点处分支。存在一个拟对角线 $\Delta \subset \mathcal{H}(2) \times \widetilde{\mathcal{H}}(2, 0^2)$，由所有满足以下条件的 $(M, \widetilde{M})$ 构成： $\widetilde{M}$ 是 M 的分支双重覆盖。

引理1.13. 给定拟对角线 $\Delta_L \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 和 $\Delta_R \subset \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_3$，则 $\Delta_L * \Delta_R \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_3$（定义为 $\{(M_1, M_3) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_3 :\ \exists M_2$ 的闭包，其中 $(M_1, M_2) \in \Delta_L,\ (M_2, M_3) \in \Delta_R\}$）是一个拟对角线。

证明。 根据定理 2.1，对于 $(M_1, M_2) \in \Delta_L$， M_1 的绝对周期在局部决定了 M_2的绝对周期；类似地，对于 $(M_2, M_3) \in \Delta_R$， M_2 的绝对周期在局部决定了M_3的绝对周期。因此， $\Delta_L * \Delta_R$ 每一侧的绝对周期在局部决定了另一侧的绝对周期。因此， $\Delta_L * \Delta_R$ 不可能是多分支曲面不变子簇的乘积，所以它必定是素的。$\mathrm{proj}_2(\Delta_L) \cap \mathrm{proj}_1(\Delta_R)$ 是 $\mathcal{M}_2$的一个扎里斯基开子集。$\mathrm{proj}_1 :\ \Delta_L * \Delta_R \to \mathcal{M}_1$ 是支配的，因为 $\mathrm{proj}_1(\Delta_L * \Delta_R) \supset \mathrm{proj}_1(\mathrm{proj}_2^{-1}(\mathrm{proj}_2(\Delta_L) \cap \mathrm{proj}_1(\Delta_R)))$。 □

推论1.14. 设 $\mathcal{M}_1$、 $\mathcal{M}_2$ 是不变子簇。若存在准对角线 $\Delta \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$，则定义 $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$ 。于是， $\sim$ 是一种等价关系。

定理1.8意味着存在许多不同的 $\sim$ 等价类。对这些等价类进行分类将会很有意思。作者所知的构造相关不变子簇的唯一方法，是像例1.9那样添加标记点，或像例1.12那样进行分支覆盖构造。

问题 1.15。 设 $\mathcal{R}$ 是秩为 ≥ 2且带有标记点的相关不变子簇的一个等价类。是否 $\mathcal{R}$ 包含一个极小元素，使得所有其他相关不变子簇都能通过添加标记点和分支覆盖构造由它产生?

A本工作的另一项应用是 Masur-Veech 测度的可测连接。

定义 1.16。 设 (X_1, μ_1, T_1) 和 (X_2, μ_2, T_2)，其中 μ_i 是空间 X_i 上的一个测度，且 $T_i\colon X_i \to X_i$是一个保测变换。**连接** 是 $X_1 \times X_2$ 上的一个测度，在乘积变换 $T_1 \times T_2$下保持不变，并且其在 X_i 上的边缘测度为 μ_i。若空间 X 上的测度 μ 不能写成乘积 $\mu = \mu_1 \times \mu_2$, $X = X_1 \times X_2$（其中 μ_i 是 X_i上的一个测度），则称其为**素的** 。

假设 Eskin-Mirzakhani 的测度分类结果存在多分支版本，定理1.8 将对分层上的 Masur-Veech 测度的遍历可测连接进行分类。

假设 1.17。 （参见 [MW17，猜想 2.10]）我们按照 [EM18，定义 1.1] 中的方式定义仿射测度。对于对角作用于 SL(2, $\mathbb{R}$) 的多分支分层，唯一的遍历不变测度是 SL(2, $\mathbb{R}$)-不变且仿射的。

推论1.18。 设 $\mathcal{M}_i$ 是平移曲面层或该层中的双曲轨迹， μ_i 是 $\mathcal{M}_i$ 的单位面积轨迹上的 ***Masur-Veech*** 测度，其中 $i = 1, 2$。在假设***1.17***下， μ_1、 μ_2 （在 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ 的对角作用下）的唯一素遍历连接是对角线或反对角线上的 ***Masur-Veech*** 测度。

证明。 根据假设1.17，唯一的遍历 SL(2, $\mathbb{R}$)-不变测度是仿射测度，因此它们支撑在某个不变子簇 $\mathcal{M}$ 上。由于该连接是素的， $\mathcal{M}$ 必须是素的。边缘测度条件意味着 $\mathcal{M}$ 必须是 $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 中的准对角线。我们的假设还保证两侧等面积。现在可以应用定理1.8。 □

组织结构： 第 2 节是论文的主体，概述了证明主定理所用的技巧。证明将采用归纳法。第 3 节稍具技术性，是证明的基例。证明的核心内容在第 4 节。第 5 节是附录。

致谢： 撰写本文期间，作者获得了美国国家科学基金会研究生研究奖学金 DGE 1841052 的部分资助。作者感谢其导师 Alex Wright 提出这个问题，并给予大量帮助和指导。作者也感谢 Paul Apisa 就这一问题进行的有益讨论。

2 背景

本节将定义符号和术语，并列出本文所需的背景知识。我们还将证明主定理证明中需要的结果。除非另有说明，“层”均指“亏格至少为 2、无标记点的连通平移曲面层的连通分支”。设 $\mathcal{H}$ 为一个层。我们常用单个字母 $M = (X, \omega) \in \mathcal{H}$ 表示一个平移曲面，其中 X 是其底层黎曼曲面， ω 是全纯1-形式。

2.1 素不变子簇

素不变子簇的概念（定义 1.2）在 [CW21] 中被定义并研究。这里列出一些关于它们的结果。

定理 2.1 (Chen-Wright)。 *[CW21，定理 1.3]对于素不变子簇 $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$，绝对周期在局部上彼此确定。*

定义 2.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个带有标记点的单分支不变子簇，且 $M \in \mathcal{M}$。令$p\colon H^1(M, \Sigma; \mathbb{C}) \to H^1(M; \mathbb{C})$ 为遗忘映射。 $\mathcal{M}$的**秩** 为$_{1\,2}\dim\ p(T_M\mathcal{M})$。素不变子簇 $\mathcal{N}$的**秩** 为 rk(proj$_i(\mathcal{N})$)，该秩与 M 无关；根据定理 2.1，该秩也与 i 无关。$\mathcal{M}$ 是**满秩** 的，当且仅当 $\operatorname{rk}\mathcal{M}$ 等于包含 $\mathcal{M}$ 的层 $\mathcal{H}$ 的秩。

注 2.3. 根据 [AEM17，定理 1.4]， $p(T_M\mathcal{M})$ 是辛的，因此不变子簇的秩总是整数。

命题 2.4 (Chen-Wright)。 *[CW21，推论 7.4]* 在素不变子簇中， g_t 作用在单位面积轨迹上是遍历的。因此，各分支的面积比是常数。

注记 2.5。 对于任意准对角线 Δ ，我们都可以得到无穷多个准对角线 $\Delta_r = \{(M_1, rM_2) : (M_1, M_2) \in \Delta\}$。根据命题 2.4，我们可以缩放 Δ ，使两个分支的面积相同。

2.2 圆柱变形

我们将由闭测地线叶状分解的极大拓扑开环带称为**圆柱** C 。如果 C 是 M上的一个圆柱，那么在 M的一个足够小的邻域内的每个曲面上，都有一个与之对应的圆柱。作为一种记号上的滥用，我们通常将这些对应的圆柱也称为 C。我们将圆柱中的一条这样的闭测地线称为**核心曲线** 。圆柱有两个**边界分支**，它们可能在奇点处相交。**横截曲线** 是从一个边界分支延伸到另一个边界分支的鞍连接。

设 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ 是多分支曲面的不变子簇。我们重述 Smillie-Weiss [SW04 的一条定理，即定理 5]。原定理仅在单分支情形下得到证明。多分支情形的证明留待附录给出。设 $H_t = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\} \subset$

SL(2， $\mathbb{R}$)。

定理 2.6 (Smillie-Weiss2004)。 多分支二次微分层中的每个 H_t 轨道闭包都包含一个曲面 q ，使得 q 的每个分支都是水平周期的。

引理 2.7。 设 $M = (M_1, \ldots, M_n) \in \Delta$ 是素不变子簇中的一个曲面。选取一个周期坐标图 U，使其覆盖 M，并设 $M^t = (M_1^t, \ldots, M_n^t)$， $t \in [0, 1]$是 U中的一条路径，满足 $M^0 = M$。若对于某个 i，每个 t 的绝对周期的虚部都相同，则对所有 i也都成立。

证明。 根据定理 2.1， M_i 的绝对周期彼此决定，并且 $\mathcal{M}$ 在周期坐标图中由实系数方程刻画。

□

引理 2.8。 设 $M = (M_1, \ldots, M_n) \in \mathcal{M}$ 是一个素不变子簇。如果 M_i 是水平周期的，那么对于每个 $1 \leq j \leq n$， M_j 也必定是水平周期的。在这种情况下，我们称这对 M 是水平周期的。

证明。 反设并不失一般性地假设 M_1 是水平周期的，而 M_2 不是。根据定理 2.6，存在一个序列 $t_n \to \infty$ ，使得

$$\begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_2 \to M_2^\infty$$

其中 M_2^∞是水平周期的。由于 M_1 是水平周期的，它在 H_t 作用下的轨道闭包是一个 n维环面 T，其中包含虚周期局部相同的曲面。由于 M的 H_t-轨道闭包是紧致的，经过取子列后，我们还可得出 $\begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_1 \to M_1^\infty$和 M_1^∞也必定是水平周期的。我们选择一个以 $M^\infty = (M_1^\infty, \ldots, M_n^\infty)$为中心的坐标图 $U \times V$，其中 $U \subset \mathcal{M}_1$且 $V \subset \mathcal{M}_2 \times \cdots \times \mathcal{M}_n$。对于足够大的 t_n，有 $M_1^{t_n} := \begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_1 \in U$；又由于 $M_1^{t_n}$和 M_1^∞都位于 T 上，它们具有相同的实周期。然而，对于足够大的 n，存在一个曲面$M_2^{t_n} := \begin{pmatrix} 1 & t_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_2$，使得 M_2^∞中的某个圆柱 C在 $M_2^{t_n}$上持续存在，但它不是水平的。因此， C的核心曲线是一个绝对周期，沿着从 $M_2^{t_n}$到 M_2^∞的路径，其虚部会发生变化。这与引理 2.7 矛盾。

