arXiv:2301.07008v1 [math.AT] 17 Jan 2023

三维流形上的圆折叠映射及其整数与有理上同调环

北泽直树

Abstract. *Fold* 映射是指在每个奇点处都可以表示为一个莫尔斯函数与恒等映射的乘积映射的光滑映射。*Round* 简而言之，折叠映射是其所有奇点集同心嵌入的映射。与莫尔斯函数一样，这类映射对于从几何角度理解拓扑和微分结构十分重要。

本文研究了可将圆折叠映射映入平面的三维流形的上同调环，并发现圆折叠映射的系数环与拓扑类型密切相关。这是对我们先前研究的一项明确而精确的新进展。先前研究表明，一个三维闭可定向流形当且仅当它是所谓的 *graph manifold*，或是由沿环面粘合所谓的曲面上的圆丛而得到的流形时，才存在映入平面的圆折叠映射。我们还进一步阐述了对允许此类映射、且其拓扑类型属于某一最简单类别的图流形的分类。

1. Introduction.

折叠映射是莫尔斯函数的高维版本。它们在局部可表示为投影，或表示为欧几里得空间中开集上的莫尔斯函数与恒等映射的乘积。作者在 [10, 11, 12], 中引入了圆折叠映射，随后 [13, 14, 15] 等文献也进行了研究。近期已有诸如 [20, 21] 的研究成果。这些映射是通过几何构造或组合方法理解流形的拓扑和微分结构的基础且有力的工具。它们也是研究这些流形的（上）同调群以及基本群、上同调环和微分结构等更精确信息的有力工具。

本文研究三维闭合可定向流形上的圆折叠映射。已有研究表明，这类流形能映射到平面上的圆折叠映射，当且仅当它是所谓的图流形。简而言之，图流形是通过沿环面粘合所谓的曲面上的圆丛或纤维为圆的曲面上的丛而得到的流形。某个最简单类别的圆折叠映射定义为有向的。借助本文所用的带有若干标记的图或更简单的图，可以刻画承认此类映射的图流形。简而言之，这类流形的标准形（即带有这些标记的唯一确定的图）是树。三维球面、球面上的圆丛、透镜空间以及球面上的塞弗特流形，均属于三维流形中这一最简单类别。

Key words and phrases. 折叠映射。圆折叠映射。图流形。上同调环。

2020 *Mathematics Subject Classification*：主要分类号 57R45，次要分类号 57R19、57K30。

我们的主要定理如下。在本文中，初等代数拓扑至关重要。相关的基础术语、概念和记号，请参见[6] 中的例子。

主定理1. 若图流形 M 存在到平面 $\mathbb{R}^2$的定向圆折叠映射，那么对于第一整系数上同调群 $H^1(M;\mathbb{Z})$ 中任意一对元素，其杯积均为零元素。

当系数环为全体有理数构成的域 $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z}$ 时，这一结论已在 [20] 中得到证明。此前的结果是在我们刻画了能够映射到平面 $\mathbb{R}^2$的三维闭可定向流形之后，例如通过应用 [3] 得出的。参见后文给出的定理4和定理5。这也可以看作是对 [3]，中一项结果的推广，其中应用了定理4。

主定理 2. 存在一个由可数多个三维闭、连通且可定向流形组成的族 $\{M_j\}$，其中的流形均不存在映射到平面 $\mathbb{R}^2$ 的定向圆折叠映射，并且具有以下性质。

(1) 该族中的不同流形彼此不同胚。(2) 对于该族中的每个流形 M_j，都存在一个三维闭、连通且可定向流形 $M_{j,\,0}$，具有以下性质。(a) 原流形 M_j 与流形 $M_{j,\,0}$ 的整系数同调群彼此同构。(b) 原流形 M_j 与流形 $M_{j,\,0}$ 的有理上同调环彼此同构。(c) 原流形 M_j 与流形 $M_{j,\,0}$ 的整系数上同调环彼此不同构。(d) $M_{j,\,0}$ 允许存在到平面 $\mathbb{R}^2$的定向圆折叠映射。

本文的组织结构如下。第二节介绍预备知识，并回顾折叠映射和圆折叠映射。我们还定义了本节中提出的若干概念，并以更严格的方式加以阐述。第三节用于证明主要定理。第四节作为一类附录，从显式折叠映射以及容许这些映射的流形的代数拓扑和微分拓扑角度，对主要定理作出说明。我们将看到，主要定理揭示了三维流形中的一些现象，而这些现象已在更高维的闭（且单连通）流形及其上的折叠映射中被发现。在若干具体情形下，已证明若干类折叠映射能够区分在代数拓扑或微分拓扑意义上相似的流形。

利益冲突。

作者是 JSPS KAKENHI Grant Number JP22K18267 项目“通过单值化可视化数据中的扭转”（首席研究员：Osamu Saeki）的成员。本研究得益于该项目。

数据可用性。

支持本研究的数据基本都已包含在我们的论文中。

2. Fundamental properties and existing studies on special generic maps and the manifolds.

2.1. 流形、可微映射与光滑丛。 k维欧几里得空间记作 $\mathbb{R}^k$ ，其中 k为任意正整数。 $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$ 表示直线。 $\mathbb{R}^2$ 表示平面。当然 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$，这是一个非常基本的概念。欧几里得空间也是一个黎曼流形，其底层度量是标准欧几里得度量。令 $||x|| \geq 0$ 表示$x \in \mathbb{R}^k$ 与原点 $0 \in \mathbb{R}^k$之间的距离。 k维单位球面记作S^k : $= \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = 1\}$ ，其中 $k \geq 0$为任意整数。 k维单位圆盘记作 D^k : $= \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1\}$ ，其中 $k \geq 1$为任意整数。它们的拓扑很容易理解，并且是欧几里得空间中的 k维光滑紧子流形。

拓扑流形被视为 CW复形。光滑流形被视为多面体，它作为 PL 范畴中的对象被唯一确定，或者等价地，作为分片光滑范畴中的对象被唯一确定。这就是所谓的 PL流形。对于多面体，更确切地说，对于被视为 CW复形的拓扑空间，例如，我们可以唯一地定义它们的维数。对于这样的空间X，令 $\dim X$ 表示其维数。

对于可微流形 X 和 Y之间的可微映射 c： $X \to Y$，奇点 $x \in X$ 定义为微分 dc_x 的秩小于 $\dim X$与 $\dim Y$中较小者的点。令 $S(c)$表示 c 的所有奇点构成的集合，并称其为 c的奇异集。

定义1. 若光滑流形 X （无边界）到另一个光滑流形 Y（无边界）的光滑映射 c： $X \to Y$ 满足 $\dim X \geq \dim Y$，且在每个奇点 p处，它都可在适当的局部坐标下表示为形式$(x_1, \cdots, x_{\dim X})$ $\mapsto (x_1, \cdots, x_{\dim Y-1}, \Sigma^{\dim X-\text{维数}}{}_{j=1}^{Y-i\ p\ +1} x_{\dim Y+j-1}{}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} x_{\dim X-i}{}^{()(p)+j}{}^2)$，其中某个整数 $0 \leq i(p) \leq \text{维数}\ X - \text{维数}_2{}^{Y+1}$，则称其为折叠映射。

莫尔斯函数是折叠映射。本文也需要关于莫尔斯函数的论证。有关这方面的内容，请参见例如 [24, 25] 。 [5] 介绍了微分映射奇点理论中的初等研究和一些进阶研究，并对折叠映射的奇点作了基础性阐述。 [30] 是一篇开创性论文，探讨了折叠映射与承载这些映射的闭流形之间的一些明确关系。

命题1. 对于定义1中的折叠映射， $i(p)$ 唯一确定为 p 的指标，我们可以将 $F_i(c)$定义为所有指标为 i的奇点所构成的集合。奇异集 $S(c)$和集合 $F_i(c)$是无边界的（维数为 $\dim Y - 1$）光滑正则子流形，并且在这些子流形上的限制给出光滑浸入。如果 X 是闭的，那么这些子流形就是紧的。

微分同胚是指光滑流形之间既是同胚又没有奇点的光滑映射。光滑流形上的微分同胚是指从该流形到自身的微分同胚。光滑流形上的微分同胚群是由该流形上的所有微分同胚构成的拓扑群，并赋予 Whitney C^∞ 拓扑。这类拓扑是光滑流形之间的光滑映射空间上的自然拓扑。另请参见例如 [5]。

