基于广义开映射的加权互模拟与分支互模拟

Jérémy Dubut[1] 和 Thorsten Wißmann[2]

[1] 日本东京产业技术综合研究所 jeremy.dubut@aist.go.jp[2] 荷兰奈梅亨拉德堡德大学 thorsten.wissmann@ru.nl

摘要。 在互模拟等价的开映射方法中，给定基于状态的系统中的路径及其运行是核心对象，而互模拟等价则成为一种派生概念。虽然开映射已成功用于对非确定性系统中的互模拟等价进行建模，但这种方法无法描述概率互模拟等定量系统等价。在本研究中，我们证明这确实不可能，因此将开映射的概念加以推广，使其也能涵盖加权互模拟与概率互模拟。此外，我们将强路径互模拟和路径互模拟的概念扩展到这一新框架中，并证明分支互模拟可以由这一扩展理论刻画，且可视为弱互模拟等价的历史保持限制。

关键词： 开映射 · 加权互模拟 · 概率双模拟等价 · 分支互模拟 · 弱互模拟等价

1 引言

开映射理论是一个用于研究系统及其互模拟等价的范畴框架 [16]。给定一个系统范畴，以及对执行形状和如何扩展这些形状的描述，开映射就是相对于这些扩展具有提升性质的态射。直观而言，开映射是保持并反映系统迁移的态射，也就是说，它们的图是双模拟。该理论涵盖了各种经典的双模拟等价概念。例如，两个标号迁移系统强双模拟等价，当且仅当它们之间存在一个由开映射构成的跨度。改变模型范畴和执行形状，可以描述弱互模拟等价、定时互模拟、概率 Larsen–Skou 互模拟，以及事件结构的保历史双模拟等价（示例见 [16,3,12] ）。

双模拟等价的另一种范畴框架是余代数 [22]。这一次，给定一个范畴和一个自函子，分别用于描述状态空间的类型和迁移的类型，那么“系统”就被理解为该函子的余代数。余代数同态在理念上与开映射非常相似：它们同样是保持并反映迁移的态射。通过双向的范畴框架间变换，这一认识已被形式化：从开映射到余代数 [19], , 反之亦然 [25]。然而，

后者表明，开映射似乎只适用于对非确定性系统建模，而难以处理其他类型的分支，例如概率分支。

在余代数中，对加权系统进行建模并无特别困难，离散概率系统也不例外 [17]。关于连续概率也有一些研究，不过其理论复杂得多 [5,4]。正如我们稍后将更准确地说明的那样，有人曾尝试在 [3,5], 中使用开映射来实现这一点，但结果不尽如人意。

相反，对于迁移不具历史保持性的系统，余代数并不适用于其互模拟等价；也就是说，这类系统的行为等价不仅取决于给定状态处的迁移，还取决于导致该状态的整个执行历史。例如，分支互模拟就是这种情况 [23]。分支互模拟的出现，正是为了使弱互模拟等价具有历史保持性。在 [3], 中，通过谨慎选择底层范畴，使用开映射描述了弱互模拟等价；随后在 [9]中，借助预层模型建立了一套一般理论。 [1,2], 也使用开映射研究了分支互模拟，但采用的是间接方式，即通过将其转换为预层来研究。

重申一下，本文的目标是通过对开映射进行推广，刻画加权双模拟等价与分支双模拟等价。具体而言，本文的贡献如下：

1. 证明无法使用标准开映射恰当地建模概率系统（第3.2节）；
2. 对开映射理论和（强）路径双模拟进行忠实扩展（第4节）；
3. 提出一种广义开映射情形，以刻画加权双模拟等价与概率双模拟等价（第5节）；
4. 提出一种广义开映射情形，其中强路径双模拟对应于停顿分支互模拟，开映射互模拟等价对应于分支互模拟，而路径双模拟对应于弱双模拟（第6节）。

此外，第2节介绍了一些理论要求。

2 从路径范畴到双模拟等价

在讨论加权双模拟等价之前，我们先回顾一下 Joyal 等人 [16] 提出的通过开映射建模双模拟等价的主要思想。该定义以函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$ 为参数，这个函子从路径范畴 $\mathbb{P}$ 映射到我们感兴趣的模型或系统范畴 $\mathbb{M}$。在典型示例中，$\mathbb{M}$ 是标号迁移系统（LTS）范畴，定义如下：

D定义 2.1. 对于固定的标签集合 A，范畴 标号迁移系统 包含：

1. 对象：一个标号迁移系统 (X, x_0) 是一个状态集合 X、一个迁移关系 $\subseteq X \times A \times X$ 以及一个指定的初始状态 $x_0 \in X$。我们用 $x \xrightarrow{a} x'$ 表示 $(x, a, x') \in$，如果上下文清楚，也简单地将标号迁移系统称为 X，并将 x_0 视为明确的。为避免歧义，我们对态射使用 $\to$，对迁移也使用该记号。

2. 态射：一个函数模拟 $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ 是一个函数 $f\colon X \to Y$，满足 $f(x_0) = y_0$；并且对于 X中的所有 $x \xrightarrow{a} x'$，都有$f(x) \xrightarrow{a} f(x')$。

函数模拟 $f\colon X \to Y$直观上意味着，系统 Y至少具有系统 X中的所有迁移，但也可能有更多。函数模拟的一个特殊情况是系统中一个词的运行：

定义 2.2. 对于标签集 A，令 $(A^*, \leqslant)$ 为按前缀序排列的词的偏序集。函子 $J\colon (A^*, \leqslant) \to$ 标号迁移系统 将一个词 $w \in A^*$ 映射到由 w 的所有前缀构成的标号迁移系统 $Jw = (\{v \mid v \leqslant w\}, , \varepsilon)$，其中对所有 $a \in A$，$va \leqslant w$，均有 $v \xrightarrow{a} va$。

这个函子 J（更准确地说，是它的像）通常称为标号迁移系统的路径范畴：词 $w \in A^*$ 在 $(X, , x_0)$ 中的可能运行，与标号迁移系统中的函数模拟 $Jw \to (X, , x_0)$ 完全对应。

在抽象层面，对于一般函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$，我们将 $w \in \mathbb{P}$ 和 $X \in \mathbb{M}$ 的态射集合 $r\colon Jw \to X$ 理解为模型 X中路径 w 的运行。我们可以先作一个显然的观察：$\mathbb{M}$ 中的所有态射$f\colon X \to Y$都保持运行：给定 X中某条路径 $w \in \mathbb{P}$ 的一次运行 $r\colon Jw \to X$，就存在 Y中 w 的一次运行 $f \cdot r\colon Jw \to Y$。

对于 $\mathbb{M}$中的一般 $f\colon X \to Y$，反向结论并不成立：给定 Y中 w的一次运行，不一定存在 X中 w 的一次运行。如果 f 反映运行，则称其为开：

定义 2.3。对于函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$，若态射 $f\colon X \to Y$属于 $\mathbb{M}$，且 f 对所有 $\mathbb{P}$中的 $e\colon v \to w$ 都满足以下提升性质，则称该态射为开：

$$\textit{for all}\quad \begin{array}{ccc} Jv & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle Je}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Jw & \xrightarrow{s} & Y \end{array} \qquad \textit{there is } d\colon Jw \to X \textit{ with} \qquad \begin{array}{ccc} Jv & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle Je}\downarrow & \overset{\nearrow d}{\circlearrowright} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Jw & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

也就是说，对于所有交换方块 $(s \cdot Je = f \cdot r)$，都存在 $\mathbb{M}$中的 $d\colon Jw \to X$，使得右侧的两个三角形（$f \cdot d = s$ 和 $d \cdot Je = r$）都交换。

根据构造方式，我们只能对可通过某次运行到达的状态作出陈述。因此，人们通常会预先限制 $\mathbb{M}$，使其只包含所有状态都能从初始状态到达的模型。

对于所有状态都能从初始状态到达的标号迁移系统，开映射与强互模拟 [20] 有关：开映射恰好是其图关系 $\{(x, fx) \mid x \in X\}$ 为强互模拟的函数。在代数关系范畴 [10], 的语境下重新表述，开映射恰好是关系代数范畴中作为强互模拟的映射。因此，自然可以将互模拟还原为开映射的制表，即：

定义 2.4。对于函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$，如果存在另一个模型 Z 以及两个 J-开映射 $f\colon Z \to X$ 和$g\colon Z \to Y$，那么我们称两个模型 X 和 Y 为J-互模拟；也就是说，它们之间存在一个由 J-开映射构成的跨度。

当然， J-双模拟等价是一种模型上的自反（恒等态射是开映射）且对称（在定义中交换 f 和 g 即可）关系，但通常不具有传递性。当范畴 $\mathbb{M}$ 存在拉回 [16]时，它才具有传递性。

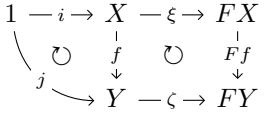
给定一个函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$， [16] 中还给出了定义互模拟等价的其他经典方法。第一种是（强）路径互模拟，它们是运行上的关系（类似于历史保持双模拟），并满足通常的双模拟等价条件。第二种方法是使用类似于 Hennessy-Milner 定理的模态逻辑。对于具有强双模拟等价的标号迁移系统而言，所有这些概念描述的都是同一种双模拟等价，但对于一般的$J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$，情况并非如此：我们只能证明， J-双模拟等价意味着存在（强）路径双模拟，而后者又意味着这两个模型满足相同的模态逻辑公式。在 [6], 中，给出了以树（即 $\mathbb{M}$中路径的余极限）为条件的一些较弱的充分条件，使这三种概念彼此等价。尤其是，前文提到的所有通过开映射涵盖的互模拟等价示例，都满足这些条件。

我们使用余代数，以便对具有不同分支类型（包括非确定性分支和概率分支）的基于状态的系统进行统一表述：

定义 2.5。 对于范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 1 以及自函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，带基点余代数 是指由 $\mathcal{C}$ 中的两个态射构成的一对，其形式为 $1 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\xi} FX$.

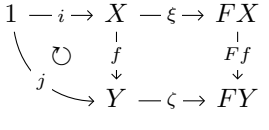
例如，标号迁移系统可以建模为带基点余代数，其中 $\mathcal{C}$ =Set，1 是任意单元素集合，且 $F = \mathcal{P}(A \times _)$，其中 $\mathcal{P}$ 是幂集函子。余代数态射的通常概念可以具体表述如下：

定义 2.6。 从 (X, ξ, i) 到 (Y, ζ, j) 的带基点余代数的（适当）同态 是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon X \to Y$，使得右侧图表可交换。



带基点余代数与适当同态总能构成一个范畴，但对于上述标号迁移系统的情形，这个范畴并不等价于范畴 LTS。事实上，适当同态不只是保持迁移的态射；与开映射类似，它们也反映迁移。在 [25], 中，作者证明，对于一大类自函子（其余代数基本上是非确定性的），适当同态恰好对应于某个函子 J的 J-开映射。若要对只要求保持迁移的态射进行建模，就必须如下所示将同态放宽（见 [25]）：

定义 2.7. 假设每个 *Hom* 集 $\mathcal{C}(X, FY)$上都有一个关系 $\sqsubseteq$ 。从带基点余代数 (X, ξ, i) 到 (Y, ζ, j) 的松弛同态 是一个态射 $f\colon X \to Y$，属于 $\mathcal{C}$，且使右侧图表松弛交换，即 $f \cdot i = j$ 且 $Ff \cdot \xi \sqsubseteq \zeta \cdot f$属于 $\mathcal{C}(X, FY)$。



对于函子 $\mathcal{P}(A \times _)$，我们可以考虑每个 Hom 集 Set$(X, \mathcal{P}(A \times Y))$ 上的逐点包含关系。由此，带基点余代数和松弛

同态构成一个范畴，该范畴与范畴 LTS 同构。然而，一般而言，它们并不总能构成一个范畴，因为 $\sqsubseteq$ 需要与复合满足如下兼容性：

定义 2.8. F 上的偏序是由偏序组成的集合 $\sqsubseteq$，对于每个形如 $\mathcal{C}(X, FY)$ 的 *Hom* 集各有一个，并且

$$\forall X \xrightarrow{f_1, f_2} FY,\ X' \xrightarrow{g} X,\ Y \xrightarrow{h} Y' \colon \quad f_1 \sqsubseteq f_2 \quad \Rightarrow \quad Fh \cdot f_1 \cdot g \sqsubseteq Fh \cdot f_2 \cdot g.$$

这等价于要求同态函子 $\mathcal{C}(_, F_)$ 通过偏序集分解：$\mathcal{C}(_, F_)\colon \ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to$ 偏序集。

备注 *2.9.* 当前定义涵盖了 Hughes 和 Jacobs 建立的 Set-函子上偏序的定义 [11, 定义 2.1]（详情见附录）。

引理 2.10 [25]. 当 $\sqsubseteq$ 是 F 上的偏序时，带基点余代数与松弛同态构成一个范畴，我们将其记为 $\mathsf{LCoalg}(1, F)$。

与开映射类似，许多种双模拟等价都可以通过适当同态的跨度来刻画：

定义 2.11. 如果两个带基点余代数之间存在由适当同态构成的跨度，我们就称它们在余代数意义下互模拟。

在余代数中定义双模拟等价有许多方法（概述见 [13] ），但就本文而言，这些方法得到的结果相同。

3 加权双模拟等价与开映射

本节将介绍使用开映射对加权系统，尤其是概率系统进行建模的已有尝试。这些尝试都使用 Set 上（离散）分布函子的某种变体。我们将这个函子记作：它将集合 X 映射到集合

$$\mathcal{D}X = \big\{ f \colon X \to [0,1] \mid f^{-1}\big((0,1]\big) \text{ is finite and } \sum_{x \in X} f(x) = 1 \big\},$$

，并将条件 $= 1$ 替换为 $\leqslant 1$ 的变体记作 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}$（即 $\mathcal{D}_{\leqslant 1} X := \mathcal{D}(X + 1)$）。我们将证明，尽管可以用开映射对反应式系统的 Larsen-Skou 互模拟进行建模，但生成式系统的互模拟却无法如此建模。

3.1 基于开映射的反应式系统 Larsen-Skou 双模拟等价 s

在 [3],Cheng 等人描述了概率转移系统（PTSs）的一种开映射情形，该情形对应于函子 $(\mathcal{D}(_) + 1)^A$ 的余代数。在此情形下，他们考虑部分概率转移系统（PPTS），它们是 $(\mathcal{D}^{\varepsilon}_{\leqslant 1}(_) + 1)^A$ 的余代数，其中次概率分布可以取超实数值，从而允许无穷小量 ε。概率转移系统的范畴嵌入部分概率转移系统的范畴中，

而路径范畴是部分概率转移系统的全子范畴，由概率迁移为无穷小量的有限线性系统构成。随后证明，对于该路径范畴，将 J-双模拟等价限制在概率转移系统上，对应于 Larsen-Skou 概率双模拟等价 [18]。

这种开映射情形已在 [7]中通过余反射的方式重新表述：从概率转移系统到转移系统的显然函子是一个余反射，其左伴随将一个标号迁移系统 T 映射为一个概率转移系统，该系统的底层标号迁移系统为 T，且所有迁移都具有无穷小概率。一般而言，给定一个余反射 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其左伴随为 G，以及 $\mathcal{D}$上的一个路径范畴 J，便可自动得到 $\mathcal{C}$上的路径范畴$G \circ J$，且这一构造保留 J的良好性质。特别地，两个系统 A 和 B 是 $(G \circ J)$-互模拟的，当且仅当 FA 和 FB 是 J-互模拟的。Cheng 等人的路径范畴正是以这种方式，通过上述余反射以及标号迁移系统上的标准路径范畴得到的。特别是，这意味着两个概率转移系统互模拟，当且仅当它们的底层转移系统强双模拟等价。

3.2 生成式系统的不可能性结果

在 [5], Desharnais 等人以余代数的方式描述了生成式概率系统的若干种互模拟等价，也就是说，函子 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times __)$ 的余代数。他们指出，尝试用开映射为这些互模拟等价建立模型的努力未能成功 [5, p. 188]。下文将看到，这实际上是不可能的。我们将证明，对于由范畴$M := \mathsf{LCoalg}(1, \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times __))$ 建模的生成式概率系统，不存在余代数双模拟等价的开映射刻画。实际上，这里的论证对许多其他类型的权重也成立，并不限于实数。

这里，对于两个函数 $f, g\colon\ X \to \mathcal{D}_{\leqslant 1}(Y)$, $f \sqsubseteq g$，这意味着对所有 $x \in X$ 和所有 $y \in Y$, $f(x)(y) \leqslant g(x)(y)$，其中 $\leqslant$ 是 $[0,1]$ 上的通常序。