□

设 $\mathcal{C}=\{C_1,\ldots,C_r\}$ 是 $M=(M_1,\ldots,M_n)\in\mathcal{M}$ 上的一组圆柱，且 γ_i 是 C_i的一条核心曲线。切空间 $T_M\mathcal{M}$ 是 $T_M\mathcal{H}=H^1(M,\Sigma;\mathbb{C})$ 的子空间：$=H^1(M_1,\Sigma;\mathbb{C})\times\cdots\times H^1(M_n,\Sigma;\mathbb{C})$。因此，存在一个投影 $\pi\colon H_1(M,\Sigma;\mathbb{C})\to(T_M\mathcal{M})^*$。我们将 γ_i 视为 $H_1(M,\Sigma;\mathbb{C})$ 的元素，方法是令 $H_1(M_j,\Sigma;\mathbb{C})$ 在那些不包含 C_i的分支 M_j 上为零。

定义 2.9。$\mathcal{C}$ 称为 **$\mathcal{M}$-平行，**如果所有 $\pi(\gamma_i)$ 在 $(T_M\mathcal{M})^*$ 中共线。$\mathcal{M}$-平行在圆柱上构成一种等价关系，因此，如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$-平行圆柱的一个等价类，我们就称 $\mathcal{C}$ 为一个 **$\mathcal{M}$-平行类**。

直观地说，$\mathcal{M}$-平行意味着存在一个邻域 $M\in U\subset\mathcal{M}$，使得 $\mathcal{C}$中的所有圆柱在该邻域内始终保持平行。关于 $\mathcal{M}$-平行圆柱的更多详细讨论，请参见 [Wri15] 。

现在我们继续陈述圆柱变形定理。设 $\mathcal{C}$ 由圆柱C_1、……、C_r组成，其高度分别为 h_1、……、h_r；设 α_i是根据庞加莱对偶 $H_1(M-\Sigma;\mathbb{C})\cong H^1(M,\ \Sigma;\mathbb{C})$ 与 C_i的核心曲线相关联的上同调类。定义

$$\eta_{\mathcal{C}}=\sum_{i=1}^{r}h_i\alpha_i$$

更详细的 $\eta_{\mathcal{C}}$定义另见 [Wri15，第 2] 节。对于水平圆柱，沿着周期坐标中 $i\eta_{\mathcal{C}}$ 的方向移动，会拉伸 $\mathcal{C}$ 中的所有圆柱（拉伸比例与圆柱的高度成正比），且不会改变曲面的其余部分。沿着 $\eta_{\mathcal{C}}$ 的方向移动会剪切$\mathcal{C}$中的所有圆柱，且不会改变曲面的其余部分。现在我们可以陈述该定理了。

定理 2.10（圆柱变形定理，Wright 2015）。设 $\mathcal{M}\subset\mathcal{H}$ 是一个多分支分层中的不变子簇。设 $\mathcal{C}$是 M上的一个 $\mathcal{M}$-平行类圆柱。那么 $\eta_{\mathcal{C}}\in T_M\mathcal{M}$。（此处 $T_M\mathcal{M}$表示 M处 $\mathcal{M}$ 的切空间，它是 $H^1(M,\Sigma;\ \mathbb{C})$的子空间。）

我们将概述 Wright 的圆柱变形定理在多分支曲面情形下的证明，因为原定理仅针对单分支曲面给出。证明与原证明相同，但我们省略了许多细节，这些细节可见原论文 [Wri15]。下面的引理是[Wri15, 引理 3.1]。

引理 2.11。设 M 是水平周期的，且 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{M}$-平行类圆柱。若 $\mathcal{C}$ 中圆柱的模数在 $\mathbb{Q}$ 上与其余水平圆柱的模数线性无关，则 $\eta_{\mathcal{C}}\in T_M\mathcal{M}$。

证明。水平周期曲面的 H_t-流与一个 r 维环面上的流相同，其斜率由圆柱的模数决定。

□

以下引理见于 [Wri15, 引理 4.9]。

引理 2.12。设 V为有限维向量空间，$F\subset V^*$ 为 V 上有限个线性泛函的集合，其中任意两个都不共线。函数族 $1/w$ （其中 $w\in F$）在$\mathbb{R}$上线性无关。将这些函数限制在 V 的任意非空开集上，此结论仍成立。

定理 *2.10* 的证明。设 $\mathcal{C}$ 为 M 上圆柱的一个 $\mathcal{M}$-平行类。由定理 2.6，存在一个水平周期曲面 M'，它位于 M 的 H_t 轨道闭包中。相应的圆柱集合（仍记为 $\mathcal{C}$）是 M' 上的一个 $\mathcal{M}$-平行类。

断言 2.13。存在一个曲面 M''，它是 M' 的实变形，并且其中 $\mathcal{C}$ 的圆柱的模数与不在 $\mathcal{C}$ 中的圆柱的模数在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关。[Wri15，引理 4。10]

由断言可知，存在一个曲面 M''，其中 $\mathcal{C}$ 中圆柱的模数与其余圆柱的模数相互独立。引理 2.11 完成证明。因此，只需证明该断言。设 M' 中不属于 $\mathcal{C}$ 的圆柱为 C_{r+1}、……、C_l，并设圆柱 C_i 的模数为 m_i。反设

该断言不成立。由于 $\mathcal{M}$ 是由周期坐标中的实线性方程刻画的，因此存在某个有理关系，对 M' 的小幅实变形均成立

$$\sum_{i=1}^{r} q_i m_i = \sum_{j=r+1}^{l} q_j m_j$$

对于某个 $q_i \in \mathbb{Q}$，其中右端和左端均不恒等于零。回忆一下， $m_i = h_i/c_i$是一个圆柱的模数。由于 $\mathcal{C}$ 中的圆柱全都彼此 $\mathcal{M}$-平行，因此在一个小邻域内， c_i 全都是彼此的倍数。允许系数取实数，我们可以从每个 $\mathcal{M}$-平行类中去掉除一个代表元之外的所有元素。因此，我们得到如下形式的方程

$$r_1 m_1 = \sum_{\substack{j \in J, \\ J \subset \{r+1,\dots,l\}}} q_j m_j$$

其中两边均不为零，且 C_j 中任意两个圆柱都不彼此 $\mathcal{M}$-平行。然而， $1/m_{i_j}$ 是定义在实变形空间的一个开集上的线性泛函，并且彼此不共线，因此根据引理 2.12，该关系不可能成立。这就产生了矛盾，因此断言和定理得证。

□

下面的推论是 [NW14，命题 3.2]，的直接推广，立即推广到多分量情形：

推论 2.14。设 M 是多分支曲面 $\mathcal{M}$ 的一个不变子簇中的曲面。设 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 是 M 上圆柱的 $\mathcal{M}$-平行类，并设 C、D 是 $\mathcal{C}'$ 中的圆柱。则，

$$\frac{\operatorname{area}(C \cap \mathcal{C})}{\operatorname{area}(C)} = \frac{\operatorname{area}(D \cap \mathcal{C})}{\operatorname{area}(D)}.$$

引理 2.15。设 $\mathcal{M}$ 是一个素不变子簇， $\mathcal{C}$ 是曲面 $M = (M_1, \dots, M_n) \in \mathcal{M}$ 上一个 $\mathcal{M}$-平行圆柱类。定义 $\mathcal{M}_i :=$ 投影$_i$（$\mathcal{M}$）为 $\mathcal{M}$ 在第 i 个坐标上的投影的闭包。设 $\mathcal{C}_i$ 为 $\mathcal{C}$ 在 M_i 上的圆柱。那么， $\mathcal{C}_i$ 是一个非空的 $\mathcal{M}_i$-平行圆柱类。此外，若 $\mathcal{C}_i$、$\mathcal{C}_i'$ 是两个不同的 $\mathcal{M}_i$-平行类，则存在两个不同的 Δ-平行类 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$，分别包含 $\mathcal{C}_i$、$\mathcal{C}_i'$。

证明。首先，我们证明每个 $\mathcal{C}_i$ 都非空。反设 M_i 在 $\mathcal{C}$ 中不含圆柱，而 M_j 含有圆柱。根据圆柱变形定理，我们可以对 $\mathcal{C}$ 进行标准圆柱膨胀，同时保持在 Δ 中。这会改变 M_j 的绝对周期，却不改变 M_i 的绝对周期，这与定理 2.1 矛盾。

令 $p\colon H^1(M, \Sigma; \mathbb{C}) \to H^1(M; \mathbb{C})$ 为从相对上同调到绝对上同调的投影。于是，$(pT_M\mathcal{M})^* \subset (T_M\mathcal{M})^*$。由于圆柱的核心曲线 γ_i是绝对同调 $H_1(M; \mathbb{C})$ 的元素，我们有 $\pi(\gamma_i) \in (pT_M\mathcal{M})^*$（其中 π 的定义见定义 2.9 之前的讨论）。现在，令 $\{\gamma_j\}$ 为 M_i 的圆柱核心曲线。根据 [CW21，定理 1.3]，$(pT_M\Delta)^* \cong (pT_{M_i}\mathcal{M}_i)^*$，因此 $\pi(\gamma_i)$ 在 $(pT_{M_i}\mathcal{M}_i)^*$ 中共线，当且仅当它们在 $(pT_M\Delta)^*$ 中共线。因此，它们是 $\mathcal{M}_i$-平行的，当且仅当它们是 Δ-平行的。这就证明了引理的其余部分。 □

2.3 所见即所得紧化

我们简要概述 WYSIWYG 紧化。更正式的介绍请参阅 [MW17] 和 [CW21]。

定义 2.16。设 $\mathcal{H}$，$\mathcal{H}'$ 为可能带有标记点的多分支平移曲面的分层。令 $M_n = (X_n, \omega_n) \in \mathcal{H}$ 和 Σ_n 分别为其奇点集和标记点集，令 $M = (X, \omega) \in \mathcal{H}'$ 和 Σ 分别为其奇点集和标记点集。我们称 M_n 收敛到 M，如果存在递减的邻域 $\Sigma \subset U_i \subset M$，使得存在 $g_i\colon X - U_i \to X_i$ 是到其像上的微分同胚，并满足

1. $g_i^*(\omega_i) \to \omega$ 在 $M - \Sigma$ 上的紧开拓扑中。

2. 不在 g_i 像中的点的单射半径在 i中一致趋于零 .