光滑丛是指纤维为光滑流形，且结构群是该纤维的微分同胚群（或其子群）的丛。平凡

丛当然也很重要，因为我们并不将丛的类别限制在光滑丛这一类。一个重要的子类是线性丛。它们是纤维为欧几里得空间、单位球面或单位圆盘，且结构群由自然定义的线性变换组成的光滑丛。关于丛，参见 [26, 36]例如。

2.2. 圆折叠映射。

定义 2. 设 $m \geq n \geq 2$ 为整数。圆折叠映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 在闭连通流形 M 上是满足以下性质的折叠映射。

(1) 限制 $f|_{S(f)}$ 是一个嵌入。(2) 对于某个微分同胚 $\phi_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，存在某个整数 $l > 0$，使得 $(\phi_{\mathbb{R}^n} \circ f)(S(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq ||x|| \leq l, ||x|| \in \mathbb{Z}\}$。

下文中，我们考虑满足 $f(S(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq ||x|| \leq l, ||x|| \in \mathbb{Z}\}$ 的圆折叠映射 f。这没有问题。注意，对于 $n = 1$，我们也可以按照 [14] 定义圆折叠映射。它被定义为：将两个满足边界上某些自然条件的莫尔斯函数副本粘合起来所得到的函数。这就是所谓的扭双。不过，我们在此不需要这样的函数。

我们可以定义两类重要的圆折叠映射。以下，$D^n{}_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq a\}$ 对于 $a > 0$，且它与 n维单位圆盘 D^n微分同胚。对于满足 $n \geq 2$的 $0 < a_1 < a_2$，$A^n{}_{a_1,\ a_2} := D^n{}_{a_2} - \mathrm{Int}\ D^n{}_{a_1}$，它与 $S^{n-1} \times D^1$微分同胚。

定义 3. 设 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是一个定义在具有 $m \geq n \geq 2$的 m维闭连通流形上的圆折叠映射。假设奇异集 $S(f)$的连通分支数为 $l > 0$。

(1) 我们可以考虑将 f限制在原像 $f^{-1}(A^n{}_{\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}})$上。还可以将其与典范投影复合，投影到 S^{n-1}，将每个点$x \in A^n{}_{\frac{1}{2},\ l+\frac{1}{2}}$映射到 $\frac{1}{||x||}x \in S^{n-1}$。这就得到一个光滑丛。如果得到的是平凡丛，则称 f 具有全局平凡单值化。(2) 对于集合 $f(S(f))$的每个连通分支（记为 $\partial D^n{}_{l'}$，其中 $1 \leq l' \leq l$为某个整数），我们可以取一个闭管状邻域$A^n{}_{l'-\frac{1}{2},\ l'+\frac{1}{2}}$，并考虑将 f限制在该闭管状邻域的原像上。还可以将其与典范投影复合，投影到 S^{n-1}，将每个点$x \in A^n{}_{l'-\frac{1}{2},\ l'+\frac{1}{2}}$映射到 $\frac{1}{||x||}x \in S^{n-1}$。如果对集合 $f(S(f))$的每个连通分支都得到平凡丛，则称 f 具有逐分支平凡单值化。

单位球面到欧几里得空间（维数至少为 2）的典范投影是具有整体平凡单值化的圆折叠映射。验证这一点被视为光滑流形与映射、莫尔斯函数理论以及可微映射奇点理论中的一类基本练习。

同伦球面是指与单位球面同胚、维数至少为 1 的光滑流形。如果它与单位球面微分同胚，则称为标准球面；否则称为奇异球面。 [9, 23] 定义在此类同伦球面上。众所周知，四维异球尚未被发现，而维数不为 4 的同伦球面已通过代数拓扑和抽象理论得到完全分类。

命题 2（[31]等）。维数至少为 2 且不是四维异球的同伦球面，存在一个到 $\mathbb{R}^2$ 的圆折叠映射，其奇异集是连通的。若维数为 $m \geq 2$ 的流形存在一个到 $\mathbb{R}^n$ 的圆折叠映射，其奇异集是连通的，并满足 $m \geq n \geq 2$，则它是一个不是四维异球的同伦球面。

再次指出，作者在[10, 11, 12] 之后的 [31]中首次引入了圆折叠映射。

定理 1（[10, 11]）。设 $m \geq n \geq 2$ 为整数。设 Σ 为一个非四维奇异球面的同伦球面。一个 m维闭流形 M存在一个圆折叠映射 $f\colon M \to \mathbb{R}^n$，且满足以下性质，当且仅当它是一个以 n维单位球面 S^n为底空间、以 Σ为纤维的光滑丛的全空间。

(1) f 具有全局平凡单值化。(2) $S(f)$恰由两个连通分支组成。每个奇异点的指标为 0 或 1。 $f(F_1(f)) = \partial D^n{}_1$ 和 $f(F_0(f)) = \partial D^n{}_2$。(3) 对于 $D^n{}_1 - f(S($ $f))$中的一点，其原像是两个 Σ的副本的不交并。(4) 对于中的一点，$_2 - f(S(f))$，其原像是一个$(m - n)$维标准球面。

关于这一点的证明见同行评审论文 [10, 13], 博士论文 [11] 以及作者的预印本 [14] 。我们在此再次给出证明。

定理 1 的证明。我们证明“若”部分。底空间 S^n 分解为以下两个流形，我们可以沿着边界通过微分同胚将它们粘合起来，从而重构 S^n 。

- $D^{n,\ 1} \sqcup D^{n,\ 2}$，表示两个光滑嵌入的 n维单位圆盘的副本的不交并。
- $\partial D^{n,\ 0} \times [-1, 1]$，其中 $\partial D^{n,\ 0}$ 表示 $D^{n,\ 1}$ 或 $D^{n,\ 2}$的边界。

我们可以令 $D^{n,\ 1} \sqcup D^{n,\ 2}$ 作为 $D^n{}_{\frac{1}{2}}$上的一个双重覆盖的原像。我们可以构造在 $D^{n,\ 1} \sqcup D^{n,\ 2}$ 上的投影，其原像与 Σ微分同胚。换言之，我们还有一个以 $D^{n,\ 1} \sqcup D^{n,\ 2}$ 为底空间、以Σ 为纤维的平凡光滑纤维丛，或者一个以 $D^n{}_{\frac{1}{2}}$为底空间、以不交并 $\Sigma \sqcup \Sigma$为纤维的平凡光滑纤维丛。

我们可以构造一个到 $\partial D^{n,0} \times [-1, 1]$ 上的投影，其原像与 Σ 微分同胚。在所得平凡丛的全空间上，我们可以取一个乘积映射：它由圆柱 $\Sigma \times [-1, 1]$ 上恰有两个奇点的自然莫尔斯函数与 $\partial D^{n,0}$ 上的恒等映射构成。例如，该莫尔斯函数具有这样的性质：最小值（最大值）的原像与边界重合，且两个奇点都位于内部。

我们可以将这个乘积映射视为一个到 $A_{\frac{1}{2},5\,2}$ 的映射, _其像为 $A_{\frac{1}{2},2}$。

我们可以将这两个映射粘合起来，从而得到所需的圆折叠映射。至此，“若”部分的证明完成。

“仅当”部分可以简要给出。我们自然地沿用前面的记号。逆命题方面，我们可以将 m 维流形分解为两个流形，它们分别是以 $D^{n,1} \sqcup D^{n,2}$ 和 $\partial D^{n,0} \times [-1, 1]$ 为底空间的光滑丛的全空间。此外，纤维当然与 Σ 微分同胚。仔细观察底空间（即一个同伦球面）的识别方式，我们.....