在这种情况下：

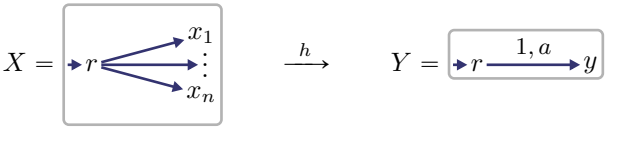
定理 3.1。对于 $\mathbb{M}\colon = \mathsf{LCoalg}(1, \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times __))$ 不存在范畴 $\mathbb{P}$和函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$，使得对于每个 $h\colon\ X \to Y$，若其可达 X，则以下等价关系成立：

$$h \text{ is } J\text{-open} \iff h \text{ is a proper homomorphism}$$

并且不存在 $\mathbb{P}$ 和函子 J，使得对于每个 X 和 Y：

X 和 Y 是 J-互模拟的 $\iff$ X 和 Y 是余代数双模拟的。

证明（概要）。用反证法，假设存在这样一个 J。我们证明存在如下形式的适当同态：



它不是 J-开态射。首先考虑唯一的松弛同态 $0_{\mathbb{M}} \to Y$，其中 $0_{\mathbb{M}}$ 由一个状态且没有迁移构成。它不是适当同态，因此根据假设，它不是开态射。也就是说，存在一个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} JP & \xrightarrow{p} & 0_{\mathbb{M}} \\ {\scriptstyle J\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle !_Y} \\ JQ & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

没有提升。可以直接验证，$JP \simeq 0_{\mathbb{M}}$ 和 JQ 的初始状态至少有一条迁移，指向另一个状态 $r \overset{w,a}{\blacktriangleright} z$ 且满足 $w \neq 0$。在$n = 2 \cdot \lceil \frac{1}{w} \rceil$的情况下，上述适当同态 h不是开映射：不存在从 JQ到 X的态射，因为 $w > \frac{1}{n}$。□

4 广义开映射

不可能性证明的主要论据是，有时，余域中的一条迁移带有某个概率 w ，而它在定义域中对应的概率为w_1，……， w_n，且满足$\sum_i w_i = w$，这使得在当前的开映射框架下无法构造提升态射。

本节将扩展开映射框架，其主要思路是让提升态射将概率 w 分裂为更小的部分w_1，……， w_n。在定义这些广义开映射之后，我们将展示由它们生成的双模拟等价的一些基本性质。

4.1 广义开放映射情形

这里，我们描述开映射框架的扩展。数据类似：我们从一个模型范畴 $\mathbb{M}$ 开始，但我们需要的不仅仅是一个函子J： $\mathbb{P} \to \mathbb{M}$。假设：

– 一个集合 V以及一个函数 J： $V \to \mathsf{ob}(\mathbb{M})$, – 两个小范畴 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{S}$，其对象集分别为 V，–两个函子 $J_{\mathbb{E}}$： $\mathbb{E} \to \mathbb{M}$和 $J_{\mathbb{S}}$： $\mathbb{S} \to \mathbb{M}$，它们在对象上与 J 一致。

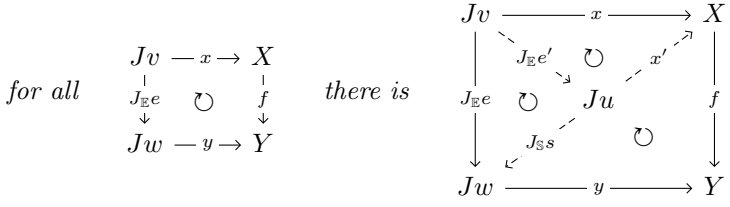
经典开映射情形 J： $\mathbb{P} \to \mathbb{M}$ 可按如下方式纳入这一扩展。范畴 $\mathbb{E}$ 由 $\mathbb{P}$ 给出，其意图是让它们表示路径形状及其扩展。函子 $J_{\mathbb{E}}$ 由 J给出。范畴 $\mathbb{S}$ 由离散范畴 $|\mathbb{P}|$给出，也就是说，该范畴的对象是 $\mathbb{P}$ 的对象，而其态射仅为恒等态射。函子 $J_{\mathbb{S}}$ 是唯一满足上述定义条件的函子。

在这一扩展的一般语境下，其解释略有不同。现在， V 指的是一组由字母表和权重标记的树。 $\mathbb{E}$ 仍由扩展构成，即将树扩展为分支更长的树。 $\mathbb{S}$ 则由合并态射构成，与上文的描述类似：以加权系统为例，这些态射允许将多个状态合并为一个，

只要它们将入向分支的权重相加即可。一般来说，这些态射允许进行一些不会影响双模拟等价的合并。

有了这些数据，我们就可以定义广义开映射：

定义 4.1。 若态射 $f\colon X \to Y$ *in* $\mathbb{M}$ 满足以下提升性质，则称其为 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-开 ： 对所有 $e\colon v \to w$ *in* $\mathbb{E}$:



其解释起初与通常的开映射相同。假设我们有一棵树 y in Y，它通过树 x in X的像 f 延伸。若 f 是开映射，就应该存在一棵树 x'，它延伸 x，且其在 f 下的像为 y。然而， x' 的形状可能与 y不同，因为可能需要拆分迁移。这正是 u 和 s 所建模的： w 由 u 合并某些状态而得。

与经典开映射的联系可以表述如下

P命题 4.2。 给定函子 $J\colon \mathbb{P} \to \mathbb{M}$ 和态射 $f\colon X \to Y$ ，

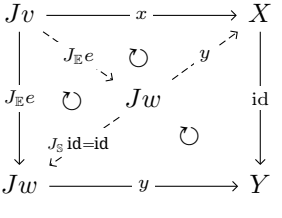
$$f \text{ is } J\text{-open if and only if } f \text{ is } (\mathbb{P}, |\mathbb{P}|)\text{-open.}$$

同样，双模拟等价可以定义为存在一个开映射张成**定义 4.3**。 如果 X 和 Y 之间存在一个由 $(\mathbb{E}$、$\mathbb{S})$-开映射构成的跨度，我们就称 X 和 Y 是 $(\mathbb{E}$、$\mathbb{S})$-互模拟的。

4.2 基本性质

本节将证明 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-双模拟等价的一般性质，这些性质与经典情形类似。首先，我们证明，如果 $\mathbb{M}$ 有拉回，那么 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-双模拟等价是一个等价关系。其次，我们介绍两种路径互模拟的概念，它们都蕴含于 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-双模拟等价。最后，我们证明，只需检查 $\mathbb{E}$ 的某些生成元上的开性。

为了判断 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-双模拟等价何时是一个等价关系，我们需要检验对称性、自反性和传递性。对称性 总是成立，因为我们总可以交换跨度的两条腿。对于自反性，只需证明恒等态射是开映射；由于 $\mathbb{S}$ 是一个范畴且 $J_{\mathbb{S}}$ 是一个函子，这一点成立，如右侧图表所示。传递性 的证明依赖于复合和拉回：



引理 4.4. $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-开映射在复合和拉回下封闭。

定理 4.5。 如果 $\mathbb{M}$ 有拉回，那么 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-双模拟等价是传递关系，因此也是等价关系。

广义路径双模拟。 在经典开映射框架中， [16],还可以通过直接使用路径扩展来定义另一种双模拟等价概念：即所谓的强路径双模拟和路径双模拟，它们可以推广如下。与最初的做法一样， [16], 我们假设存在一个元素 $0 \in V$，使得 $J0$ 是 $\mathbb{M}$ 的初始对象（注意，**0** 不必是 $\mathbb{E}$ 或 $\mathbb{S}$中的初始对象）。直观来说，唯一的态射 $!_X$: $J0 \to X$ 指向X的初始状态。例如，在带基点的余代数范畴中，若 **1** 是 $\mathcal{C}$的终对象，且 $\mathcal{C}(1, F1)$ 有最小元 $\bot$: $1 \to F1$，则可以由 $(1,\ \mathrm{id}_1,\ \bot)$ 给出 $J0$ （这些条件在我们关注的情形下均成立）。

定义 4.6。 从 A 到 B 中的路径模拟 是由形如 $A \xleftarrow{a} Jv \xrightarrow{b} B$ （其中 $v \in V$）的跨度构成的集合 R，满足以下两个性质

– 初始条件： 跨度 $A \xleftarrow{A} J0 \xrightarrow{B} B$ 属于 R。– 前向闭包： 对于 R e $v \to w \in \mathbb{E}$ a' $Jw \to A \in$ 中的所有跨度 $\mathbb{M}$ $A \xleftarrow{a} Jv \xrightarrow{b} B$ Jw $a = a' \cdot J_{\mathbb{E}} e$ e' $Ju \to$ 所有： 以及所有： ，只要 足 ，就 ： $\mathbb{E}$ s $u \to w \in \mathbb{S}$ b' $Ju \to B \in \mathbb{M}$ 、： 和： ，使得 Jv 满足 $I_{\mathbb{E}} e_{\in R} J_{\mathbb{S}}$ $J_{\mathbb{E}} e'$、 $b = b' \cdot J_{\mathbb{E}} e'$，且跨度 $A \xleftarrow{a' \cdot J_{\mathbb{S}} s} Ju \xrightarrow{b'} B$ 属于 R。

我们称 如果它还满足以下条件，则称 R 为强路径模拟 ：

– 向后闭包：对于所有属于 R 的跨度 $A \xleftarrow{a} Jv \xrightarrow{b} B$，$Jv \leftarrow J_{\mathbb{E}} e - Jw - J_{\mathbb{E}} e \to Jv$ 以及所有 e： $w \to v \in \mathbb{E}$，跨度 $A \xleftarrow{a \cdot J_{\mathbb{E}} e} Jw \xrightarrow{b \cdot J_{\mathbb{E}} e} B$ 均属于 R。 A $\in R$ B

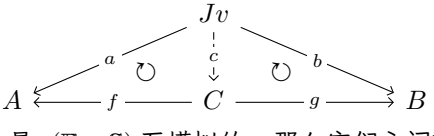
如果 R 和 $R^\dagger = \{B \xleftarrow{b} Jv \xrightarrow{a} A \mid A \xleftarrow{a} Jv \xrightarrow{b} B \in R\}$ 都是（强）路径模拟，则称 R 是从 A 到 B 的（强）路径双模拟。

请注意，这一版本的（强）路径互模拟与 Joyal 等人提出的版本类型相同， [16], 但满足更一般的条件。特别地，当 $\mathbb{S}$ 是离散范畴时，上述表述与 [16] 中的表述完全一致。显然，强路径双模拟也是路径双模拟。

本节的主要结果如下。

定理 4.7. 设 A 和 B 是 $\mathbb{M}$中的模型。若存在一个跨度 $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$，其中 g 是 $\mathbb{M}$ 的态射，且 f 是一个 $(\mathbb{E}, \mathbb{S})$-开映射，则以下集合是一个强路径模拟：

$$R_{f,g} := \{A \xleftarrow{a} Jv \xrightarrow{b} B \mid \exists c\colon Jv \to C \ with\ a = f \cdot c\ and\ b = g \cdot c\}$$



因此，如果 A 和 B 是 $(\mathbb{E}、\ \mathbb{S})$-互模拟的，那么它们之间就存在强路径双模拟。

与 [16], 的经典情形一样，反向命题一般没有理由成立：两个模型之间可能存在强路径双模拟，但不存在由广义开映射构成的跨度。然而，可以采用 [6] 中的条件来描述一个使反向命题成立的一般框架。由于这并非本文的主要关注点，我们在此不予展开，而将在第 6 节展示一个特殊情形。

扩展范畴的生成元。 在第 2 节介绍的标号迁移系统开映射的第一个例子中，路径范畴被描述为带前缀序的词偏序集。因此，要证明一个函数模拟是 J-开映射，我们必须证明定义 4.1 的提升性质对所有对 $w \leqslant w'$ 都成立。不过，只需检查对扩展一个字母的提升性质： $w' = w.a$ 对于某个 $a \in A$。一般来说，这是因为作为范畴， $(A^*, \leqslant)$ 由态射 $w \leqslant w.a$ 生成，而验证相对于范畴生成元的提升性质 $\mathbb{P}$ 就足以得到J-开性。只需稍加注意，这一结论便可推广到广义开映射。

命题4.8。 假设 $\mathbb{E}'$ 是 $\mathbb{E}$ 的一个生成 $\mathbb{E}$ 的子图，也就是说， $\mathbb{E}$ 的每个态射都是 $\mathbb{E}'$ 中态射的有限复合。此外，假设对于每个 $e \in \mathbb{E}'$ 和 $s \in \mathbb{S}$，只要 $J_{\mathbb{E}} e \cdot J_{\mathbb{S}} s$ 有定义，就存在 $s' \in \mathbb{S}$ 和 $e' \in \mathbb{E}'$，使得 $J_{\mathbb{E}} e \cdot J_{\mathbb{S}} s = J_{\mathbb{S}} s' \cdot J_{\mathbb{E}} e'$。

在这种情况下，如果一个 $\mathbb{M}$ 的态射对 $\mathbb{E}'$中的所有态射都满足定义 *4.1* 的提升性质，那么它就是 $(\mathbb{E}, \mathbb{S})$-开映射。此外，如果一个跨度集满足定义 *4.6* 的条件，其中 $\mathbb{E}$ 被替换为 $\mathbb{E}'$，那么它就是一个（强）路径双模拟。

当 $\mathbb{E}$ 是自由范畴且 $\mathbb{E}'$ 是其生成元类时，第一个条件成立。第二个条件例如对 $\mathbb{E} = \mathbb{P}$ 和 $\mathbb{S} = |\mathbb{P}|$成立。

5 加权系统的开映射

本节将证明，对于种类繁多的权重（包括捕获概率系统所需的权重），都可以通过这一广义开放映射理论来刻画加权系统。

5.1 加权系统的余代数范畴

本节将考虑如下加权函子。

定义5.1。 给定交换幺半群 $(K, +, e)$，K-加权函子$(K, +, e)^{(_)}$： $\mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 在集合和映射上的定义如下：

$$\begin{array}{lrcl} \textit{sets:} & X & \mapsto & (K,+,e)^{(X)} = \{\mu \colon X \to K \mid \mu^{-1}(K \backslash \{e\}) \textit{ is finite}\} \\ \textit{maps:} & f \colon X \to Y & \mapsto & (K,+,e)^{(f)}(\mu) = \left(y \in Y \mapsto \sum \{\mu(x) \mid x \in X, f(x) = y\}\right) \end{array}$$

μ of $(K,+,e)^{(X)}$ 的一个元素是一个有限分布，它将每个 $x \in X$ 映射到 K中的一个权重。每当映射 $f\colon X \to Y$将元素 $f(x_1) = f(x_2) = \cdots$ 识别为相同元素时，函子作用便将 μ变为 Y上的一个分布，方法是把 X中的元素被映射到 Y中的同一元素时对应的权重 $\mu(x_1) + \mu(x_2) + \cdots$ 相加。由于 μ 是有限的且 K 是交换的，这种加法是良定义的。

给定一个交换幺半群 $(K,\ +,\ e)$ 和一个字母表 A，我们希望将加权系统视为函子 $(K,\ +,\ e)^{(A\times -)}$的余代数。如第 2 节所述，我们希望能够讨论松弛同态，因此需要像定义 2.8 中那样，在 $(K,\ +,\ e)^{(A\times -)}$ 上定义一个偏序。为此，我们需要假设一个有序交换幺半群 $(K,\ +,\ e,\ \sqsubseteq)$，即带有偏序 $\sqsubseteq$ 的幺半群 $(K,\ +,\ e)$，并且其运算 $+$ 对两个参数分别都是单调的。

引理 5.2。 给定一个有序交换幺半群 $(K,+,e,\sqsubseteq)$，那么对于所有集合 X和 Y，在 *Hom* 集 $\mathsf{Set}\big(X,(K,+,e)^{(A\times Y)}\big)$ 上定义的关系为

$$f_1 \sqsubseteq f_2 \iff \forall x \in X,\ \forall y \in Y,\ \forall a \in A,\ f_1(x)(a,y) \sqsubseteq f_2(x)(a,y)$$

是 $(K$、$+$、$e)^{(A\times -)}$ 上的一个序。

因此，我们得到一个由带基点余代数和松弛同态构成的范畴 $\mathbf{LCoalg}\left(1,\ (K,\ +,\ e)^{(A\times -)}\right)$。本节的目标是设计一种广义开映射情形，使得 $(\mathbb{E},\ \mathbb{S})$-双模拟等价刻画余代数双模拟等价；更确切地说，使得 $(\mathbb{E},\ \mathbb{S})$-开性刻画适当同态。

在构造和证明过程中，我们还需要一些附加假设，现列举如下。

定义 5.3。 如果一个有序交换幺半群 $(K,+,e,\sqsubseteq)$ 满足以下附加条件：若 $n,m \geqslant 1$ 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sqsubseteq \sum_{j=1}^{m} y_j,$$

