arXiv:2301.07009v2 [math.OA] 7 Aug 2024

某类图 C*-代数的量子对称刚性

Ujjwal Karmakar 和 Arnab Mandal

Abstract. 过去几年中，人们在不同表述框架下研究了图 C^*-代数的量子对称性。众所周知，在 Joardar 和 Mandal 引入的范畴中，紧量子群 $(\underbrace{C(S^1) * C(S^1) * \cdots * C(S^1)}, \Delta)$ [（简称 $\left(C(S^1) \wr_{*} |E(\Gamma)|, \Delta\right)$]）总是作用于有限连通有向图 Γ 对应的图 C^*-代数的量子对称性。本文证明，对于包括 Toeplitz 代数、量子奇数球面、矩阵代数等在内的某类图，其相应图 C^*-代数的量子对称性在上述范畴中仍为 $\left(C(S^1) \wr_{*} |E(\Gamma)|, \Delta\right)$。更确切地说，若有限连通有向图 Γ 满足以下图论性质：(i) 不存在长度为 ≥ 2 的回路；(ii) 存在一条长度为 $(|V(\Gamma)| - 1)$的路径，包含所有顶点，其中 $|V(\Gamma)| :=$ 表示 Γ 中的顶点数；(iii) 任意给定两个顶点（可以相同），连接它们的边至多有一条，则泛对象与 $\left(C(S^1) \wr_{*} |E(\Gamma)|, \Delta\right)$ 重合。此外，我们还指出了若干违反上述假设时的反例。

关键词：图 C^*代数、紧量子群、量子对称性。AMS 学科分类：46L89、58B32、46L09。

1. 引言

1980 年，Cuntz 和 Krieger 研究了一类称为 Cuntz-Krieger 代数的 C^*代数。这类代数为算子代数学家提供了丰富的例子（参见 [9]）。它可以被视为 Cuntz 代数的推广形式；Cuntz 于 [8] 发现了 Cuntz 代数，并将其视为第一个具体的可分、单、无限 C^*代数。图 C^*代数是 Cuntz-Krieger 代数的一种推广，是由给定有向图中的一些正交投影和部分等距算子生成的泛 C^* 代数。我们可以用图 C^*代数来刻画一大类C^*代数的例子，包括矩阵代数、Toeplitz 代数、量子球面（奇数维和偶数维）、量子射影空间等。更有趣的是， C^*代数的一些算子代数性质可以从底层图中恢复，反之亦然。例如，图 C^*代数是含幺的（AF 代数），当且仅当底层图只有有限个顶点（不含回路）（参见 [17]）。值得一提的是，如果底层有限图高度连通（即图中没有汇点），图 C^* 代数可以视为 Cuntz-Krieger 代数。

另一方面，群在19世纪左右作为一个对象的对称性集合，在数学中得以建立。而紧量子群（简称CQG）则是在群出现近一百年后，由 S.L. Woronowicz 于数学中提出的，见 [29]。此外，他还通过解析构造构造了一些早期例子。在非交换几何中，数学家一直希望为非交换空间找到恰当的对称性概念。1995年，阿兰·孔涅提出了一个问题：如何为非交换空间找到真正的量子自同构群概念（见 [7]）。其核心思想是将经典群对称性推广为一种“非交换版本的对称性”。1998年，Shuzhou

Wang 为含有 n 个点的有限空间 X_n 提出了量子自同构群的概念，见 [28]。他用范畴语言研究了这个问题。已知，空间 X 的自同构群记作 $Aut(X)$，它可实现为这样一个范畴的泛对象：该范畴的对象是作用于该空间 X 上的忠实群作用（G，α），而两个群作用之间的态射，基本上是底层群之间保持作用的群同态。在量子情形下，只需将范畴中的对象替换为紧量子群，并将态射替换为紧量子群态射。虽然在经典情形下泛对象总是存在，但在量子情形下未必如此。因此，首要挑战是证明泛对象的存在，接下来的挑战则是计算相应范畴下的确切量子对称性。对于一个 n-元集合 X_n，函数代数 $C(X_n)$ 与 $\mathbb{C}^n$ 同构，且为一个 C^* 代数。Wang 已证明，尽管其经典自同构群为 S_n，量子自同构群的底层 C^* 代数却是非交换且无限维的，其规模远大于 S_n （针对 $n > 3$，见 [28]）。此外，他还对任意有限维 C^* 代数的量子自同构群进行了分类，但问题在于，除较大范畴中的 $\mathbb{C}^n$ 外，对于其他有限维情形，泛对象并不存在。通过在适当子空间上施加“保体积”条件（即保持一个忠实态），考虑该大范畴的一个子范畴，这一问题得到了解决；研究还表明，在这一受限框架下，该子范畴中存在泛对象。后来，T. Banica 和 J. Bichon 将量子对称性结构推广到有限图（见[1], [6]），而 Goswami 于 [10] 提出了量子等距群的概念（无限维情形）。几年后，T. Banica 和 A. Skalski 借鉴他们工作的关键思想，提出了带有忠实态的 C^* 代数上的正交滤过概念及其量子对称性（参见 [3]）。

有趣的是，尽管有限有向图上的函数代数是有限维的，与之关联的图 C^*-代数却可能是无限维的。因此，自然会问图 C^*-代数的量子对称性。S. Schmidt 和 M. Weber 从代数框架的角度开启了这一研究方向 [23], 而 S. Joardar 和 A. Mandal 则在更具解析性的框架下研究了图 C^*-代数的量子对称性。在 [14], 中，作者证明了其范畴中泛对象的存在；值得注意的是，按照 Banica 的定义，图 C^*-代数的量子对称群严格大于底层图的量子自同构群。此外，他们还证明，对于有限连通有向图，紧量子群$\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 总能忠实作用于任意图 C^*-代数。但自然会问：什么时候它会成为忠实作用于图C^*-代数的“最大”紧量子群？根据 [14]的定理 5.1，量子对称性恰好为 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 的情形已在简单有向路径上得到证明。此外， [14] 的定理 5.4 和命题 5.9 告诉我们，在其范畴的考量下，对于有两个顶点的完全图和 Cuntz 代数（含 n 个环），量子对称性分别是 $C(S^1) * C(S^1)$ 和 U_n^+的倍增。因此，显然不能总是指望一般情况下量子对称性是平凡的 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。本文旨在寻找一类图，使其量子对称性与关联于其图 C^*-代数的 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 一致。令人振奋的是，这一类涵盖了若干广为人知的 C^*-代数实例，例如 $C(S^1)$、Toeplitz 代数、奇维量子球面、 $SU_q(2)$、偶维量子球等。

现在，我们简要概述本文的结构：第2节回顾了关于有向图、图 C^*-代数、紧量子群及其

对 C^*-代数的作用以及量子自同构群的一些基本事实。此外，我们结合一些定义以及文献 [14] 中已证明的结果，回顾了图 C^*-代数的量子对称性。第3节描述了这样一类图：其关联的图 C^*-代数在与本文背景相关的文献 [14] 中引入的同一范畴内，以 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 作为泛对象。此外，我们还根据邻接矩阵刻画了这类图。第4节中，我们借助一些引理，将主定理（定理 4.6）的证明分为两种情形，即命题 4.4 和命题 4.5。最后一节给出了一些反例，说明如果稍稍偏离我们所期望的图类，结论可能不再成立。

2. 预备知识

2.1. 记号与约定。对于集合 X，我们用 $|X|$ 表示 X 的基数，用 id_X 表示 X 上的恒等函数。对于一个 C^*-代数 $\mathcal{B}$，$\mathcal{B}^*$ 是 $\mathcal{B}$ 上所有有界线性泛函的集合。对于集合 X，span(X) 表示由 X 中元素张成的线性空间。张量积 "$\otimes$" 表示两个 C^*- 代数之间的空间（最小）张量积。对我们而言，所有 C^*-代数都是含幺的。

2.2. 图 C^*-代数。本小节将回顾文献 [4, 5, 13, 16, 21, 22] 中关于图 C^*-代数的一些基本事实。

有向图 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ s, r\}$ 由可数的顶点集合 $V(\Gamma)$ 和边集合 $E(\Gamma)$ 以及映射 $s, r\colon E(\Gamma) \to V(\Gamma)$ 构成，这些映射描述边的源点和终点。如果存在一条边 $e \in E(\Gamma)$，使得 $v = s(e)$ 且 $w = r(e)$，我们就称 $v \in V(\Gamma)$ 与 $w \in V(\Gamma)$ 相邻（记作 $v \to w$）。若 $|V(\Gamma)|$ 和 $|E(\Gamma)|$ 均为有限集，则称图是有限的。本文中，若对每个顶点 $v \in V(\Gamma)$，$s^{-1}(v)$ 或 $r^{-1}(v)$ 至少有一个非空，则称有向图是连通的。有向图 Γ 中一条长度为 n 的路径 α，是由 Γ 中的边构成的序列 $\alpha = e_1e_2\cdots e_n$，满足对 $1 \le i \le (n-1)$, $r(e_i) = s(e_{i+1})$。$s(\alpha)\colon = s(e_1)$，且 $r(\alpha)\colon = r(e_n)$。若有向图 Γ 中一条长度为 n 的路径满足对 $i \ne j$，$s(\alpha) = r(\alpha)$ 且 $s(e_i) \ne s(e_j)$，则称其为长度为 n 的回路。环是长度为 1 的回路。

设 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ s,\ r\}$ 是一个有限有向图，其具有 $|V(\Gamma)| = n$。相对于顶点的排序（v_1，v_2，...，v_n），Γ 的邻接矩阵是矩阵 $(a_{ij})_{i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n}$ 其中 $a_{ij} = \begin{cases} n(\ v_i\ v_j\ \ if\ v_i \to v_j\ ,), & \text{而 } n(v_i, v_j) \text{ 表} \\ 0 \qquad\qquad otherwise \end{cases}$

示连接 v_i与v_j的边数。

在本文中，我们仅对有限有向图定义图 C^*-代数。

定义 2.1. 给定一个有限有向图 Γ，图 C^*-代数 $C^*(\Gamma)$ 是由部分等距算子 $\{S_e\colon\ e \in E(\Gamma)\}$ 和正交投影 $\{p_v\colon\ v \in V(\Gamma)\}$ 生成的一个泛 C^*-代数，并满足

(i) 对所有 $e \in E(\Gamma)$，$S_e^*S_e = p_{r(e)}$。 (ii) $p_v = \sum_{\{f\ s\ f\ :\ ()=v\}} S_fS_f^*$ 对所有满足 $s^{-1}(v) \ne \emptyset$ 的 $v \in V(\Gamma)$。

对于任意图 C^*-代数，我们都有以下有趣的结果。

命题 2.2. 对于有限有向图 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ s,\ r\}$

(i) 对所有 $e \ne f$，$S_e^*S_f = 0$。(ii) $\sum\ p_v = 1_{v \in V\ (\Gamma)}$ (iii) $S_eS_f \ne 0 \Leftrightarrow r(e) = s(f)$，即 ef 是一条路径。此外，对于 $i = 1$，2，...，$(k-1)$，$S_\gamma := S_{e_1}S_{e_2}...S_{e_k} \ne 0 \Leftrightarrow r(e_i) = s(e_{i+1})$，即 $\gamma = e_1e_2...e_k$ 是一条路径。