可以看出，底空间必定是标准球面。这就完成了“仅当”部分的证明。

证明至此完成。 □

定理2（[12, 14]）。设 $m \geq n \geq 2$ 和 $l > 0$ 为整数。设一个 m维闭流形 M 表示为若干个 $l > 0$ 流形的连通和，其中每个流形都是某个以 S^n 为底空间、以（$m-n$）维标准球面为纤维的光滑丛的全空间。此处的连通和取自光滑范畴。M 存在一个圆折叠映射 $f:\ M \to \mathbb{R}^n$ ，并具有以下性质，当且仅当它是一个以 n维单位球面 S^n 为底空间、以 Σ为纤维的光滑丛的全空间。

(1) f 具有逐分支平凡单值化。(2) $S(f)$恰由 $l+1$ 个连通分支组成。每个奇点的指标为0或1。 $f(F_1(f)) = \subset_{j=1}^{l-1} \partial {D^n}_j$ 且 $f(F_0(f)) = \partial {D^n}_l$。(3) 对于 ${D^n}_1 - f(S(f))$中的一个点，其原像是不交并，由 $l+1$($m-n$)维标准球面组成。(4) 对于${A^n}_{l',\ l'+1} - f(S(f))$中的一个点，其原像是不交并，对于每个 $1 \leq l' \leq l$，由 $l+1-l'$ ($m-n$)维标准球面组成。

此外，若假设 $m \geq 2n$，则逆命题也成立。若不作此假设，则逆命题一般不成立，而情形（m, n） = (3, 2)就是这类情形之一。

定义4. 我们称定理2中的圆折叠映射为定向的。我们也称奇异集连通且具有整体平凡单值化的圆折叠映射为定向的。

我们来说明奇异集连通的定向圆折叠映射。对于这类映射，像的内部中各点的原像都是标准球面。此外，这里所讨论映射的奇异点指标总是0。维数至少为2的欧几里得空间中的单位球面的典范投影满足这些条件。

命题3. 在定理2中考虑 $l = 1$的情形。例如，在（m, n） = （k+1, k）、（4, 2）、（5, 2）、（5, 3）、（6, 3）、（6, 4）这些情形下，定向圆折叠映射具有整体平凡单值化，其中 k 是任意大于或等于2的整数。

关于命题3的简短说明。我们滥用记号 $l+1 := 2 > 0$ 来表示定向圆折叠映射 f的奇异集 $S(f)$的连通分支数。我们考虑从 f到 $f^{-1}({A^n}_{l+\frac{1}{2},\ l+\frac{3}{2}})$的限制。我们还可以将其与典范投影复合到 S^{n-1}，该投影将每个点$x \in {A^n}_{l+\frac{1}{2},\ l+\frac{3}{2}}$映射到$\frac{1}{||x||}x \in S^{n-1}$。根据 [31]，该纤维丛是一个线性纤维丛，其纤维为单位圆盘 D^{m-n+1}。我们也可以说，在我们的情形下，它作为线性纤维丛也是平凡的。纤维与 S^{m-n} 微分同胚的光滑丛，在我们的情形下是线性的，而一般情况下当然并非如此。在我们的情形下，我们可以看到，光滑（线性）纤维丛 $f^{-1}(\partial {D^n}_{l+\frac{1}{2}})$上的同构总能延拓为 $f^{-1}({A^n}_{l+\frac{1}{2},\ l+\frac{3}{2}})$上的光滑（线性）纤维丛同构。这是一个最重要的要点，也至此完成了我们对命题3的说明。

关于本文论证中涉及的线性丛，请再次参阅 [26] 。 [6] 讨论的是单位球面的微分同胚群，以及纤维为标准球面的光滑丛。□

命题4。在定向圆折叠映射的定义中，对于任意整数 $k \geq 2$，在（m, n）＝（$k+1$, k）的情形下，我们不需要假设映射具有逐分支平凡单值化。

这是由于关于紧曲面的微分同胚群，即所谓的映射类群的一个众所周知的事实，或一些相关论证对 [21]而言是重要组成部分。命题6稍后将作为关于环面的映射类群和微分同胚群的一个众所周知的事实加以介绍 $S^1 \times S^1$。这也是我们论证中的一个重要事实。

3. On Main Theorems.

3.1. 图流形以及映射到 $\mathbb{R}^2$ 其上的圆折叠映射。我们将解释图流形。注意，维数至多为3的拓扑流形都是光滑流形，并且对于这里给定的一个拓扑流形，这些光滑流形总是彼此微分同胚。这是由于 [27] ，例如。

定义 5. 图流形是一个三维闭、连通且可定向流形，由有限个流形通过沿边界上的环面进行微分同胚粘合而得；这些流形被视为以紧连通曲面为底空间的光滑丛的全空间，其纤维与 S^1 或曲面上的圆丛微分同胚。

定理3. 一个三维闭、连通且可定向流形存在一个到 $\mathbb{R}^2$ 的圆折叠映射，当且仅当它是一个图流形。

最初，在 [32]，中，“圆折叠映射”指“到 $\mathbb{R}^2$ 的折叠映射，且其在奇异集上的限制是一个嵌入”。

一个 m 维裤子曲面是一个光滑流形，它与从一个 m 维标准球面中移去三个两两不交且光滑嵌入的 m 维单位球面后所得的流形微分同胚。

命题 5. 在定义 5 中，我们可以将每个丛选为单位圆盘 D^2 上的平凡丛，或选为二维裤子曲面上的平凡丛。我们也可以定义一个满足以下规则的图。

(1) 顶点集是所有这些以曲面为底空间的圆丛的集合。(2) 边集是这些以曲面为底空间的圆丛的边界的连通分支所构成的所有环面的集合。(3) 每条边恰好包含两个不同的顶点。它们是包含该边的圆丛，或者说，是将该环面作为其边界连通分支的圆丛。

关于命题 5，我们简要介绍与图流形相关的图；本文并不需要深入理解这些图。我们将命题 5 中的图称为图流形 M 的表示图。表示图并不唯一。在我们的研究中，某类表示图，即所谓的配管类型表示图，十分重要。它们用于将流形分解为圆丛，并以特定方式粘合边界的连通分支。参见 [28, 30] ，另见 [20]。对于每个图流形， [28] 定义了带有若干标记的图。这类带标记的图定义起来更加复杂。一个重要的结果是，我们可以为这类图定义标准形。它还为图流形提供了一个不变量。

下面的定理表明，这两类图在刻画同一个图流形子类时都很重要。

定理 4（[20]）。(1) 一个图流形存在到 $\mathbb{R}^2$ 的定向圆折叠映射，当且仅当其标准形是一个无环的图。(2) 等价地，一个图流形存在到 $\mathbb{R}^2$的定向圆折叠映射，当且仅当存在一个表示该流形且无环的表示图。

定理5（[3, 20]）。对于上一条定理中的流形，任意一对一阶有理上同调类元素的杯积始终为零元素。

在 [20], 中，指出了一个推论：能够映射到 $\mathbb{R}^2$ 的图流形所具有的定向折叠映射，其有理上同调环也具有这一性质。该结果是 [3]的一项主要结果的推论。 [3] 的结果指出，标准形无环的图流形具有这一性质。主定理1被视为更强的版本。

3.2. 主要定理的证明。我们需要一些关于多面体和所谓 Reeb 空间的概念。

与维数至多为 2 的多面体同胚的拓扑空间，具有唯一的多面体结构。与维数至多为 3 的拓扑流形同胚的拓扑空间，也具有唯一的多面体结构；此结构即为 PL流形。例如，这也归功于[27]。

对于拓扑空间之间的连续映射 $c : X \to Y$，我们可以按以下规则在 X 上定义等价关系 $\sim_c$： $x_1 \sim_c x_2$ 当且仅当 x_1 和x_2 属于某个点 y 的原像 $c^{-1}(y)$的同一个连通分支。

我们不详细阐述 Reeb 空间的一般理论。一个重要事实是，对于折叠映射以及满足所谓“一般性”条件的更一般的光滑映射，其 Reeb 空间是多面体，维数与目标流形相同，并且其多面体结构由目标流形自然诱导而来。例如， [35]展示了这类事实。 [22] 明确展示了光滑闭流形（维数至少为 3）到无边界曲面的所谓稳定映射的这一事实。从本质上说，此处这类映射包括圆折叠映射，以及奇异集上的限制为嵌入的折叠映射，例如。有关光滑映射的奇点理论，请参见 [5]。

关于这类多面体，也可参见 [37] ，例如。这是一篇发表于将这类多面体视为映入$\mathbb{R}^2$ 的光滑映射的 Reeb 空间进行研究之前的论文。相关研究请参见 [2, 8]。