则存在一个族 $(u_{i,\ j})_{1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m}$，使得

$$\textit{for all } j,\ \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} \sqsubseteq y_j \quad \textit{and} \quad \textit{for all } i,\ \sum_{j=1}^{m} u_{i,j} = x_i.$$

此外，若将 $\sqsubseteq$ 替换为 $=$ 时上述条件仍成立，我们就称重排幺半群是严格的 。

直观上，我们有一些权重排列为 x_1、…、x_n。我们希望能够将这些权重分解成较小的权重，即 $u_{i,\ j}$s，并通过重新排列这些小权重，得到小于 y_j 的权重。这个条件说明，只要总权重足够大，就可以做到这一点。严格性的特殊情形称为 [17] 中的 行列性质 。

引理 5.4。对于实数的任意子群 G ($\mathbb{R}^n$，若 $+-0$) 满足：对于所有 x、y，在 G (最小值$(x_1 y_1)$、…、最小值$(x_n y_n)$) $\in G$，幺半群 $(G+、0、\leqslant)$ 以及 $(G_{\geqslant 0}+、0、\leqslant)$ 均为严格重排幺半群，其中 $\leqslant$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的通常序。

对于任意带底元的格，$(L、\leqslant、\sqcup、\sqcap, \bot)$，$(L, \sqcup, \bot, \leqslant)$ 是重排幺半群，当且仅当 $(L、\leqslant、\sqcup、\sqcap)$ 是分配的。此外，在这种情况下，它总是严格的。

另一个性质是正性的一种形式：我们称一个有序幺半群为正向有序 的，如果对于 $\sqsubseteq$而言，e 是底元，也就是说，对于所有 $k \in K$、$e \sqsubseteq k$均成立。

例 5.5。正实数轴 $(\mathbb{R}_+、+、0、\leqslant)$ 是一个正序严格重排幺半群，并且定义概率系统是必要的。另一个例子是自然数幺半群 $(\mathbb{N}、+、0、\leqslant)$，它定义了袋函子。最后，任何带底元的分配格 $(L、\sqcup、\bot、\leqslant)$，通常包括幂集格 $(\mathcal{P}(X)、\cup、\varnothing、\subseteq)$，也属于此类。相反，$(\mathbb{R}、+、0、\leqslant)$和 $(\mathbb{Z}、+、0、\leqslant)$ 是严格重排幺半群，但不是正向有序的。反之，$(\mathbb{N}_{\geqslant 1}、\times、1、\leqslant)$ 是正向有序的，但不是重排幺半群。事实上，不可能重排不等式 $2 \times 5 \leqslant 3 \times 4$。

5.2 加权系统的广义开放映射情形

令 $(K, +, e, \sqsubseteq)$ 为交换有序幺半群。V_K 的元素是

– 要么是由 $A \times (K \backslash \{e\})$, $w = (a_1, k_1), \ldots, (a_n, k_n)$ 构成的词，– 要么是三元组 (w_1, b, w_2)，其中包含一个由 $A \times (K \backslash \{e\})$ 中的字母 $b \in A$ 和一个非空词 w_2 构成的词 w_1。

函数 J_K 映射

– 一个词 $w = (a_1, k_1), \ldots, (a_n, k_n)$ 到系统

$$Jw = \boxed{0 \xrightarrow{(a_1,k_1)} 1 \xrightarrow{(a_2,k_2)} \cdots \xrightarrow{(a_n,k_n)} n}$$

也就是说，映射到余代数 Jw: $\{0, \ldots, n\} \to K^{(A \times \{0, \ldots, n\})}$，使得若 $b = a_{i+1}$ 且 $j = i + 1$，则 $Jw(i)(b, j) = k_{i+1}$；否则为 $= e$。

– 三元组 (w_1, b, w_2) 其中包含 $w_1 = (a_1, k_1), \ldots, (a_n, k_n)$ 以及 $w_2 = l_1, \ldots, l_m$ 被映射到系统

$$J(w_1, b, w_2) = \boxed{0 \xrightarrow{(a_1,k_1)} 1 \xrightarrow{(a_2,k_2)} \cdots \xrightarrow{(a_n,k_n)} n \begin{cases} \to (n+1, 1) \\ \vdots \\ \to (n+1, m) \end{cases}}$$

也就是说，$J(w_1, b, w_2)(n)(n + 1, i) = (b, l_i)$。

范畴 $\mathbb{E}_K$ 定义如下。对于每个 w_1、b 和 w_2，存在唯一的边 e，从 w_1 到 (w_1, b, w_2)。然后，函子将此边 e 映射到 $J_{\mathbb{E}} e$，即显然的单射。

范畴 $\mathbb{S}_K$ 有两类态射：

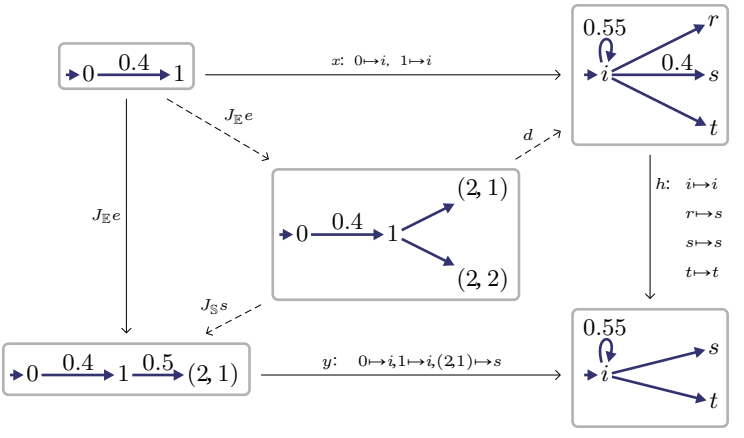


图 1. $\mathbb{R}_+$加权系统中路径扩展的一种提升示例，且标签字母表为单元素集合 $|A| = 1$，因此省略了动作标签。

– 词 w_1上的恒等态射，– 从 (w_1, b, w_2') 到 (w_1, b, w_2)的态射，其中 $w_2' = l_1', \ldots, l_{m'}'$ 和 $m \leqslant m'$ 由满射单调函数 $s\colon \{1, \ldots, m'\} \to \{1, \ldots, m\}$ 给出，使得对于所有 $i \leqslant m$, $l_i = \sum_{\{j \mid s(j)=i\}} l_j'$.

函子 $J_{\mathbb{S}}$ 随后将第二类的 s 映射为适当同态$J_{\mathbb{S}}s$，该同态将 i映射到 i，并将 $(n+1, j)$ 映射到 $(n+1, s(j))$。

作为一种记号约定，对于态射 $x\colon Jw_1 \to X$，若 w_1 的长度为 n，则用 $\mathsf{end}(x)$表示 $x(n) \in X$。接着，如果存在类型为 $x\colon Jw_1 \to X$ 且 $\mathsf{end}(x) = p$的态射，我们就称 X 的状态 p 是可达的。推广而言，如果X 的所有状态都是可达的，就称X 是可达的。

5.3 开映射与适当同态的等价性

图 1 给出了一个 $(\mathbb{E}, \mathbb{S})$-开映射 h 的示例，并展示了一个得到提升的路径扩展。与非确定性系统中常见的情况一样，提升映射 d 并非唯一。因此，提升性质只要求存在性，而不要求唯一性。由于 h 是一个适当同态，它能为所有扩展提供提升，正如我们将一般性地证明的那样：

定理 5.6。 设松弛同态 $f\colon X \to Y$。若 f 是 $(\mathbb{E}_K, \mathbb{S}_K)$-开、$X$ 可达，且 K 正向有序，则 f 是适当同态。反之，若 f 是适当同态且 K 是重排幺半群，则 f 是 $(\mathbb{E}_K, \mathbb{S}_K)$-开。特别地，若 K 是正向有序的重排幺半群，则两个加权系统 X 和 Y 互为 $(\mathbb{E}_K, \mathbb{S}_K)$-互模拟，当且仅当它们余代数双模拟。

对于 Set 上的自函子，要证明余代数双模拟等价是等价关系，只需证明该函子保持弱拉回。对于加权函子，这由严格性保证（另见 [17]）：

推论 5.7。 如果 K 是正序严格重排幺半群，那么 $(\mathbb{E}_K, \mathbb{S}_K)$-双模拟等价是等价关系。

5.4 关于次分布函子

到目前为止，我们尚未讨论概率系统，也就是说，次分布函子 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}$ 的余代数。这些余代数是加权函子 $X \mapsto (\mathbb{R}_+, +)^{(X)}$ 的余代数的特例。本节将说明，将 $X \mapsto \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X)$ 的余代数视为 $X \mapsto (\mathbb{R}_+, +)^{(A\times X)}$ 的余代数是等价的；也就是说，前者的两个余代数互模拟，当且仅当将它们视为后者的余代数时也互模拟。关键在于以下注记。

引理 5.8。 设有一个带基点余代数 $1 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{c} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times X)$，并给定一个松弛（分别为严格）同态 f，从 $1 \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{d} (\mathbb{R}_+, +)^{(A\times Y)}$ 到 $1 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{c} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X) \subseteq (\mathbb{R}_+, +)^{(A\times X)}$。那么 $Y \xrightarrow{d} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times Y)$ 和f 是从 $1 \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{d} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times Y)$ 到$1 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{c} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X)$ 的松弛（分别为严格）同态。

请注意，这一性质对于适当分布函子 $\mathcal{D}$ 并不成立。这表明，我们可以针对函子 $X \mapsto \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X)$ 的余代数定义一种广义开映射情形 $\mathbb{E}_{\mathcal{D}}$，$\mathbb{S}_{\mathcal{D}}$：考虑第 5.2 节中定义的 $\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+,\ +)}$，$\mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+,\ +)}$，并将其限制为满足 Jv 是 $X \mapsto \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X)$ 的余代数的那些 v。

推论 5.9. 从 $1 \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{d} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times Y)$ 到 $1 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{c} \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X)$ 的松弛同态是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$- 开，当且仅当它是 $(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+,\ +)}, \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+,\ +)})$- 开。此外，两个 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times _)$- 余代数互模拟（ $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-互模拟），当且仅当它们 $(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+,\ +)}, \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+,\ +)})$-互模拟。

最后，给出本节的主要结果：

定理 5.10。 设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times _)$-余代数 (X, c, i) 与 (Y, d, j) 之间的松弛同态。如果 (X, c, i) 可达且 f 是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-开映射，那么 f 是适当同态。反之，如果 f 是适当同态，那么它是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-开映射。此外，两个 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times _)$-余代数 (X, c, i) 与 (Y, d, j) 是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}, \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-互模拟，当且仅当它们余代数双模拟。

6 分支双模拟的开映射

本节将介绍一种利用开映射广义框架来建模分支互模拟和弱互模拟的新方法。借助这种额外的灵活性，我们不再需要依赖弱态射，而只需对定义 2.1 中描述的态射稍作修改。具体而言，我们构造一个

广义开映射情形，使得停顿分支互模拟与强路径互模拟相一致，并且在这种情况下，它们恰好刻画 $(\mathbb{E}, \mathbb{S})$-互模拟等价。此外，在这一框架中，路径互模拟恰好对应于弱互模拟，从而表明分支互模拟等价是弱互模拟等价在保持历史方面的对应概念。

6.1 带内部迁移的标号迁移系统：范畴与互模拟等价

定义 6.1。对于固定的标签集 A，其中有一个特定元素 τ（称为内部迁移），范畴 带内部迁移的标号迁移系统 与 标号迁移系统具有相同的对象，其态射 $f\colon (X, , x_0) \to (Y, , y_0)$ 是函数 $f\colon X \to Y$，满足 $f(x_0) = y_0$，并且对于 X 中的所有 $x \overset{a}{\blacktriangleright} x'$，都有 $f(x) \overset{a}{\blacktriangleright} f(x')$，或者 $a = \tau$ 且 $f(x) = f(x')$。

标号迁移系统是带内部迁移的标号迁移系统的一个（非满）子范畴；事实上，本文稍后将用到标号迁移系统态射。为便于区分，我们将同时属于标号迁移系统的带内部迁移的标号迁移系统态射称为强态射（此名称暗指强互模拟，它是标号迁移系统中的互模拟概念）。另一种态射称为弱态射 [3]:

- if $x \xrightarrow{a} x'$ in X, then $f(x) \xrightarrow{\tau}{}^{\star} \xrightarrow{a} \xrightarrow{\tau}{}^{\star} f(x')$ in Y,
- if $x \xrightarrow{\tau} x'$ in X, then $f(x) \xrightarrow{\tau}{}^{\star} f(x')$ in Y.

尽管在本文后续的发展中我们不会使用弱态射，但值得一提的是，WLTS 态射构成了弱态射的真子类。

定义 6.2。从 $(X, \blacktriangleright_X, i_X)$ 到 $(Y, \blacktriangleright_Y, i_Y)$ 的分支互模拟是满足 $(i_X, i_Y) \in R$ 的关系 $R \subseteq X \times Y$，并且对于 $(x, y) \in R$:

- *if* $x \xrightarrow{a} x'$ *then*
  - $a = \tau$ *and* $(x', y) \in R$, *or*
  - $y \xrightarrow{\tau} y_1 \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} y_n \xrightarrow{a} z_1 \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} z_m$ *such that* (x, y_n), (x', z_1), *and* $(x', z_m) \in R$.
- *symmetrically when* $y \xrightarrow{a} y'$.

此外，若在第二个条件中，对于所有 i，均有 $(x, y_i), (x', z_i) \in R$（第三个条件中也对称地成立），则称 R 为停顿。

由 [23]可知，最大分支互模拟是停顿的，因此这两种概念生成相同的双模拟等价。下文将证明，强路径互模拟与停顿分支互模拟的联系更为自然，这归因于它们的向后闭包。

定义 6.3。从 $(X, \blacktriangleright_X, i_X)$ 到 $(Y, \blacktriangleright_Y, i_Y)$ 的弱双模拟是满足 $(i_X, i_Y) \in R$ 的关系 $R \subseteq X \times Y$，并且对于 $(x, y) \in R$:

– 若 $x \xrightarrow{\tau} x'$，则存在 y'，使得 $(x', y') \in R$ 和 $y \overset{\tau}{\blacktriangleright}{}^{\star} y'$，– 若 $x \overset{a}{\blacktriangleright} x'$ 且 $a \neq \tau$，则存在 y'，使得 $(x', y') \in R$ 和 $y \overset{\tau}{\blacktriangleright}{}^{\star} \overset{a\tau}{\blacktriangleright}{}^{\star} y'$。– 当 $y \overset{\tau}{\blacktriangleright} y'$ 或 $y \overset{a}{\blacktriangleright} y'$ 时，情况对称。

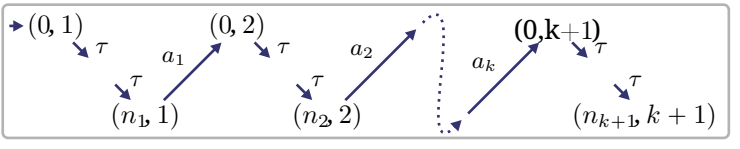
It 显然，（停顿）分支互模拟是一种弱互模拟 n.