(iv) $S_eS_f^* \neq 0 \Leftrightarrow r(e) = r(f)$。(v) $span\{S_\gamma S_\mu^* : \gamma, \mu \in E^{<\infty}(\Gamma),$ 其中 $r(\gamma) = r(\mu)\}$ 在 $C^*(\Gamma)$ 中稠密，其中 $E^{<\infty}(\Gamma)$ 表示所有有限长度路径的集合。

2.3. 紧量子群与量子自同构群。本小节将回顾一些与紧量子群及其在给定C^*代数上的作用相关的重要事实。更多详情请参阅 [18, 28, 29, 26, 20] 。

定义 2.3. 紧量子群（CQG）是一个二元组（$\mathcal{Q}$, Δ），其中 $\mathcal{Q}$ 是一个含幺的 C^*代数，且 $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}$ 是一个含幺的 C^*同态，并满足

（i）$(id_{\mathcal{Q}} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id_{\mathcal{Q}})\Delta$。（ii） $span\{\Delta(\mathcal{Q})(1 \otimes \mathcal{Q})\}$ 和 $span\{\Delta(\mathcal{Q})(\mathcal{Q} \otimes 1)\}$ 在 $(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q})$ 中稠密。

给定两个紧量子群 $(\mathcal{Q}_1, \Delta_1)$ 和 $(\mathcal{Q}_2, \Delta_2)$，从 $\mathcal{Q}_1$ 到 $\mathcal{Q}_2$ 的紧量子群态射（CQG 态射）是一个 C^*-同态 $\phi : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$，满足 $(\phi \otimes \phi)\Delta_1 = \Delta_2\phi$ 。

对于任意紧量子群 $\mathcal{Q}$，都存在一个典范的 Hopf $*$-代数 $\mathcal{Q}_0 \subseteq \mathcal{Q}$，它在 $\mathcal{Q}$中稠密。此外，可以在稠密的 Hopf $*$-代数 $\mathcal{Q}_0$上定义反元 κ 和余单位 ϵ 。

例子:

(1) 令 $C(U_n^+)$ 为由 $\{q_{ij}$生成的泛 C^*-代数: $i, j \in \{1, 2, ..., n\}\}$，使得$U := (q_{ij})_{n\times n}$，并且 U^t 都是酉的。现在定义 $\Delta : C(U_n^+) \to C(U_n^+) \otimes C(U_n^+)$，使得$\Delta(q_{ij}) = \sum_{k=1}^n q_{ik} \otimes q_{kj}$。那么 (U_n^+, Δ) 表示一个紧量子群，其底层 C^*-代数为$C(U_n^+)$。（见 [27]）

(2) 设 $F \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{C})$、$A_{U^t}(F)$ 是由 $\{q_{ij} : i, j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ 生成的普适 C^*-代数，使得

- U^t 是酉的。
- $UF^{-1}U^*F = F^{-1}U^*FU = Id_{n\times n}$。

同样，余乘法在生成元 $\{q_{ij}\}_{i,j=1,2,...,n}$ 上定义为 $\Delta(q_{ij}) = \sum_{k=1}^n q_{ik} \otimes q_{kj}$。可以证明 $(A_{U^t}(F), \Delta)$ 是一个紧量子群。注意，$(A_{U^t}(Id_{n\times n}), \Delta) = (U_n^+, \Delta)$。（详见 [18]）

(3) 交换 C^*-代数 $C(S^1)$ 可视为由酉元素 z 生成的普适 C^*-代数，即 $C(S^1) = \{z \mid zz^* = z^*z = 1\}$。现在，在生成元 z 上定义余乘法为 $\Delta(z) = z \otimes z$。根据定义很容易验证，$(C(S^1), \Delta)$ 构成一个交换紧量子群。

现在，m（≥ 2）个 $C(S^1)$ 的自由积（记为 $\left(*_m C(S^1), \Delta\right)$）可由 m 酉元素 $\{z_i\}_{i=1}^m$ 表示，即 $\{z_1, z_2, ..., z_m \mid z_iz_i^* = z_i^*z_i = 1\ \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}\}$。在 $\{z_i\}_{i=1,...,m}$ 上定义余乘法 Δ：$\Delta(z_i) = (z_i \otimes z_i)$，且 $\left(*_m C(S^1), \Delta\right)$ 是一个紧量子群。它具有以下泛性质:

如果 $(\mathcal{Q}, \Delta)$ 是由酉元 m unitaries $\{u_i\}_{i=1,2,...,m}$ 生成的紧量子群，且对于所有$i \in \{1, 2, ..., m\}$ 都有 $\Delta(u_i) = u_i \otimes u_i$，那么存在一个从 $\left(*_m C(S^1), \Delta\right)$ 到 $(\mathcal{Q}, \Delta)$ 的满射紧量子群态射，它对所有 $i \in \{1, 2, ..., m\}$ 都将 $z_i \mapsto u_i$ 映射为 $i \in \{1, 2, ..., m\}$。（参见 [27]）

(4) 酉易紧致量子群 $H_n^{\infty+}$定义为由 $\{q_{ij}: i,j \in \{1,2,...,n\}\}$ 生成的泛 C^*-代数，使得

• 矩阵 $(q_{ij})_{n\times n}$ 和 $(q_{ij}^*)_{n\times n}$ 是酉的。

对于所有 i,j，• q_{ij}'s 都是正规部分等距算子。

生成元上的余乘法 Δ 仍由 $\Delta(q_{ij}) = \sum_{k=1}^n q_{ik} \otimes q_{kj}$ 给出。（有关酉易量子群的详细信息，请参见 [25] ）

(5) 设 (Q,Δ) 是一个紧量子群，并具有一个自同构 φ，使得 $\varphi^2 = id_Q$。Q 的倍增是一个紧量子群（记作 $(\mathcal{D}_\varphi(Q)\ \Delta_\varphi)$），其底层 C^*-代数为 $Q \oplus Q$，余乘法 Δ_φ 定义为

$$\Delta_\varphi \circ \zeta = (\zeta \otimes \zeta + \eta \otimes [\eta \circ \varphi]) \circ \Delta,$$
$$\Delta_\varphi \circ \eta = (\zeta \otimes \eta + \eta \otimes [\zeta \circ \varphi]) \circ \Delta,$$

其中 $\zeta,\eta\colon Q \to Q \oplus Q$，使得 $\zeta(a) = (a,0)$，且 $\eta(b) = (0,b)$（有关该构造，请参见[24]）。

关于本小节以下定义和讨论，请读者参阅 [28] 和[6]。

定义 2.4. 若紧量子群 $(\mathcal{Q},\Delta)$ 满足以下条件，则称其忠实作用于含幺 C^*-代数 $\mathcal{C}$：存在一个含幺 C^*-同态 $\alpha\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{Q}$，使得

(i) $(\alpha \otimes id_{\mathcal{Q}})\alpha = (id_{\mathcal{C}} \otimes \Delta)\alpha$.(ii) $span\{\alpha(\mathcal{C})(1 \otimes \mathcal{Q})\}$ 在 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{Q}$. 中稠密 (iii) 由集合 $\{(\theta \otimes id)\alpha(\mathcal{C})\colon \theta \in \mathcal{C}^*\}$ 生成的 $*$-代数在 $\mathcal{Q}$ 中范数稠密。

$((\mathcal{Q},\Delta)\ \alpha)$ 也称为 $\mathcal{C}$ 的量子变换群。

给定一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{C}$，可以引入一个范畴 $\mathfrak{C}$，其对象为 $\mathcal{C}$ 的量子变换群，而从 $((\mathcal{Q}_1,\Delta_1)\ \alpha_1)$ 到 $((\mathcal{Q}_2,\Delta_2)\ \alpha_2)$ 的态射是一个紧量子群态射 $\phi\colon(\mathcal{Q}_1,\Delta_1) \to (\mathcal{Q}_2,\Delta_2)$，满足 $(id_{\mathcal{C}} \otimes \phi)\alpha_1 = \alpha_2$。该范畴称为 $\mathcal{C}$ 的量子变换群范畴。

范畴 $\mathfrak{C}$ 的泛对象是一个 $\mathcal{C}$ 的量子变换群，记作 $\widehat{\ }\ \widehat{\ }((\mathcal{Q},\Delta)\ \widehat{\alpha})$，满足以下泛性质：

对于 $\mathcal{C}$ 的量子变换群范畴中的任意对象 $((\mathcal{B},\Delta_{\mathcal{B}})\ \beta)$，存在一个$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }\ \widehat{\ }\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\widehat{\ }$
满射紧量子群态射 $\phi\colon(\mathcal{Q},\Delta) \to (\mathcal{B},\Delta_{\mathcal{B}})$，使得 $(id_{\mathcal{C}} \otimes \phi)\widehat{\alpha} = \beta$。

定义 2.5. 给定一个含幺 C^*-代数 $\mathcal{C}$，若泛对象存在，则 $\mathcal{C}$ 的量子自同构群是 $\mathcal{C}$ 的量子变换群范畴中泛对象的底层紧量子群。

注 2.6. 在上述范畴中，泛对象通常可能不存在。为保证泛对象存在，通常按以下方式将范畴限制为一个子范畴：

固定一个线性泛函 $\tau\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$。现在定义一个子范畴 $\mathfrak{C}_\tau$，其对象为满足条件 $(\tau \otimes id)\alpha(.) = \tau(.).1$ 的 $\mathcal{C}$ 的量子变换群 $((\mathcal{Q},\Delta)\ \alpha)$，其中该条件在 $\mathcal{C}$ 的某个适当子空间上成立；态射则如上所述。

例子：

（1）对于 n 点空间 X_n，$C(X_n)$ 的量子变换群范畴中的泛对象存在，并且量子自同构群

$C(X_n)$ 的底层 C^*-代数是由 $\{u_{ij}\}_{i,\ j=1,\ 2,\ .....n}$ 生成的泛 C^*-代数，满足以下关系：

- $u_{ij}^2 = u_{ij} = u_{ij}^*$ 对所有 $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,
- $\sum_{k=1}^n u_{ik} = \sum_{k=1}^n u_{kj} = 1$ 对所有 $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$。

此外，生成元上的余乘法由 $\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$ 给出。于是， $C(X_n)$ 的量子自同构群是量子置换群， S_n^+ (更多详情见 [28, 2])。

(2) 对于 C^*-代数 $M_n(\mathbb{C})$， $M_n(\mathbb{C})$ 的量子变换群范畴中的泛对象（对于 $n \geq 2$）并不存在。但如果我们固定 $M_n(\mathbb{C})$ 上由 $\tau'(A) = Tr(A)$ 定义的线性泛函 τ'，并假设该范畴中的任意对象也保持τ'，即在 $M_n(\mathbb{C})$ 上有 $(\tau' \otimes id)\alpha(.) = \tau'(.)$。1，那么泛对象将在 $\mathfrak{C}_{\tau'}$ 中存在（更多详情见[28] ）。