参见 [MW17，定义 2.2]。

因此，我们可以通过纳入所有满足以下条件的 $\mathcal{H}'$，从 $\mathcal{H}$ 构造 $\partial\mathcal{H}$：存在一列 $\mathcal{H}$ 中的曲面收敛到 $\mathcal{H}'$中的一个曲面。如果有两列曲面收敛到 $\mathcal{H}'$ 中的同一个曲面，但它们在 $\mathcal{H}$中并不接近，则可以纳入同一个层的多个副本。我们将这些部分的并集 $\mathcal{H} = \mathcal{H} \cup \partial\mathcal{H}$（赋予由上述序列收敛所定义的拓扑）称为 $\mathcal{H}$的 WYSIWYG 部分紧化。对于任意不变子簇$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$，我们定义 ∂M 为 $\mathcal{M} - \mathcal{M}$，其中闭包 $\mathcal{M}$ 是在 $\mathcal{H}$中取的。

注记 2.17。 即使 M_n 是不含标记点的曲面收敛序列，其极限也可能带有标记点。

设 $M_n = (X_n, \omega_n) \in \mathcal{M}$ 是一列具有极限$M = (X, \omega) \in \partial\mathcal{M}$的多分支平移曲面。设 $\mathcal{H}'$为包含 M的带标记点的层。设 $\mathcal{N}$为包含 M的 $\mathcal{H}' \cap \partial\mathcal{M}$ 的连通分支。我们称包含M的 $\mathcal{N}$为 $\mathcal{M}$ 的**边界分支**。序列 X_n 将在 Deligne-Mumford 紧化中趋近于极限 X'。对于足够大的 n，存在一个映射 $f_n\colon X_n \to X'$，称为塌缩映射。还有一个映射 $g\colon X \to X'$，它将 X的标记点识别在一起。定义 $(f_n)_*\colon H_1(X_n, \Sigma_n) \to H_1(X, \Sigma)$，以及 $V_n = \ker((f_n)_*)$。

命题 2.18。 将不同的 $H_1(X_n, \Sigma_n)$ 识别后，n, V_n 最终会变为常数，我们将其记为 V。对于足够大的 n，$T_M\mathcal{H}'$ 可与 湮灭子(V)识别。

这一命题已针对多分支曲面证明，见 [MW17，命题 2.5 和命题 2.6]。

定理 2.19 (Mirzakhani-Wright 2017，Chen-Wright 2021)。 设 $\mathcal{M}$ 是连通且带有标记点的平移曲面层 $\mathcal{H}$中的一个不变簇。设 $M_n \in \mathcal{M}$ 是一个收敛到 $M \in \partial M$的序列。设 $\mathcal{H}'$ 是包含 M 的层，$\mathcal{M}'$ 是包含 M的 $\mathcal{M}$ 的边界分支。由命题 *2.18*，我们将 $T_M\mathcal{H}'$与 湮灭子(V)识别。于是，$T_M\mathcal{M}'$可与 $T_{M_n}\mathcal{M} \cap$湮灭子(V)识别。

该定理在 [MW17 的定理 1.1] 中针对 M 连通的情形得到了证明，而在 [CW21 的定理 1.2]中针对 M 不连通的情形得到了证明。

定理 2.20。 *[MW18，定理 1.1]* 不变子簇满秩，当且仅当它是一个满层或双曲轨迹。

我们对带有标记点的情形下双曲轨迹的定义作进一步说明。

定义 2.21。 设 $\mathcal{H}$ 是一个亏格为 ≥ 2 且带有标记点的层。若存在一个对合 $J\colon M \to M$，使其在 M的底层黎曼曲面上是双曲 involution，且 J 将标记点映射到标记点，则称 $M \in \mathcal{H}$ 为**双曲的**。若 $\mathcal{H}$ 中的每个曲面都是双曲的，则称 $\mathcal{H}$ 为**双曲的**。若不变子簇 $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ 恰好包含$\mathcal{H}$中的所有双曲曲面，则称其为**双曲轨迹**。

推论 2.22。 如果 $\mathcal{M}$ 是一个满秩不变子簇，那么 $\partial\mathcal{M}$ 的任意分支 $\mathcal{N}$ 都是带有标记点的满秩不变子簇。

证明。 根据定理 2.20，满秩不变子簇是一个层或双曲轨迹。层在周期坐标中不由任何方程定义，因此根据定理 2.19 $\mathcal{N}$ 不由任何方程定义，所以它是一个层。若双曲轨迹的双曲 involution 为 J，则它由以下方程定义：$\int_\gamma \omega + \int_{J(\gamma)}\omega = 0$，对所有鞍点 γ均成立。 J在 $\mathcal{N}$ 上限制为双曲对合，而定义 $\mathcal{M}$ 的方程限制为相应的定义 $\mathcal{N}$ 的方程。因此，$\mathcal{N}$ 是一个双曲轨迹。 □

2.4 圆柱坍缩

我们将仿照 [AW21a，引理 4.9] 的方式定义圆柱坍缩和菱形。设 $\mathcal{M}$ 是一个由带标记点的多分支曲面组成的不变子簇。设 $M \in \Delta$ 和 $\mathcal{C}$ 是 M 上一个 $\mathcal{M}$-平行类的水平圆柱。固定一条横截曲线 γ，它属于 $\mathcal{C}$ 中的某个圆柱。现在定义运算 $u_s^{\mathcal{C}}$ 和 $a_t^{\mathcal{C}}$，分别表示剪切和缩放圆柱 $\mathcal{C}$。令 $u_s^{\mathcal{C}}(M)$ 为在周期坐标中将 $s\eta_{\mathcal{C}}$ 加到 M 所得到的曲面，其中 $\eta_{\mathcal{C}}$ 在定理 2.10 之前的段落中定义。定义 $a_t^{\mathcal{C}}(M)$ 为在周期坐标中将 $(e^t-1)\eta_{\mathcal{C}}$ 加到 M 所得到的曲面。我们将 $\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\,\gamma} M$ 定义为以下运算：选取 s，使得 γ 在 $u_s^{\mathcal{C}}(M)$ 上为竖直方向。接着

$$\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\gamma} M := \lim_{t\to-\infty} a_t^{\mathcal{C}} u_s^{\mathcal{C}} M.$$

这个极限存在于 WYSIWYG 紧化中，见 [MW17，引理 3.1]或 [AW21a，引理 4.9]。定义这一操作的方式是使 γ 退化。若 M 是多分支曲面，这意味着包含 γ 的分支会退化，而 M 的其他分支可能退化，也可能不退化。我们还定义

$$\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\gamma} \mathcal{M}$$

为包含 $\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\,\gamma} M$的 $\partial\mathcal{M}$ 的分支。我们将 $\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\,\gamma}\mathcal{C}$ 定义为在 $\operatorname{Col}_{\mathcal{C},\,\gamma} M$ 上、与 $\mathcal{M}$平行且来自 $\mathcal{C}$中坍缩圆柱的鞍点集合。

设 $\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_2$ 是 M上互不相交的圆柱等价类，并设 γ_1，γ_2 分别是 $\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_2$ 中圆柱的横截曲线。滥用记号，对于 $j \neq i$，我们也用记号 $\mathcal{C}_j$，γ_j 指代 $\operatorname{Col}_{\mathcal{C}_i,\,\gamma_i} M$ 上与 $\mathcal{C}_j$，γ_j 分别对应的圆柱等价类和鞍连接。我们定义

$$\operatorname{Col}_{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\gamma_1,\gamma_2} M = \operatorname{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1} \operatorname{Col}_{\mathcal{C}_2,\gamma_2} M = \operatorname{Col}_{\mathcal{C}_2,\gamma_2} \operatorname{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1} M.$$

定义 2.23。设 $\mathcal{M}$ 是多分支曲面上的一个不变子簇。若曲面 $M \in \mathcal{M}$ 满足：同一分支上的两个鞍点只有在彼此 $\mathcal{M}$-平行时才平行，则称其为$\mathcal{M}$-一般的。若由上下文可知 $\mathcal{M}$，我们就简称 M 一般的。

引理 2.24。 对于任意多分支不变子簇，稠密的 G_δ 曲面集合都是一般的。

证明。 两个并非一般地平行的鞍点彼此平行这一条件，在周期坐标中定义了一个线性子空间。曲面上有可数多个鞍点，而方程的系数必须属于这两个鞍点所在分支的定义域。根据 Wri14，定理 1.1]，定义域是 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张。

□

引理 2.25。 设 $\mathcal{M}$ 是一个满秩不变子簇，且设 $M \in \mathcal{M}$ 一般。则 $\mathcal{M}$上的每个圆柱C 都是简单的。

证明。 根据定理 2.20， $\mathcal{M}$ 是一个层或双曲轨迹。反设存在一个不是简单圆柱的圆柱C，则会有一个边界分支包含多个鞍点。由于 M 是一般的，这些鞍点彼此 $\mathcal{M}$-平行。这在一个层中是不可能的，因此 $\mathcal{M}$ 必定是双曲轨迹。令 γ_1, γ_2 为 C边界上的平行鞍点。 M 上的每个圆柱要么保持不变，要么与另一个圆柱互换。无论哪种情况，商曲面 N 上都有一个对应的圆柱，我们仍称之为 C，其上有两个鞍点，我们仍称之为 γ_1 和 γ_2。现在我们借助 [MZ08], ，并采用 [AW21b，命题 4.4]中的表述和术语。根据该定理，从N 中移除 γ_1, γ_2 后，曲面会断开为两个分支 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，其中不包含 C 的分支 $\mathcal{B}$ 具有平凡的全纯。由于 $\mathcal{M}$是双曲的， N 的亏格为 0，因此 $\mathcal{B}$ 在拓扑上是一个圆柱。然而，沿着 γ_1, γ_2 将这个圆柱粘回去会产生亏格。这与 N 的亏格为 0 矛盾。因此，圆柱$C \subset M$ 必定是简单的。