下面的例子很重要。

众所周知，除四维异球外，所有同伦球面都与标准球面 PL 同胚，并且可视为 PL 流形。我们称这类 PL 流形为 PL 球面。

例 1. 例如，对于从 m 维闭连通流形到 $\mathbb{R}^n$ （其中带有 $m > n$）的定向圆折叠映射，Reeb 空间与 n 维（PL）球面的楔和简单同伦等价。图 1 对应定理 1。这是通过将一份 n 维单位球面 ${D^n}_0$ 的副本 ${D^n}_0{}'$ 附接而得到的

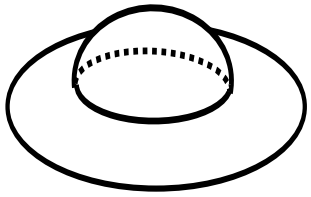

FIGURE 1. 定理 1 的 Reeb 空间。

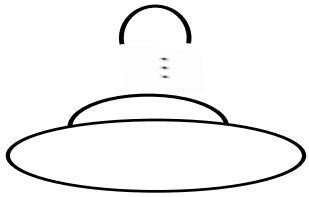

FIGURE 2. 一般定向折叠映射的 Reeb 空间。它在 $\mathbb{R}^{n+1}$的一个适当超平面中的子空间

到另一份副本上，所用的微分同胚将边界映到单位球面 S^{n-1} 在 $D^n{}_0$ 内部的一个光滑嵌入副本上。图 2 展示了一般情形。请注意，从拓扑学角度看，我们可以将 Reeb 空间表示为自然嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个对象，而它是 Reeb 空间在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个超平面中的子空间。

令 A 为一个带有生成元 $\pm a \in A$的交换环。对于紧的、连通的定向流形 X，我们可以将基本类定义为$H_{\dim X}(X, \partial X;\ A)$的一个生成元，与 A同构。根据定向，我们可以将此元素设为 $\pm a$。

对于光滑流形 Y 和元素 $c \in H_j$（Y、∂Y、A），假设 c 等于同态 i_{X*}: $H_{\dim X}$（X; ∂X; A）$\to H_j$（Y; ∂Y; A）$= H_{\dim X}$（Y; ∂Y; A）在 a 处的取值 i_{X*}（a）。该同态由某个光滑、紧的、连通的定向流形 X 的光滑嵌入 i_X：$X \to Y$ 典范地诱导，并且该流形满足以下性质。

- i_X（∂X）$\subset \partial Y$。
- i_X（内 X）$\subset$ 内 Y。

换言之，它们是适当嵌入的。根据微分拓扑中的基本论证，我们可以视具体情况，补充所谓嵌入边界上的“横截性”。换言之，对于边界 ∂X 上的每个点 p，嵌入的微分 $d_{i_X p}$ 的像与 Y 在 p（i_X）处的切空间 $T_{i_X(p)} Y$ 的交集维数假定为 $\dim X + (\dim Y - 1) - \dim Y = \dim X - 1$。不过，本文并未实质性地考虑这一假设。在这种情况下，称 c 可由子流形 i_X（X）表示。

我们也可以在 PL范畴中，或等价地，在分片光滑范畴和拓扑范畴中定义类似的概念。

再次考虑一个紧的、连通的定向流形 X 。在我们的论证中， $H_j(X;\partial X;A)$、$H^j(X;\partial X;A)$、$H_j(X;A)$ 和 $H^j(X;A)$ 中元素的所谓庞加莱对偶很重要。它们分别唯一地定义为 $H^{\dim X-j}(X;A)$、$H_{\dim X-j}(X;A)$、$H^{\dim X-j}(X,\partial X;A)$ 和 $H_{\dim X-j}(X,\partial X;A)$ 中的元素。与此相关， X 的庞加莱对偶定理也很重要。

当然，我们会计算同调群和上同调群以及上同调环。为此，我们需要Mayer-Vietoris列等正合列。我们还需要一些定理，例如 K¨unneth公式，它对计算乘积的上同调群（环）很有用。此前介绍的 Poincar´e对偶定理和泛系数定理也很重要。例如，请再次参见 [6] 。

我们给出主要定理。首先，下面的命题是我们论证中的基础。

命题6. 对于一个平凡圆丛 $T^2:=S^1\times S^1$ 在 S^1上，存在一个定义在该丛上的同构族，记作 $\{\Phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ，并具有以下性质。

(1) 令 ${S^1}_{\mathrm{b}}$ 表示带有定向的子空间 $S^1\times\{*\}\subset S^1\times S^1$ 。令 ${S^1}_{\mathrm{f}}$ 表示带有定向的子空间 $\{*\}\times S^1\subset S^1\times S^1$ ，它被视为 ${S^1}_{\mathrm{b}}$上的平凡圆丛的一个纤维。令$[S_{\mathrm{b}}]\in H_1(T^2;\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$和 $[S_{\mathrm{f}}]\in H_1(T^2;\mathbb{Z})\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$表示由这些定向圆所代表的元素。由$\Phi_j$诱导的同态 ${\Phi_j}_*$ 也是一个同构，它将 $[S_{\mathrm{b}}]$映到 $[S_{\mathrm{b}}]+j[S_{\mathrm{f}}]$，并将 $[S_{\mathrm{f}}]$映到 $[S_{\mathrm{f}}]$。(2) 丛上的任意同构都光滑同痕于恰好一个 Φ_j ，并且我们可以在该丛的同构空间中进行光滑同痕变形。

关于这一点，我们省略严谨的论述。本文还需要用到密切相关的论证。对于这些论证，我们采用了线性丛（包括圆丛）方面的基础知识和方法。必要时，请再次参阅 [26] 作为示例。尽管其中的术语和记号可能与我们的略有不同，但我们可以参考该文，因为它阐述的内容本质上相同。

对于主定理1，以下引理至关重要。

引理 1. 假设一个 3 维闭、连通且可定向流形M 承认一个定向圆折叠映射 $f:M\to\mathbb{R}^2$。那么，我们有以下性质。

(1) 第二整系数同调群 $H_2(M;\mathbb{Z})$ 是自由的，并由有限多个不能被大于 1 的整数整除的元素生成。(2) 此外， $H_2(M;\mathbb{Z})$ 中的有限多个元素可以取作其基。此外，这些元素可以取为由彼此不相交的球面所表示的元素。令 $\{{S^2}_j\}$ 表示此处所有球面的集合。(3) 我们可以考虑商映射 $q_f:M\to W_f$ 到 f的 Reeb 空间 W_f。于是 q_f 通过一个（PL）同胚将 ${S^2}_j$ 映射到一个 PL 球面上。此外，由映射 q_f 规范诱导的同态 ${q_f}_*:H_2(M;\mathbb{Z})\to H_2(W_f;\mathbb{Z})$ 是单同态，并将每个由 ${S^2}_j$ 表示的元素映射为不能被大于 1 的整数整除的元素。(4) 第一整系数同调群 $H_1(M;\mathbb{Z})$ 中由所有阶为无限的元素生成的子群，由有限多个不能被大于 1 的整数整除的元素生成。

(5) 此外， $H_1(M;\mathbb{Z})$ 中的有限多个元素可以取作第一整系数同调群 $H_1(M;\mathbb{Z})$ 中由所有阶为无限的元素生成的子群的一组基。此外，这些元素由原像 $f^{-1}(0)$ 的连通分支表示。

证明。我们对奇异集的连通分支数进行归纳证明。若该数为 1，则根据命题 2，该流形是一个三维（标准）球面。显然，我们的引理成立。

假设当奇异集的连通分支数至多为 k 时，我们的引理成立，其中 k 是一个正整数。

考虑一个定向圆折叠映射 $f_{r,\ k+1}:\ {M^3}_{k+1}\ \to\ \mathbb{R}^2$ ，其奇异集 $S(f_{r,\ k+1})$ 恰由 $k+1$ 个连通分支组成。移除原像 ${f_{r,\ k+1}}^{-1}(D^2{}_{\frac{3}{4}})$ 内部的一个连通分支 B_k，将其视为以 $D^2{}_{\frac{3}{4}}$ 为底空间的平凡圆丛的全空间。令 A_k 表示所得的三维紧致、连通且可定向流形。所得映射可视为从三维闭、连通且可定向流形 $A_{k,\ 0}$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的圆折叠映射的限制；后者由从 $A_{k,\ 0}$ 中移除一个与 $S^1\times D^2$ 微分同胚嵌入的副本的内部而得到。根据命题 3 及命题 4 中的论证，该圆折叠映射经由自然光滑同伦变形为定向圆折叠映射$f_{r,\ k,\ 0}:A_{k,\ 0}\to\mathbb{R}^2$ ，该同伦消去了奇异集内相邻的两个连通分支；它们分别由指标为 0 和 1 的奇点组成。我们可以考虑一个 Mayer–Vietoris序列

$$\to H_3(A_k;\mathbb{Q})\ \oplus H_3(S^1\times D^2;\mathbb{Q})\cong\{0\}\to H_3(A_{k,\ 0};\mathbb{Q})\ \cong\mathbb{Q}\to$$
$$\to H_2(S^1\times S^1;\mathbb{Q})\ \cong\mathbb{Q}\to H_2(A_k;\mathbb{Q})\oplus H_2(S^1\times D^2;\mathbb{Q})\ \cong H_2(A_k;\mathbb{Q})\ \to H_2(A_{k,0};\mathbb{Q})\ \to$$