6.2 分支双模拟的广义开映射

本节将描述刻画分支互模拟的广义开映射情形。与普通的标号迁移系统类似（定义 2.2），V 的元素将是 A 上的词，表示由该词标记的有限线性标号迁移系统。不过，为了突出内部迁移 τ 的特殊性，我们将在此给出另一种表述。

这里，V是如下形式的序列集合：$v = n_1,\ a_1,\ n_2,\ \ldots\ldots,\ n_k,\ a_k,\ n_{k+1}$，满足 $a_i \in A\backslash\{\tau\}$和 $n_i \in \mathbb{N}$，例如 $\tau\tau a\tau bc\tau \mathrel{\widehat{=}} 2,\ a,\ 1,\ b,\ 0,\ c,\ 1$。自然数 $n_i \in \mathbb{N} \cong \{\tau\}^*$ 表示两个可观测迁移之间内部迁移的次数。然后，J 将此序列映射到通常的线性标号迁移系统：

$Jv =$



$\mathbb{E}$ 中的元素最多追加至多 一个可观测（即非 τ）迁移：

– 仅内部迁移：对于序列 $v = n_1, a_1, \ldots, a_k, n_{k+1}$ 和 $w = n_1, a_1, \ldots, a_k, n'_{k+1}$，满足 $n_{k+1} \leqslant n'_{k+1}$ 时，存在唯一的边 e_τ：$v \to w$，位于 $\mathbb{E}$ 中，例如 e_τ: $2, a, 1, b, 0, c, 1 \to 2, 1, b, 0, c, 3$ – 一个可观测迁移：对于序列 $v = n_1, a_1, \ldots, a_k, n_{k+1}$ 和 $w = n_1, a_1, \ldots, a_k, n'_{k+1}, a, n_{k+2}$，满足 $n_{k+1} \leqslant n'_{k+1}$ 时，存在唯一的边 e_a: $v \to w$，位于 $\mathbb{E}$ 中。

图态射 $J_{\mathbb{E}}$: $\mathbb{E} \to \mathbb{M}$ 将那些边映射到显然的包含映射，将状态 $(i,\ j)$ 的 Jv 映射到 Jw中的同一状态。

严格来说，$\mathbb{E}$ 不是一个范畴，而只是一个图，因为我们有$a \xrightarrow{e_b} ab$ 和 $ab \xrightarrow{e_c} abc$，但不存在从 a 到 abc的态射。为了纳入第4节的框架，我们取由该图生成的自由范畴 Free($\mathbb{E}$)，以及延拓图同态 $J_{\mathbb{E}}$的唯一函子。根据命题4.8，对于开性和路径双模拟，考虑 Free($\mathbb{E}$) 和 $\mathbb{E}$ 是等价的，因此当我们指的是 (Free($\mathbb{E}$), $\mathbb{S}$)-开性时，我们将称其为 ($\mathbb{E}$, $\mathbb{S}$)-开性，并且所有陈述和证明都只使用 $\mathbb{E}$ 。

$\mathbb{S}$ 的元素更难描述。直观地说，它们是合并状态的态射。在带有内部迁移的标号迁移系统中，当某个 τ-迁移的源状态和目标状态被映射到同一状态时，就会发生合并。这对于我们想要描述的开映射至关重要：为了提升一个τ-迁移，可能需要使用多个 τ-迁移。有了这些知识，$\mathbb{S}$ 的元素如下所示。

– **合并内部迁移**：$\mathbb{S}$中从 $v = n_1$、a_1、……、a_k、n_{k+1} 到$w = n'_1$、a_1、……、a_k、n'_{k+1} 且满足 $n_i \geqslant n'_i$ 的态射是 $(k+1)$元组 $s = (s_1$、……、$s_{k+1})$ 单调满射函数 s_i: $\{0 < 1 < \ldots < n_i\} \to \{0 < 1 < \ldots < n'_i\}$.

例如，从 $a\tau\tau b \mathrel{\widehat{=}} 0, a, 2, b, 0$ 到 $a\tau b \mathrel{\widehat{=}} 0, a, 1, b, 0$ 有两个态射，每个对应一个可被删除的 τ。函子 $J_{\mathbb{S}}$ 随后将 s 映射为从 Jv 到 Jw 的态射，该态射由 $J_{\mathbb{S}}(s)(i, j) = (s_j(i), j)$定义。

作为一种记号约定，对于态射 $x\colon J(n_1,a_1,\ldots,a_k,n_{k+1})\to X$，我们用 $\mathsf{end}(x)$ 表示 $x(n_{k+1},k+1)\in X$。

6.3 互模拟的等价性

在本节中，我们证明 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-互模拟等价确实与分支互模拟一致。为此，我们首先证明，对于当前的 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{S}$ 实例（第 6.2 节），$(\mathbb{E},\mathbb{S})$-互模拟等价与强路径互模拟一致。一般而言，$(\mathbb{E},\mathbb{S})$-互模拟等价蕴含强路径互模拟（定理 4.7），因此只需证明当前实例的反向结论。为此，我们先将强路径互模拟内化到标号迁移系统/弱标号迁移系统的对象中，以便将其与开映射联系起来：

定义 6.4。对于一个从 X 到 Y 的强路径互模拟 R，定义标号迁移系统 $\widetilde{R}=(R,\rightarrow_R,(X\xleftarrow{!}J0\xrightarrow{!}Y))$，使其迁移为

$$(X\xleftarrow{x}Jv\xrightarrow{y}Y)\xrightarrow{a}_R(X\xleftarrow{x'}Jw\xrightarrow{y'}Y)$$

- 对于 $a\neq\tau$，令 $v=(n_1,a_1,\ldots,a_k,n_{k+1})$，$w=(n_0,a_1,\ldots,a_k,n_{k+1},a,0)$，$x'=x\cdot J_{\mathbb{E}}e_a$ 和 $y'=y\cdot J_{\mathbb{E}}e_a$（对应唯一的 $e_a\colon v\to w$）；- 对于 $a=\tau$，令 $v=(n_1,a_1,\ldots,a_k,n_{k+1})$，$w=(n_1,a_1,\ldots,a_k,n_{k+1}+1)$，$x'=x\cdot J_{\mathbb{E}}e_\tau$ 和 $y'=y\cdot J_{\mathbb{E}}e_\tau$（对应唯一的 $e_\tau\colon v\to w$）。

首先，我们用投影映射来描述 R 中的运行：

引理 6.5。在带内部迁移的标号迁移系统中，有投影映射 $X\xleftarrow{\pi_X}\widetilde{R}\xrightarrow{\pi_Y}Y$，定义如下：$\pi_X\colon(X\xleftarrow{x}Jv\xrightarrow{y}Y)\mapsto \mathit{end}(x)$ 和 $\pi_Y\colon(X\xleftarrow{x}Jv\xrightarrow{y}Y)\mapsto \mathit{end}(y)$。对于每个强态射 $r\colon Jv\to R$（即 $r\in$ 标号迁移系统），

$$\mathit{end}(r)\ \mathit{is\ of\ the\ form}\ (X\xleftarrow{\pi_X\cdot r}Jv\xrightarrow{\pi_Y\cdot r}Y).$$

请注意，在此陈述中，我们要求 r 是强态射，而不只是弱标号迁移系统的态射。若仅为弱标号迁移系统的态射，该陈述将变为：存在 $s\colon v'\to v\in\mathbb{S}$，使得 $\pi_X\cdot r=x\cdot J_{\mathbb{S}}s$。对于弱标号迁移系统中开映射的刻画，就我们的需要而言，只需将范围限制为强态射：

引理 6.6. 要使 $f\colon X\to Y$ 在带内部迁移的标号迁移系统中是 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-开映射，只需验证定义 *4.1* 中的提升在 x 为强态射这一特殊情形下成立。

我们利用这一简化来证明投影映射 π_X,π_Y 是开映射：

命题 6.7. 对于从 X 到 Y 的强路径双模拟 R，投影映射 $X\xleftarrow{\pi_X}\widetilde{R}\xrightarrow{\pi_Y}Y$ 均为 $(\mathbb{E},\mathbb{S})$-开映射。

下一步是证明强路径双模拟与停顿分支互模拟之间的等价性。

Ta表 1. 标号迁移系统中带有 τ-动作的双模拟等价概念 X， $Y \in$ 弱标号迁移系统 S

分支互模拟 $\iff$ 强路径互模拟（定理 6.8）		
	$\iff$ ($\mathbb{E}$， $\mathbb{S}$)-双模拟等价	（命题 6.7 和定理 4.7）
弱互模拟等价	$\iff$路径互模拟等价	（定理 6.9）

Theorem 6.8. 如果 R 是从 X 到 Y的停顿分支互模拟，则 n

$$\overline{R} = \{X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y \mid v = (n_1, a_1, \dots, n_{k+1}) \wedge \forall i,\, j.\, (x(i,j), y(i,j)) \in R\}$$

是强 路径双模拟。反之，如果 R 是强路径双模拟，那么

$$\breve{R} = \{(end(x), end(y)) \mid (X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y) \in R\}$$

是停顿分支互模拟。

同样的推理也适用于弱互模拟和路径互模拟：

定理 6.9。 若 R 是从 X 到 Y的弱双模拟，则

$$\widehat{R} = \{X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y \mid (end(x), end(y)) \in R\}$$

$\breve{}$是路径双模拟。若 R 是路径双模拟，则 R 是弱双模拟。

总而言之，我们可以用范畴双模拟等价的概念来描述分支互模拟等价和弱互模拟等价，如表 1 所示。

7 结论与未来工作

本文通过开映射理论研究了加权系统和概率系统的互模拟等价。在说明通常的理论无法刻画权重之后，我们借助合并这一概念，对该理论作出了忠实扩展。新理论具有与经典开映射类似的性质（等价关系、刻画为跨度集合、限制到生成元），同时还能刻画加权系统的互模拟等价，乃至分支互模拟。

这些新的实例需要为该理论引入更多参数。未来仍需研究参数 $\mathbb{E}$、 $\mathbb{S}$ 能否合并到单个路径范畴中，并配以两个态射类和态射分解。若能了解这一新理论是否满足开映射类的公理，也将很有启发性；特别是对于余代数托普斯 [14] 而言， [15], 。

对于目前呈现的框架，我们希望能像针对非确定性系统 [19,25]所做的那样，在形式上将其与余代数联系起来。此外，我们还希望研究如何将真正并发的系统语义（例如高维自动机 [21] ）整合进来。为它们设计开映射结果证明颇为复杂（参见 [8]），但我们希望加入合并操作后，能够更自然地对同伦进行建模。

最后，值得探究我们的理论能否涵盖那些传统上用开映射建模的系统的定量扩展，例如 Petri 网和事件结构的概率扩展与量子扩展（例如参见 [24] ）。

参考文献

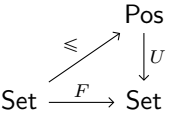
1. Beohar, H., Cuijpers, P.J.L.：具体范畴中的开映射与前缀序上的分支互模拟。《理论计算机科学电子札记》**319**，51–66（2015） 2. Beohar, H., Küpper, S.：预层范畴中的双模拟映射。《理论计算机科学电子札记》**347**，5–24（2019） 3. Cheng, A., Nielsen, M.：开映射（@）实践。BRICS 报告系列（RS-95-23）（1995） 4. Danos, V., Desharnais, J., Laviolette, F., Panangaden, P.：概率系统的双模拟与余同余。《信息与计算》**204**(4)，503–523（2006） 5. Desharnais, J., Edalat, A., Panangaden, P.：标记马尔可夫过程的双模拟。《信息与计算》**179**(2)，163–193（2003） 6. Dubut, J., Goubault, E., Goubault-Larrecq, J.：P-可达范畴模型中的双模拟与展开。载于：Desharnais, J., Jagadeesan, R.（编）《第 27 届并发理论国际会议，CONCUR 2016》。LIPIcs，第 59 卷，第 25:1–25:14 页。达格斯图尔城堡—莱布尼茨信息学中心（2016） 7. Dubut, J., Hasuo, I., Katsumata, S., Sprunger, D.：利用余反射和开态射实现定量双模拟（2018 09278 8 1809），arXiv：。. Fahrenberg, U., Legay, A.：通过开映射实现高维自动机的保历史双模拟。《理论计算机科学电子札记》**298**，165–178（2013） 9. Fiore, M., Cattani, G.L., Winskel, G.：弱双模拟与开映射。载于：论文集。第 14 届计算机科学逻辑研讨会。第 67–76 页（1999） 10. Freyd, P., Scedrov, A.：《范畴、代数关系范畴》，数学文库，第 39 卷。North-Holland（1990） 11. Hughes, J., Jacobs, B.：余代数中的模拟。《理论计算机科学》**327**(1- 2)，71–108（2004）。https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.07.022，https://doi. org/10 022 12 1016 2004 07 . / j.tcs. . . . Hune, T., Nielsen, M.：定时双模拟与开映射。载于：Brim, L., Gruska, J., Zlatuška, J.（编）《计算机科学数学基础 1998》。MFCS 1998。《计算机科学讲义》，第 1450 卷。Springer，柏林，海德堡（1998） 12. Jacobs, B.：《余代数导论：迈向状态与观测的数学》，剑桥理论计算机科学丛书，第 59 卷。剑桥大学出版社（2016） 13. Johnstone, P., Power, J., Tsujishita, T., Watanabe, H., Worrell, J.：关于余代数范畴的结构。《理论计算机科学》**260**，87–117（2001） 14. Joyal, A., Moerdijk, I.：开映射的完备性定理。《纯粹与应用逻辑年刊》**70**，51–86（1994） 15. Joyal, A., Nielsen, M., Winskel, G.：由开映射得到的双模拟。《信息与计算》**127**，164–185（1996） 16. Klin, B.：《语义学与代数规范》，《计算机科学讲义》，第 5700 卷，第 121–139 页，章节：加权迁移系统的结构操作语义。Springer，柏林，海德堡（2009） 17. Larsen, K.G., Skou, A.：通过概率测试实现双模拟。《信息与计算》**94**，1–28（1991） 18. Lasota, S.：余代数态射涵盖开映射。《理论计算机科学》**280**(1)，123–135（2002）。https://doi.org/10.1016/S0304-3975(01) 00023-8，计算机科学中的余代数方法

20. Park, D.：无限序列上的并发与自动机。载于：第 5 届理论计算机科学 GI 会议论文集。《计算机科学讲义》第 104 卷，第 167–183 页。Springer（1981） 21. Pratt, V.：高维自动机再探。数学结构与计算机科学（2005） 22. Rutten, J.：泛余代数：一种系统理论。理论计算机科学**249(1)**，3–80（2000） 23. van Glabbeek, R.J., Weijland, W.P.：双模拟语义中的分支时间与抽象。美国计算机协会会刊**43(3)**，555–600（1996） 24. Winskel, G.：分布式概率与量子策略。《理论计算机科学电子札记》 **298**，403–425（2013） 25. Wißmann, T., Dubut, J., Katsumata, S., Hasuo, I.：自由路径范畴。载于：Bojańczyk, M., Simpson, A.（编）《软件科学与计算结构基础》（FoSSaCS 2019），第 523–540 页。Springer 国际出版，Cham（2019 年 4 月）。https://doi.org/10.1007/978-3-030-17127-8_30

A 第 2 节的详细内容

备注 2.9 的详细内容

证明。Hughes 和 Jacobs [11] 采用预序而非偏序，但将其定义 [11, Def. 2.1] 调整为偏序后可得：Set-函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ 上的一个序是一个函子 $\leqslant\colon \mathsf{Set} \to$ 偏序集，使下图可交换：



按照我们的定义（定义 2.8），函子 $\sqsubseteq$ 上的每个序都能为 $\mathcal{C} := \mathsf{Set}$ 诱导出这样的函子 $\leqslant\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Pos}$，因为对于每个集合 Y，我们可以令 $\leqslant_Y \in \mathsf{Pos}$ 为 $\mathsf{Set}(1$ 上的序 $\sqsubseteq,\ FY)$，并将 FY 的元素与映射 $1 \to FY$ 等同起来。

反过来，给定 Hughes 和 Jacobs 意义下的 $\leqslant\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Pos}$，我们可以定义 $f_1, f_2 \in \mathsf{Set}(X,\ FY)$ 上的序如下：

$$f_1 \sqsubseteq f_2 :\Longleftrightarrow \forall x \in X\colon\ f_1(x) \leqslant_Y f_2(x). \tag{1}$$

然而，按照定义 2.8 的意义，函子上的并非所有序 $\sqsubseteq$ 都一定满足 (1)。□

B 第 3 节的证明

回顾一下，范畴 $\mathsf{LCoalg}(1, \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times _))$ 中的对象是一个带基点余代数，也就是一对具有如下形式的函数

$$1 \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ \xi\ } \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times X).$$

接下来，我们将 i 与元素 $x_0 \in X$等同，使得 i 的像为 $\{x_0\}$，并将上面的带基点余代数记作 (X, ξ, x_0)。

定理 3.1 的证明

证明。 假设存在某个 J 具有该等价关系，并注意到不妨设 JP 是可达的。[3] 对于 $Y = \boxed{\blacktriangleright r \quad {}^{1}\ {}^{a} \quad \blacktriangleright y}$，（通过 $\zeta(r)(a, \underline{\ \ y)\ } = 1$ 隐式定义 $\zeta\colon\ Y \to \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times Y)$），考虑初始态射 $!_Y\colon\ 0_{\mathbb{M}} \to Y$，其中 $0_{\mathbb{M}} = \boxed{\blacktriangleright r_0}$ 此处 $0_{\mathbb{M}}$ 只有一个状态且没有迁移。由于 $!_Y$ 不是适当余代数同态，因此它不是 J-开态射。因此存在某个交换方块

$$\begin{array}{ccc} JP & \xrightarrow{\ p\ } & 0_{\mathbb{M}} \\ {\scriptstyle J\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle !_Y} \\ JQ & \xrightarrow{\ q\ } & Y \end{array}$$

[3] 如果存在这样的 J，那么 $R \cdot J$ 也是这样的候选对象，其中 $R\colon\ \mathbb{M} \to \mathbb{M}_{\mathsf{reach}}$ 将带基点余代数限制到其可达状态。