□

引理 2.26. 设 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 为一条准对角线， $M \in \Delta$ 为一般曲面， $\mathcal{C} \subset M$ 为曲面 M上的一个 Δ-平行圆柱类， γ 为 $\mathcal{C}$中一个圆柱的横截曲线。设 $\Delta := \operatorname{Col}_{\mathcal{C},\gamma} \Delta$。那么 维数 Δ' = 维数 $\Delta - 1$ 且维数 $\mathcal{M}_i - 1 \leq$ 投影$_i(\Delta') \leq$ 维数 $\mathcal{M}_i$，其中 $i = 1, 2$。

证明。设 $M' := \mathrm{Col}_{c,\gamma} M$。由于 M 是一般的，消失圈空间是一维的，因此根据命题 2.18，$\dim\ \Delta' = \dim\ \Delta - 1$，且 $T_{M'}\Delta'$ 可视为 $T_M\Delta$ 的一个一维子空间。于是，$\dim(\mathrm{proj}_i\, T_M\Delta) - 1 \le \dim(\mathrm{proj}_i\, T_{M'}\Delta') \le \dim(\mathrm{proj}_i\, T_M\Delta)$。结论得证。 □

引理 2.27. 设 $\mathcal{M}$ 是一个不变子簇，$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 是一个余维为 1 的子簇。那么 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 必须具有相同的秩。

证明。 $p(T\mathcal{N}) \subset p(T\mathcal{M})$ 的余维至多为 1，且 $p(T\mathcal{M})$ 上的辛形式限制到 $p(T\mathcal{N})$ 后仍是辛形式，因此实际上 $p(T\mathcal{M}) \cong p(T\mathcal{N})$。 □

引理 2.28. 设 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 是一条准对角线，其中 $\mathcal{M}_i$ 是一个满秩不变子簇，$M = (M_1,\ M_2) \in \Delta$ 是一般的，$\mathcal{C}$ 是 M 上圆柱的一个 Δ-等价类，而 γ 是 M_1 上某个圆柱 $C \in \mathcal{C}$ 的一条横截曲线。若 $\mathrm{Col}_{C,\gamma}\mathcal{M}_1$ 的秩低于 $\mathcal{M}_1$，则必定存在一条与 γ 一般平行的 $\gamma' \subset M_2$，它是 $\mathcal{C}$ 中某个圆柱的横截曲线。

证明。 反设 $\mathcal{M}_2$ 没有鞍点在 $\mathrm{Col}_{c,\gamma}\Delta$ 中塌缩，因此 $\mathcal{M}_2' := \mathrm{proj}_2(\mathrm{Col}_{c,\gamma}\Delta) \subset \mathcal{M}_2$。然而，根据引理 2.26，$\mathcal{M}_2'$ 的维数至多比 $\mathcal{M}_2$ 小一；根据定理 2.1，其秩也低于 $\mathcal{M}_2$。这与引理 2.27 矛盾。因此，某个 $\gamma' \subset M_2$ 在 $\mathrm{Col}_{c,\gamma}\Delta$ 中塌缩。原则上，γ' 可能横穿多个相邻圆柱。由于我们假设 M 是一般的，根据引理 2.25，所有圆柱都必须是简单的。相邻的简单圆柱在标记点处相交，但我们假设不存在标记点，因此不存在相邻圆柱。 □

引理 2.29. 设 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 是一条准对角线，其中 $\mathcal{M}_i$ 是一个满秩不变子***avariety***，$M = (M_1, M_2) \in \Delta$ 是一般的，$\mathcal{C}$ 是 Δ 上圆柱的一个等价类，而 γ 是一条横截曲线 ***a cylinder*** $C \in \mathcal{C}$。设 $\mathcal{M}_i' := \mathrm{proj}_i(\mathrm{Col}_{c,\gamma}\Delta)$。那么，$\mathrm{Col}_{c,\gamma}\Delta \subset \mathcal{M}_1' \times \mathcal{M}_2'$ 是一条准对角线，而 $\mathcal{M}_i'$ 是一个带有标记点的满秩不变子簇。

证明。 根据 [AW21a 引理 9.1], $\Delta' := \mathrm{Col}_{c,\ \gamma}\Delta$ 是一个素不变子簇，因此它是 $\mathcal{M}_1' \times \mathcal{M}_2'$ 中的一个准对角线。接下来只需证明 $\mathcal{M}_i'$ 是满秩的。设 $M = (M_1,\ M_2)$ 和 $\mathcal{C}_i$ 是 M_i 上 $\mathcal{C}$ 的圆柱。设 $M' = (M_1',\ M_2') = \mathrm{Col}_{c,\ \gamma} M$。不失一般性，设 $\gamma \subset M_1$。根据推论 2.22，$\mathcal{M}_1' = \mathrm{Col}_{c_1,\ \gamma}\mathcal{M}_1$ 是带有标记点的满秩不变子簇。根据引理 2.26，$\mathcal{M}_2'$ 的余维至多为 1。如果 $\mathcal{M}_2' \subset \mathcal{M}_2$，根据引理 2.27，$\mathcal{M}_2'$ 是满秩的。否则，某个鞍连接 $\gamma' \subset M_2$ 会塌缩，因此 $\mathcal{M}_2' = \mathrm{Col}_{c_2,\ \gamma'}\mathcal{M}_2$，所以根据推论 2.22，$\mathcal{M}_2'$ 是满秩的。 □

定义 2.30。设 $\mathcal{M}$ 是一个可能具有多个分支的层中的不变子簇。设 $M \in \mathcal{M}$ 是一般的，且 $\mathcal{C}_1$，$\mathcal{C}_2$ 是两个不同的 $\mathcal{M}$ 圆柱平行类。设 γ_i 是 $\mathcal{C}_i$ 中某个圆柱上的横截曲线。进一步假设，$\mathrm{Col}_{c_1,\ \gamma_1,\ c_2,\ \gamma_2} M$ 的各分支除恒等变换外没有其他平移曲面自同构。那么，$(\mathcal{M},\ M,\ \mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2)$ 称为一个**良好菱形**。注意，此定义是 [AW22 第 5] 节中定义的斜菱形的一个特例。

以下内容与 [AW21c 引理 3.31] 类似。

引理 2.31。设 $\mathcal{M}$ 是秩至少为2的素不变子簇。那么，存在一个 G_δ 集合 $U \subset \mathcal{M}$，使得对于 $M \in U$，存在一个包含 M 的良好菱形。此外，如果 $\mathcal{M}$ 的秩至少为3，则存在一个 G_δ 集合，其中 M 个这样的 M 包含三个圆柱 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$，使得任意两个 $\mathcal{C}_i$ 都包含在某个良好菱形中。

证明。 根据引理 2.24，G_δ 中的一 U' 组曲面是一般的。现在我们证明，可以在稠密开集 V 中的任意曲面 M 上找到 k 个圆柱类。根据定义，$\mathcal{M}_i = \mathrm{proj}_i(\mathcal{M})$ 的秩为 k。根据 [Wri15，定理 1.10]，在 $\mathcal{M}_i$ 中，水平周期曲面的集合有一个稠密子集，其中至少包含 k 个互不相交的圆柱等价类。在这些点的每个点周围，都存在一个开子集，使这些圆柱持续存在且仍然互不相交，因此 $\mathcal{M}_i$ 中的稠密曲面集至少包含 k 个互不相交的圆柱等价类。根据引理 2.15，如果 $\mathrm{proj}_i\, M$ 包含 k 个互不相同的 $\mathcal{M}_i$-平行类，那么 M 就包含 k 个互不相同的 Δ-平行类。由于 proj_i 是一个浸没，因此存在一个稠密的曲面集 $\mathrm{proj}_i^{-1}(M) \subset \mathcal{M}$，其中有 k 个互不相交的圆柱

等价类。因此， Δ 中包含至少 k 个互不相同的 Δ-平行类的一般曲面集合 U'' 是一个 G_δ 集。

对于每个 $M \in U''$，在 M 周围都存在一个开集 V_M，其中 k 圆柱类保持不变。对于任意两个圆柱类 $\mathcal{C}_1$， $\mathcal{C}_2$，在 $\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\,\gamma_1,\,\mathcal{C}_2,\,\gamma_2}\mathcal{M}$ 中具有非平凡平移曲面同构的曲面构成一个孤立点集。因此，在 Δ 中存在一个由可数个二维曲面空间组成的并集，其中 $\mathcal{C}_1$， $\mathcal{C}_2$ 不属于良好菱形。因此，从 V_M 中去除所有可能的 Δ-平行类对所对应的这些集合后，剩下的是一个满足引理条件的开稠密集 V_M。将所有这些集合取并，便得到作为引理结论的 G_δ 集合 U。 □

定义 2.32。设 $\mathcal{M}$ 是一个带有标记点的不变子簇。**对角线** $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ 是由曲面 $(M,\ N)$ 构成的集合，其中存在一个平移曲面同构 $M \to N$，它将标记点映射到标记点。**反对角线** $\mathcal{D} \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ 是由曲面 $(M,\ N)$ 构成的集合，其中 $N = -\mathrm{Id}(M)$ 和 $-\mathrm{Id}$ 将标记点映射到标记点。

引理 2.33。设 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 是一条（等面积）准对角线。若对于任意良好菱形 $(\Delta, M, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \gamma_1, \gamma_2)$，$\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_i,\gamma_i}\Delta$，$i = 1,2$ 均为对角线（分别为反对角线），允许重新缩放（见注记 *2.5*），则 Δ 是一条对角线（分别为反对角线）。