并且我们可以像定向圆折叠映射的引理中那样，考虑 $A_{k,\ 0}$ 中的球面族 $\{{S^2}_{k,j}\}$ 。可以看出，这里的从 $H_2(A_k;\mathbb{Q})$ 到$H_2(A_{k,\ 0};\mathbb{Q})$ 的同态是单同态，并且由包含映射自然诱导。根据圆折叠映射和流形的构造， $\{{S^2}_{k,j}\}$中的球面也可以视为 Int A_k中的球面。此外，它们也可以视为经由包含映射和微分同胚映射到$A_{k,\ 0}$ 中相应球面上的球面。这也意味着，根据泛系数定理， $H_2(A_k;\mathbb{Q})$、 $H_2(A_{k,\ 0};\mathbb{Q})$、 $H_2(A_k;\mathbb{Z})$和$H_2(A_{k,\ 0};\mathbb{Z})$的秩相同。

我们可以考虑一个 Mayer–Vietoris 序列 e

$$\{0\}\to H_3({M^3}_{k+1};\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}\to$$
$$\to H_2(S^1\times S^1;\ \mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}\to H_2(A_k;\ \mathbb{Q})\oplus H_2(B_k;\ \mathbb{Q})\cong H_2(A_k;\ \mathbb{Q})\ \to H_2({M^3}_{k+1};\ \mathbb{Q})\ \to\to H_1$$
$$(S^1\times S^1;\ \mathbb{Q})\ \cong\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\to H_1(A_k;\ \mathbb{Q})\oplus H_1(B_k;\ \mathbb{Q})\ \cong H_1(A_k;\ \mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q}\to H_1({M^3}_{k+1};\ \mathbb{Q})\ \to$$

我们首先解释从 $H_1(S^1\times S^1;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ 到$H_1(A_k;\mathbb{Q})\ \oplus H_1(B_k;\mathbb{Q})\cong H_1(A_k;\mathbb{Q})\ \oplus\mathbb{Q}$的同态。这是由包含映射规范诱导的两个同态的直和。考虑平凡圆丛的纤维可知，核的维数必为 0 或 1。为此，请记住， B_k 是以 $D^2{}_{\frac{3}{4}}$ 为底空间的平凡圆丛的全空间，而由丛 $S^1\times S^1$ 在 S^1 上的纤维表示的元素，会映射到形如 $(c_1,c_F)\in H_1(A_k;\ \mathbb{Q})\oplus H_1(B_k;\ \mathbb{Q})$ 的元素，其中 c_F 由圆丛 B_k的一个纤维表示。

$H_2({M^3}_{k+1};\ \mathbb{Q})$的秩等于 $H_2(A_k;\ \mathbb{Q})$的秩，或者等于 $H_2(A_k;\mathbb{Q})$的秩加 1。我们分这两种情况进行论证，以完成证明。

情形 1: $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$ 的秩等于 $H_2(A_k;\mathbb{Q})$ 的秩。

由泛系数定理, $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Z})$的秩等于 $H_2(A_k;\mathbb{Z})$、 $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$和$H_2(A_k;\mathbb{Q})$ 的秩。此外, 由泛系数定理和庞加莱对偶定理, $H^1(M^3{}_{k+1};\mathbb{Z})$ 和 $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Z})$是自由的且同构。回顾这些映射和流形的构造可知, 圆折叠映射$f_{\mathrm{r},k+1}$: $M^3{}_{k+1}\to\mathbb{R}^2$ 具有所需的性质。

情形 2: $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$ 的秩等于 $H_2(A_k;\mathbb{Q})$ 的秩加 1。

我们假设这种情况确实发生。

根据映射和流形的构造, 存在一个闭、连通且定向的曲面 S, 以及 $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$ 的一个元素 c_S, 该元素由曲面 S 表示; 族 $\{S^2{}_{k,j}\}$ 中由球面表示的元素构成 $H_2(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$ 的一组基。

通过代数拓扑和微分拓扑的论证, 我们研究 S 的性质。 S 被 ∂A_k 分割, 并以规范的方式与 ∂B_k 识别。更准确地说, 它沿边界上的圆分解为两个紧曲面。根据 B_k 的庞加莱对偶定理, 或所谓的交理论, 存在一个元素 $c_{\mathrm{F},\ k+1}\in H_1(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$, 它具有以下性质。

- 令 $\{c_{\mathrm{F}\ k,j}\}\subset H_1(A_{k,0};\mathbb{Q})$ 表示由假设中 (5) 所示的一组基通过泛系数定理得到的基。将这些元素自然地视为 $H_1(A_k;\mathbb{Q})$ 的元素, 并像之前一样保留映射与流形的结构, 可见它们在 $H_1(A_k;\mathbb{Q})$ 中彼此线性无关。考虑包含映射, 也可见它们在$H_1(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$ 中彼此线性无关。此处我们还考虑 $f^{-1}(0)$ 中表示这些元素的圆与 $\{S^2{}_j\}$ 中用于第二积分（有理）同调群的二维球面之间的交数。此外, $c_{\mathrm{F}\ k+1}\in H_1(M^3{}_{k+1};\mathbb{Q})$, 且这些元素构成一组基。

- $c_{\mathrm{F}\ k+1}$ 由平凡圆丛 $B_k\subset M^3{}_{k+1}$ 的一个纤维表示。

我们研究包含 B_k 作为子空间的原像 ${f_{\mathrm{r},\ k+1}}^{-1}(D^2{}_{\frac{3}{2}})$ 的唯一连通分支。通过观察定理 1、命题3 和命题 4 及其证明, 我们可以看到, 此处圆折叠映射的限制可视为定理 1 中类似圆折叠映射在 $D^2{}_{\underline{3}}$ 的原像上的限制。[2]

我们稍后会说明关于 S^2 上的圆丛。与此相关, 主定理 2 的证明中更精确地讨论了环面上的圆丛, 这或许有助于我们进行更精确的讨论。

每个以 S^2 为底空间的圆丛, 在保持纤维定向的结构群所对应的同构意义下, 都对应一个欧拉数 $k\in\mathbb{Z}$。这类圆丛的全空间称为有理同调球面, 或者说, 是一个有理同调群与 S^3 的有理同调群同构的三维闭流形, 当且仅当

仅当 $k \neq 0$ 时成立。考虑这样一个有理同调球面 ${S^3}_k$ 上的圆折叠映射 $f_{{S^3}_k}$，如定理 1 所示。令 $A_{{S^3}_k}$ 表示该映射下 ${D^2}_{\frac{3}{2}}$ 的原像，且 $B_{{S^3}_k} := {S^3}_k - \text{Int } A_{{S^3}_k}$。

我们可以考虑一个 Mayer–Vietoris序列

$$\{0\} \to H_3({S^3}_k;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \to$$

$\to H_2(S^1\times S^1;\ \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q} \to H_2(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q})\oplus H_2(B_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q}) \cong H_2(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q}) \to H_2({S^3}_k;\ \mathbb{Q}) \cong \{0\} \to\to H_1(S^1\times S^1;\ \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} \to H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q})\oplus H_1(B_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q}) \cong H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q})\oplus\mathbb{Q} \to H_1({S^3}_k;\ \mathbb{Q}) \cong \{0\} \to$并且我们研究从 $H_1(S^1\times S^1;\ \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}$ 到 $H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q})\oplus H_1(B_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q}) \cong H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}$的同构。如上所述，这是通过使用由包含映射诱导的同态定义的。$H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Q})$ 与 $\mathbb{Q}$ 同构，并且根据泛系数定理，$H_1(A_{{S^3}_k};\ \mathbb{Z})$ 的秩为 1。此外，该空间的一个生成元由 $\partial {D^2}_{\frac{5}{4}}$ 中一点的原像表示。