对于该交换方块，不存在对角提升。由于不存在对角线， $J\phi$ 不是同构。由于 p 是松弛余代数同态， JP 没有边，因此 $JP \cong 0_{\mathbb{M}}$、 p 是同构。这意味着 JQ 至少有一条边，因为 $JQ \ncong JP$，并且该边必定连接不同的元素，且标记为 a，因为 q 是松弛余代数同态。因此，存在 r， $z \in JQ$，其中 $r \neq z$ 和 $r \overset{w'.}{\xrightarrow{a}} z$、 $0 < w \leqslant 1$。定义 $n = 2 \cdot \lceil \frac{1}{w} \rceil$ 并

$$X = \quad , \text{ i.e. } X = \{r, x_1, \dots, x_n\},\ \xi(r)((a, x_k)) = \frac{1}{n}, 1 \leqslant k \leqslant n.$$

我们有一个适当余代数同态 $h\colon\ X \to Y$，由 $h(r) = r$ 和 $h(x_k) = y$、 $1 \leqslant k \leqslant n$ 给出。它是一个适当余代数同态，因为 $\zeta(r)(y) = 1 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{n} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \xi(r)(x_k)$。根据 $0_{\mathbb{M}}$ 的始对象性质，也因此根据 JP 的始对象性质，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} JP & \xrightarrow{!_X} & X \\ \downarrow{\scriptstyle J\phi} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ JQ & \xrightarrow{q} & Y \end{array}$$

根据假设的等价关系， h 是 J-开，因此存在某个对角提升$d\colon\ JQ \to X$。现在， d 是一个松弛余代数同态，这会导致矛盾，因为 d 将 JQ 中的边 $r \overset{w'.}{\xrightarrow{a}} z$ 映射到 X 中某个满足 $w' \geqslant w$ 的 $d(r) \overset{w'.}{\xrightarrow{a}} d(z)$。然而，这样的边并不存在，因为 X 中的每条边的权重都是 $\frac{1}{n}$，小于 w'，由此得出第一个不可能性。现在，由于 h 是一个适当余代数同态， X 和 Y 余代数双模拟。我们来证明它们不是 J-互模拟。假设存在一个由J-开态射构成的跨度 $Y \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} X$。根据前面的类似论证， f 是开态射意味着 Z 中存在一个满足 $w' \geqslant w$ 的迁移 $r' \overset{w'.}{\xrightarrow{a}} z'$。由于 g 是一个松弛同态， g 会将此迁移映射到一个形如 $r \overset{w''.}{\xrightarrow{a}} x_i$ 且满足$w'' \geqslant w' \geqslant w$的迁移上，这同样不可能。□

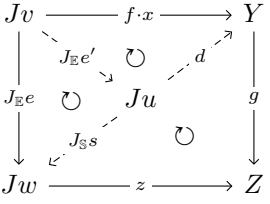
C 第4节的证明

引理 4.4 的证明

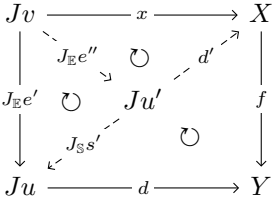
证明。 我们先证明它们在复合运算下封闭。因此，考虑以下情形

$$\begin{array}{ccc} Jv & \xrightarrow{x} & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ J_{\mathbb{E}}e & & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Jw & \xrightarrow{z} & Z \end{array}$$

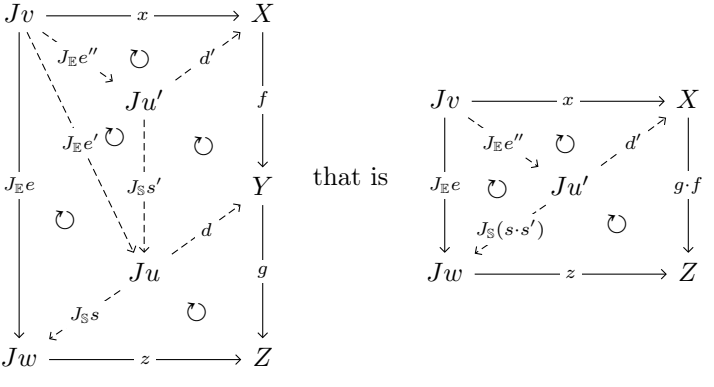
重新整理这些箭头后，我们得到以下交换方块，并在其上应用 g 的开性



接着，我们将上方的三角形变换为一个交换方块，并在该方块上应用 f 的开性



综合以上结果，我们得到了所需的提升



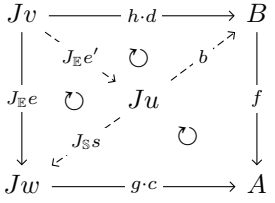
现在，让我们证明它们在拉回下封闭，也就是说，如果下列

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{k} & C \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

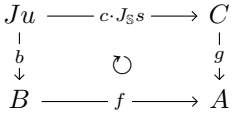
是一个拉回方块，且 f 是 $(\mathbb{E},\ \mathbb{S})$-开，则 k 是 $(\mathbb{E},\ \mathbb{S})$-开。首先考虑以下情形:

$$\begin{array}{ccc} Jv & \xrightarrow{d} & D \\ {\scriptstyle J_{\mathbb{E}}e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ Jw & \xrightarrow{c} & C \end{array}$$

与该拉回方块复合后，我们得到以下对象，并对其应用 f的开性



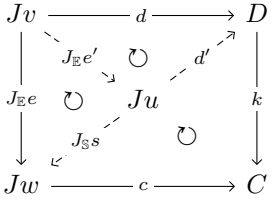
重新整理右下角的箭头后，我们得到以下交换方块



利用假设中拉回的泛性质，我们得到态射 $d'\colon Ju \to D$ 的存在，使得

$$k \cdot d' = c \cdot J_{\mathbb{S}} s \quad \text{and} \quad h \cdot d' = b.$$

我们来证明以下提升成立



右下角（$k \cdot d' = c \cdot J_{\mathbb{S}} s$）和左侧三角形（$J_{\mathbb{S}} s \cdot J_{\mathbb{E}} e' = J_{\mathbb{E}} e$）已给定。我们来证明 $d' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = d$。我们已经知道

$$h \cdot d' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = b \cdot J_{\mathbb{E}} e' = h \cdot d.$$

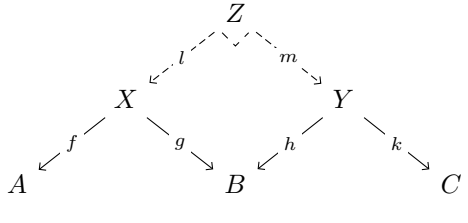
并且

$$k \cdot d' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = c \cdot J_{\mathbb{S}} s \cdot J_{\mathbb{E}} e' = c \cdot J_{\mathbb{E}} e = k \cdot d.$$

然后，根据拉回方块的泛性质， $d' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = d$。 □

定理 4.5 的证明

证明。 最后证明传递性，假设给定如下两个开映射张成（简图）

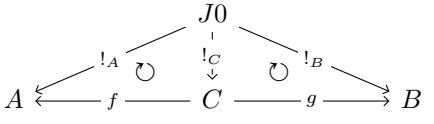


对 g 沿 h （虚线）取拉回。二者都是开映射；根据引理 4.4， l 和 m 也都是开映射。再次应用引理 4.4， $f \cdot l$ 和 $k \cdot m$ 是开映射，因此我们得到一个连接 A 与 C的开映射张成。□

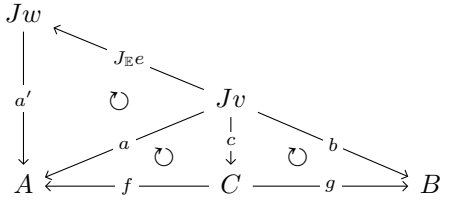
定理 4.7 的证明

证明。 下面证明定义中的三个性质。

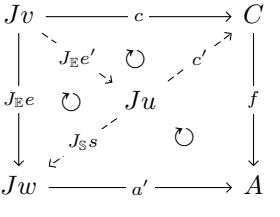
– **初始条件：** 根据初始对象 $J0$ 的泛性质，以下图表交换：



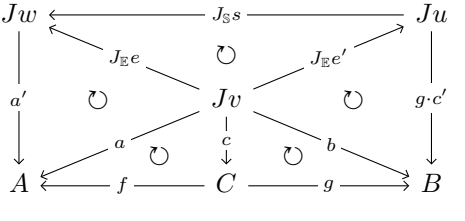
– **前向闭包：** 假设给定以下情形：



将左侧的两个三角形补成一个交换方块，并利用 f 的开性，我们得到：



于是我们得到：



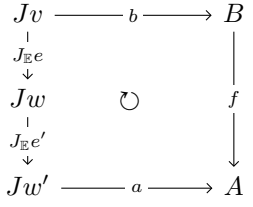
– **向后闭包：** 显然。

□

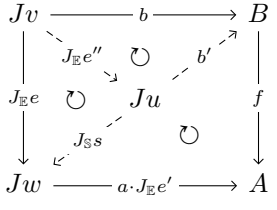
命题4.8的证明

证明。只需证明以下结论。

1. 假设我们有如下情形：



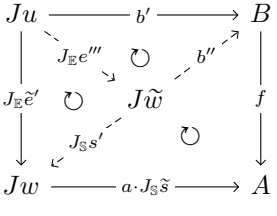
其中 $e, e' \in \mathbb{E}'$。将假设应用于下列情形（以普通形式表示）：



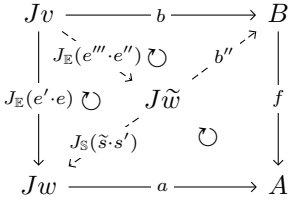
我们得到带有 $e'' \in \mathbb{E}'$ 的虚线数据。根据假设，存在 $\widetilde{e'} \in \mathbb{E}'$ 和 $\widetilde{s} \in \mathbb{S}$，使得

$$J_{\mathbb{E}}e' \cdot J_{\mathbb{S}}s = J_{\mathbb{S}}\widetilde{s} \cdot J_{\mathbb{E}}\widetilde{e'}.$$

重新排列右下角的三角形后，我们得到如下情形（以普通形式表示）

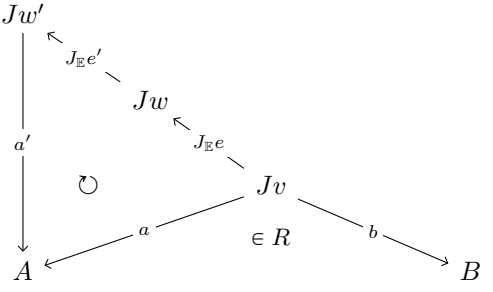


并应用该假设，我们得到带有 $e''' \in \mathbb{E}'$ 的虚线数据。总之，我们得到：

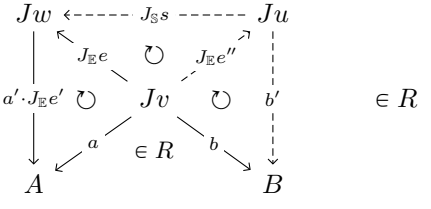


与 $e''' \cdot e'' \in \mathbb{E}$ 和 $\widetilde{s} \cdot s' \in \mathbb{S}$。

2. 假设我们有一组 R 跨度，并且有如下情形：



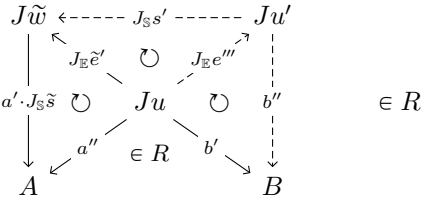
其中 $e,\ e' \in \mathbb{E}'$。应用以下情形中的假设（普通形式）：



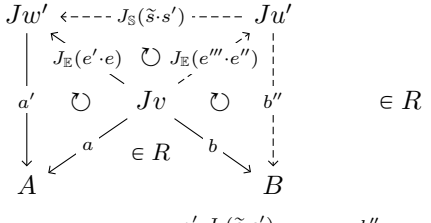
我们得到带有 $e' \in \mathbb{E}'$ 和 $A \xleftarrow{a''=a'\cdot J_{\mathbb{E}}e'\cdot J_{\mathbb{S}}s} Ju \xrightarrow{b'} B \in R$的虚线数据。根据假设，存在 $\widetilde{e}' \in \mathbb{E}'$ 和 $\widetilde{s} \in \mathbb{S}$ 使得

$$J_{\mathbb{E}}e' \cdot J_{\mathbb{S}}s = J_{\mathbb{S}}\widetilde{s} \cdot J_{\mathbb{E}}\widetilde{e}'.$$

重新整理这些数据后，我们得到以下情形（普通形式）：



其中 $e''' \in \mathbb{E}'$ 和 $A \xleftarrow{a'\cdot J_{\mathbb{S}}\widetilde{s}\cdot J_{\mathbb{S}}s'} Ju' \xrightarrow{b''} B \in R$。总之，我们得到以下情形：



其中 $e''' \cdot e'' \in \mathbb{E}$、 $\widetilde{s} \cdot s' \in \mathbb{S}$和 $A \xleftarrow{a'\cdot J_{\mathbb{S}}(\widetilde{s}\cdot s')} Ju' \xrightarrow{b''} B \in R$。

3. 向后闭包的对应表述是显然的。

□

D 第 5 节的证明

引理 5.2 的证明

证明。 假设给定 f_1, $f_2\colon X \to (K, +, e)^{(A\times Y)}$, $g\colon X' \to X$, 以及 $h\colon Y \to Y'$ 且满足 $f_1 \sqsubseteq f_2$。我们来证明 $(K, +, e)^{(A\times h)} \cdot f_1 \cdot g \sqsubseteq (K, +, e)^{(A\times h)} \cdot f_2 \cdot g$, 也就是说，对所有 x'、y'、a

$$\sum_{\{y \mid h(y)=y'\}} f_1(g(x'))(a,y) \sqsubseteq \sum_{\{y \mid h(y)=y'\}} f_2(g(x'))(a,y).$$

如果 $\{y \mid h(y) = y'\}$ 为空，这意味着要证明 $e \sqsubseteq e$，这可由自反性得证。否则，对于该集合中的所有 y，

$$f_1(g(x'))(a,y) \sqsubseteq f_2(g(x'))(a,y)$$

根据假设。因此，我们由 $+$ 的单调性得出结论。 □

引理 5.4 的证明

证明。 对于 $x = (x_1, \dots, x_d)$ 和 $y = (y_1, \dots, y_d)$，其中 $\mathbb{R}^d$，我们记作

$$(\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_d, y_d))$$

为 $x \sqcap y$。先对 $(G_{\geqslant 0}, +, \mathbf{0}, \leqslant)$ 证明。定义

$$K_x = \{(i,k) \mid x_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,p}) \wedge x_{i,k} > 0\}$$

以及 k_x，即 K_x 的基数。类似地定义 K_y 和 k_y。我们对 $k_x + k_y$ 进行归纳证明。

– 若 $k_x = 0$, 则 $u_{i,j} = 0$ 可行。n– 若 $k_y = 0$, 则 $\sum x_i = 0$, 且由于对所有 i 都有 $x_i \geqslant 0$，因此对所有 i 都有 $x_i = 0$。$i=1$ 这意味着 $k_x = 0$，于是回到前一种情况。n– 若 $k_x > 0$ 且 $k_y > 0$, 则令 i_0 和 k 满足 $x_{i_0,k} > 0$。由于 $\sum x_i \leqslant i=1 m \sum y_j$, 因此存在 j_0 使得 $y_{j_0,k} > 0$。根据假设，$z_0 = x_{i_0,k} \sqcap j=1 y_{j_0}$, $_k$, $x'_{i_0} = x_{i_0} - z_0$ 以及 $y'_{j_0} = y_{j_0} - z_0$ 都属于 $G_{\geqslant 0}$。对于 $i \neq i_0$, 定义 $_n \quad _m x'_i = x_i$; 对于 $j \neq j_0$, 定义 $y'_j = y_j$。于是我们有 $\sum_{i=1} x'_i \leqslant \sum_{j=1} y'_j$。根据构造，若 $x_{i_0,l} = 0$，则 $x'_{i_0,l} = 0$; 若 $y_{j_0,l} = 0$，则 $y'_{j_0,l} = 0$; 并且 $(x'_{i_0}$, $_k = 0$ 或 $y'_{j_0,k} = 0)$，因此 $k'_x + k'_y < k_x + k_y$。根据归纳假设，存在一个族 $(u'_i$, $_j)$，它们属于 $G_{\geqslant 0}$，使得

$$\text{for all } j,\ \sum_{i=1}^{n} u'_{i,j} \leqslant y'_j \text{ and for all } i,\ \sum_{j=1}^{m} u'_{i,j} = x'_i.$$

定义 $u_{i,j} = u'_{i,j}$ 若 $i \neq i_0$ 且 $j \neq j_0$, $u_{i_0,j_0} + z_0$ 否则。

n m对于 $(G,+,\mathbf{0},\leqslant)$，我们将 $\sum x_i \leqslant \sum y_j$中的问题归约为 G中的问题$i=1$ $j=1$$G_{\geqslant 0}$，如下所示。首先，对于 $x \in G$，定义 $x^- = -(0 \sqcap x)$ 和 $x^+ = x + x^-$。根据假设，x^-和 x^+属于 $G_{\geqslant 0}$和 $x = x^+ - x^-$。然后，定义 $x'_i = x_i^+$若 $i \leqslant n$, y^-_{i-n} 否则，以及 $y'_j = y_j^+$ 若 $j \leqslant m$, x^-_{j-m} 否则，我们得到如下关于 $G_{\geqslant 0}$的问题

$$\sum_{i=1}^{n+m} x'_i \leqslant \sum_{j=1}^{m+n} y'_j.$$

根据前一种情况，我们有$(u'_{i,\ j})$ 属于 $G_{\geqslant 0}$，使得

- for $i \leqslant n$, $\sum\limits_{j=1}^{m+n} u_{i,j} = x_i^+$,
- for $i > n$, $\sum\limits_{j=1}^{m+n} u_{i,j} = y^-_{i-n}$,
- for $j \leqslant m$, $\sum\limits_{i=1}^{n+m} u_{i,j} \leqslant y_j^+$, and
- for $j > m$, $\sum\limits_{i=1}^{n+m} u_{i,j} \leqslant x^-_{j-m}$.