证明。我们证明关于对角线的结论；关于反对角线的结论证明类似。设 $(\Delta, M, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \gamma_1, \gamma_2)$ 是任意一个良好菱形，并令 $M = (M_1, M_2)$。假设 $\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_i,\gamma_i}\Delta$，$i = 1,2$ 均为对角线，允许重新缩放。于是存在常数 $r_i > 0$ 和同构 $f_i : \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_i,\gamma_i} M_1 \to r_i \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_i,\gamma_i} M_2$，它们限制为同构

$$\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_2,\gamma_2} f_1 : \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1,\mathcal{C}_2,\gamma_2} M_1 \to r_1\, \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1,\mathcal{C}_2,\gamma_2} M_2$$
$$\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1} f_2 : \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1,\mathcal{C}_2,\gamma_2} M_1 \to r_2\, \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_1,\gamma_1,\mathcal{C}_2,\gamma_2} M_2$$

由于我们选取了一个良好菱形，这些必定是同一个同构。我们还得到 $r_1 = r_2$，因为同构的平移曲面必定具有相同的面积。现在我们可以如下定义一个同构 $f : M_1 \to r_1 M_2$。 $M_i - \mathcal{C}_j$ 可识别为 $\mathrm{Col}_{\mathcal{C}_j,\ \gamma_j} M_i - \mathrm{Col}_{\mathcal{C}_j,\ \gamma_j} \mathcal{C}_j$ 对于 $i, j = 1,\ 2$。因此，可将 f 定义为在 $M_1 - \mathcal{C}_i$ 上的 f_i。 f 在 $M_1 - \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$ 上被定义了两次，但这两个定义一致。由此定义了一个带 puncture 的平移曲面同构 f。$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ 由一个有限点集构成，因此我们可以将 f 延拓为从 M_1 到 M_2 的同构。

注意，由于我们假设 M_1， M_2 具有相同的面积，因此 $r_1 = 1$。根据引理 2.31，对于稠密的一组 M，存在一个包含 M 的良好菱形；对于这些 M，两个分支 M_i 均同构，因此 Δ 是一条对角线。 □

2.5 标记点

关于标记点的更深入讨论，请参见 [AW21b]。

定义 2.34. 设 $\mathcal{H}$ 为一个层， $\mathcal{H}^{*n}$ 为 $\mathcal{H}$ 中具有 n 个互异标记点的曲面集合。设 $\mathcal{F}$： $\mathcal{H}^{*n} \to \mathcal{H}$ 为遗忘标记点的映射。设 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一个不变子簇。若一个不变子簇 n**点标记** 是 $\mathcal{H}^{*n}$ 的子簇，且在 $\mathcal{F}$ 下映射到 $\mathcal{M}$ 的稠密子集，则称其为 n**点标记**。对于任意 n，我们都用“点标记”一词指代 n 点标记。若一个点标记是另外两个点标记的逐纤维并，则称其为**可约**；否则称其为不可约。若在 M 上，标记点 p 与其他任一标记点之间在 $\mathcal{M}$ 中都不存在关系，则称其在 $M \in \mathcal{M}$ 上是 $\mathcal{M}$-**自由的**。当 $\mathcal{M}$ 已知时，我们称 p 为自由标记点。类似地，当 $\mathcal{M}$ 已知时，若 $\mathcal{M}$ 不可约，则称 M 上的一组标记点不可约。

引理 2.35. 设 $\mathcal{M}$ 是一个亏格为 g 的层中的不变子簇。设 $M \in \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{C}$ 是一个 $\mathcal{M}$-平行类，其中只包含一个简单圆柱 C。设 γ 是 C 的一条横截曲线。设 $M' = \mathrm{Col}_{C,\ \gamma} M$ 和 $\mathcal{M}' = \mathrm{Col}_{C,\ \gamma} \mathcal{M}$。若 $\mathrm{Col}_{C,\ \gamma} C$ 的端点彼此不同，则亏格 $g(\mathcal{M}) = g(\mathcal{M}') + 1$。

类似地，假设 $\mathcal{C}$ 包含两个简单圆柱，并且 $\mathrm{Col}_{\mathcal{C},\gamma}\mathcal{C}$ 的四个端点至少包含三个不同的点。那么 $g(\mathcal{M}) = g(\mathcal{M}') + 2$。

证明。 设 $\mathcal{M}'$ 包含在一个带有标记点 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\kappa)$ 的层中，其中 κ 是一个元组，包含 $\mathcal{H}$中各曲面的奇点阶数。令 $|\kappa|$ 为 κ 各项之和， s 为 κ中的元素个数。注意，对于任意层 $\mathcal{H}(\kappa)$，都有 $2g-2=|\kappa|$ 。 M' 所有奇点周围的角度之和为 $2\pi(s+|\kappa|)$。粘合一个圆柱后， M 的奇点周围的角度之和为$2\pi(s+|\kappa|+1)$。然而，$\mathrm{Col}_{c,\gamma} C$ 的两个不同端点合并为一个，因此 M 有 $s-1$ 个奇点，所以奇点之和为 $|\kappa|+2=2g(\mathcal{M})-2$。因此， $g(\mathcal{M})=g(\mathcal{M}')+1$。为证明第二个结论，我们可以逐个粘合圆柱。每次亏格都会增加一。

□

定理 2.36. 设 $\mathcal{P}$ 是不变子簇 $\mathcal{M}$ 上的非空不可约点标记。若 $\mathcal{M}$ 满秩，则 $\mathcal{P}=\mathcal{M}^*$ 或 $\mathcal{M}$ 是具有双曲 *involution* J 的双曲轨迹，并且 $\mathcal{P}$ 属于以下情况之一

$$\{(M,p): M\in\mathcal{M}, p \textit{ is a Weierstrass point}\}$$
$$\{(M,p,J(p)): M\in\mathcal{M}, p\in M\}$$

此定理 已针对 [中的分层证明，见 Api20，定理 1.5] 和 [AW21b，定理 1.4]，在一般情况下 al.

引理 2.37. 设 $\mathcal{M}$ 是一个带有标记点的不变子簇。设 $M\in\mathcal{M}$，并设 Γ 是 M 上一组$\mathcal{M}$平行的鞍连接。假设没有鞍连接将某个标记点连接到其自身。设 $\gamma\in\Gamma$ 是一个鞍点，且 γ 至少有一个端点是标记点但不是周期点。那么，对于 γ 的每个既是标记点又不是周期点的端点 p，都存在一个标记点的不可约集 $P\ni p$，使得对每个 $\gamma_i\in\Gamma$， P 都包含 γ_i 的一个端点。

证明。 令 P 为包含 p的 M 中标记点的极大不可约集。我们可以移动P 中的点，而不移动曲面的其余部分。不存在不以 P为端点的鞍点 $\gamma'\in\Gamma$，否则我们可以使 γ 不与 γ'平行，这就产生了矛盾。

□

引理 2.38. 设 $\mathcal{M}$ 是不变子簇（没有标记点）， $M\in\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$ 是 M上的一个 $\mathcal{M}$-平行类的简单圆柱， γ 是 $\mathcal{C}$ 的一条横截曲线。假设 M' 上至少有一个标记点：$=\mathrm{Col}_{c,\gamma} M$以及 $\Gamma:=\mathrm{Col}_{c,\gamma}\mathcal{C}$。

1. 若 $\mathcal{M}$ 是一个层，则 M' 的每个标记点都是自由的。此外， Γ 只包含一条鞍连接。
2. 若 $\mathcal{M}$ 是双曲轨迹，并令 J 为 $\mathcal{M}'$上诱导的双曲对合。则， M' 不含周期点，而 Γ 要么由一条被 J 固定的鞍连接构成，要么由两条被 J互换的鞍连接构成。

证明。 首先假设 $\mathcal{M}$ 是一个层。由定理 2.19，每个标记点都是自由的。令 $\Gamma:=\mathrm{Col}_{c,\gamma}\mathcal{C}$。设$\gamma\in\Gamma$ 是一个鞍点，且 γ 至少有一个端点是标记点。根据引理 2.37，并且由于所有标记点都是自由的， γ 不可能与 M'上的任何其他鞍连接 $\mathrm{Col}_{c,\gamma}\mathcal{M}$-平行。因此， $\mathcal{C}$ 仅由一个圆柱组成，所以 Γ中只有一个鞍点。现在假设 $\mathcal{M}$ 是一个双曲轨迹。

断言 2.39。 M' 上的标记点都不是魏尔斯特拉斯点。

证明。反设存在一个鞍点 $\gamma_1\in\Gamma$，其一个端点是魏尔斯特拉斯点 p。令 $\gamma_2=J'(\gamma_1)$。注意， $\gamma_2\neq\gamma_1$，否则 M 会有标记点，这与我们的假设矛盾。于是有两个圆柱 C_1、$C_2\in\mathcal{C}$，它们分别坍缩为 γ_1、γ_2。设 q_1为 γ的另一个端点，则 $q_2=J'(q_1)$是 γ_2的另一个端点。先假设 $q_1\neq q_2$。注意， M 在拓扑上等于 M' 加上两个把手，因此其亏格比 M'大二。因此，M 上的双曲对合必须比 M'上的双曲对合多四个不动点。根据我们的假设， J 交换 C_1 和 C_2。 J 的不动点是 J' 的不动点去掉 p，再加上由 q_1、q_2融合而产生的奇点。因此， J 的不动点数量与 J'相同。这是不可能的。剩下的情况是 $q_1=q_2$。此时， M 的亏格比 M' 大一。然而， J 的不动点比 J' 的不动点少两个，这同样导致矛盾。因此， M' 不可能有魏尔斯特拉斯点。

□

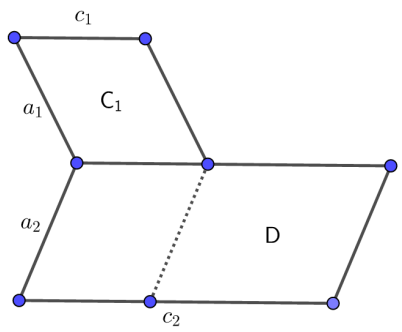

图1：水平周期曲面是 $\mathcal{H}(2)$。

根据断言和定理 2.36， M' 没有周期点。 $\mathcal{C}$ 至多由两个圆柱组成。如果 $\mathcal{C}$ 是一个圆柱，它必定被双曲对合固定。在这种情况下， Γ 是一个鞍点 γ，且 γ 被 J固定。现在假设 $\mathcal{C}$ 包含两个圆柱。这两个圆柱必定被双曲对合互换，因此 Γ 由两个被 J互换的鞍点组成。证明完毕。

□

3 亏格2

作为归 纳法的基本情形，我们必须证明定理1.8对于 $\mathcal{H}(2) \times \mathcal{H}(2$ 中准对角线的结论).