这与取定一个良好元素 $c_{\mathrm{F},\ k+1} \in H_1({M^3}_{k+1};\ \mathbb{Q})$ 的性质相矛盾。因此，圆折叠映射 $f_{\mathrm{r},\ k+1}$ 在原像 ${f_{\mathrm{r},\ k+1}}^{-1}({D^2}_{\frac{3}{2}})$ 中包含 B_k 的唯一连通分支上的限制，不可能是这样的映射。

这必定是由定理 1 中所述的、定义在 $S^2 \times S^1$ 上的圆折叠映射得到的。由定理 1 的证明中的构造可知，S 可以取为底空间 S^2 上平凡丛的一个截面的像。根据该构造，所需性质也都成立。

最后需要指出，三维闭连通可定向流形的第二整系数同调群是自由群。这是由于庞加莱对偶定理和第一整系数上同调群的泛系数定理，从而这些群都是自由群。至此，情形 2 的证明完成。

证明完成。　□

主定理1的证明。我们应用引理 1，结合庞加莱对偶定理或交理论。通过适当的光滑同痕，将 ${S^2}_j$ 移动，使得原球面与所得球面彼此不相交。$\{{S^2}_j\}$ 中的不同球面彼此不相交。证明完成。□

主定理 2 的证明。我们考虑在环面 T^2 上的圆丛 $= S^1 \times S^1$，其欧拉数为 $k \in \mathbb{Z}$。下面对此进行说明。考虑从 T^2中移除一个光滑嵌入的二维单位圆盘 D^2 后得到的流形，记为 ${T^2}_o$。将被移除的圆盘记为 ${D^2}_o$。

我们考虑 ${T^2}_o$ 和 ${D^2}_o$ 上的平凡光滑丛，其全空间可分别记为 ${T^2}_o \times S^1$ 和 ${D^2}_o \times S^1$。它们的平凡化是自然给出的。在它们的边界上也给出了平凡化，并自然地与 S^1 上的平凡丛 $S^1 \times S^1$ 相识别。我们通过命题 5 中从 $\partial {T^2}_o \times S^1$ 到 $\partial {D^2}_o \times S^1$ 的丛同构 Φ_k 将 ${T^2}_o \times S^1$ 和 ${D^2}_o \times S^1$ 粘合起来，其中定义域和值域的丛都像之前一样与丛 $S^1 \times S^1$ 典范地识别。于是得到所需的圆丛及其全空间 $B_{S^1,k}(T^2)$。

我们有一个Mayer–Vietoris序列

$\to H_1(S^1 \times S^1;\ \mathbb{Z}) \to H_1({T^2}_o \times S^1;\ \mathbb{Z}) \oplus H_1({D^2}_o \times S^1;\ \mathbb{Z}) \to H_1(B_{S^1,k}(T^2);\ \mathbb{Z}) \to$ 并且我们有 $H_1({T^2}_o \times S^1;\ \mathbb{Z}) \cong H_1(T^2 \times S^1;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 以及 $H_1({D^2}_o \times S^1;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，例如。在这里的论证中，我们可以对同调群和有限生成（交换）群作适当的识别，并加以应用。

从 $H_1(S^1\times S^1;\mathbb{Z})$ 到 $H_1({T^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})\oplus H_1({D^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})$ 的第一个同态被视为一个同态，它将 $(a,b)\in\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cong H_1(S^1\times S^1;\mathbb{Z})$ 映射到 $(0,0,b,ka+b)$。请记住，这是由包含映射规范地诱导的两个同态的直和。从 $H_1({T^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})\oplus H_1({D^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})$ 到 $H_1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})$ 的第二个同态定义为由包含映射规范地诱导到 $B_{S^1,k}(T^2)$ 的两个同态之和。此外，这是一个满同态。这是因为 $S^1\times S^1$ 是连通的，并且在这里的第三个群之后，存在从 $H_0(S^1\times S^1;\mathbb{Z})$ 到 $H_0({T^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})\oplus H_0({D^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})$ 的同态。此外，从 $H_0(S^1\times S^1;\mathbb{Z})$ 到 $H_0({T^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})\oplus H_0({D^2}_o\times S^1;\mathbb{Z})$ 的这个同态是单同态，同时也是由包含映射规范地诱导的两个同态的直和。我们有以下性质。

- $H_1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$。
- 群 $H_1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$ 的第一和第二个直和项，被视为由满足以下性质的元素生成的子群。– 这两个元素分别由丛 ${T^2}_o\times S^1$ 在 ${T^2}_o$ 内部的圆 ${S^1}_1$ 和 ${S^1}_2$ 上的限制的截面的像表示；这些元素对应于 $H_1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$ 的子群中某个自然基的元素，该子群由所有阶为无穷的元素生成。– $H_1({T^2}_o;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 的两个元素自然构成一组基。

- 该群的第三个直和项由一个元素生成，该元素由圆丛的一条纤维表示。

我们利用庞加莱对偶定理或交理论，研究 $B_{S^1,k}(T^2)$ 的有理上同调环和整系数上同调环。由泛系数定理，$H^1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$。庞加莱对偶定理表明，它同构于 $H_2(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})$。该群由一些元素生成，这些元素由圆丛 $B_{S^1,k}(T^2)$ 在 ${S^1}_1$ 和 ${S^1}_2$ 上的限制的全空间表示。请记住，${S^1}_i$ 是 ${T^2}_o\subset T^2$ 中的一条圆，且已在前文定义。选取其中一个环面。通过某种光滑同痕，我们可以将其移至另一位置，使原环面与新环面互不相交。对于这两个环面，我们可以认为它们的交集可取为纤维，由此可表示 $H_1(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$ 中直和项 $\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$ 的一个生成元。注意，由庞加莱对偶定理，$H^2(B_{S^1,k}(T^2);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/|k|\mathbb{Z}$。这意味着 $B_{S^1,k}(T^2)$ 具有定理5中有理上同调环所述的性质，但不具有主定理1中整系数上同调环所述的性质。

作为一个可映入 $\mathbb{R}^2$ 的定向圆折叠映射所对应的目标流形，我们考虑两个 $S^2\times S^1$ 的连通和，以及一个以 S^2 为底空间、欧拉数为 k 的圆丛的全空间。□

注 1. 我们不知道主定理1的逆命题是否成立。当然，这类问题很重要。

注 2. 当系数环是有限交换环时，主定理1不成立。 [20] 中也指出了这一点。

4. Explicit fold maps and restrictions on the manifolds, and MainTheorems.

例2（[12]）。根据 [23], ，随后 [4], 7维同伦球面已得到完全且明确的分类。若考虑定向，则恰有28种7维同伦球面。其中恰有28种中的16种同伦球面，是以 S^4 为底空间、纤维为单位球面 S^3的线性丛的全空间。7维标准球面也属于其中一种类型。所有7维同伦球面均可表示为两个此类同伦球面的连通和。

这意味着，根据定理2，7维同伦球面允许映入 $\mathbb{R}^4$ 的定向圆折叠映射。众所周知，若奇异集连通，则它是标准球面。这归因于 [31], 中所谓特殊广义映射的理论，稍后将讨论其中一些内容。前文提到的28种中的恰好16种同伦球面（它们是以 S^4为底空间的线性丛的全空间）允许映入 $\mathbb{R}^4$ 的定向圆折叠映射，其奇异集恰由两个连通分支组成。此外，根据定理1和命题3，逆命题也成立。每个7维同伦球面都允许映入 $\mathbb{R}^4$ 的定向圆折叠映射，其奇异集恰由三个连通分支组成。这意味着，同伦球面的微分结构差异与某一明确类别的圆折叠映射的拓扑类型差异密切相关。此类事实已在特殊广义映射中被发现，本文将在下文简要介绍。另请参见 [33, 34] 中的例子。