定义

$$u_{i,j} = \begin{cases} u'_{i,j} - u'_{n+j,m+i} & \text{if } i > 1 \text{ and } j > 1 \\ u'_{1,j} - u'_{n+j,m+1} + \sum\limits_{j'=1}^{m} \left(u'_{n+j',j} - u'_{n+j,j'}\right) & \text{if } i = 1 \text{ and } j > 1 \\ u'_{i,1} - u'_{n+1,m+i} + \sum\limits_{i'=1}^{n} u'_{i,m+i'} - \left(x_i^- - \sum\limits_{j'=1}^{m} u'_{n+j',m+i}\right) & \text{if } i > 1 \text{ and } j = 1 \\ u'_{1,1} - u'_{n+1,m+1} + \sum\limits_{j'=1}^{m} \left(u'_{n+j',1} - u'_{n+1,j'}\right) + \sum\limits_{i'=1}^{n} u'_{1,m+i'} - \left(x_1^- - \sum\limits_{j'=1}^{m} u'_{n+j',m+1}\right) & \text{if } i = 1 \text{ and } j = 1 \end{cases}$$

我们来检查这是否是原问题的一个解。首先，根据假设，所有 $u_{i,\ j}$都属于 G。接下来，对于 $i > 1$

$$\sum_{j=1}^{m} u_{i,j} = \sum_{j=1}^{m+n} u'_{i,j} - x_i^- = x_i^+ - x_i^- = x_i.$$

对于 $j > 1$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n+m} u'_{i,j} - \sum_{j'=1}^{m+n} u'_{n+j,j'} \leqslant y_j^+ - y_j^- = y_j.$$

对于 $i = 1$

$$\sum_{j=1}^{m} u_{1,j} = x_1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{j'=1}^{m} u'_{n+j,j'} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{j'=1}^{m} u'_{n+j',j} = x_1.$$

对于 $j = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,1} \leqslant y_1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} u'_{i,m+i'} - \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^- - \sum_{j'=1}^{m} u'_{n+j',m+i}\right).$$

m n我们知道，对于所有的 i, $x_i^- - \sum_{j'=1}^{} u'_{n+j',}$ $_{m+i} \geqslant \sum_{i'=1} u'_{i',\ m+i}$，这意味着

$$\sum_{i=1}^{n} u_{i,1} \leqslant y_1 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} u'_{i,m+i'} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n} u'_{i',m+i} = y_1.$$

为了证明严格性，我们来证明一个更强的命题，即若 K 是一个重排幺半群，且 $+$ 是严格单调的（这在 $\mathbb{R}^d$ 中成立），那么它 n m 是严格的。事实上，假设 $\sum x_i = \sum y_j$，则由重排可得$i=1$ $j=1$$_n$ $_m\sum u_{i,}$ $_j \leqslant y_j$ 且 $\sum u_{i,\ j} = x_i$，因此$i=1$ $j=1$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

n m n由于求和是严格单调的，若 $\sum u_{i,\ j} < y_j$ 对于某个 j 成立，那么，$\sum\sum u_{i,\ j} <$$_{i=1}$ $_{j=1}$ $_{i=1}$ $_m$ $_n\sum y_j$ 这就产生了矛盾。因此，$\sum u_{i,}$ $_j = y_j$ 对所有 j 都成立。$_{j=1}$ $_{i=1}$

假设给定一个带底元的分配格。定义$u_{i,\ j} = x_i \sqcap y_j$。$_n$对于所有 j, $u_{i,}$ $_j \leqslant y_j$，因此 $\bigsqcup u_{i,\ j} \leqslant y_j$，这是第一个条件。根据$_{i=1}$假设，对于所有 i

$$x_i \leqslant \bigsqcup_{j=1}^{m} y_j.$$

但由于 L 是分配的

$$x_i = x_i \sqcap \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} y_j\right) = \bigsqcup_{j=1}^{m} (x_i \sqcap y_j) = \bigsqcup_{j=1}^{m} u_{i,j},$$

这是第二个条件。

此外，如果 $\sum y_j$，那么我们可以利用分-$_{j=1}$$_n$配律对称地证明$y_j = \bigsqcup u_{i,\ j}$，从而证明严格性。反过来，假设 $L$$_{i=1}$

是一个重排幺半群。接下来，我们要证明对所有的 x、 y_1、 y_2 ，

$$x \sqcap (y_1 \sqcup y_2) = (x \sqcap y_1) \sqcup (x \sqcap y_2).$$

我们先在 $x \leqslant y_1 \sqcup y_2$ 的情况下证明它。在这种情况下，我们可以使用重排条件，得到 u_1 和 u_2，使得 $x = u_1 \sqcup u_2$ 和 $u_j \sqcup y_j$。这意味着 $u_j \leqslant x \sqcap y_j$,，因此:

$$x \sqcap (y_1 \sqcup y_2) = x = u_1 \sqcup u_2 \leqslant (x \sqcap y_1) \sqcup (x \sqcap y_2) \leqslant x,$$

这就推出了我们所需的结论。现在，假设任意的 x、 y_1、 y_2。将前一种情况应用于 $x \sqcap (y_1 \sqcup y_2), y_1, y_2$。于是我们得到

$$\begin{aligned} x \sqcap (y_1 \sqcup y_2) &= (x \sqcap (y_1 \sqcup y_2)) \sqcap (y_1 \sqcup y_2) \\ &= (x \sqcap (y_1 \sqcup y_2) \sqcap y_1) \sqcup (x \sqcap (y_1 \sqcup y_2) \sqcap y_2) \\ &= (x \sqcap y_1) \sqcup (x \sqcap y_2). \end{aligned}$$

□

定理 5.6 的证明

证明。 假设 $f\colon (X, c, i) \to (Y, d, j)$ 是 $(\mathbb{E}_K, \mathbb{S}_K)$-开映射， X 可达，且 K 为正。要证明 f 是适当同态，就意味着要证明

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{c} & K^{(A\times X)} \\ & \searrow^{j} & \circlearrowright \downarrow f & \circlearrowright & \downarrow K^{(A\times f)} \\ & & Y & \xrightarrow{d} & K^{(A\times Y)} \end{array}$$

左侧三角形由 f 是一个松弛同态这一事实给出。右侧交换方块意味着，对于所有 $x \in X$、所有 $y \in Y$，以及对于 $a \in A$,

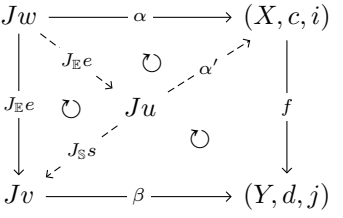
$$d(f(x))(a, y) = \sum_{\{x' \mid f(x') = y\}} c(x)(a, x').$$

由于 f 是一个松弛同态，我们已经知道

$$d(f(x))(a, y) \sqsupseteq \sum_{\{x' \mid f(x') = y\}} c(x)(a, x').$$

由于 $\sqsubseteq$ 是反对称的，只需证明另一个不等式即可。若$d(f(x))(a,\ y) = 0$，则根据正性，结论成立。假设给定 x、 y和 a，使得 $d(f(x))(a,\ y) > 0$。由于 x是可达的，存在一个态射 $\alpha\colon Jw \to X$，其中 w 是 $A \times (K \backslash \{e\})$ 上的一个词 $(a_1,\ k_1),\ \ldots,\ (a_n,\ k_n)$，并以 $(\alpha) = x$ 结尾。考虑$v = (w,\ a,\ d(f(x))(a,\ y))$，使得在 $\mathbb{E}$中有一条边 $e\colon w \to v$。存在一个松弛

同态 β：$Jv \to Y$，定义为：对于 $i \leqslant n$ 和 $\beta(n{+}1,\ 1) = y$，有 $\beta(i) = f{\cdot}\alpha(i)$。因此，我们有如下情形（纯文本）



由于 f 是 $(\mathbb{E}_K,\ \mathbb{S}_K)$-开，因此我们得到上述虚线数据。特别地，$u = (w,\ a,\ w_2)$，其中 $w_2 = l_1,\ \ldots,\ l_m$，其中 $m \geqslant 1$，并且

$$d(f(x))(a,y) = \sum_{i=1}^{m} l_i.$$

此外，对于所有 i, $\beta \cdot J_{\mathbb{S}}s(n+1,\ i) = y$。由于 α' 是一个松弛态射，对于所有 i

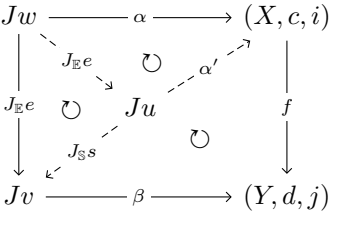
$$c(x)(a,i) \sqsupseteq \sum_{\{i' \mid \alpha'(i') = i\}} l_{i'}.$$

因此，由于对于所有 i, $f \cdot \alpha'(n+1,\ i) = \beta \cdot J_{\mathbb{S}}s(n+1,\ i) = y$

$$d(f(x))(a,y) = \sum_{i=1}^{m} l_i \sqsubseteq \sum_{\{x' \mid \exists i.\ \alpha'(n+1,i) = x'\}} c(x)(a,x') \sqsubseteq \sum_{\{x' \mid f(x') = y\}} c(x)(a,x'),$$

最后一个不等式由正性得出。

反过来，假设 f 是一个适当同态，并且 K 是一个重排幺半群。我们来证明 f 是 $(\mathbb{E}_K,\ \mathbb{S}_K)$-开。因此，我们从以下情形开始（在 plain 中）



其中 $w = (a_1,\ k_1),\ \ldots,\ (a_n,\ k_n)$ 是 $A \times K \backslash \{e\}$ 上的一个词，而 v 的形式为 $(w,\ a,\ w_2)$，其中 $w_2 = l_1,\ \ldots,\ l_m$ 是 $K \backslash \{e\}$ 上的一个词。我们称 $x =$ 为终点(α)，并称 $L = \{\beta(n+1,\ i) \mid 1 \leqslant i \leqslant m\} \subseteq Y$。对于 L 中的 y，定义 $V_y = \{i \mid \beta(n+1,\ i) = y$。由于 β 是一个松弛同态，

$$d(f(x))(a,y) \sqsupseteq \sum_{i \in V_y} l_i.$$

将集合 $\{x' \in X \mid f(x') = y \wedge c(x)(a,\ x') \neq e\}$ 记为 X_y。由于 f是一个适当同态，

$$d(f(x))(a,y) = \sum_{x' \in X_y} c(x)(a,x').$$

由于 V_y和 X_y是 K的有限子集，且 K 是一个重排幺半群，因此存在一个族 $(u_{i,x'})_{i \in V_y, x' \in X_y}$ 使得

$$\sum_{x' \in X_y} u_{i,x'} = l_i \text{ and } \sum_{i \in V_y} u_{i,x'} \sqsubseteq c(x)(a,x').$$

定义 $U_i = \{x' \in X_y \mid u_{i,x'} \neq e\} = \{x_1, \ldots, x_{m_i}\}$ 为 $i \in V_y$，并令 m_i 为其基数。由于 $l_i \neq e$, U_i 非空。现在，定义 $u = (w, a, w_2')$，其中 $w_2' = l_1, \mathbf{1}, \ldots, l_{1,m}, \ldots, l_m, \mathbf{1}, \ldots, l_{m,m_m}$，且 $l_{i,j} = u_{i,x_j} \neq e$。在 $\mathbb{E}$中存在一条边 e: $w \to u$

m $j-1$ j。定义 s: $\{1, \ldots, \sum m_i\} \to \{1, \ldots, m\}$

为 $s(k) = j$，若 $\sum m_i < k \leqslant \sum m_i$。 $i=1$ $i=1$ $i=1$

这个函数是单调的（显然），且是满射（因为 U_i 非空）。现在，对于任意 j

$$\sum_{\{k \mid s(k + \sum_{i=1}^{j-1} m_i) = j\}} l_{j,k} = \sum_{k=1}^{m_j} l_{j,k} = \sum_{k=1}^{m_j} u_{i,x_k} = l_j,$$

从而 s 是从 v 到 u 的 $\mathbb{S}$中的态射。显然， $J_{\mathbb{S}} s \cdot J_{\mathbb{E}} e = J_{\mathbb{E}} e$.

将 α': $Ju \to X$ 定义为 $\alpha'(i) = \alpha(i)$，对于 $i \leqslant n$，并且将 $\alpha'(n+1,$ $k) = x_s$ 定义为 $j-1$ j $j-1$ $\sum m_i < k \leqslant \sum m_i$ 和 $s = k - \sum m_i$。根据构造， α' 是一个松弛态射 $i=1$ $i=1$ $i=1$ 且 $\alpha' \cdot J_{\mathbb{E}} e$。于是，对于满足 $s(k) \in V_y$ 的 k， $f \cdot \alpha'(n+1,\ k) = f(x')$ 满足 $x' \in X_y$ 且

$$\beta \cdot J_{\mathbb{S}} s(n+1, k) = y = f \cdot \alpha'(n+1, k).$$

此外，由于 $f \cdot \alpha = \beta \cdot J_{\mathbb{E}} e$，我们得到

$$\beta \cdot J_{\mathbb{S}} s = f \cdot \alpha',$$

由此可得， f 是 $(\mathbb{E}_K,\ \mathbb{S}_K)$-开。

对于最后一个结论，根据前两点，唯一需要证明的是：当存在一个由 $(\mathbb{E}_K,\ \mathbb{S}_K)$-开映射构成的跨度 $(X,\ c,\ i) \xleftarrow{f} (Z,\ e,\ k) \xrightarrow{g} (Y,\ d,\ j)$ 时，存在一个使得 $(Z,\ e,\ k)$ 可达的跨度。

~ ~定义 $(Z, \widetilde{e}, k)$，其中 Z 是 Z 中可达状态的集合。特别地，k 是可达的。定义 $\widetilde{e}(z_1)(a, z_2) = e(z_1)(a, z_2)$，其中 z_1, z_2 可达。~只需证明单射 ι: $Z \to Z$ 是本征态射。事实上，在这种情况下，根据前文， ι 是 $(\mathbb{E}_K,$ $\mathbb{S}_K)$-开映射；又由于根据引理 4.4，开映射在复合下封闭，因此

$$(X, c, i) \xleftarrow{f \cdot \iota} (\widetilde{Z}, \widetilde{e}, k) \xrightarrow{g \cdot \iota} (Y, d, j)$$

是一个开映射张成，其尖端可达。现在， ι 是一个本征态射，理由如下。对于 z 可达且 z' 不可达的情形， $e(z_1)(a,\ z_2) = 0$

对于任意 a，否则 z' 就会可达。因此，对于 z 可达、 z'不可达的情形

$$\begin{aligned} e(\iota(z))(a,z') = 0 &= \sum_{a,z''\in\varnothing} \widetilde{e}(z)(a,z'') \\ &= \sum_{a\in A, z'' \text{ reach.}, \iota(z'')=z} \widetilde{e}(z)(a,z'') \\ &= K^{(A\times\iota)} \cdot \widetilde{e}(z)(a,z') \end{aligned}$$