2.4. 图 C^*-代数的量子对称性。设 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 是一个有限连通图。由于 Γ 连通，只需定义对应于边的部分等距算子上的作用。

定义 2.7。（ [14] 的定义 3.4）给定一个连通图 Γ，若紧量子群 $\mathcal{Q}$ 在 C^*-代数 $C^*(\Gamma)$ 上的忠实作用 α 满足 $\alpha(S_e) = \sum_{f \in E(\Gamma)} S_f \otimes q_{fe}$，其中对每个 e， $q_{ef} \in \mathcal{Q}$ $f \in E(\Gamma)$，则称该作用为线性的。

Let

1) $\mathcal{I} = \{u \in V(\Gamma)$: u 不是 $\Gamma\}$ 中任何边的源点 2) $E' = \{(e, f) \in E(\Gamma) \times E(\Gamma)$: $S_e S_f^* \neq 0\} = \{(e, f) \in E(\Gamma) \times E(\Gamma)$: $r(e) = r(f)\}$

• 可以证明， $\{p_u, S_e S_f^*$: $u \in \mathcal{I}$， $(e, f) \in E'\}$ 是一个线性无关集。（[14]中的引理 3.2）

现在，定义 $\mathcal{V}_{2,\ +} = span\{p_u, S_e S_f^*$: $u \in \mathcal{I}$， $(e, f) \in E'\}$ 以及一个线性泛函 τ: $\mathcal{V}_{2,\ +} \to \mathbb{C}$ 其定义为$\tau(S_e S_f^*) = \delta_{ef}$， $\tau(p_u) = 1$ 对所有的 $(e, f) \in E'$和 $u \in \mathcal{I}$均成立。（参见 [14]的第 3.1 小节）
• 可以验证， $\alpha(\mathcal{V}_{2,\ +}) \subseteq \mathcal{V}_{2,\ +} \otimes \mathcal{Q}$。（ [14]中的引理 3.6）
因此，方程 $(\tau \otimes id)\alpha(.) = \tau(.)$.1 在 $\mathcal{V}_{2,\ +}$ 上是有意义的。

定义 2.8。（ [14]中的定义 3.7）对于有限连通图 Γ，定义一个范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$，其对象为 $((\mathcal{Q}, \Delta)\ \alpha)$，即 $C^*(\Gamma)$ 的量子变换群，使得 $(\tau \otimes id)\alpha(.) = \tau(.)$.1 在 $\mathcal{V}_{2,\ +}$上成立。从 $((\mathcal{Q}_1, \Delta_1)\ \alpha_1)$ 到 $((\mathcal{Q}_2, \Delta_2)\ \alpha_2)$ 的态射由一个紧量子群态射 Φ: $\mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ 给出，并满足 $(id_{C^*(\Gamma)} \otimes \phi)\alpha_1 = \alpha_2$。

F^Γ 是一个 $(|E(\Gamma)| \times |E(\Gamma)|)$ 矩阵，满足 $(F^\Gamma)_{ef} = \tau(S_e^* S_f)$。可以证明， F^Γ 是一个可逆对角矩阵。因此， $A_{U^t}(F^\Gamma)$ 是一个紧量子群。关于以下定理的证明，请参阅 [14] 中的命题 3.8 和定理 3.9。

定理 2.9. 对于有限连通图 Γ,

(1) 存在一个满射 C^*-同态，从 $A_{U^t}(F^\Gamma)$ 映到范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$中的任意对象。

(2) 范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$存在一个泛对象。

我们将范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$ 中的泛对象记为 Q_τ^{Lin}。

回顾第 2.3 小节， $\left(\underset{m}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 具有紧量子群结构。下面的命题告诉我们，对于有限连通图 Γ，这个紧量子群总是作用在图 C^*-代数 $C^*(\Gamma)$上。更多详情请参阅 [14]中的命题 3.11 和推论 3.12。

命题 2.10. 对于有限连通有向图 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$,$\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 总属于范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$，其中 $\alpha(S_e) = S_e \otimes q_e$ 对所有 $e \in E(\Gamma)$ 均成立，且$\{q_e\}_{e\in E(\Gamma)}$ 是生成 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$的酉元。此外，对于具有 $|E(\Gamma)| \geq 2$的图 Γ， Q_τ^{Lin}的底层 C^*-代数是非交换的。

接下来，我们将看到一个图 C^*-代数的例子，其在范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$中的泛对象恰好是 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。基于这个例子，我们希望找出某类图 $\mathcal{G}$，使得对于来自 $\mathcal{G}$的每个图， $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$的泛对象仍为 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。

例:

(1) 考虑一个图 P_{m+1}，它有 $(m+1)$ 个顶点 $\{1, 2, ..., m+1\}$，并由 m 条连续边 $\{e_{12}, e_{23}, ..., e_{m(m+1)}\}$ 连接，即 $s(e_{ij}) = i$和 $r(e_{ij}) = j$。利用图 C^*-代数的关系可以证明，$C^*(P_{m+1})$ 与 $M_{(m+1)}(\mathbb{C})$ C^*同构。Wang 在 [28], 中的定理 4.1 描述了范畴 $\mathfrak{C}_{\tau'}$ 关于 $M_n(\mathbb{C})$ 的泛对象。然而，将 $M_{(m+1)}(\mathbb{C})$ 视为图 C^*- 代数 $C^*(P_{m+1})$ 时， [14] 中已证明其泛对象是范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$中的 $\left(\underset{m}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。也就是说,

定理 2.11. 对于图 P_{m+1}， Q_τ^{Lin} 与 $\left(\underset{m}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 同构。（ [14]中的定理 4.2）

3. Discussion on a special class of graph C^*-algebras

本节将给出一类特殊的图 $\mathcal{G}$，使得 Q_τ^{Lin}与图 $\Gamma \in \mathcal{G}$ 对应的图 C^*-代数同构于 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。

如果图 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 满足以下条件，我们就称其具有性质 (R):

(R1) 不存在长度为 ≥ 2 的回路。(R2) 存在一条长度为 $(|V(\Gamma)| - 1)$ 的路径，且该路径包含所有顶点。(R3) 任意给定两个顶点（可以相同），连接它们的边至多有一条

连接它们 .

Fro从现在起， $\mathcal{G}$ 表示所有满足性质 (R 的有限有向图的集合).

根据性质 (R1)、(R2) 和 (R3)，在下一个命题中，我们将刻画任意图 $\Gamma \in \mathcal{G}$ 的邻接矩阵。

命题 3.1. 图 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 满足性质 (R)，当且仅当顶点存在一种排序，使得 Γ 关于该排序的邻接矩阵具有如下

形式 $(a_{ij})_{n\times n}$ ，其中 $a_{ij} \in \begin{cases} \{0\}\ if\ i > j \\ \{1\}\ if\ j = i+1 \\ \{0, 1\}\ otherwise \end{cases}$

即，邻接矩阵y 矩阵是一个上三角 0-1矩阵，其超对角线元素全为 1 .

证明。假设 $|V(\Gamma)| = n$ 和 $\gamma = e_1e_2...e_{n-1}$ 是一条长度为 $(n-1)$ 的路径，其中包含所有顶点，且每个 e_i 都是一条边（即长度为 1 的路径）。首先，注意到对于每个 $i = 1, 2, ..., n-1$， e_i 不可能是一个环。若某个 e_j 满足此情形，则 $s(e_j) = r(e_j)$。因此，显然路径 $\gamma = e_1e_2...e_{n-1}$ 至多包含 $(n-1)$ 个顶点，这与假设矛盾。现在，对于每个 $(n-1) \geq i > 1$，我们记 $s(\gamma) = s(e_1) = 1$, $s(e_i) = r(e_{i-1}) = i$，并记 $r(e_{n-1}) = n$。按照这一顶点顺序 $(1, 2, ..., n)$，对于每个 $1 \leq i \leq (n-1)$，都有 $a_{i(i+1)} \geq 1$。由 (R3) 可得，对于每个 $1 \leq i \leq (n-1)$，都有 $a_{i(i+1)} = 1$。现在，任取两个满足 $i > j$ 的顶点 i, j。如果存在一条从 i 到 j 的边，那么该图就有一个长度为 ≥ 2 的回路，这与 (R1) 矛盾。因此， $a_{ij} = 0$ 且 $i > j$。最后，根据 (R3)，从 i 到 j 至多有一条路径，即对于 $j - i > 1$，$a_{ij} \in \{0, 1\}$。此外，每个顶点至多有一个环，即对于所有 $i \in \{1, 2, ..., n\}$， $a_{ii} \in \{0, 1\}$。

反过来，假设 Γ 的邻接矩阵具有 (a_{ij}) 的形式，其中相对于排序 $(v_1, v_2, ..., v_n)$，$a_{ij} \in \begin{cases} \{0\} \\ \{1\} \ if \ j = i+1 \\ \{0,1\} \ otherwise \end{cases}$。由于 (a_{ij}) 是上三角矩阵，该图不包含长度为 ≥ 2 的回路。对于所有 $i = 1, 2, ..., (n-1)$，恰好有一条边 e_i 连接 v_i 和 v_{i+1}。这意味着存在一条长度为 $n-1$ 的路径 $e_1e_2...e_{n-1}$，它包含所有顶点。由于每个 $a_{ij} \in \{0, 1\}$，连接 v_i 和 v_j 的边至多有一条。

□

现在，我们将指出一些众所周知的图 C^*-代数例子，其底层图属于 $\mathcal{G}$ （图 1-5）。

例子：

(1) 设 P_n （图1）为一个邻接矩阵为 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的图，满足 $a_{ij} = \begin{cases} 0 \ if \ i > j \text{ 且 } (j - i > 1) \\ 1 \ if \ j = i+1 \end{cases}$，则 $P_n \in \mathcal{G}$ 和 $C^*(P_n)$ 与 C^*同构于 $M_n(\mathbb{C})$（见 [19]）。

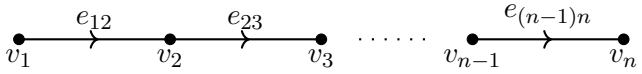

FIGURE 1. P_n

(2) 设 T （图2）是一个有 2 个顶点、邻接矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的图。那么$T \in \mathcal{G}$ 和 $C^*(T)$ 是与 C^* 同构的 Toeplitz 代数 $\mathcal{T}$ （详情请参阅 [19]）。

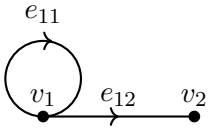

FIGURE 2. T

(3) 设 L_{2n-1}（图 3）是一个邻接矩阵为 $(a_{ij})_{n\times n}$ 且满足 $a_{ij}=\begin{cases}0\ if\ i>j\\1\ if\ i\le j\end{cases}$ 的图，那么 $L_{2n-1}\in\mathcal{G}$ 和 $C^*(L_{2n-1})$ 与奇数维量子球面 $C(S_q^{2n-1})$ 的底层 C^* 代数同构（详情请参阅 [11] 的定理 4.4）。