如果一个折叠映射的奇点指标始终为0，则称其为特殊广义映射。定义在同伦球面上且恰有两个奇点的莫尔斯函数，以及单位球面的典范投影，是最简单的例子。在目标空间的维数不够高或至多为4的情形下（例如，条件要求基本群平凡或为自由群），在这些情形中允许此类映射的流形（在相当多的情况下）总可以表示为纤维为同伦球面的光滑丛的全空间的连通和。作为近期的一项新研究，作者一直在研究目标空间维数大于4，且条件要求基本群平凡或属于单连通情形的情况。我们以一个定理给出一个例子。我们还在此回顾相关预印本中的证明，并回顾[31]中的一些基本论证。

定理6（[17] 等）。存在一对（M_1， M_2）9维闭单连通流形，具有以下性质。

(1) 对于 $i = 1$，2， H_2（M_i；$\mathbb{Z}$）同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$， H_3（M_i；$\mathbb{Z}$）是平凡群，而 H_4（M_i；$\mathbb{Z}$）同构于 $\mathbb{Z}$。(2) 对于 M_1 和 M_2，考虑它们的整系数上同调群中由所有无限阶元素生成的子群。它们具有整系数上同调环的子环结构，并且同构于 $S^4 \times S^5$ 的整系数上同调环。(3) M_1 和 M_2 的整系数上同调环并不同构。(4) M_1 能够映入 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射，当且仅当 $n = 5$、6、7、8、9。(5) M_2 能够映入 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射，当且仅当 $n = 6$、7、8、9。

这是主要定理的附录之一。我们按照 [17] ，以一种与原证明略有不同的方式回顾该定理的证明。

定理6的证明。我们可以构造一个闭单连通流形M_1和一个特殊广义映射 $f_1:M_1\to\mathbb{R}^5$，并说明这一构造。请注意，我们在 [17], 中给出了另一种构造。

我们有一个五维紧致单连通流形 P，它光滑浸入 $\mathbb{R}^5$，使得 $H_2(P;\mathbb{Z})$同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}2\mathbb{Z}$，$H_3(P;\mathbb{Z})$是平凡群，并且具有一个三维多面体的（简单）同伦型。这可视为微分拓扑基本论证所得到的结果。更具体地说，我们也可以从 [1]中给出的拓扑范畴、PL范畴（或等价地，分片光滑范畴）以及光滑范畴中五维闭单连通流形的完整分类得到这一结论。在这些范畴中，它们是等价的。通过从论文中的某个流形中移除一个光滑嵌入的五维单位圆盘的副本，我们就得到了所需的流形。这个五维闭单连通流形将在后文构造 M_2 时用作M'。

我们可以在一个单位圆盘的副本上构造莫尔斯函数的乘积映射，该函数恰有一个奇点；此映射由考察自然高度函数和 ∂P 上的恒等映射得到。我们可以将其构造成映到 ∂P 的一个小领圈邻域 $N(\partial P)$ 上的映射。在 P 中其内部的补集 $P-\mathrm{Int}\ N(\partial P)$ 上，我们可以构造一个以该集合为底空间、纤维为 4 维标准球面的平凡光滑纤维丛。我们可以自然地将它们粘合起来，从而得到一个映到 P 上的光滑满射。通过复合该浸入，我们便在一个适当的闭连通流形 M_1 上得到所需的特殊广义映射 $f_1:M_1\to\mathbb{R}^5$。根据第3节 [31], 中关于基本群和同调群的一些命题，我们可以看出 M_1 是一个具有性质 (1) 和 (2) 的单连通流形。

我们说明当 $n=$为 1、2、3、4 时，不存在映到 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射。根据所述理论，若此类映射存在，则它可表示为一个满射与某个光滑浸入的复合：该满射映到一个 n 维紧单连通流形 P_n，而该浸入映入 $\mathbb{R}^n$。此外，[29] 表明，这个 n 维紧单连通流形的整数同调群是自由群。并且，前文关于 [31] 的理论指出，对于 $1\le j\le 9-n$，$H_j(M_1:\mathbb{Z})$ 与 $H_j(P_n:\mathbb{Z})$ 同构。这就产生了矛盾。

我们通过应用作者在预印本 [19] 中首次提出的理论，说明了面向 $\mathbb{R}^n$ 、对应 $n=$6、7、8、9 的特殊广义映射的存在性。在构造特殊广义映射 $f_1:M_1\to\mathbb{R}^5$ 时，将所给出的莫尔斯函数与 ∂P 上的恒等映射或连通分支$\partial_0 N(\partial P):=\partial N(\partial P)\bigcap$边界的领圈邻域 $N(\partial P)$ 的边界内部 P上的乘积映射，与到补集 $P-$内部 $N(\partial P)$ 的投影粘合起来。我们可以通过两个微分同胚的乘积映射将它们粘合。

我们更精确地介绍这些微分同胚的乘积映射。首先，我们给出在边界$\partial_0 N(\partial P)$和补集 $P-\mathrm{Int}\ N(\partial P)$上两个平凡丛的纤维的适当识别，其中 P处的纤维分别是单位圆盘 $D^{10-n}=D^5$ 和单位球面 $\partial D^5=S^4$。这些微分同胚包括底空间之间的识别，以及纤维 S^4上的微分同胚；后者视为该纤维上的恒等映射。

我们定义的函数取自单位圆盘 D^5 上的一个自然高度函数，并在此处用作乘积映射的莫尔斯函数；该函数视为单位球面 S^4 到 $\mathbb{R}$的典范投影的限制。更确切地说，它是限制在一个半球上的函数。我们不提供单位球面的典范投影及其半球的严格定义。不过，我们可以自然地定义它；例如，作者在相关预印本中对其作了严格定义。作为一项基本性质，此处的高度函数可表示为以下两个映射的复合。

- 在情形 $n=6$、7、8 下，将单位球面 S^4 到 $\mathbb{R}^{n-4}$ 的典范投影限制在半球上；以及对于 $n=9$，将单位球面 S^4 到 $\mathbb{R}^{n-4}=\mathbb{R}^5$的规范定义的光滑嵌入限制在半球上。
- 将 $\mathbb{R}^{n-4}$ 到 $\mathbb{R}$的典范投影。

尽管我们在此不对欧氏空间的典范投影作严格定义，但可以按照规范方式给出定义。

这里我们为 $n=6$,7,8,9 构造映入 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射。在 ∂P 或 $\partial_0 N$（∂P）附近，我们用以下两个映射的新乘积映射替换现有的乘积映射。

- 在情形 $n=6$,7,8 下，将单位球面 S^4 到 $\mathbb{R}^{n-4}$ 的典范投影限制在半球上的映射，以及在 $n=9$ 下，将单位球面 S^4 到 $\mathbb{R}^{n-4}=\mathbb{R}^5$ 的典范定义的光滑嵌入限制在半球上的映射。前文刚刚给出了这一构造。此外，目标空间被适当地限制在欧氏空间的一个半空间内。
- 在 $\partial_0 N$（∂P）上的恒等映射。

我们用以下两个映射的乘积映射，替换 $P-\mathrm{Int}\ N$（∂P）上平凡丛的投影。

- 单位球面 $S^{9-5}=S^4$ 到 $\mathbb{R}^{n-5}$ 的典范投影。
- $P-\mathrm{Int}\ N$(∂P)上的恒等映射。

将这两个映射通过前述微分同胚的乘积粘合起来，我们便得到一个映入 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射。我们还可以这样构造，使它与到 $\mathbb{R}^5$ 的典范投影复合后，得到最初构造的特殊广义映射 $f_1\colon M_1\to\mathbb{R}^5$。至此，我们完成了对性质（4）的阐述。

根据 [1]，例如，我们有一个五维闭单连通流形 M'，其第二整系数同调群同构于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。它也是一个有理同调球面，或者说是一个闭流形，其有理同调群与球面的有理同调群同构。我们有 M'，这是一个可以光滑浸入并嵌入 $\mathbb{R}^6$的流形。请记住，在此前构造五维流形 P 时也曾出现这个流形。

我们记 $M_2:=M'\times S^4$。我们说明，对于 $n=1$ 为 2、3、4、5 的情形， M_2 上不存在映入 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射。对于 $n=1$ 为 2、3、4 的情形，我们可以像处理 M_1 的情形那样进行论证。