定理 3.1。 $\Delta \in \mathcal{H}(2) \times \mathcal{H}(2)$ 中唯一的（等面积）准对角线是对角线 $\{(M, M)$: $M \in \mathcal{H}(2)\}$。

设 $\Delta \subset \mathcal{H}(2) \times \mathcal{H}(2)$ 是一条准对角线。设 $(M, M') \in \Delta$ 是任意一般曲面。为证明该定理，只需证明 M' 等于 M，这就是下面的引理 3.5。

引理3.2。 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 是超椭圆分支，且 $\Delta \subset \mathcal{H}_1, \times \mathcal{H}_2$ 是一条准对角线。设 $\mathcal{C}$ 是曲面 $M \in \Delta$ 上的一个圆柱等价类。那么， $\mathcal{C}$ 在每个分支上都由一个圆柱组成。

证明。 由引理 2.15， $\mathcal{C}$ 由一个 $\mathcal{H}_1$-平行类和一个 $\mathcal{H}_2$-平行类组成。对于任意层 $\mathcal{H}$，一个 $\mathcal{H}$ 平行类由一组同调圆柱的等价类组成；而在超椭圆分支上，任意两个圆柱都不同调。

□

在 M 上选取两个不相交的圆柱 C_1， D。由引理3.2， M' 上存在圆柱 C_1'， D'，使得 $\mathcal{C}_1 = \{C_1, C_1'\}$ 和 $\mathcal{D} = \{D, D'\}$ 是圆柱的 Δ-平行类。由推论 2.14， C_1'， D' 必须不相交。我们旋转 $(M$， $M')$，使 $\mathcal{C}$ 变为水平，并对 $\mathcal{D}$ 进行圆柱剪切，直到 M 变为水平周期。由引理 2.8， M' 也具有水平周期性。设 M 上另一个水平圆柱为 C_2。我们固定 C_i 的一条横截曲线 γ_i，其中 γ_2 是 D 的一条边界曲线。设 γ_i 的周期为 a_i。设 C_i 的核心曲线的周期为 c_i。见图1。由于 M 具有水平周期性，我们有 $\operatorname{Im} c_i = 0$。将 M' 中对应的圆柱、鞍连接和周期分别标上撇号。

由于 Δ 由周期坐标中的线性方程刻画，因此我们有

$$T' \cdot \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

对于某些实矩阵 T、T'。根据定理 2.1，绝对周期彼此确定，因此上述矩阵可逆。于是我们可以假设 $T' = \mathrm{Id}$。根据引理 2.28，我们可以选取 a_1、a_1'，使它们Δ-平行。此外， a_2、a_2' 也是 Δ-平行的，因为它们是 Δ-平行圆柱的边界曲线。这

意味着 a_i' 不依赖于除 a_i以外的任何周期。改变 Im a_1、Im a_2 不会影响 Im c_1'、Im c_2'，因为根据引理 2.8，曲面必须保持水平周期。因此，我们可以简化矩阵

$$T = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{11} & g_{12} \\ 0 & 0 & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

引理 3.3. 沿用上述记号， $g_{12} = g_{21} = 0$。

证明。 我们可以对 $\mathcal{D}$ 进行伸缩，同时保持曲面为水平周期。这会改变周长c_2 ，而不改变 c_1，因此 $g_{12} = 0$。下面的剪切组合会改变 c_1 ，而不改变c_2' 或 a_1'。对 $\mathcal{D}$ 进行伸缩，同时保持曲面为水平周期。现在沿实数方向缩小整个曲面（即乘以形如 $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵），使 c_2 恢复到其原始大小。这会改变 c_1 ，而不改变 c_2，因此 $g_{21} = 0$。

□

引理 3.4. 设 (M, M') 是 Δ中的一般曲面。设 C, C' 分别是 M, M'上的 Δ-平行简单圆柱。那么，它们具有相同的模数。

证明。 设 $\mathcal{C} = \{C, C'\}$。剪切 $\mathcal{C}$ ，使得 C 的一条横截曲线 γ 变为垂直方向。由引理 2.28， C' 也有一条垂直鞍连接 γ'。现在继续剪切 $\mathcal{C}$ ，直到 M 再次出现垂直鞍连接。注意到两者都必定各自经过了一整圈剪切。因此，它们的模数必定相等。

□

引理 3.5. 设 $\Delta \subset \mathcal{H}(2) \times \mathcal{H}(2)$ 是准对角线，且$(M, M') \in \Delta$ 是一般曲面。那么 M和 M'是同构的平移曲面。

证明。 我们使用上述记号标记这些曲面。由于这些曲面的组合结构相同，只需证明 $T =$Id。我们先证明 $g_{22} = f_{22}$ 与 $f_{11} = g_{11}$ 相似。取 Δ 中的一列一般曲面，使其收敛到 (M, M')。对于足够接近 (M, M') 的曲面，存在分别对应于 C_i, C_i' 的圆柱。由引理 3.4，沿着这一序列， C_i, C_i'的模数相同，因此它们在 (M, M') 上的模数也相同。设 h_i, h_i'分别是 C_i, C_i'的高度。那么， $\frac{c_i}{h_i} = \frac{c_i'}{h_i'} = \frac{g_{ii}c_i}{f_{ii}h_i}$，因此 $f_{ii} = g_{ii}$。

现在我们证明 $g_{11} = f_{22}$。我们对 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$进行剪切变形，使得 γ_1, γ_2为竖直方向，从而使 M, M'同时具有竖直周期性和水平周期性。根据上面的相同论证， D, D' 必须具有相同的模数。因此

$$\frac{c_2 - c_1}{a_2} = \frac{c_2' - c_1'}{a_2'} = \frac{g_{22}c_2 - g_{11}c_1}{f_{22}a_2},$$

所以 $f_{11} = f_{22} = g_{11} = g_{22}$。现在我们看到

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = f_{11} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

由于我们假设两侧面积相同，因此有 $f_{11} = 1$。于是， $T =$ Id。定理 3.1 的证明至此完成。

□

4 主定理的证明

根据定理 2.20，定理1.8 等价于以下命题:

定理 4.1。 设 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 是亏格为 $g \geq 2$ 的平移曲面分层中的满秩不变子簇（无标记点）。存在（等面积）拟对角线 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 当且仅当 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$。在这种情况下， Δ 必须是对角线和反对角线。

证明。 我们使用归纳法。定理 3.1 是关于拟对角线 $\Delta \subset \mathcal{H}(2) \times \mathcal{H}(2)$ 的定理，它是基例。设 r, s 已给定，并且当任意 $\Delta \subset \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 满足 $\operatorname{rk} \Delta < r$ 或 $\operatorname{rk} \Delta = r$ 且 $\operatorname{rel} \mathcal{M}_1 + \operatorname{rel} \mathcal{M}_2 < s$ 时，定理成立。现在，我们将证明 $\operatorname{rk} \Delta = r$ 且 $\operatorname{rel} \mathcal{M}_1 + \operatorname{rel} \mathcal{M}_2 = s$ 时的定理。设 $M \in \Delta$ 为一般曲面， $\mathcal{C}$ 为 M 上的一个 Δ-平行类。设 ~~γ 为~~ $\mathcal{C}$ 的一个圆柱的横截曲线。令 $\Delta' := \operatorname{Col}_{c,\gamma} \Delta$，且 $\mathcal{M}'_j := \operatorname{proj}_j \Delta'$。根据引理 2.29，$\Delta' \subset \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}'_2$ 是拟对角线，其中 $\mathcal{M}'_j$ 是带标记点的满秩不变子簇。

断言 4.2。 $\Delta' \subset \mathcal{M}'_1 \times \mathcal{M}'_2$ 是对角线或反对角线。此外，如果 $\mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{M}_2$ 是双曲轨迹，那么 Δ' 既是对角线，也是反对角线。回想一下，对角线和反对角线是在定义 2.32 中针对带标记点的不变子簇定义的。

证明。当 $\mathcal{M}'_1$ 和 $\mathcal{M}'_2$ 都没有标记点时，根据归纳假设，断言成立。设 $\mathcal{F}$ 为遗忘标记点的函子。存在标记点时，仍可对 $\mathcal{F}\Delta' \subset \mathcal{F}\mathcal{M}'_1 \times \mathcal{F}\mathcal{M}'_2$使用归纳假设。定义 $\mathcal{N} := \mathcal{F}\mathcal{M}'_1 = \mathcal{F}\mathcal{M}'_2$，它是满秩的。令 $(M'_1, M'_2) = \operatorname{Col}_{c,\gamma}(M_1, M_2)$。由于 $\mathcal{F}\Delta'$是对角线或准对角线，因此存在曲面之间的映射$I\colon \mathcal{F}M'_1 \to \mathcal{F}M'_2$；若 $\mathcal{F}\Delta'$是对角线，该映射就是恒等映射；若 $\mathcal{F}\Delta'$是反对角线，该映射就是 $-\mathrm{Id}$。当 $\mathcal{N}$ 是双曲轨迹时， Δ' 既是对角线也是反对角线，因此令 I 表示恒等映射，令 I' 表示 $\frown -\mathrm{Id}$。我们可以构造一个带标记点的平移曲面 $M\colon$ 取底层曲面 $\mathcal{F}M'_2$、 M'_2的标记点，以及 M'_1的标记点在 I下的像。取所有 M组成的集合，便得到 $\widehat{\mathcal{N}}$ 一个带标记点的不变子簇。令 $\Gamma = \operatorname{Col}_{c,\gamma} \mathcal{C}$，其定义见第 2.4 节开头。作为一种记号上的简化，我们将“鞍点”一词也用于指连接标记点或奇点的测地线段；允许标记点位于线段内部，但不允许奇点位于其内部。令 $\Gamma_1 = I(\Gamma \cap M'_1)^{\frown}$和 $\Gamma_2 = \Gamma \cap M'_2$。根据我们对鞍点的定义， Γ_1和 Γ_2是 M上的鞍点集合。