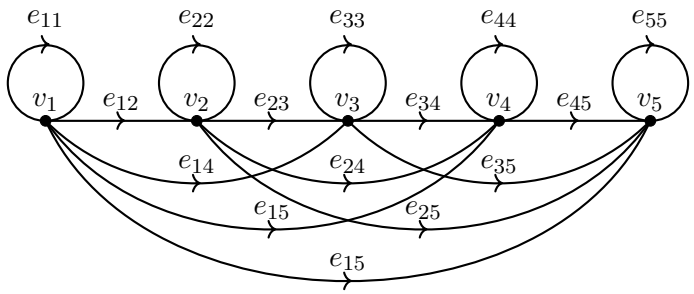

FIGURE 3. L_9

(4) 设 $\overline{L}_{2n-1}$（图 4）是一个有 n 个顶点的图，其邻接矩阵形式为 $(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases}1\ if\ i=j \text{ 且 } j=i+1\\0\ otherwise\end{cases}$，即一个所有特征值均为 1 的若尔当块。同样，$\overline{L}_{2n-1}\in\mathcal{G}$ 和 $C^*(\overline{L}_{2n-1})$ 与 C^*-代数 $C(S_q^{2n-1})$ 是 C^*-同构的（$q\in[0,1)$）。此外，众所周知，$C^*(\overline{L}_3)$ 与 $C(SU_q(2))$ 是 C^*-同构的（参见 [11] 的附录 A）。

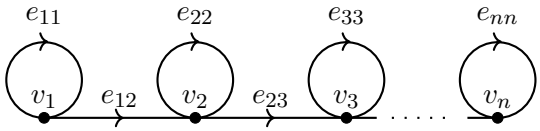

FIGURE 4. $\overline{L}_{2n-1}$

(5) 设 M_n（图 5）是一个图，其邻接矩阵为 $(n+1)\times(n+1)$，且满足 $a_{ij}=\begin{cases}0\ if\ i>j\\0\ if\ i=j=\\1\ otherwise\end{cases}$ $(n+1)$，则 $M_n\in\mathcal{G}$ 和 $C^*(M_n)$ 与偶维量子球底层的 C^*-代数 $C(B_q^{2n})$ 是 C^*-同构的（更多详情请参阅 [12]）。

4. MAIN RESULT

设 $\Gamma=\{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r,s\}$ 是一个有限连通有向图。我们将证明，关于图 $\Gamma\in\mathcal{G}$，与图 C^*-代数对应的范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$ 中的量子对称性同构于 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*}C(S^1)\ \Delta\right)$。

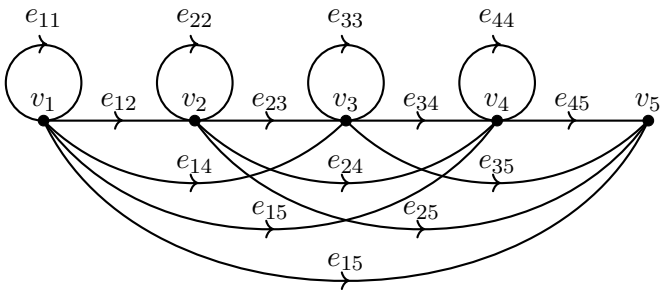

FIGURE 5. M_4

假设 $V(\Gamma) = \{1, 2, ..., n\}$，且 $\Gamma = (a_{ij})_{n\times n}$ 的邻接矩阵具有命题 3.1 中的形式（即 $\Gamma \in \mathcal{G}$）。此外，假设 Q_τ^{Lin} 由矩阵 $(q_{ef})_{|E(\Gamma)|\times|E(\Gamma)|}$ 的元素生成，其中 $e, f \in E(\Gamma)$。

我们将通过证明命题 4.4 和命题 4.5 来证明主要结果，即定理 4.6。证明这些命题需要借助以下辅助引理。

引理 4.1. 若 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 是满足以下条件的有限连通有向图:

(H 1.1) 存在某个 $h \in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(h)) \neq \emptyset$; (H 1.2) 存在 $e \in E(\Gamma)$，使得对于所有 $g \in r^{-1}(s(e)) \neq \emptyset$，要么 $r^{-1}(s(e)) = \emptyset$，要么 $q_{gh} = 0$。

那么，对于所有满足 $s(f) = r(h)$ 的 f，都有 $q_{ef} = 0$。

证明。在 $r(h)$ 处，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
p_{r(h)} = S_h^* S_h &= \sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} S_f S_f^* \ [\text{ by (H 1.1) }] \\
\Rightarrow \alpha\left(S_h^* S_h\right) &= \alpha\left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} S_f S_f^*\right) \\
\Rightarrow \sum_{g\in E(\Gamma)} S_g^* S_g \otimes q_{gh}^* q_{gh} &= \sum_{k,l\in E(\Gamma)} S_k S_l^* \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^*\right)
\end{aligned}
$$

将上方方程两边左乘 $(S_e^* \otimes 1)$、右乘 $(S_e \otimes 1)$，得到

$$\sum_{g\in E(\Gamma)} S_e^* S_g^* S_g S_e \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l\in E(\Gamma)} S_e^* S_k S_l^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right)$$

$$\Rightarrow 0 = S_e^* S_e S_e^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* \right) \text{ [by (H 1.2) and Proposition 2.2(iii)]}$$

$$\Rightarrow S_e^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* = 0$$

$$\Rightarrow q_{ef} q_{ef}^* = 0 \text{ for all } f \text{ such that } s(f) = r(h)$$

$$\Rightarrow q_{ef} = 0 \text{ for all } f \text{ such that } s(f) = r(h).$$

□

引理 4.2. 若 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 是一个满足下列条件的有限连通有向图
(H 2.1) 存在某个 $h \in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(h)) \neq \emptyset$；(H 2.2)
存在某个 $e \in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(e)) = \emptyset$.
于是 $q_{eh} = 0$。
证明。在 $r(h)$ 处，同理可得

$$\sum_{g\in E(\Gamma)} S_g^* S_g \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l\in E(\Gamma)} S_k S_l^* \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{g:r(g)=r(e)} p_{r(e)} \otimes q_{gh}^* q_{gh} + \sum_{r(g)\neq r(e)} p_{r(g)} \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l\in E(\Gamma)} S_k S_l^* \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right)$$

现在，将最后一个方程两边左乘 $(p_{r(e)} \otimes 1)$，并使用关系 $p_{r(e)} = S_e^* S_e$

$$\sum_{r(g)=r(e)} p_{r(e)} \otimes q_{gh}^* q_{gh} + \sum_{r(g)\neq r(e)} p_{r(e)} p_{r(g)} \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l\in E(\Gamma)} S_e^* S_e S_k S_l^* \otimes \left(\sum_{\{f:s(f)=r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right) \quad (1)$$

注意，e 不可能是一个环（因为，$s^{-1}(r(e)) = \emptyset$ ）。因此，根据 (H 2.2) 和命题 2.2 (iii), 对所有 $k \in E(\Gamma)$[，都有 $S_e S_k = 0$]。此外，$\{p_v$ 的正交性：$v \in V(\Gamma)\}$ 与 (1) 一起蕴含

$$\sum_{r(g)=r(e)} p_{r(e)} \otimes q_{gh}^* q_{gh} = 0$$

$$\Rightarrow q_{gh}^* q_{gh} = 0 \text{ for all } g \text{ such that } r(g) = r(e)$$

$$\Rightarrow q_{eh} = 0.$$

□

引理 4.3. 若 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 是满足以下条件的有限连通有向图：

(H 3.1) 存在某个 $h \in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(h)) \neq \emptyset$,

(H 3.2) $e \in E(\Gamma)$ 是一个环，使得 $r^{-1}(s(e)) = \{e\}$ 或对于所有 $g \in r^{-1}(s(e)) - \{e\} \neq \emptyset$., $q_{gh} = 0$。那么，对于所有 $f \in s^{-1}(r(h))$, $q_{ef} = 0 \Leftrightarrow q_{eh} = 0$。

证明。在 $r(h)$ 处，同理可写为

$$\sum_{g \in E(\Gamma)} S_g^* S_g \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l \in E(\Gamma)} S_k S_l^* \otimes \left(\sum_{\{f : s(f) = r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right)$$

现在，将上面的方程左乘 $(S_e^* \otimes 1)$、右乘 $(S_e \otimes 1)$，得到

$$\sum_{g \in E(\Gamma)} S_e^* S_g^* S_g S_e \otimes q_{gh}^* q_{gh} = \sum_{k,l \in E(\Gamma)} S_e^* S_k S_l^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f : s(f) = r(h)\}} q_{kf} q_{lf}^* \right)$$

$$\Rightarrow S_e^* S_e^* S_e S_e \otimes q_{eh}^* q_{eh} = S_e^* S_e S_e^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f : s(f) = r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* \right) \text{ [by (H 3.2)]} \tag{2}$$

由于 e 是一个 $\mathfrak{pop}$,

$$S_e^* S_e = S_e S_e^* + \sum_{\{f :\ s(f) = s(e),\ f \neq e\}} S_f S_f^*$$

将上面的方程左乘 S_e^*、右乘 S_e，得到

$$S_e^* S_e^* S_e S_e = S_e^* S_e S_e^* S_e + \sum_{\{f :\ s(f) = s(e),\ f \neq e\}} S_e^* S_f S_f^* S_e$$

$$\Rightarrow S_e^* S_e^* S_e S_e = S_e^* S_e S_e^* S_e = S_e^* S_e \text{ [Since } S_e^* S_f = 0 \text{ for } e \neq f \text{]}$$

因此，利用方程 (2),

$$S_e^* S_e \otimes q_{eh}^* q_{eh} = S_e^* S_e \otimes \left(\sum_{\{f : s(f) = r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* \right)$$

因此,

$$q_{eh}^* q_{eh} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{\{f : s(f) = r(h)\}} q_{ef} q_{ef}^* \right) = 0$$

i.e.

$$q_{eh} = 0 \Leftrightarrow q_{ef} = 0 \text{ for all } f \in s^{-1}(r(h)).$$

□

在开始证明命题 4.4 和命题 4.5 之前，为方便起见，我们定义如下:

$$Q_{ef} := q_{ef}^* q_{ef}.$$

此外，我们陈述一些将在证明这些命题时反复用到的事实。

（事实1） $Q_{ef} = 0 \Leftrightarrow q_{ef} = 0$.