且对 z' 可达

$$e(\iota(z))(a,z') = e(\iota(z))(a,\iota(z')) = \widetilde{e}(z)(a,z') = K^{(A\times\iota)} \cdot \widetilde{e}(z)(a,z').$$

□

推论 5.7 的证明

证明。 只需证明： K 的严格性意味着加权函子保弱拉回。也就是说，假设给定 Set 中的一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{k} & Y \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

并构造另一个拉回：

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{k'} & K^{(A\times Y)} \\ {\scriptstyle h'}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle K^{(A\times g)}} \\ K^{(A\times X)} & \xrightarrow{K^{(A\times f)}} & K^{(A\times Z)} \end{array}$$

由于 Set 满足外部选择公理（即每个满态射都可分裂），只需证明唯一的态射 e: $K^{(A\times W)} \to W'$ 满足以下条件:

$$h' \cdot e = h \qquad \text{and} \qquad k' \cdot e = k$$

是一个满射函数。下面更具体地描述一下 W 和 W':

$$W = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(b) = g(c)\}$$

$$W' = \left\{ (\mu,\rho) \mid \forall (a,z) \in A \times Z. \sum_{\{x\in X \mid f(x)=z\}} \mu(a,x) = \sum_{\{y\in Y \mid g(y)=z\}} \rho(a,y) \right\}.$$

现在函数 e 定义为

$$\theta \mapsto \left((a,x) \mapsto \sum_{\{y\in Y \mid (x,y)\in W\}} \theta(a,(x,y)), (a,y) \mapsto \sum_{\{x\in X \mid (x,y)\in W\}} \theta(a,(x,y)) \right)$$

固定 $(\mu,\ \rho) \in W'$。我们希望构造 $\theta \in K^{(A\times W)}$，使得 $e(\theta) = (\mu,\ \rho)$。根据加权函子的定义，集合

$$\mathcal{N} = \{(a,z) \mid \exists x.\, f(x) = z \wedge \mu(a,x) \neq e\}$$

是有限的。那么，对于固定的 $(a,z) \in \mathcal{N}$，这些集合

$$\mathcal{N}_{a,z,X} = \{x \mid f(x) = z \wedge \mu(a,x) \neq e\}$$

and

$$\mathcal{N}_{a,z,Y} = \{y \mid g(y) = z \wedge \rho(a,y) \neq e\}$$

是有限的。因此，条件 $(\mu,\rho) \in W'$ 可改写为

$$\sum_{x\in\mathcal{N}_{a,z,X}} \mu(a,x) = \sum_{y\in\mathcal{N}_{a,z,Y}} \rho(a,y).$$

现在，根据 K的严格性，这意味着我们有 $(u^a_{x,y})_{x\in\mathcal{N}_{a,z,X},y\in\mathcal{N}_{a,z,Y}}$ 个 K 中的元素组成的族，使得:

$$\sum_{x\in\mathcal{N}_{a,z,X}} u^a_{x,y} = \rho(a,y) \qquad \text{and} \qquad \sum_{y\in\mathcal{N}_{a,z,Y}} u^a_{x,y} = \mu(a,x)$$

定义 θ 为

$$(a,(x,y)) \in W \mapsto \begin{cases} u^a_{x,y} \text{ if } z = f(x),\ (a,z) \in \mathcal{N},\ x \in \mathcal{N}_{a,z,X}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{and } y \in \mathcal{N}_{a,z,Y} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{otherwise} \end{cases}$$

根据 $\mathcal{N}$的有限性，$\mathcal{N}_{a,z,X}$，以及$\mathcal{N}_{a,z,Y}$、$\theta \in K^{(A\times W)}$，并由构造可知 $e(\theta) =(\mu,\ \rho)$。□

引理 5.8 的证明

证明。令 $y \in Y$，使得 $d(y) \in (\mathbb{R}_+,\ +)^{(A\times Y)}$。我们来证明 $d(y) \in \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times Y)$。考虑 f 是松弛同态的情形（另一种情形类似）。于是，对于每个 $x' \in X$，$d(y)(y') \leqslant c(f(y)\sum_{\{y' \mid f(y')=x'\}} x')$。这意味着:

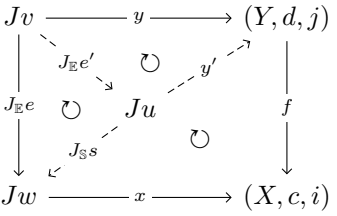
$$\sum_{y'\in Y} d(y)(y') = \sum_{x'\in X} \sum_{\{y' \mid f(y')=x'\}} d(y)(y') \leqslant \sum_{x'\in X} c(f(y),x') \leqslant 1,$$

以及 $d(y) \in \mathcal{D}_{\leqslant 1}(A \times Y)$。 □

推论 5.9 的证明

证明。假设它是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}},\ \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-开，并证明它是$(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+,\ +)},\ \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+,\ +)})$-开。因此，在 $(\mathbb{R}_+,\ +)^{(-)}$-余代数中，我们有如下情形

（普通形式）：



根据关于 x 和 y 的引理 5.8，这种情形也属于 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times _)$-余代数。接着，根据 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}},\ \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-开性，我们在 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times _)$-余代数中打开虚线标示的数据，而它们也属于 $(\mathbb{R}_+,\ +)^{(_)}$-余代数。反过来，我们从上文相同的普通情形出发，这次是在 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times _)$-余代数中，因此也属于 $(\mathbb{R}_+,\ +)^{(_)}$-余代数。根据 $(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+,\ +)},\ \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+,\ +)})$-开性，我们得到 $(\mathbb{R}_+,\ +)^{(_)}$-余代数中的虚线标示数据。根据关于 y' 的引理 5.8，这些虚线标示的数据也属于 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times _)$-余代数。

最后，如果 $(X、\ c、\ i)$ 和 $(Y、\ d、\ j)$ 是 $(\mathbb{E}_{\mathcal{D}}、\ \mathbb{S}_{\mathcal{D}})$-互模拟的，那么根据前文，它们也是 $(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+、\ +)}、\ \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+、\ +)})$-互模拟的。反过来，如果我们有一个由 $(\mathbb{E}_{(\mathbb{R}_+、\ +)}、\ \mathbb{S}_{(\mathbb{R}_+、\ +)})$-开态射构成的跨度 $(X、\ c、\ i) \xleftarrow{f} (Z、\ e、\ k) \xrightarrow{g} (Y、\ d、\ j)$，要根据前文得出结论，就必须确保 $(Z、\ e、\ k)$ 是一个 $\mathcal{D}_{\leqslant 1}(A\times _)$-余代数；这同样可由引理 5.8 得出。□

E 第 6 节的证明

引理 6.5 的证明

证明。 我们先证明 π_X 是一个态射。因此，我们从一个迁移开始

$$(X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y) \xrightarrow{a}_R (X \xleftarrow{x'} Jw \xrightarrow{y'} Y)$$

~的 R，并区分以下两种情况。

– 假设 $a \neq \tau$，$v = (n_1, a_1, \ldots, a_k, n_{k+1})$，$w = (n_0, a_1, \ldots, a_k, n_{k+1}, a, 0)$，$x' = x \cdot J_{\mathbb{E}} e_a$，我们要证明存在一个迁移

$$\mathrm{end}(x) = x(n_{k+1}, k+1) \xrightarrow{a} x'(0, k+2) = \mathrm{end}(x').$$

由于 $x' = x \cdot J_{\mathbb{E}} e_a$，因此 $x'(n_{k+1}, k+1) = x(n_{k+1}, k+1)$，又由于 x' 是一个态射，所以存在所需的迁移。– 另一种情况的证明相同。

~ ~对于 r：$Jv \to R$，$\mathsf{end}(r) \in R$，也就是说，按定义，$\mathsf{end}(r)$ 是如下形式的跨度

$$(X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y).$$

然后通过对 v 进行简单的归纳法即可得出该结论。

引理 6.6 的证明

证明。 我们先来看下面这个交换方块

$$\begin{array}{ccc} Jv & -x\to & X \\ {\scriptstyle J_{\mathbb{E}}e}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Jw & -y\to & Y \end{array}$$

为此，我们构造一个带有强态射 $x'\colon Jv'\to X$ 的新交换方块。新交换方块中的提升将由此产生上述交换方块中的一个提升。

我们先构造 $s\colon v\to v'\in\mathbb{S}$ 和 $x'\colon Jv'\to X$，使得 $x=x'\cdot J_{\mathbb{S}}s$。假设 v 的形式为 $n_1,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ n_{k+1}$，而 v' 的形式为 $n'_1,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ n'_{k+1}$，其中 $n'_i\leqslant n_i$。定义 $f_i\colon\{0<\ldots<n_i\}\to\{0<\ldots<n_i\}$ 如下：

$$f_i(j)=\min\{k\leqslant j\mid\forall k\leqslant k'\leqslant j.\,x(k',i)=x(j,i)\}.$$

那么，n'_i 是 f_i 的像中的元素个数，也就是说，n'_i 是从 $(0,\ i)$ 到 $(n_i,\ i)$ 的 τ-迁移中，经 x 映射为 τ-迁移的个数。若以 g_i 表示从 f_i 的像到 $\{0<\ldots<n'_i\}$ 的唯一单调双射，则 $s_i=g_i\cdot f_i$。显然，$s_i\colon\{0<\ldots<n_i\}\to\{0<\ldots<n'_i\}$ 是单调且满射的，因此 $s=(s_1,\ \ldots\ldots,\ s_{k+1})$ 是从 v 到 v' 的一个态射，属于 $\mathbb{S}$。现在，定义 $x'\colon Jv'\to X$ 如下：

$$x'(i,j)=x(g_j^{-1}(i),j).$$

我们来证明 x' 是一个强态射。在 Jv' 中，我们有两种类型的迁移：

- $(i,j)\xrightarrow{\tau}(i+1,j)$。根据 v' 的构造，这意味着对于某个 k，我们在 Jv 中有 $g_j^{-1}(i),j)\xrightarrow{\tau}(g_j^{-1}(i)+1,j)\xrightarrow{\tau}\ldots\xrightarrow{\tau}(g_j^{-1}(i)+k,j)\xrightarrow{\tau}(g_j^{-1}(i+1),j)$，并且对于所有 $k'\leqslant k$，都有 $x(g_j^{-1}(i)+k',j)=x(g_j^{-1}(i),j)$，且 $x(g_j^{-1}(i)+k\ j)\ \tau\blacktriangleright\ x(g_j^{-1}(i+1)\ j)\quad X$，属于 $x'(i\ j)\ \tau\blacktriangleright\ x'(i+1\ j)\quad X$。这意味着，属于其中。$(n'_j,i)\ \ a\blacktriangleright\ (0,j+1)$。类似地，我们可以证明 $x'(n'_j,i)\ \ a\blacktriangleright\ x'(0,j+1)$属于 X。

Now

$$x'\cdot J_{\mathbb{S}}(s)(i,j)=x'(s_j(i),j)=x(f_j(i),j)=x(i,j).$$

第二步是得到一个具有如下形状的图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{x}{\frown} & & \\ Jv & -J_{\mathbb{S}}s\to & Jv' & -x'\to & X \\ {\scriptstyle J_{\mathbb{E}}e}\downarrow & \circlearrowright & {\scriptstyle J_{\mathbb{E}}e'}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Jw & -J_{\mathbb{S}}s'\to & Jw' & -y'\to & Y \\ & & \underset{y}{\smile} & & \end{array}$$

暂且假设是 e_a （ $e = e_\tau$ 的情况类似）。在这种情况下， w 具有如下形式： $n_1, a_1, \dots,$ n''_{k+1}, a, n_{k+2}，其中 $n_{k+1} \leqslant n''_{k+1}$。接着，我们可以将 w' 定义为$n'_1, a_1, \dots,$ $n'_{k+1} + n''_{k+1} - n_{k+1}, a, n_{k+2}$，并将 $s' = (s'_1, \dots, s'_{k+2})$ 定义为

$$s'_j(i) = \begin{cases} s_j(i) & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n_{k+1}) \\ n'_{k+1} + i - n_{k+1} & \text{if } j = k+1 \text{ and } i > n_{k+1} \\ i & \text{if } j = k+2 \end{cases}$$

那么， s' 是从 w 到 w' 、位于 $\mathbb{S}$中的一个态射。现在，根据 v' 和 w'的构造，存在唯一的 $e' = e_a$: $v' \to w'$，它位于 $\mathbb{E}$中，并且很容易看出 $J_{\mathbb{E}}e' \cdot J_{\mathbb{S}}s = J_{\mathbb{S}}s' \cdot J_{\mathbb{E}}e$。最后，我们要构造 y': $Jw' \to Y$，如下所示

$$y'(i,j) = \begin{cases} y(g_j^{-1}(i), j) & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n'_{k+1}) \\ y(n_{k+1} + i - n'_{k+1}, k+1) & \text{if } j = k+1 \text{ and } i > n'_{k+1} \\ y(i, k+2) & \text{if } j = k+2 \end{cases}$$

Now:

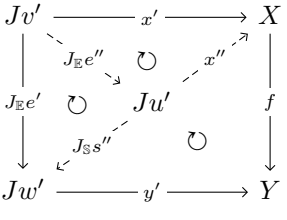
$$y' \cdot J_{\mathbb{E}}e'(i,j) = y(g_j^{-1}(i), j) = f \cdot x(g_j^{-1}(i), j) = f \cdot x'(i,j),$$

这证明了右侧交换方块的交换性。接下来，我们来证明底部的交换性。唯一有意思的情况是 $j \leqslant k$ 或（$j = k+1$ 且$i \leqslant n_{k+1}$）。在这种情况下，

$$y' \cdot J_{\mathbb{S}}s' = y(f_j(i), j) = f \cdot x(f_j(i), j) = f \cdot x(i,j) = y(i,j).$$

利用 x'、 f和 y 都是态射这一点，很容易证明 y' 也是一个态射。

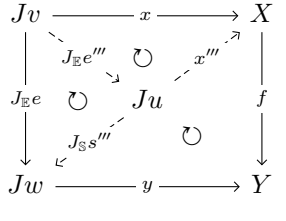
根据右侧交换方块上的假设，由于 x' 是强态射，我们得到以下数据



由于 $J_{\mathbb{S}}s'' \cdot J_{\mathbb{E}}e'' = J_{\mathbb{E}}e'$ 和 $e' = e_a$，我们知道以下内容：

- $e'' = e_a$,
- u' is of the form $n'_1, a_1, \dots, n'''_{k+1}, a, n'_{k+2}$ with $n'_{k+1} \leqslant n'_{k+1} + n''_{k+1} - n_{k+1} \leqslant n'''_{k+1}$ and $n_{k+2} \leqslant n'_{k+2}$,
- for all $j \leqslant k$ or $(j = k+1$ and $i \leqslant n'_{k+1})$, $s''_j(i) = i$.