根据引理 2.38，这些标记点都不是周期点。此外， Γ_1 或 Γ_2 中的鞍点都不能连接某个标记点与其自身，否则它就来自将 M上的两个标记点坍缩在一起，但我们假设 M没有标记点。由于 Γ 是 M'上的一组 Δ'-平行鞍连接，因此 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 是 $\widehat{M}$上的一组 $\widehat{\mathcal{N}}$-平行鞍连接。因此，根据引理 2.37，存在一个包含不可约集$^{\frown}$的标记点集合 $P \subset M$，其中包含 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$中每个鞍点的一个端点。根据定理 2.36， P由一个自由标记点或两个被双曲 involution 互换的点组成。

子断言 4.3。 如果 γ_1， $\gamma_2 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$是共享一个同时也是标记点的端点的 $\widehat{\mathcal{N}}$-平行鞍点，那么 $\gamma_1 = \gamma_2$。

证明。由于 γ_1、 γ_2 的内部不含任何奇点（标记点除外），因此存在一个平坦的$^{\frown}$坐标图，其中包含 M 、 γ_1 和 γ_2。设 p 是 γ_1 和 γ_2上的一个标记点。根据引理 2.38， M 的标记点中没有一个是魏尔斯特拉斯点。设 P 是包含$\frown p$的极大不可约标记点集。 $\mathcal{F}N$ 是一个层或双曲轨迹，因此根据定理 2.36， P 要么是 $\{p\}$ ，要么是 p， $J(p)$ ，其中 J 是 M上的$^{\frown}$双曲对合。我们可以扰动 P而不改变曲面的其余部分。如果 $P = \{p\}$，显然，若 $\gamma_1 \neq \gamma_2$，则存在某种扰动使它们不再平行。由于 γ_1、 γ_2是 $\mathcal{N}$平行的，我们必有 $\gamma_1 = \gamma_2$。现在假设 $P = \{p, J(p)\}$。如果 $J(p)$不在 γ_1、 γ_2的四个端点之中，这就等同于前一种情况。若从 p 出发、指向 γ_i 内部的向量彼此相差 180 度，我们就称 γ_1、 γ_2 位于 p 的相对两侧。如果 γ_1 和 γ_2 位于 p 的相对两侧，那么对 p 作微小扰动就会使它们不再平行。如果 γ_1、 γ_2 都连接 p 和 $J(p)$以及 $\gamma_1 \neq \gamma_2$，那么 γ_1和 γ_2 位于 p的相对两侧，因此扰动也会使 γ_1 和 γ_2 不再平行。最后一种情况是， γ_1 连接 p 和 $J(p)$ ，而 γ_2 将 p 连接到另一个点 q。我们将 p 扰动为一个小向量 δ，于是$J(p)$会改变 $-\delta$。因此， γ_1 的周期改变 2δ ，而 γ_2 的周期改变 δ。在任何此类扰动下， γ_1 和 γ_2 仍然平行，因此 γ_2 的周期必定是 γ_1周期的一半。此外， γ_1 和γ_2 位于 p的同一侧。因此， q 是 γ_1的中点。然而，这是一个魏尔斯特拉斯点，因为 γ_1 被 $J^{\frown}$固定，而 M 的标记点中没有魏尔斯特拉斯点。这排除了最后一种情况，故子断言得证。

□

根据子断言 4.3， P中的每个点都恰好与一个鞍点相邻。因此， $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 由一条鞍连接组成；如果 $\mathcal{N}$ 是双曲轨迹，则由两个鞍点组成。在后一种情况下，应用

再次使用子断言 4.3，我们得出这两个鞍点必定被双曲 involution J互换。现在，基于对 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 的这一理解以及引理 2.38，我们可以理解 Γ_1 和 Γ_2。情形 1： $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是分层。

根据引理 2.38， Γ_1， Γ_2 各自包含一个鞍点 γ_1， γ_2。因此， γ_1 和 γ_2 要么是同一条鞍连接，要么被双曲 involution 互换。如果 $\gamma_1 = \gamma_2$将标记点映射到标记点，那么 Δ' 就是一条对角线或反对角线。否则，$\mathcal{N}$ 是双曲的，且 I'将标记点映射到标记点，因此 Δ' 是反对角线。

情形 2： $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是双曲轨迹。

如果 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 由一条鞍连接构成，那么 $\Gamma_1 = \Gamma_2$ 就是一个鞍点；根据引理 2.38，该鞍点在双曲 involution 下保持不变。因此， I， I' 都将标记点映射到标记点，所以 Δ'既是对角线也是反对角线。现在假设 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \{\gamma, J(\gamma)\}$，其中 $\gamma \neq J(\gamma)$。根据引理 2.38，Γ_i 包含一个在 J 下保持不变的鞍点，或包含两个在 J下互换的鞍点。由于 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 中的鞍点均不在 J下保持不变， $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \{\gamma, J(\gamma)\}$，且 Δ' 既是对角线也是反对角线。

情形 3： $\mathcal{M}_1$ 是一个层， $\mathcal{M}_2$ 是一个双曲轨迹。

根据引理 2.38， Γ_1 是一条鞍连接，而 Γ_2 可以是一条被 J 固定的鞍连接，也可以是两条被 J互换的鞍连接。我们将通过矛盾证明， Γ_2 不可能由两条不同的鞍连接组成。假设 $\Gamma_2 = \{\gamma, J(\gamma)\}$， $\gamma \neq J(\gamma)$。首先我们将证明，在 $\gamma, J(\gamma)$， $\overset{\frown}{}$的四个端点中，至少有三个不同的点。对 M应用引理 2.37， γ 和 $J(\gamma)$各自必有至少一个标记点作为端点。对于每条鞍连接，其两个端点不可能是同一个标记点，因为我们假设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 都没有标记点。此外，根据子断言， γ 和 $J(\gamma)$的标记点彼此不同。因此，四个端点中至少有两个不同的标记点，以及至少另一个不同的端点。由引理 2.35，亏格 $g(\mathcal{M}_1) \leq g(\mathcal{N}) + 1$，但 $g(\mathcal{M}_2) = g(\mathcal{N}) + 2$; 这与我们的假设矛盾，因为我们假设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是秩相同的满秩不变子簇。因此， Γ_2 只能有一条被 J固定的鞍连接。

回忆一下， $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 要么是由 J 固定的单个鞍点，要么是由 J 交换的两个鞍点。但 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 不可能是由双曲 involution 交换的两个鞍点，因为 Γ_2 包含一个由 J 固定的鞍点。因此， $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 必须只由一条鞍连接组成，所以 $\Gamma_1 = \Gamma_2$，由此可得 Δ' 既是对角线也是反对角线。 $\mathcal{M}_1$ 是双曲轨迹且 $\mathcal{M}_2$ 是层的情形等价于此情形，因此我们证明了该断言。 □

设 $(\mathcal{M}, M, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \gamma_1, \gamma_2)$ 是一个良好菱形，它由引理 2.31 保证存在。根据该断言，如果 $\mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{M}_2$ 是双曲的，那么对于 $i = 1$，Col$_{\mathcal{C}_i, \gamma_i} \Delta$ 是一条对角线，2。因此，根据引理 2.33， Δ 必须是一条对角线。现在还需考虑 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 不是双曲的情形。在此情形下，秩至少为 3，因此根据引理 2.31，我们可以找到 M 以及三个不相交的圆柱等价类 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ ，使得对于任意两个 $\mathcal{C}_i \neq \mathcal{C}_j$，我们都能找到一个良好菱形 $(\mathcal{M}, M, \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \gamma_i, \gamma_j)$。根据关于 $i = 1$ 的断言，2、3，Col$_{\mathcal{C}_i, \gamma_i} \Delta$ 是对角线或准对角线。根据鸽巢原理，存在两个 $(\mathcal{C}_i, \gamma_i)$，使得 Col$_{\mathcal{C}_i, \gamma_i} \Delta$ 要么都是对角线，要么都是准对角线。现在由引理 2.33 即可完成证明。 □

5 附录

在本节中，我们证明定理 2.6，它是 SW04 推论 6] 的多分支版本。大部分工作是将 MW02 推论 2.7] 推广到多分支情形。设 $\mathcal{Q}$ 是多分支二次微分的一个层， $\mathcal{Q}_1$ 是 $\mathcal{Q}$ 的单位面积轨迹。定义 $h_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ SL(2， $\mathbb{R}$)，以及 $H_t = \{h_t, t \in \mathbb{R}\}$。

定理 5.1。 $\mathcal{Q}_1$ 的每个闭 H_t-不变集都包含一个极小闭 H_t-不变集。极小闭 H_t-不变集是紧致的。

定理 5.1 的证明将分解为命题 5.4 和命题 5.7，这两者依赖于

以下非发散性结果。设

$$\mathrm{Avg}_{T,q}(K) := \frac{|\{t \in [0,T] : u_t q \in K\}|}{T}$$

定理 5.2. 对于任意的 $\epsilon > 0$ 和 $\eta > 0$，存在一个紧子集 K，使得对于任意的 $q \in \mathcal{Q}_1$，以下结论之一成立：

1. $\liminf_{T\to\infty}$ 平均值$_{T,\ q}(K) \geq 1 - \epsilon$。

2. q 包含一条长度小于 η 的水平鞍连接。

定理 5.2 与 [MW02] 中的定理 H2 非常相似，但其一般性更强。[MW02]，中并未以这种方式陈述定理 5.2，不过这种表述更便于我们使用。这个定理的证明完全沿用了单分支情形下定理 H2 的证明；为方便读者，我们将其抄录于此。证明主要用到了 [MW02]，中的定理 6.3；我们将在假设单分支情形成立的基础上证明多分支情形。