（事实2）由于对于每个固定的 g， $U^t=(q_{ef})^t_{e,f\in E(\Gamma)}$ 是酉的

$$\sum_{k\in E(\Gamma)} q^*_{gk}q_{gk}=1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k\in E(\Gamma)} Q_{gk}=1.$$

（事实 3）对于每个 $g\in E(\Gamma)$

$$Q_{gg}=1\Leftrightarrow Q_{gk}=0 \text{ for all } k\neq g \text{ [using (Fact 2)]}. \tag{3}$$

（事实 4）若 $q_{ef}=0$，则在两边应用反元 κ，可得 $q_{fe}=0$。

命题 4.4. 设 $\Gamma\in\mathcal{G}$ 满足 $a_{11}=1$，即顶点 1 上存在一个环。则$Q_\tau^{Lin}\cong\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*}C(S^1)\ \Delta\right)$。

证明。注意到 $a_{11}=1$，即根据该命题的假设，顶点 1 上存在一个环。

证明该命题的主要思路如下：

策略：对于每个顶点 $u\in\{1,2,...n\}$，我们将证明，对于所有满足 $r(e)=u$ 的 $e\in E(\Gamma)$，都有 $q^*_{ee}q_{ee}=1$。这将通过归纳法证明。

令， $\mathcal{S}(u)$：对于所有满足 $r(e)=u$ 的 $e\in E(\Gamma)$，都有 $q^*_{ee}q_{ee}=1$。因此，我们的策略正是证明对于所有 $u\in\{1,2,...n\}$， $\mathcal{S}(u)$ 都成立。

由于图 $\Gamma\in\mathcal{G}$ 没有重边，我们将连接 i 和 j 的边记为 e_{ij}，即 $s(e_{ij})=i$且 $r(e_{ij})=j$。

若 $\Gamma\in\mathcal{G}$ 满足 $E(\Gamma)=\{e_{11}\}$，则显然 $Q_\tau^{Lin}\cong C(S^1)$。因此，我们可以假设 $\Gamma\in\mathcal{G}$ 满足$|E(\Gamma)|>1$。这意味着 $|V(\Gamma)|=n>1$。现在，我们的目标是证明 (1) $\mathcal{S}$成立。由于 $\sum_{i=1}^n p_i=1$,

$$S^*_{e_{11}}S_{e_{11}}+S^*_{e_{12}}S_{e_{12}}+S^*_{e_{23}}S_{e_{23}}+\cdots+S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}}=1 \tag{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{e_{kl}\in E(\Gamma)} S^*_{e_{kl}}S_{e_{kl}}\otimes(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1\otimes 1 \tag{5}$$

$$\Rightarrow\sum_{u=1}^n p_u\otimes\left\{\sum_{r(e_{kl})=u}(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})\right\}=1\otimes 1=\left(\sum_{u=1}^n p_u\right)\otimes 1 \tag{6}$$

$$\Rightarrow\sum_{u=1}^n p_u\otimes\left\{\sum_{r(e_{kl})=u}(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})-1\right\}=0. \tag{7}$$

由于 $\{p_u\}_{u=1}^n$是一个线性无关集，因此对于每个 $u\in\{1,2,...n\}$

$$\sum_{r(e_{kl})=u}(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1 \tag{8}$$

对于 $u=1$,

$$(Q_{e_{11}e_{11}}+Q_{e_{11}e_{12}}+Q_{e_{11}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{11}e_{(n-1)n}})=1=\sum_{e_{kl}\in E(\Gamma)}Q_{e_{11}e_{kl}}$$

$$\Rightarrow Q_{e_{11}e_{kl}}=0 \text{ for all } e_{kl}\in E(\Gamma) \text{ but } (k,l)\notin\{(1,1),(1,2),...,(n-1,n)\}$$

$$\Rightarrow q_{e_{11}e_{kl}}=0 \text{ for all } e_{kl}\in E(\Gamma) \text{ but } (k,l)\notin\{(1,1),(1,2),...,(n-1,n)\}.$$

现在，还需证明 $q_{e_{11}e_{kl}}=0$ 对所有 $(k,l)\in\{(1,2),...,(n-1,n)\}$。
为证明这一点，我们根据顶点 n 处是否存在环，分别讨论各种情形。
• 假设存在一个 $=1$，即顶点 n 处存在一个环。
我们已经有 $q_{e_{11}e_{nn}}=0$. 注意，e_{11} 是一个环，满足 $r^{-1}(s(e_{11}))=\{e_{11}\}$ 且 $e_{(n-1)n}\in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(e_{(n-1)n}))\neq\emptyset$。因此，由引理 4.3，$q_{e_{11}e_{(n-1)n}}=0$ （因为 $q_{e_{11}e_{nn}}=0$）。

• 假设 $a_{nn}=0$，即顶点 n处不存在任何环。
$e_{(n-1)n}\in E$（Γ），满足 $s^{-1}(r(e_{(n-1)n}))=\emptyset$ 且 $e_{11}\in E(\Gamma)$，使得 $s^{-1}(r(e_{11}))\neq\emptyset$。因此，由引理 4.2，$q_{e_{(n-1)n}e_{11}}=0$，即 $q_{e_{11}e_{(n-1)n}}=0.$

现在，$e_{(n-2)(n-1)}$ 和 e_{11} 分别满足假设 (H 3.1) 和 (H 3.2)。此外，对于所有 $f\in s^{-1}(r(e_{(n-2)(n-1)}))$，$q_{e_{11}f}=0$。因此，$q_{e_{11}e_{(n-2)(n-1)}}=0$。通过反复应用引理 4.3，我们还得到对于所有 $(k,l)\in\{(1,2),...,(n-1,n)\}$，$q_{e_{11}e_{kl}}=0$。因此，对于所有 $(k,l)\neq(1,1)$，$q_{e_{11}e_{kl}}=0$。换言之，$q^*_{e_{11}e_{11}}q_{e_{11}e_{11}}=1$。因此，我们可以说，对于所有满足 $r(e)=1$ 的 $e\in E(\Gamma)$，$q^*_{ee}q_{ee}=1$，即 (1) 成立。

假设对于所有 $i\in\{1,2,...,(t-1)\}$，$\mathcal{S}(i)$ 都成立。我们将证明 $\mathcal{S}(t)$ 也成立。

（情形：1）假设 $a_{tt}=1$，即顶点 t 处有一个环。
只需替换 t^{th} 项，我们就可以重写方程（4）

$$S^*_{e_{11}}S_{e_{11}}+S^*_{e_{12}}S_{e_{12}}+S^*_{e_{23}}S_{e_{23}}+\cdots+S^*_{e_{(t-2)(t-1)}}S_{e_{(t-2)(t-1)}}+S^*_{e_{tt}}S_{e_{tt}}+\cdots+S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}}=1$$

类似地计算可得

$$\sum_{u\in\{1,2,...n\}r(e_{kl})=u}(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}}+Q_{e_{kl}e_{tt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})\quad=1$$ 对于所有

特别地，令 $u=t$;

$$\sum_{r(e_{kl})=t}(Q_{e_{kl}e_{11}}+Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}}+Q_{e_{kl}e_{tt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1$$

由于根据归纳假设，对于所有满足 $r(e_{kl})=t$ 的 $e_{kl}\in E(\Gamma)$，均有
$Q_{e_{kl}e_{11}}=Q_{e_{kl}e_{12}}=...=Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}}=0$，

$$\sum_{r(e_{kl})=t}(Q_{e_{kl}e_{tt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1 \tag{9}$$

$$\Rightarrow Q_{e_{tt}e_{tt}}+Q_{e_{tt}e_{t(t+1)}}+\cdots+Q_{e_{tt}e_{(n-1)n}}+\sum_{r(e_{kl})=t,(k,l)\neq(t,t)}(Q_{e_{kl}e_{tt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1 \tag{10}$$

对于满足 $r(e_{kl})=t$ 且 $(k,l)\neq(t,t)$ 的固定 $e_{kl}\in E(\Gamma)$，根据归纳假设$q^*_{gg}q_{gg}=1$ 对所有 $g\in r^{-1}(s(e_{kl}))$ 均成立。这意味着对所有 $g\in r^{-1}(s(e_{kl}))$ [均成立，利用方程

(3)]。因此，根据引理 4.1， $q_{e_{kl}e_{tt}} = q_{e_{kl}e_{t(t+1)}} = 0$.类似地，对于每个 $m \in \{t,(t+1)...,(n-1)\}$; $e_{m(m+1)} \in E(\Gamma)$ 满足 (H 1.1)，并且 e_{kl}满足 (H 1.2)。因此，通过反复应用引理 4.1（对每个 m），$q_{e_{kl}e_{(t+1)(t+2)}} = \cdots = q_{e_{kl}e_{(n-1)n}} = 0$。因此，

$$q_{e_{kl}e_{tt}} = q_{e_{kl}e_{t(t+1)}} = ... = q_{e_{kl}e_{(n-1)n}} = 0 \text{ 对于每个 } e_{kl} \in E(\Gamma), \text{ 满足 } r(e_{kl}) = t \text{ 且 } (k,l) \neq (t,t) \tag{11}$$

由此可知， $Q_{e_{tt}e_{ij}} = 0$ 对于所有 $(i,j) \notin \{(t,t), (t,t+1)..., (n-1,n)\}$ [，根据方程（10）]。

• 假设 $a_{nn} = 1$，即 n 处存在一个环。
根据公式 (11)， $e_{tt} \in E(\Gamma)$ 是一个环，且满足 $q_{ge_{(n-1)n}} = 0$ 对所有 $g \in r^{-1}(s(e_{tt})) - \{e_{tt}\} \neq \emptyset$对于$t > 1$。因此，(H 3.1)、(H 3.2) 分别由 $e_{(n-1)n}$ 和 $e_{tt} \in E(\Gamma)$ 满足。此外，我们有 $q_{e_{tt}e_{nn}} = 0$。这意味着，根据引理 4.3， $q_{e_{tt}e_{(n-1)n}} = 0$ 。

• 假设 $a_{nn} = 0$，即 n 处不存在任何环。
注意到 $e_{tt} \in E(\Gamma)$ 满足 (H 2.1)，且 $e_{(n-1)n} \in E(\Gamma)$ 满足 (H 2.2)，因为 $s^{-1}(n) = \emptyset$。因此，根据引理 4.2， $q_{e_{tt}e_{(n-1)n}} = 0$。

对于 $t > 1$，对所有 $g \in r^{-1}(s(e_{tt})) - \{e_{tt}\} \neq \emptyset$，由公式 (11)]，我们有 $q_{ge_{tt}} = q_{ge_{m(m+1)}} = 0$ 对所有 $m \in \{t, t+1, ..., n-2\}$ [。因此， $q_{e_{tt}e_{(n-1)n}} = 0 \Rightarrow q_{e_{tt}e_{(n-2)(n-1)}} = 0$。类似地，在顶点 $(n-3)$ 处，我们已经得到 $q_{e_{tt}f} = 0$ 对所有 $f \in s^{-1}(n-3)$。因此，再次应用引理 4.3，$q_{e_{tt}e_{(n-3)(n-2)}} = 0$ 并继续此过程，直到 $e_{t(t+1)}$.