我们对情况 $n=5$ 进行说明。

我们应用了 [31], 的第三节中的一些论证，这些论证也被视为 [16] 的主要构成要素。

假设存在一个特殊广义映射 $f_{2,5}\colon\ M_2\to\mathbb{R}^5$，那么根据 [31],，存在一个 5 维紧致单连通流形 P_5，可被光滑

浸入到 $\mathbb{R}^5$ 中，并且 f_2 可表示为先满射到 P_5、再进行光滑浸入的复合映射。此外，对于任意交换环 A 和 $j = 1$、2、3、4， $H_j(M_2; A)$ 与 $H_j(P_5; A)$ 同构。而且，这些同构由该满射诱导，记作 $q_{f_{2,5}}$ ： $M_2 \to P_5$。令 $A := Z/2\mathbb{Z}$ ，则可取 $H^2(M_2; A)$ 的某个元素与 $H^3(M_2; A)$ 的某个元素组成的有序对，使其杯积非零。根据 M_2 是 M' 与 S^4 的乘积以及 K¨unneth 定理的定义，我们可以取到这样的元素。这也是映射 $q_{f_{2,5}}$下， $H^2(P_5; A)$ 的某个元素与 $H^3(P_5; A)$ 的某个元素组成的有序对的杯积的拉回。然而， P_5 具有一个 4 维多面体的简单同伦型。这就产生了矛盾。通过考察整系数上同调环和 K¨unneth 定理，我们也可以看出性质 (1)、(2) 和 (3) 均成立。

我们考虑单位球面$S^{9-5} = S^4$到 $\mathbb{R}^{n'}$的典范投影与 $n' = 1$、2、3、4的乘积映射，以及 M'上的恒等映射。我们可以将其视为特殊广义映射 $f_{2,\ n'+5}$ ： $M_2 \to \mathbb{R}^{n'+5}$ 对于 $n' = 1$、2、3、4。我们可以看到M_2 允许映射到 $\mathbb{R}^n$ 的特殊广义映射，对于 $n = 6$、7、8、9。为此，请记住，M' 光滑浸入并嵌入到 $\mathbb{R}^6$中。

这一论证也以更一般的方式发表于 [16]中。至此，性质（5）的证明完成。

证明完成。 □

简言之，在系数环为 $\mathbb{Z}$ 的情况下，上同调环的差异会影响映射到欧几里得空间的特殊广义映射的存在性及其维数。此外，这两个流形无法通过它们的基本群、整系数同调群，以及由所有阶为无限的元素生成的整系数上同调环的子群和我们能够在其中诱导出的整系数上同调环的子环结构来区分。这里我们给出了一个非常明确的情形，其证明以更一般的方式发表于 [17] 中。正如其中所述，我们还可以得到八维闭单连通流形的情形作为例子。

相关研究还可参见 [18] 例如。

我们的主要定理指出，类似的差异会影响映入 $\mathbb{R}^2$的圆折叠映射类型上的差异。请注意，在我们讨论的新情形中，无法考察基本群。在相当多的情况下，三维闭可定向流形由其基本群确定，这一点众所周知。

5. Acknowledgement

作者谨向 OsamuSaeki 和 Takahiro Yamamoto 致谢，感谢他们就特殊广义映射、圆折叠映射、主要定理以及我们在 [17]中的先前结果定理6展开了相关的严谨讨论。作者还要感谢 Masaharu Ishikawa 和 Yuya Koda 对本研究及相关工作 [20]提出积极且有见地的评论。

References

[1] D. Barden， *Simply Connected Five-Manifolds*，《数学年刊》（第3辑）82（1965），365–385。[2] F. Constantino 和 D. Thurston， *3-manifolds effeciently bound 4-manifolds*，《拓扑学杂志》1（2008），703–745。[3] M. I. Doig 和 P. D. Horn， *On the intersection ring of graph manifolds*，《美国数学会汇刊》（第2辑）369（2017），1185–1203，arXiv:1412.3990。

[4] J. J. Eells 和 N. H. Kuiper, *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 60（1962），93–110。[5] M. Golubitsky 和 V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics（14），Springer-Verlag（1974）。[6] A. E. Hatcher, *A proof of the Smale conjecture*, 《数学年刊》117（1983），553–607。[7] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, 《代数拓扑的现代几何化导论》，剑桥：剑桥大学出版社（2002）。[8] M. Ishikawa 和 Y. Koda, *Stable maps and branched shadows of* 3*-manifolds*, Mathematische Annalen 367（2017），第3期，1819–1863，arXiv:1403.0596。[9] M. Kervaire 和 J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres : I*, 《数学年刊》77（1963），504–537。[10] N. Kitazawa, *On round fold maps* （日文），RIMS Kokyuroku Bessatsu B38（2013），45–59。[11] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, 博士论文，东京工业大学（2014）。[12] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathemat- ical Journal 第43卷第3期（2014），327–359。[13] N. Kitazawa, *Constructions of round fold maps on smooth bundles*, Tokyo J. of Math. 第37卷第2期，385–403，arxiv:1305.1708。[14] N. Kitazawa, *Round fold maps and the topologies and the differentiable structures of manifolds admitting explicit ones* 1304 0618 ，已提交至同行评审期刊，arXiv: 。（标题已更改）。[15] N. Kitazawa, *7-dimensional simply-connected spin manifolds whose integral cohomology rings are isomorphic to that of* $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ *admit round fold maps*, 已提交至同行评审期刊，arxiv:2007.03474v8。[16] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings* 2008 04226 5 ，已提交至同行评审期刊，arxiv: 。v 。[17] N. Kitazawa, *Notes on explicit special generic maps into Euclidean spaces whose dimensionsare greater than* 4，在首次提交至同行评审期刊后，根据审稿人和编辑的积极意见（大修）提交了修订版，arxiv:2010.10078。[18] N. Kitazawa, *The images of special generic maps of several classes*, 已提交至同行评审期刊，arxiv:2011.12066。[19] N. Kitazawa, *A note on cohomological structures of special generic maps*, 在第二次提交至同行评审期刊后，根据审稿人和编辑的积极意见提交了修订版。[20] N. Kitazawa 和 O. Saeki, *Round fold maps on* 3*-manifolds*，经同行评审后已获接收，即将在 Algebraic & Geometric Topology 上发表，arXiv:2105.00974。[21] N. Kitazawa 和 O. saeki, *Round fold maps of* n*-dimensional manifolds into* $\mathbb{R}^{n-1}$，已提交至同行评审期刊，arXiv:2111.13510。[22] M. Kobayashi 和 O. saeki

1 *Simplifying stable mappings into the plane from a global view-* ， ， *point* 348 1996 2607 2636 Trans. Amer. Math. Soc.（），–。[23] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, 《数学年刊》（第2辑）64（1956），399–405。[24] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51，普林斯顿大学出版社；第1版（1963.5.1）。[25] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1965。[26] J. Milnor 和 J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies，第76号。新泽西州普林斯顿；普林斯顿大学出版社（1974）。[27] E. E. Moise,

Affine Structures in 3*-Manifold V. The Triangulation Theorem and Hauptver-* ： ， *mutung* 56， 1 1952 96 114 Ann. of Math.，第二辑，第卷第期（），–。[28] W. D. Neumann, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves* 268 1981 299 344 ， Trans. Amer. Math. Soc（），–。[29] M. Nishioka, *Special generic maps of* 5*-dimensional manifolds*, Revue Roumaine de Math‘ematiques Pures et Appliqu`ees，第LX卷第4期（2015），507–517。[30] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan 第44卷第3期（1992），551–566。[31] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49（1993），265–293。

[32] O. Saeki, *Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces*, Topology 35, 第3期（1996）, 671–698。[33] O. Saeki 和 K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Pacific J. Math. 184（1998）, 175–193。[34] O. Saeki 和 K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. 313, 617–633, 1999。[35] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39（2000）, 383–399。[36] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, 普林斯顿大学出版社（1951）。[37] V. C. Turaev, *Shadow links and face models of statistical mechanics*, J. Differential Geom. 36（1992）, 35–74。

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, 744 Motooka, Nishi-kuFukuoka 819-0395, Japan, TEL (Office): +81-92-802-4402, FAX (Office): +81-92-802-4405,*Email address*: n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp
Webpage: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html