Let $\widetilde{\mathcal{Q}}$是覆盖 $\mathcal{Q}$ 的带标记二次微分。令 $\widetilde{\mathcal{Q}}_1$ 是.....的单位面积轨迹 $\widetilde{\mathcal{Q}}$。对于 $q \in \widetilde{\mathcal{Q}}$，令 $\mathcal{L}_q$ 为 q上的鞍连接集合。令 $l_{q,\ \delta}(t)$ 表示 $u_t q$上鞍 δ 的长度，并令 $\|\cdot\|_I$ 表示区间 $I \subset \mathbb{R}$上的L^∞-范数。令 $\alpha_q(t)$ 表示 $u_t q$上最短鞍连接的长度。

定理 5.3。存在正常数 C、α、ρ_0，它们仅依赖于亏格，使得若 $q \in \mathcal{Q}_1$、区间 $I \subset \mathbb{R}$和 $0 < \rho' \leq \rho_0$满足：

$$for\ any\ \delta \in \mathcal{L}_q, \|l_{q,\delta}\|_I \geq \rho',$$

那么对任意 $0 < \epsilon < \rho'$，我们有：

$$|\{t \in I : \alpha_q(t) < \epsilon\}| \leq C \left(\frac{\epsilon}{\rho'}\right)^{\alpha} |I|$$

证明。令 $q = (q_1, \ldots, q_n)$ 为一个多分支二次微分。条件 $\forall \delta \in \mathcal{L}_q, \|l_{q,\delta}\|_I \geq \rho'$意味着该条件在每个分支上均成立。根据此定理的单分支版本 [MW02，定理 6.3]，$|\{t \in I\colon\ \alpha_{q_i}(t) < \epsilon\}| \leq C_i \left(\frac{\epsilon}{\rho'}\right)^{\alpha_i} |I|$，且对于某个 $\rho' <$，对所有 i，均有 $\min(\rho_{0,1}, \ldots, \rho_{0,n})$。因此，

$$|\{t \in I : \alpha_q(t) < \epsilon\}| = |\bigcup_i \{t \in I : \alpha_{q_i}(t) < \epsilon\}| \leq n \max_i C_i \left(\frac{\epsilon}{\rho'}\right)^{\min_i \alpha_i} |I|$$

□

定理 *5.2* 的证明。令 C, α, ρ_0 为定理 5.3 中的常数。固定 ϵ 和 η，取足够小的 ϵ'，使得

$$C \left(\frac{\epsilon'}{\rho_0}\right)^{\alpha} < \epsilon,\ \epsilon' < \rho_0, \text{ and } \epsilon' < \eta.$$

令 K 为 $\mathcal{Q}_1$ 中没有长度小于 ϵ' 的鞍点的曲面集合。根据 Masur 的紧致性判据，该集合是紧致的。令 $q \in \mathcal{Q}$，并假设 q 不含长度小于 η 的水平鞍连接。令 $\rho = \min(\rho_0, \eta)$。集合

$$\mathcal{L}_0 = \{\delta \in \mathcal{L}_q : l_{q,\delta}(0) < \rho\}$$

根据 [MW02，命题 4.8]，其为有限的。由于我们假设函数 $t \mapsto l_{q,\delta}(t)$ 均非恒定，$\delta \in \mathcal{L}_0$，根据 [MW02，引理 4.4]，它们会发散。因此存在某个 T_0，使得对所有 $\delta \in \mathcal{L}_0, l_\delta(T_0) \geq \rho$。对于任意 $T \geq T_0$，我们可以取 $I = [0,T]$ 和 $\rho' = \rho$ 应用定理 5.3，从而得到

$$\mathrm{Avg}_{T,q}(\mathcal{Q}_1 - K) < \epsilon.$$

□

命题 5.4。 设 $\mathcal{Q}_1$ 是单位面积多分量二次微分的一个层。每个闭的 H_t-不变集 $X \subset \mathcal{Q}_1$ 都包含一个极小闭 H_t-不变集。

引理 5.5. 设 X 是一个闭不变集，满足

$$\rho := \inf\{l_{q,\delta}(0) : q \in X, \delta \text{ is a horizontal saddle connection on } q\} > 0.$$

则 X 包含一个极小闭不变集。

证明. 任取 $0 < \epsilon < 1$ 和 $0 < \eta < \rho$，令 K 为由定理 5.2 得到的紧集。于是，对所有 $q \in X$，K 都与 $U_t q$ 相交。令 $\{X_\alpha\}$ 为 X 的任意闭不变子集全序族。由于每个 H_t 轨道都与 K 相交，任意有限交集都非空 $K \cap X_{\alpha_1} \cap \cdots \cap X_{\alpha_i}$。因此，根据紧致性， $K \cap \bigcap_\alpha X_\alpha$ 非空。由佐恩引理， X 包含一个极小闭不变集。 □

命题 *5.4* 的证明. 我们必须证明， X 包含一个满足引理 5.5 假设的集合 X_0。令 $q \in X$ 具有数量最多的水平鞍连接，并令 $X_0 = U_t q$。对于任意 $q' \in X_0$， q 上的水平鞍点集合与 q' 上的某个水平鞍点集合等距。由于 q 具有数量最多的水平鞍点，它不可能拥有更多的水平鞍点。因此， X_0 中的每个曲面都具有相同的水平鞍点，所以它们的 ρ 值相同。 □

我们不提供下面这个引理的证明；它是 [MW02] 中的引理 7.2。

引理 5.6。 设 $\{T_t\}$ 是 $\mathbb{R}$ 在局部紧空间 Z 上通过同胚给出的作用。假设存在一个紧致的 $K \subset Z$，使得对每个 $z \in Z$，子集 $\{t \geq 0 : T_t z \in K\}$ 和 $\{t \leq 0 : T_t z \in K\}$ 都是无界的。那么 Z 是紧致的。

命题 5.7。 若存在一个极小的 H_t-不变集，则它是紧致的。

证明。 由引理 5.6，只需证明 $\{t \geq 0 : u_t q \in X\}$ 和 $\{t \leq 0 : u_t q \in X\}$ 在 X 中稠密。我们证明 $\{t \geq 0 : u_t q \in X\}$ 的情形，因为 $\{t \leq 0 : u_t q \in X\}$ 的情形类似。定义 $X^+(q)$ 为 $\{t \geq 0 : u_t q \in X\}$ 的极限点集，因此它是一个闭的 H_t-不变集。由定理 5.2，它非空。由于 X 是极小的，$X^+(q) = X$。因此， $\{t \geq 0 : u_t q \in X\}$ 在 X 中稠密。 □

定理 *2.6* 的证明。 根据定理 5.1， H_t-轨道闭包包含一个极小的闭 H_t-不变集 X，且 X 是紧致的。令 $q = (q_1, \ldots, q_n) \in X$，则 $U_t q \subset X$。令 proj_i 为到第 i 个分支的投影。$U_t q_i$ 包含在一个紧集内，即 $\text{proj}_i(X)$，因此根据 [SW04，定理 5]， q_i 是水平周期的。这个论证不依赖于 i，因此 q 的每个分支都是水平周期的。 □

参考文献

[AEM17] Artur Avila、Alex Eskin 和 Martin M¨oller。霍奇丛的辛且等距 SL(2, ℝ)-不变子丛。纯粹与应用数学杂志，732：1–20，2017。[Api20] Paul Apisa。标记分层中的 $GL_2\mathbb{R}$-不变测度：一般标记点、分层的 Earle-Kra 理论与照明。*Geom. Topol.*，24(1)：373–408，2020。[AW21a] Paul Apisa 和 Alex Wright。高秩不变子簇，2021，arXiv:2102.06567。[AW21b] Paul Apisa 和 Alex Wright。平移曲面上的标记点。*Geom. Topol.*，25(6)：2913–2961，2021。[AW21c] Paul Apisa 和 Alex Wright。从边界重构轨道闭包。*Mem. Amer.Math. Soc.*，预计 2021 年出版，arXiv:2011.08807。[AW22] Paul Apisa 和 Alex Wright。Eierlegende-Wollmilchsau 的推广。*Camb. J. Math.*，10(4)：859–933，2022。

[CW21] Dawei Chen 和 Alex Wright。所见即所得紧化。J. Lond. Math. Soc. (2)，103(2)：490–515，2021。[EM18] Alex Eskin 和 Maryam Mirzakhani。$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 作用于′模空间上的不变测度与平稳测度。高等科学研究所数学出版物，127：95–324，2018。[EMM15] Alex Eskin、Maryam Mirzakhani 和 Amir Mohammadi。模空间上 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 作用的孤立性、等分布与轨道闭包。数学年刊 (2)，182(2)：673–721，2015。[Fil16] Simion Filip。仿射不变流形上的混合霍奇结构分裂。数学年刊 (2)，183(2)：681–713，2016。[MW02] Yair Minsky 和 Barak Weiss。模空间上 horocyclic 流的非发散性。纯粹与应用数学杂志，552：131–177，2002。[MW17] Maryam Mirzakhani 和 Alex Wright。仿射不变子流形的边界。数学创刊，209(3)：927–984，2017。[MW18] Maryam Mirzakhani 和 Alex Wright。满秩仿射不变子流形。杜克数学杂志，167(1)：1–40，2018。[MZ08] Howard Masur 和 Anton Zorich。平坦曲面上的多重鞍连接与二次微分模空间的主边界。Geom. Funct. Anal.，18(3)：919–987，2008。[NW14] Duc-Manh Nguyen 和 Alex Wright。$\mathcal{H}^{\mathrm{hyp}}(4)$ 中的非 Veech 曲面是一般的。Geom. Funct. Anal.，24(4)：1316–1335，2014。[SW04] John Smillie 和 Barak Weiss。模空间上流的极小集。以色列数学杂志，142：249–260，2004。[Wri14] Alex Wright。阿贝尔微分模空间中仿射不变子流形的定义域。Geom. Topol.，18(3)：1323–1341，2014。[Wri15] Alex Wright。平移曲面轨道闭包中的圆柱变形。Geom. Topol.，19(1)：413–438，2015。