因此，根据上述讨论可得，对于所有（i， j） $\in$ {（t， $t+1$）.....，（$n-1$， n）}。因此，对于所有（k， l） $\neq$ （t， t）。换言之，$q^*_{e_{tt}e_{tt}}q_{e_{tt}e_{tt}} = 1$。

对于 $j \neq t$，只需将 t^{th} 项替换为 $S^*_{e_{jt}}S_{e_{jt}}$，即可再次改写方程（4）。因此，

$$S^*_{e_{11}}S_{e_{11}} + S^*_{e_{12}}S_{e_{12}} + S^*_{e_{23}}S_{e_{23}} + \cdots + S^*_{e_{(t-2)(t-1)}}S_{e_{(t-2)(t-1)}} + S^*_{e_{jt}}S_{e_{jt}} + \cdots + S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}} = 1$$

类似的计算可得

$$\sum_{r(e_{kl})=t} (Q_{e_{kl}e_{11}} + Q_{e_{kl}e_{12}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}} + Q_{e_{kl}e_{jt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1.$$

像之前一样，利用归纳假设可得，对于所有满足 r（e_{kl}） $= t$的 $e_{kl} \in E$（Γ），都有 $Q_{e_{kl}e_{11}} = Q_{e_{kl}e_{12}} = ... = Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}} =$0。因此，对于每个满足 $e_{jt} \in E$（Γ）的 $j \neq t$ ，

$$\sum_{r(e_{kl})=t} (Q_{e_{kl}e_{jt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1 \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & (Q_{e_{tt}e_{jt}} + Q_{e_{tt}e_{t(t+1)}} + \cdots + Q_{e_{tt}e_{(n-1)n}}) + \\ & (Q_{e_{jt}e_{jt}} + Q_{e_{jt}e_{t(t+1)}} + \cdots + Q_{e_{jt}e_{(n-1)n}}) + \\ & \sum_{r(e_{kl})=t,\ (k,l)\neq(j,t)(t,t)} (Q_{e_{kl}e_{jt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1. \end{aligned}$$

由于 $j \neq t$ 和 $Q_{e_{tt}e_{tt}} = 1$，$(Q_{e_{tt}e_{jt}} + Q_{e_{tt}e_{t(t+1)}} + \cdots + Q_{e_{tt}e_{(n-1)n}}) = 0$。因此，我们得到了一个与方程（10）几乎相同的方程。现在，完全按照前一个方程的论证方式，可以证明上述方程中除 $Q_{e_{jt}e_{jt}}$ 以外的所有其他项都为 0。因此，

对所有 $j \neq t$，$Q_{e_{jt}e_{jt}} = 1$。我们已经看到 $Q_{e_{tt}e_{tt}} = 1$。因此，综合这些事实，我们可以得出结论： $\mathcal{S}$(t) 也成立。

（情形：2）假设 $\mathbf{a_{tt}} = \mathbf{0}$，即在 t 处不存在任何环。
设 m 满足 $e_{mt} \in E(\Gamma)$。将方程（4）中的 t^{th} 项替换为 $S^*_{e_{mt}}S_{e_{mt}}$，即可改写该方程。因此，

$$S^*_{e_{11}}S_{e_{11}} + S^*_{e_{12}}S_{e_{12}} + S^*_{e_{23}}S_{e_{23}} + \cdots + S^*_{e_{(t-2)(t-1)}}S_{e_{(t-2)(t-1)}} + S^*_{e_{mt}}S_{e_{mt}} + \cdots + S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}} = 1$$

类似的计算可得

$$\sum_{r(e_{kl})=t} (Q_{e_{kl}e_{11}} + Q_{e_{kl}e_{12}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}} + Q_{e_{kl}e_{mt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1$$

再次利用归纳假设，可得对于所有满足 $r(e_{kl}) = t$ 的 $e_{kl} \in E(\Gamma)$，
$Q_{e_{kl}e_{11}} = Q_{e_{kl}e_{12}} = ... = Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}} = 0$。因此，

$$\sum_{r(e_{kl})=t} (Q_{e_{kl}e_{mt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1$$

$$\Rightarrow (Q_{e_{mt}e_{mt}} + Q_{e_{mt}e_{t(t+1)}} + \cdots + Q_{e_{mt}e_{(n-1)n}}) + \sum_{r(e_{kl})=t,\ (k,l)\neq(m,t)} (Q_{e_{kl}e_{mt}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1.$$

现在，完全按照前面的论证，在情形 1 的方程（10）之后，可以证明上述方程中除 $Q_{e_{mt}e_{mt}}$ 外的所有其他项都为 0。因此，对于每个满足 $e_{mt} \in E(\Gamma)$ 的 m，$Q_{e_{mt}e_{mt}} = 1$。因此，在这种情况下， $\mathcal{S}$(t) 也成立。至此，证明完毕。□

命题 4.5. 设 $\Gamma \in \mathcal{G}$ 满足 $a_{11} = 0$，即顶点 1 处不存在任何环。则

$$Q_\tau^{Lin} \cong \left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1), \Delta \right).$$

证明. 根据该命题的假设，注意到 $a_{11} = 0$，即顶点 1 处不存在任何环。

首先，若 $\Gamma \in \mathcal{G}$ 满足 $|E(\Gamma)| = 1$，则 $|V(\Gamma)| = 2$ 且 $E(\Gamma) = \{e_{12}\}$。在这种情况下，显然可得 $Q_\tau^{Lin} \cong C(S^1)$。因此，我们仍可假设 $|E(\Gamma)| > 1$。
从现在起，证明策略与我们在命题 4.4 中所采用的完全相同。

现在，对于任意满足 (H 1.2) 的 $e_{1x} \in E(\Gamma)$，［，因为 $r^{-1}(1) = \emptyset$］，且每个满足 $v \neq n$ 的 $e_{uv} \in E(\Gamma)$ 都满足 (H 1.1)。因此，反复使用引理 4.1，可得对于所有满足 $k \neq 1$ 的 $e_{kl} \in E(\Gamma)$，都有 $q_{e_{1x}e_{kl}} = 0$。

由于

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} S_{e_{1x}}S^*_{e_{1x}} \right) + S^*_{e_{12}}S_{e_{12}} + S^*_{e_{23}}S_{e_{23}} + \cdots + S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}} = 1 \tag{13}$$

在上述方程两边应用 α，得到

$$\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} \left(\sum_{e_{ij},e_{kl}\in E(\Gamma)} S_{e_{ij}}S^*_{e_{kl}} \otimes q_{e_{ij}e_{1x}}q^*_{e_{kl}e_{1x}} \right) + \sum_{e_{kl}\in E(\Gamma)} S^*_{e_{kl}}S_{e_{kl}} \otimes (Q_{e_{kl}e_{12}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1 \otimes 1 \tag{14}$$

现在，我们关注项 $\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)}\left(\sum_{e_{ij},e_{kl}\in E(\Gamma)} S_{e_{ij}}S_{e_{kl}}^{*}\otimes q_{e_{ij}e_{1x}}q_{e_{kl}e_{1x}}^{*}\right)$。

由于对于所有 $e_{kl}\in E(\Gamma)$ 都有 $q_{e_{1x}e_{kl}}=0$，只要 $k\neq 1$、$q_{e_{ij}e_{1x}}q_{e_{kl}e_{1x}}^{*}=0$ 中的至少一个成立，就有i、$k\neq 1$。这意味着，如果 $q_{e_{ij}e_{1x}}q_{e_{kl}e_{1x}}^{*}\neq 0$，那么它必定具有 $q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1l}e_{1x}}^{*}$ 的形式。此外，$S_{e_{ij}}S_{e_{kl}}^{*}\neq 0\Leftrightarrow r\left(e_{ij}\right)=r\left(e_{kl}\right)\Leftrightarrow j=l$。因此，如果 $S_{e_{ij}}S_{e_{kl}}^{*}\otimes q_{e_{ij}e_{1x}}q_{e_{kl}e_{1x}}^{*}\neq 0$，那么它必定具有 $S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}$ 的形式。于是，

$$\sum_{e_{1x},e_{ij},e_{kl}\in E(\Gamma)} S_{e_{ij}}S_{e_{kl}}^{*}\otimes q_{e_{ij}e_{1x}}q_{e_{kl}e_{1x}}^{*}=\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes\left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}\right).$$

结合公式（14）可得

$$\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes\left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}\right)+\sum_{e_{kl}\in E(\Gamma)} S_{e_{kl}}^{*}S_{e_{kl}}\otimes\left(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}\right)=1\otimes 1$$

$$\Rightarrow\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes\left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}\right)+\sum_{u=2}^{n} p_u\otimes\left\{\sum_{r(e_{kl})=u}\left(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}\right)\right\}=\left(\sum_{u=1}^{n} p_u\right)\otimes 1$$

$$\Rightarrow\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes\left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}\right)+\sum_{u=2}^{n} p_u\otimes\left\{\sum_{r(e_{kl})=u}\left(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}\right)-1\right\}=p_1\otimes 1$$

由于 $p_1=\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}$,

$$\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S_{e_{1j}}S_{e_{1j}}^{*}\otimes\left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}}q_{e_{1j}e_{1x}}^{*}-1\right)+\sum_{u=2}^{n} p_u\otimes\left\{\sum_{r(e_{kl})=u}\left(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}\right)-1\right\}=0$$

对于每个固定的 $i \in \{2,3,...n\}$，将上面的方程两边从左侧乘以 $p_i \otimes 1$，并利用 $p_i = S^*_{e_{(i-1)i}} S_{e_{(i-1)i}}$，我们得到

$$\sum_{e_{1j}\in E(\Gamma)} S^*_{e_{(i-1)i}} S_{e_{(i-1)i}} S_{e_{1j}} S^*_{e_{1j}} \otimes \left(\sum_{e_{1x}\in E(\Gamma)} q_{e_{1j}e_{1x}} q^*_{e_{1j}e_{1x}} - 1 \right) + \sum_{u=2}^{n} p_i p_u \otimes \left\{ \sum_{r(e_{kl})=u} (Q_{e_{kl}e_{12}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) - 1 \right\} = 0$$

由于 $i \neq 1, S_{e_{(i-1)i}} S_{e_{1j}} = 0$ 对所有 j，且 $\{p_i\}_{i=2,...,n}$ 的正交性意味着对每个 $u \in \{2,...,n\}$

$$\sum_{r(e_{kl})=u} (Q_{e_{kl}e_{12}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1 \tag{15}$$

现在，策略与我们在命题 4.4 中所采用的完全相同。注意，$r^{-1}(1) = \emptyset$（因为 $\Gamma \in \mathcal{G}$ 满足 $a_{11} = 0$）。因此，这与 $\mathcal{S}(1)$ 无关。于是，我们将证明 $\mathcal{S}(2)$ 成立。

对于每个满足 $e_{y2} \in E(\Gamma)$ 的 y（即 y 的可能取值为 1 和 2），只需将 p_2 的值设为 $S^*_{e_{y2}} S_{e_{y2}}$，即可改写公式 (13)，得到

$$\left(\sum_{e_{1k}\in E(\Gamma)} S_{e_{1k}} S^*_{e_{1k}} \right) + S^*_{e_{y2}} S_{e_{y2}} + S^*_{e_{23}} S_{e_{23}} + \cdots + S^*_{e_{(n-1)n}} S_{e_{(n-1)n}} = 1$$

类似地，可以推导出

$$\sum_{r(e_{kl})=u} (Q_{e_{kl}e_{y2}} + Q_{e_{kl}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}}) = 1 \tag{16}$$

现在，观察到 $e_{12} \in E(\Gamma)$，使得 $r^{-1}(s(e_{12})) = \emptyset$和 $e_{m(m+1)} \in E(\Gamma)$，且 $s^{-1}(r(e_{m(m+1)})) = s^{-1}(m+1) \neq \emptyset$对所有 $m = 1$、2、...、$(n-1)$ 都成立。因此，根据引理 4.1，$q_{e_{12}e_{kl}} = 0$ 对所有 $k \in \{2,3,...,n\}$ 都成立。特别地，$q_{e_{12}e_{23}} = q_{e_{12}e_{34}} = ... = q_{e_{12}e_{(n-1)n}} = 0$。此外，注意到如果 $e_{22} \in E(\Gamma)$，那么 $q_{e_{12}e_{22}} = 0$。

现在，根据顶点处是否存在环，分为两种情况 2.