最后，我们希望得到以下结论



我们首先将 u 定义为

$$n_1, a_1, \ldots, n'''_{k+1} + n_{k+1} - n'_{k+1}, a, n'_{k+2}$$

由于 $n'''_{k+1} + n_{k+1} - n'_{k+1} \geqslant n_{k+1}$，存在唯一的 $e''' = e_a$: $v \to u$ 在 $\mathbb{E}$ 中。接下来，s''' 定义为

$$s'''_j(i) = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n_{k+1}) \\ s''_{k+1}(n'_{k+1} + i - n_{k+1}) + & \\ \quad n'_{k+1} - n_{k+1} & \text{if } j = k+1 \text{ and } i > n_{k+1} \\ s''_{k+2}(i) & \text{if } j = k+2 \end{vmatrix}$$

它是从 u 到 w 的态射，位于 $\mathbb{S}$ 中，且满足 $J_{\mathbb{S}} s''' \cdot J_{\mathbb{E}} e''' = J_{\mathbb{E}} e_\circ$ 现在我们需要构造 x''': $u \to X$，定义为

$$x'''(i,j) = \begin{vmatrix} x(i,j) & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n_{k+1}) \\ x''(n'_{k+1} + i - n_{k+1}, k+1) & \text{if } j = k+1 \text{ and } i > n_{k+1} \\ x''(i, k+2) & \text{if } j = k+2 \end{vmatrix}$$

由于 x'' 和 x 是态射，x''' 也是态射。此外，上方三角形的交换性由 x''' 的构造保证。最后，我们来证明右下方三角形的交换性。对于 $j \leqslant k$ 或（$j = k+1$ 和 $i \leqslant n_{k+1}$）

$$f \cdot x'''(i,j) = f \cdot x(i,j) = y(i,j) = y \cdot J_{\mathbb{S}} s'''(i,j).$$

对于 $j = k+1$ 和 $i > n_{k+1}$,

$$\begin{aligned} f \cdot x'''(i, k+1) &= f \cdot x''(n'_{k+1} + i, k+1) \\ &= y'' \cdot s''_{k+1}(n'_{k+1} + i - n_{k+1}) \\ &= y(n'_{k+1} + s''_{k+1}(n'_{k+1} + i - n_{k+1}) - n_{k+1}, k+1) \\ &= y \cdot J_{\mathbb{S}} s'''(i, k+1). \end{aligned}$$

最后，对于 $j = k+2$

$$f \cdot x'''(i, k+2) = f \cdot x''(i, k+2) = y' \cdot J_{\mathbb{S}} s''(i, k+2) = y \cdot J_{\mathbb{S}} s'''(i, k+2).$$

□

命题 6.7 的证明

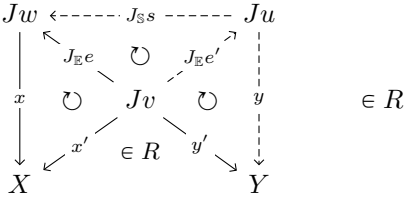
证明。 我们来证明 π_X 是 $(\mathbb{E}, \mathbb{S})$-开。接下来从以下交换方块开始

$$\begin{array}{ccc} Jv & -r\to & \widetilde{R} \\ {\scriptstyle J_{\mathbb{E}} e}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ Jw & -x\to & X \end{array}$$

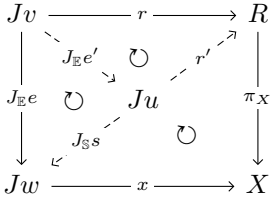
根据引理 6.6，我们可以假设 r 是一个强态射。根据 $e = e_a$ 或 e_τ的情况，分为两种情形。我们证明 e_a的情形，另一种

情形的证明类似。因此 $v = n_1,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_k,\ n_{k+1}$ 和 $w = n_1,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_k,\ n'_{k+1},\ a,\ n_{k+2}$，其中 $n_{k+1} \leqslant n'_{k+1}$。根据引理 6.5，$\mathsf{end}(r)$ 具有 $(X \xleftarrow{x'} Jv \xrightarrow{y'} Y)$和 $\pi_X \cdot r = x'$的形式。特别地，$(X \xleftarrow{x'} Jv \xrightarrow{y'} Y)$ 属于 R。

总之，我们得到如下情形（普通情形）：



由于 R 是路径双模拟，我们便得到图表中其余部分（虚线所示）。特别地，$(X \xleftarrow{x \cdot J_{\mathbb{S}} s} Jv \xrightarrow{y} Y)$ 属于 R。最后，只需构造一个态射 $r'\colon Ju \to R$，使得



根据构造，u 的形式为 $n_1, a_1, \ldots, a_k, n''_{k+1}, a, n'_{k+2}$，其中 $n_{k+1} \leqslant n'_{k+1} \leqslant n''_{k+1}$ 且 $n_{k+2} \leqslant n'_{k+2}$。对于 Ju 的每个 (i,j) 状态，将其限制到 (i,j) 所得到的结果为Ju，即 $Ju_{i,j}$，其中 $u_{i,j} = n_1, a_1, \ldots, a_{j-1}, i$。我们将 $Ju_{i,j}$ 到 Ju 的单射记为$e_{i,j}$。由于它是由形如 $J_{\mathbb{E}} e_a$ 和 $J_{\mathbb{E}} e_\tau$ 的态射复合而成，因此是一个严格态射。接着定义 r' 如下：

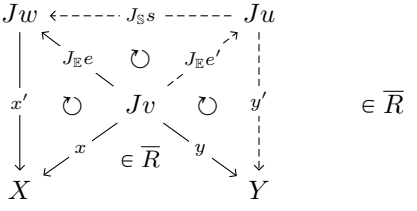
$$r'(i,j) = (X \xleftarrow{x \cdot J_{\mathbb{S}} s \cdot e_{i,j}} Ju_{i,j} \xrightarrow{y \cdot e_{i,j}} Y).$$

首先，r' 的取值属于 $\widetilde{R}$，因为 $(X \xleftarrow{x \cdot J_{\mathbb{S}} s \cdot e_{i,\ j}} Ju_{i,\ j} \xrightarrow{y \cdot e_{i,\ j}} Y)$ 根据归纳法属于R；这里用到了 R 作为强路径双模拟的向后闭包。也容易看出，r' 是一个严格态射。对于等式 $r' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = r$，这是由 $x' = x \cdot J_{\mathbb{E}} e = x \cdot J_{\mathbb{S}} s \cdot J_{\mathbb{E}} e'$ 得出的。最后，$\pi_X \cdot r' = x \cdot J_{\mathbb{S}} s$ 由构造以及引理 6.5 得出。□

定理 6.8 的证明

证明。假设 R 是停顿分支互模拟。我们来证明 R 是强路径双模拟。初始条件和向后闭包显而易见。接下来证明前向闭包。于是我们得到以下

情形（以纯文本表示）



并且希望构造虚线数据。假设 $e = e_a$，另一种情况更简单。因此， v 的形式为 n_1, a_1, ..., n_{k+1}，而 w 的形式为 n_1, a_1, ..., n'_{k+1}, a, n_{k+2}，其中 $n_{k+1} \leqslant n'_{k+1}$。我们还有：

– $(x(n_{k+1}, k+1), y(n_{k+1}, k+1)) \in R$, – $x(n_{k+1}, k+1) = x'(n_{k+1}, k+1)$（因为 $x = x' \cdot J_{\mathbb{E}}e$），– 对每个 $i \geqslant n_{k+1}$, $(x'(i+1, k+1) = x'(i, k+1)$ 或 $x'(i, k+1) \xrightarrow{\tau} x'(i+1, k+1))$, – $x'(n'_{k+1}, k+1) \xrightarrow{a} x'(0, k+2)$, – 对每个 i, $(x'(i+1, k+2) = x'(i, k+2)$ 或 $x'(i, k+2) \xrightarrow{\tau} x'(i+1, k+2))$,

最后三点成立，因为 x' 是一个态射。由于 R 是带停顿的分支互模拟，我们可以构造y 的状态$(y_{i,j})_{n_{k+1} \leqslant j \leqslant n'_{k+1}, 1 \leqslant i \leqslant m_j}$，使得：

– $y_{1,n_{k+1}} = y(n_{k+1}, k+1)$, – 对于所有 i, j, $(x'(j, k+1), y_{i,j}) \in R$, – $y_{i,j} = y_{i+1,j}$ 或$y_{i,j} \xrightarrow{\tau} y_{i+1,j}$, – $y_{m_j,j} = y_{1,j+1}$ 或$y_{m_j,j} \xrightarrow{\tau} y_{1,j+1}$。

对 j使用归纳法。

– 基础情形 $j = n_{k+1}$**：** $m_j = 1$, $y_{1,n_{k+1}} = y(n_{k+1}, k+1)$。**– 归纳情形：**$(y_{i,j})_{n_{k+1} \leqslant j \leqslant s, 1 \leqslant i \leqslant m_j}$ 已按所需方式构造出来。特别地，$(x'(s, k+1), y_{m_s,s}) \in R$。分两种情况：• $x'(s+1, k+1) = x'(s, k+1)$。在这种情况下，$m_{s+1} = 1$ 和$y_{1,s+1} = y_{m_s,s}$。• 或 $x'(s, k+1) \xrightarrow{\tau} x'(s+1, k+1)$。由于 R 是停顿分支互模拟，再分两种情况：

∗ $(x'(s+1, k+1), y_{m_s,s})$。在这种情况下，$m_{s+1} = 1$ 和 $y_{1,s+1} = y_{m_s,s}$。
∗ 或 $y_{m_s,s} \xrightarrow{\tau} y_1 \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} y_d \xrightarrow{\tau} z_1 \xrightarrow{\tau} \cdots \xrightarrow{\tau} z_{d'}$，其中$(x'(s, k+1), y_{d''}) \in R$，$(x'(s+1, k+1), z_{d''}) \in R$，以及 $(x'(s+1, k+1), z_{d'}) \in R$ 对所有 d'' 成立。那么以下族 $(y'_{i,j})_{n_{k+1} \leqslant j \leqslant s+1, 1 \leqslant i \leqslant m'_j}$ 有效：

· 对于 $j < s$, $m'_j = m_j$ 和 $y'_{i,j} = y_{i,j}$, · $m'_s = m_s + d$, $y'_{i,s} = y_{i,s}$ 对于 $i \leqslant m_s$, 而 $y'_{i,s} = y_{i-m_s}$ 在其他情况下，
· $m'_{s+1} = d'$ 和 $y'_{i,s+1} = z_i$。

用迁移 $x'(n'_{k+1}, k+1) \xrightarrow{a} x'(0, k+2)$以及迁移 $x'(i, k+2) \xrightarrow{\tau} x'(i+1, k+2)$重复这一过程，我们可以构造两个族$(y_{i,j})_{n_{k+1} \leqslant j \leqslant n'_{k+1}, 1 \leqslant i \leqslant m_j}$ 和$(y'_{i,j})_{0 \leqslant j \leqslant n_{k+2}, 1 \leqslant i \leqslant m'_j}$，使得：

- $y_{1,n_{k+1}} = y(n_{k+1}, k+1)$,
- for all i, j, $(x'(j,k+1), y_{i,j}) \in R$,
- $y_{i,j} = y_{i+1,j}$ or $y_{i,j} \xrightarrow{\tau} y_{i+1,j}$,
- $y_{m_j,j} = y_{1,j+1}$ or $y_{m_j,j} \xrightarrow{\tau} y_{1,j+1}$,
- $y_{m_{n'_{k+1}},n'_{k+1}} \xrightarrow{a} y'_{1,0}$,
- for all i, j, $(x'(j,k+2), y'_{i,j}) \in R$,
- $y'_{i,j} = y'_{i+1,j}$ or $y'_{i,j} \xrightarrow{\tau} y'_{i+1,j}$,
- $y'_{m_j,j} = y'_{1,j+1}$ or $y'_{m_j,j} \xrightarrow{\tau} y'_{1,j+1}$.

n'_{k+1} n_{k+2}现在，定义 u为 $n_1, a_1, \ldots, n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}} m_j, a, \sum_{j=0} m'_j$。根据构造，存在唯一的 $e' = e_a$： $v \to u$位于 $\mathbb{E}$中。接下来， $s = (s_1, \ldots, s_{k+2})$定义如下：

$$s_j(i) = \begin{cases} i & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n_{k+1}) \\ s & \text{if } j = k+1 \text{ and} \\ & n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j < i \leqslant n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s} m_j \\ s & \text{if } j = k+2 \text{ and } \sum_{j=0}^{s-1} m'_j < i \leqslant \sum_{j=0}^{s} m'_j. \end{cases}$$

根据构造， s： $u \to w$ 是 $\mathbb{S}$ 和 $J_{\mathbb{E}} e = J_{\mathbb{S}} s \cdot J_{\mathbb{E}} e'$ 中的一个态射。最后，我们可以将 y' 定义为

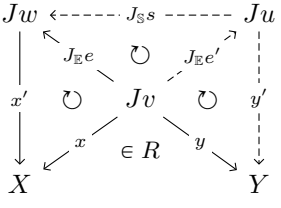
$$y'(i,j) = \begin{cases} y(i,j) & \text{if } j \leqslant k \text{ or } (j = k+1 \text{ and } i \leqslant n_{k+1}) \\ y_{i-(n_{k+1}+\sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j),s} & \text{if } j = k+1 \text{ and} \\ & n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j < i \leqslant n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s} m_j \\ y'_{i-(\sum_{j=0}^{s-1} m'_j),s} & \text{if } j = k+2 \text{ and } \sum_{j=0}^{s-1} m'_j < i \leqslant \sum_{j=0}^{s} m'_j. \end{cases}$$

由构造可知， $y' \cdot J_{\mathbb{E}} e' = y$。接下来只需证明 $(X \xleftarrow{x' \cdot J_{\mathbb{S}} s} Ju \xrightarrow{y'} Y) \in R$，也就是说，¯对于所有 $i, j, (x' \cdot J_{\mathbb{S}} s(i, \quad j), \quad y'(i, \quad j)) \in R$:

- if $j \leqslant k$ or $(j = k+1$ and $i \leqslant n_{k+1})$, $x' \cdot J_{\mathbb{S}} s(i,j) = x(i,j)$, $y'(i,j) = y(i,j)$, and $(x(i,j), y(i,j)) \in R$.
- if $j = k+1$ and $n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j < i \leqslant n_{k+1} + \sum_{j=n_{k+1}}^{s} m_j$, $x' \cdot J_{\mathbb{S}} s(i,j) = x'(s, k+1)$ and $y'(i,j) = y_{i-(n_{k+1}+\sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j),s}$, and by construction, $(x'(s,k+1), y_{i-(n_{k+1}+\sum_{j=n_{k+1}}^{s-1} m_j),s}) \in R$.

– if $j = k+2$ and $\sum_{j=0}^{s-1} m'_j < i \leqslant \sum_{j=0}^{s} m'_j$, $x' \cdot J_{\mathbb{S}}s(i,j) = x'(s,k+2)$ and $y'(i,j) = y_{i-(\sum_{j=0}^{s-1} m'_j),s}$, and by construction, $(x'(s,k+2), y_{i-(\sum_{j=0}^{s-1} m'_j),s}) \in R$.

反过来，假设 R 是一个强路径双模拟，并来证明 $\breve{R}$ 是停顿分支互模拟。因此，我们从 $(X \xleftarrow{x} Jv \xrightarrow{y} Y) \in R$ 开始，使得 $(\mathsf{end}(x), \mathsf{end}(y))$ 属于 $\breve{R}$。假设 $\mathsf{end}(x) \xrightarrow{a} p$。考虑 $a = \tau$ 的情况，另一种情况类似。假设 $\overline{v}$ 具有如下形式：$n_1, a_1, \ldots, n_{k+1}$。定义 $w = n_1, a_1, \ldots, n_{k+1}+1$，使得 $e = e_\tau$：$v \to w \in \mathbb{E}$。我们可以将 x'：$Jw \to X$ 定义为：若 $i = n_{k+1}+1$ 且 $j = k+1$，则为 $x'(i, j) = p$；否则为 $x'(i, j) = x(i, j)$。这是一个态射，因为 x 是一个态射，且根据关于 p 的假设。现在，我们有如下情形（以纯文本形式）



$\in R$

并且由于 R 是路径双模拟，我们得到虚线数据。特别地，$e' = e_\tau$ 和 u 具有 $n_1, a_1, \ldots, n'_{k+1}$ 的形式，其中 $n_{k+1}+1 \leqslant n'_{k+1}$。分两种情况：

– 对于每个 $i \geqslant n_{k+1}$，$y'(i, k+1) = \mathsf{end}(y)$，都有 $(\mathsf{end}(x'), \mathsf{end}(y)) \in R$，– 或者存在一个序列 $i_0 = n_{k+1} < i_1 < \ldots < i_m < n'_{k+1} = i_{m+1}$ 使得

$$\mathsf{end}(y) \xrightarrow{\tau} y'(i_1, k+1) \xrightarrow{\tau} \ldots \xrightarrow{\tau} y'(i_m, k+1) \xrightarrow{\tau} \mathsf{end}(y')$$

现在，必然存在 $n_{k+1} \leqslant i' < n'_{k+1}$ 使得

- 对所有 $i \leqslant i'$，$J_{\mathbb{S}}s(i, k+1) = n_{k+1}$，
- 对所有 $i > i'$，$J_{\mathbb{S}}s(i, k+1) = n_{k+1}+1$。

令 l 使得 $i_l \leqslant i' < i_{l+1}$。若我们将 $n_1, a_1, \ldots\ldots, i_h$ 对所有 h 记为 u_h，则 e_τ：$u_h \to u$ 属于 $\mathbb{E}$，并且由于 $(X \xleftarrow{x' \cdot J_{\mathbb{S}}s} Jv \xrightarrow{y'} Y) \in R$ 和 R 向后封闭，对所有 h，$(X \xleftarrow{x'_h = x' \cdot J_{\mathbb{S}}s \cdot J_{\mathbb{E}}e_\tau} Ju_h \xrightarrow{y'_h = y' \cdot J_{\mathbb{E}}e_\tau} Y) \in R$ 均成立。现在：

- 对于 $h \leqslant l$，（结束(x)，$y'(i_h, k+1)$）=（结束(x_h)，结束$(y_h) \in R$，
- 对于 $h > l$，（结束(x')，$y'(i_h, k+1)$）=（结束(x_h)，结束$(y_h) \in R$。

这正是我们需要证明的内容。

□

定理 6.9 的证明

证明。构造和推理与定理 6.8 的相同，只不过我们不必考虑需要互模拟的中间状态（停顿和后向闭包）。□