（情况 1）假设 $a_{22} = 1$，即顶点 2 处存在一个环。

首先，将 $u = 2$ 和 $y = 2$ 代入方程（16），得到

$$(Q_{e_{12}e_{22}} + Q_{e_{12}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{12}e_{(n-1)n}}) + (Q_{e_{22}e_{22}} + Q_{e_{22}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{22}e_{(n-1)n}}) = 1.$$

由于 $Q_{e_{12}e_{22}} = Q_{e_{12}e_{23}} = \cdots = Q_{e_{12}e_{(n-1)n}} = 0$，上述方程化简为

$$(Q_{e_{22}e_{22}} + Q_{e_{22}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{22}e_{(n-1)n}}) = 1.$$

因此，对于所有 $(i,j) \notin \{(2,2),(2,3)...,(n-1,n)\}$ [，利用（事实2）]。现在，我们的目标是证明 $Q_{e_{22}e_{23}} = \cdots = Q_{e_{22}e_{(n-1)n}} = 0$。论证与命题 4.4 中公式 (11) 之后所做的完全相同。因此，根据上述方程，可以证明对于所有 $(k,l) \neq (2,2)$，$q_{e_{22}e_{kl}} = 0$。因此，$Q_{e_{22}e_{22}} = 1$。

Secondly, by putting $u = 2$ and $y = 1$ in Equation (16) we have

$$(Q_{e_{12}e_{12}} + Q_{e_{12}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{12}e_{(n-1)n}}) + (Q_{e_{22}e_{12}} + Q_{e_{22}e_{23}} + \cdots + Q_{e_{22}e_{(n-1)n}}) = 1.$$

我们已经证明，上述方程中除 $Q_{e_{12}e_{12}}$ 以外的所有项均为 0。因此，$Q_{e_{12}e_{12}} = 1$。

（情况：2）假设 $\mathbf{a_{22}=0}$，即顶点 2 处不存在任何环。在这种情况下，方程（16）$u=2$ 将具有如下形式

$$(Q_{e_{12}e_{12}}+Q_{e_{12}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{12}e_{(n-1)n}})=1.$$

由于 $q_{e_{12}e_{23}}=...=q_{e_{12}e_{(n-1)n}}=0$，显然 $Q_{e_{12}e_{12}}=1$。
结合这两种情形，可知 $\mathcal{S}(2)$ 成立。

再次根据归纳假设，$\mathcal{S}(i)$ 对 $i=1$、2、.....、$(t-1)$ 成立。现在，我们将证明 $\mathcal{S}(t)$ 也成立。

同样，我们根据顶点 t 处是否存在环，将证明分为两种情形。（情形 1）假设 $\mathbf{a_{tt}=1}$，即 t 处存在一个环。对于每个满足 $e_{yt}\in E(\Gamma)$ 的 y，只需将 p_t 的值设为 $S^*_{e_{yt}}S_{e_{yt}}$，即可改写公式 (13)，于是得到

$$\left(\sum_{e_{1k}\in E(\Gamma)}S_{e_{1k}}S^*_{e_{1k}}\right)+S^*_{e_{12}}S_{e_{12}}+S^*_{e_{23}}S_{e_{23}}+\cdots+S^*_{e_{yt}}S_{e_{yt}}+\cdots+S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}}=1$$

类似的计算可得

$$\sum_{r(e_{kl})=u}(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{yt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1.$$

将 $u=t$ 代入上面的方程。

$$\sum_{r(e_{kl})=t}(Q_{e_{kl}e_{12}}+Q_{e_{kl}e_{23}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{yt}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1.$$

根据归纳假设，$Q_{e_{kl}e_{12}}=Q_{e_{kl}e_{23}}=...=Q_{e_{kl}e_{(t-2)(t-1)}}=0$。因此，对于每个$e_{yt}\in E(\Gamma)$,

$$\sum_{r(e_{kl})=t}(Q_{e_{kl}e_{yt}}+Q_{e_{kl}e_{t(t+1)}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1 \tag{17}$$

现在，我们遇到了与命题 4.4 中相同的情形。注意，带有 $y=t$ 的方程（17）以及针对 $y=j\neq t$ 的方程（17），分别与方程（9）和（12）完全相同。因此，像前一种情形一样依次讨论这两种情况，我们便能证明，对于每个满足 $e_{mt}\in E(\Gamma)$的 m，$Q_{e_{mt}e_{mt}}=1$。
因此，在这种情况下，$\mathcal{S}(t)$成立。

（情形：2）假设 $\mathbf{a_{tt}=0}$，即 t 处不存在任何环。证明与命题 4.4 的（情形 2）类似。我们只需从 e 开始 方程

$$\left(\sum_{e_{1k}\in E(\Gamma)}S_{e_{1k}}S^*_{e_{1k}}\right)+S^*_{e_{12}}S_{e_{12}}+S^*_{e_{23}}S_{e_{23}}+\cdots+S^*_{e_{mt}}S_{e_{mt}}+\cdots+S^*_{e_{(n-1)n}}S_{e_{(n-1)n}}=1$$

其中 $m\in\{1,2,...,n\}$ 满足 $e_{mt}\in E(\Gamma)$。

通过类似的计算，我们将得到

$$\sum_{r(e_{kl})=t}(Q_{e_{kl}e_{mt}}+Q_{e_{kl}e_{t(t+1)}}+\cdots+Q_{e_{kl}e_{(n-1)n}})=1$$

证明的其余部分与我们在方程（10）之后所用的论证类似，利用这一点可以证明，对于所有满足 $e_{mt}\in E(\Gamma)$ 的 m，都有 $Q_{e_{mt}e_{mt}}=1$。因此，$\mathcal{S}(t)$ 也成立

对于这种情况。因此，我们再次完成了证明。

□

最后，结合上述两个命题，我们便得出主定理。

定理 4.6. 设 $\Gamma = \{V(\Gamma)\ E(\Gamma)\ r, s\}$ 是一个满足以下图论性质的有限连通有向图：(R1) 不存在长度为 ≥ 2 的回路；(R2) 存在一条长度为 $(|V(\Gamma)|-1)$ 的路径，包含所有顶点；(R3) 任意给定两个顶点（可以相同），至多有一条边连接它们，则 (Q_τ^{Lin}, Δ) 与 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 在紧量子群意义下同构，

换言之，对于任意 $\Gamma \in \mathcal{G}$, $Q_\tau^{Lin} \cong \left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。

证明。由于 $\Gamma \in \mathcal{G}$，我们可以将证明分为两种情形：(i) $a_{11} = 1$ 和 (ii) $a_{11} = 0$。根据命题 4.4 和命题 4.5，这两种情形分别都得证。

□

5. 反例

本节构造一些反例，以帮助我们理解这一类图的重要性。若稍微偏离 (R) 中的任一假设，也就是说，偏离我们在第 3 节得到的矩阵的理想形式，那么相对于范畴 $\mathfrak{C}_\tau^{Lin}$，量子对称性可能不同构于 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。

(1) 设 $\mathcal{K}_2$ 是一个有 2 个顶点的完全图，即其邻接矩阵具有 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的形式。那么， $C^*(\mathcal{K}_2)$ 的泛对象 Q_τ^{Lin} 同构于 $(\mathcal{D}_\varphi(C(S^1) * C(S^1))\ \Delta_\varphi)$，其中 φ 是一个二阶自同构，并且对于 $C(S^1) * C(S^1)$ 的两个典范生成元 z_1、z_2，有 $\varphi(z_1) = z_2$ 且 $\varphi(z_2) = z_1$ （详情见 [14] 中的定理 5.4）。注意，邻接矩阵不是上三角矩阵（因为图本身是长度为 2 的回路，即 (R1) 不成立），并且泛对象 Q_τ^{Lin} 也不同构于 $C(S^1) * C(S^1)$。

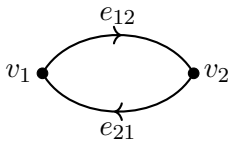

FIGURE 6. $\mathcal{K}_2$

(2) 设 $L_{1,\ 1}$ 是一个邻接矩阵为 $Id_{2\times 2}$ 的图。那么，$(L_{1,\ 1})$ 的泛对象Q_τ^{Lin}与 $H_2^{\infty+}$ 同构（参见 [15] 中的命题 4.2）。在这种情况下，该图也不属于 $\mathcal{G}$，因为它违反了 (R2)（即 $L_{1,\ 1}$ 的邻接矩阵的超对角线元素为 0）。注意，量子对称性 Q_τ^{Lin} 与 $C(S^1) * C(S^1)$ 不同构。

(3) 令 Γ 为一个有限连通有向图，其邻接矩阵中含有一个不为 0 或 1 的自然数（即不再要求 (R3)）。假设 $E(\Gamma) = \{e_i\colon\ i = 1, 2, ..., |E(\Gamma)|\}$ 和 $\{z_i\colon\ i = 1, 2, ..., |E(\Gamma)|\}$ 是生成该普适 C^*-代数的酉算子

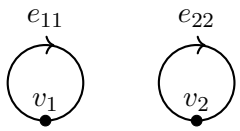

FIGURE 7. $L_{1,1}$

$\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$。令 $a_{ij} = n(v_i, v_j) > 1$，且不失一般性，$e_1, e_2 \in \{e \in E(\Gamma) : s(e) = v_i, r(e) = v_j\}$。那么 $\left(\mathcal{D}_\varphi\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\right), \Delta_\varphi\right)$ 总是按照自同构 $\varphi(z_1) = z_2, \varphi(z_2) = z_1$ 和 $\varphi(z_k) = z_k$，作用于 $C^*(\Gamma)$，其中 $k \neq 1,2$。此外，一个保真的 τ 保持作用 $\alpha: C^*(\Gamma) \to C^*(\Gamma) \otimes \left(\mathcal{D}_\varphi\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\right), \Delta_\varphi\right)$ 可定义为

$$\alpha(S_{e_1}) = S_{e_1} \otimes (z_1, 0) + S_{e_2} \otimes (0, z_2), \tag{18}$$
$$\alpha(S_{e_2}) = S_{e_2} \otimes (z_2, 0) + S_{e_1} \otimes (0, z_1), \tag{19}$$
$$\alpha(S_{e_k}) = S_{e_k} \otimes (z_k, z_k) \text{ (for } k \neq 1, 2). \tag{20}$$

量子 SO(3)（$C(SO_q(3))$）、$n > 1$ 对应的奇数维量子实射影空间 $C(\mathbb{R}P_q^{2n-1})$，以及 $n \geq 1$ 对应的偶数维量子实射影空间 $C(\mathbb{R}P_q^{2n})$，都可以视为 $q \in [0, 1$对应的图 C^*-代数。更准确地说，对于 $q \in [0, 1)$，$C(\mathbb{R}P_q^{2n-1})$（分别为 $C(\mathbb{R}P_q^{2n})$）与 $C^*(L_{2n-1}^{(2)})$（分别与 $C^*(L'_{2n})$）同构。关于 $C^*(L_{2n-1}^{(2)})$ 和 $C^*(L'_{2n})$ 的明确描述，可见 [11] 的第 0 节（引言）、第 4.2 节和第 5.2 节。特别地，$C(SO_q(3)) \cong C(\mathbb{R}P_q^3) \cong C^*(L_3^{(2)})$。根据上一段的讨论，可以得出结论：量子对称性 Q_τ^{Lin} 不可能与上述图对应的 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$ 同构。

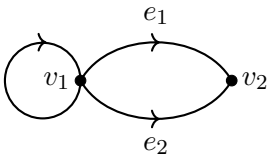

FIGURE 8. L'_2

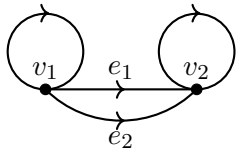

FIGURE 9. $L_3^{(2)}$

此外，定理 4.6 的逆命题并不成立，即图C^*-代数 $C^*(\Gamma)$ 的量子对称性 Q_τ^{Lin}同构于 $\left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C(S^1)\ \Delta\right)$，并不能推出底层图必定属于

$\mathcal{G}$。更准确地说，(R1)、(R2) 并非定理 4.6 的必要条件，但 (R3) 是必要条件。

(A) 条件 (R1) 并非必要。考虑图 Γ_0，其邻接矩阵为 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$。那么，由 $(q_{ij})_{3\times 3}$ 的矩阵元 q_{ij} 所生成的量子对称性 Q_τ^{Lin}，对于 $C^*(\Gamma_0)$，同构于 $(C(S^1) * C(S^1) * C(S^1)\ \Delta)$，但 $\Gamma_0 \notin \mathcal{G}$。

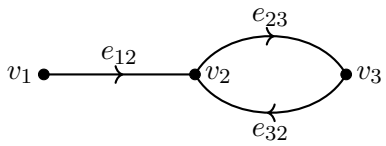

FIGURE 10. Γ_0

例如，$r^{-1}(s(e_{12})) = \emptyset$ 和 $r(e_{12}) = s(e_{23})$。因此，由引理 4.1，$q_{e_{12}e_{23}} = 0$。在两边应用反元 κ，得到 $q_{e_{23}e_{12}} = 0$。同样，$r(e_{23}) = s(e_{32})$ 意味着 $q_{e_{12}e_{32}} = 0$。为方便起见，我们定义 $Q_{ef} = q_{ef}^* q_{ef}$。由于

$$\begin{aligned}
&S_{e_{12}}^* S_{e_{12}} = S_{e_{32}}^* S_{e_{32}} \\
\Rightarrow &\sum_{f\in E(\Gamma)} S_f^* S_f \otimes (Q_{fe_{12}} - Q_{fe_{32}}) = 0 \\
\Rightarrow\ & p_{v_2} \otimes (Q_{e_{12}e_{12}} - Q_{e_{12}e_{32}} + Q_{e_{32}e_{12}} - Q_{e_{32}e_{32}}) + p_{v_3} \otimes (Q_{e_{23}e_{12}} - Q_{e_{23}e_{32}}) = 0 \\
\Rightarrow\ & (Q_{e_{23}e_{12}} - Q_{e_{23}e_{32}}) = 0 \\
\Rightarrow\ & Q_{e_{23}e_{32}} = 0
\end{aligned}$$

利用 κ 并综合以上结果，我们得到 $q_{e_{12}e_{23}} = q_{e_{12}e_{32}} = q_{e_{23}e_{32}} = q_{e_{23}e_{12}} = q_{e_{32}e_{12}} = q_{e_{32}e_{23}} = 0$。因此，$Q_\tau^{Lin} \cong (C(S^1) * C(S^1) * C(S^1),\ \Delta)$。

(B) 设 $P_{2,3}$ 是由 P_2（长度为 1 的简单有向路径）和 P_3（长度为 2 的简单有向路径）不交并构成的图。那么，$P_{2,3}$ 的邻接矩阵为 $\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$。在这种情况下，泛对象 Q_τ^{Lin} 仍然是 $(C(S^1) * C(S^1) * C(S^1)\ \Delta)$（在同构意义下），尽管其底层图不属于 $\mathcal{G}$，也就是说，(R2) 对定理 4.6 也不是必要条件。这又是同时应用引理 4.1 和引理 4.2 的一个简单例子。

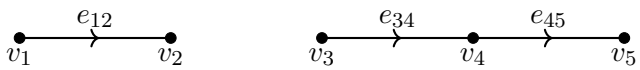

FIGURE 11. $P_{2,3}$

(C) 但是，(R3) 是定理 4.6 的必要条件，因为在反例 (3) 中，我们已经证明，对于任何包含至少两条具有相同源点和终点的边的有限连通有向图 Γ，泛对象 $Q_\tau^{Lin} \ncong \left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C\left(S^1\right) \quad \Delta \right)$。换句话说，如果对于某个图 Γ，泛对象 $Q_\tau^{Lin} \cong \left(\underset{|E(\Gamma)|}{*} C\left(S^1\right) \quad \Delta \right)$，那么 Γ 的邻接矩阵属于$M_{|V(\Gamma)|}(\{0,1\})$。

Acknowledgements

第一作者感谢印度科学技术部提供的经费支持（DST/INSPIRE/03/2021/001688）。第二作者也感谢 DST-FIST 提供的经费支持（档案编号 SR/FST/MS-I/2019/41）。我们还要感谢匿名审稿人对论文早期版本提出的宝贵意见。

Data availability

本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。

Declarations

利益冲突：作者没有需要披露的利益冲突。

References

[1] T. Banica, *Quantum automorphism groups of homogeneous graphs*, 《J. Funct. Anal.》, 224(2005), 243-280。[2] T. Banica、J. Bichon 和 B. Collins, *Quantum permutation groups: a survey*, 《非交换调和分析在概率论中的应用》, 《Banach Center Publ.》, 78, 波兰科学院数学研究所, 华沙, 2007, 13–34。[3] T. Banica 和 A. Skalski, *Quantum symmetry groups of C^*-algebras equipped with orthogonal filtration*, 《Proc. Lond. Math. Soc.》(3) 106 (2013), 第 5 期, 980–1004。[4] T. Bates、D. Pask、I. Raeburn 和 W. Szymanski, *The C^*-Algebras of Row-Finite Graphs*, 《New York J. Maths.》, 6 (2000), 第 307-324 页。[5] T. Bates、J. H. Hong、I. Raeburn 和 W. Szymanski, *The ideal structure of the C^*-algebras of infinite graphs* 46 2002 1159 1176, 《Illinois J. Math.》( ), –。[6] J. Bichon, *Quantum automorphism groups of finite graphs*, 《Proc. Amer. Math. Soc.》, 131(2003), 第 3 期, 665-673。[7] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, 1994。[8] J. Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, 《Comm. Math. Phys.》57(1977), 第 2 期, 173-185。[9] J. Cuntz 和 W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, 《Invent. Math.》, 56(1980), 251-268。[10] D. Goswami, *Quantum group of isometries in classical and noncommutative geometry*, 《Comm. Math. Phys.》, 第 285 卷（第 1 期）（2009）, 141-160。[11] J.H. Hong 和 W. Szymanski, *Quantum spheres and projective spaces as graph algebras*, 《Comm. Math. Phys.》232 (2002), 157–188。[12] J.H. Hong 和 W. Szymanski, *Noncommutative balls and mirror quantum spheres*, 《J. Lond. Math. Soc.》(2) 77 (2008), 第 3 期, 607–626。[13] A. Huef、M. Laca、I. Raeburn 和 A. Sims, *KMS states on the C^*-algebras of finite graphs*, 《Journal of Mathematical Analysis and Applications》, 第 405 卷（第 2 期）（2013）, 第 388-399 页。[14] S. Joardar 和 A. Mandal, *Quantum symmetry of graph C^*-algebras associated with connected graphs*, 《Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top》, 第 21 卷, 2018 年, 第 3 期, 1850019, 共 18 页。

[15] S. Joardar 和 A. Mandal, *Quantum symmetry of graph C^*-algebras at critical inverse temperature*, 《数学研究》, 256 (2021), 第 1 期, 1-20。[16] A. Kumjian、D. Pask、I. Raeburn 和 J. Renault, *Graphs, Groupoids and Cuntz-Krieger Algebras*, 《J. Funct. Anal.》, 144 (1997), 第 2 期, 第 505-541 页。[17] A. Kumjian、D. Pask 和 I. Raeburn, *Cuntz-Krieger algebras of directed graphs*, 《太平洋数学杂志》, 184(1998), 第 1 期, 161-174。[18] A. Maes 和 A. Van Daele, *Notes on compact quantum groups* 4 16 1998 1 2, , 《新数学档案》( ) ( ), 第 - - 期。[19] R. Matthes 和 W. Szyma´nski, *Graph C*-algebras*（笔记由 P.Witkowski 整理）, 2005 年。[20] S. Neshveyev 和 L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, 法国数学会, 巴黎, 2013。[21] D. Pask 和 A. Rennie, *The noncommutative geometry of graph C^*-algebras I: Index theorem*, 《J. Funct. Anal.》, 233(2006), 92-134。[22] I. Raeburn: 《图代数》, CBMS 数学区域会议系列第 103 卷, 由数学科学会议委员会出版, 华盛顿特区, 2005 年。[23] S. Schmidt 和 M. Weber, *Quantum Symmetries of Graph C^*-algebras*, 《加拿大数学通报》, 61(4), 2018, 第 448-464 页。[24] A. Skalski 和 P. Soltan, *Projective limits of quantum symmetry groups and doubling constructions of Hopf algebra* 17 2 2014, 1450012, 27 , 《Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top》, 第 ( ) 卷, 第 页。[25] P. Tarrago 和 M. Weber, *Unitary Easy Quantum Groups: The free case and the group case*, 《国际数学研究通知》, 第 217 卷（第 18 期）（2017）, 第 5710-5750 页。[26] T. Timmermann, *An invitation to quantum groups and duality*, EMS 数学教材, 欧洲数学会（EMS）, 苏黎世, 2008 年。[27] S. Wang, *Free products of compact quantum groups*, 《Comm. Math. Phys.》, 167(1995), 671-692。[28] S. Wang, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, 《Comm. Math. Phys.》, 195(1998), 195-211。[29] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, 《Comm. Math. Phys.》, 111(1987), 613-665。

Ujjwal Karmakar
Presidency University
加尔各答学院街，邮编 700073
印度西孟加拉邦
电子邮箱：mathsujjal@gmail.com

Arnab Mandal
Presidency University
学院街，加尔各答-700073
印度西孟加拉邦
电子邮箱：arnab.maths@presiuniv.ac.in