arXiv:2301.07031v1 [math.CA] 17 Jan 2023

多项式的局部变号

STEFAN STEINERBERGER

Abstract. 三角单项式 $\cos(\langle k, x\rangle)$ 在 $\mathbb{T}^d$ 上、次数为 k 的调和多项式 p: $\mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ 以及拉普拉斯特征函数 $-\Delta f = k^2 f$，分别在半径为 $\sim \|k\|^{-1}$ 或 $\sim k^{-1}$ 的每个球内都有根。我们将这一结论推广到线性组合，并证明：对于 $\mathbb{T}^d$ 上的任意三角多项式、限制在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的任意多项式 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$，以及 $\mathbb{R}^d$ 上频率均为 $d \in \{2, 3\}$ 的全局拉普拉斯特征函数的任意线性组合，只要球的半径取各组成频率倒数之和，该结论便成立。我们还进一步完善了如下事实：$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的特征函数 $-\Delta\phi = \lambda\phi$ 在每个 $B\left(x, \alpha_n \lambda^{-1/2}\right)$ 球内都有根：对每个 $B\left(x, \beta_n \lambda^{-1/2}\right)$ 球进行积分时，其中的正负质量会相互抵消，积分所针对的函数为 $\|x-y\|^{2-n}$。

1. Introduction

本文旨在证明以下情形也有同类型的结果：

(1) 环面 $\mathbb{T}^d$ 上的三角多项式；(2) 多项式 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 在单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的限制；(3) 以及在 $\mathbb{R}^d$ 上的 $(-\Delta + \lambda)\phi = 0$ 的全局解，其中 $d = 2,\ 3$。

在上述每种情形中，单个基对象（三角单项式、调和多项式、拉普拉斯特征函数）都有许多根：保证每个半径与次数／频率成反比的球内都含有一个根。我们将把这一结论推广到线性组合，并证明它们在适当的尺度上仍有许多根。

Kozma-Oravecz 首先证明了这类结果 [17]。

定理 (Kozma-Oravecz [17])。设 $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个平均值为 *0* 的实值三角多项式，其形式为

$$f(x) = \sum_{k \in S} a_k \exp\left(2\pi i \left\langle x, k\right\rangle\right),$$

其中 $S \subset \mathbb{Z}^d$。然后，f 在每个半径为

$$r(f) = \frac{1}{4} \sum_{k \in S} \frac{1}{\|k\|}.$$

注意到，f 为实值必然意味着 $-S = S$ 且 $a_{-k} = a_k$。函数的平均值为 0 意味着 $0 \notin S$。在一维情形下，$d = 1$，该结果在常数因子意义下是最优的：[17, 定理 2] 表明，若 f 的频率支撑于 $[-A - B, -A] \cup [A, A + B]$，则不存在变号的区间的最大长度为 $(B+1)/(2A+B)$。这一问题至少可以追溯到 Taikov 于 1965年发表的一篇论文 [24]，其中给出了由 Babenko 提出的极值三角多项式[1]。同一个极值三角多项式也出现在 [15, 25]中。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 12D10、35P10、42A05。*Key words and phrases.* 拉普拉斯特征函数、多项式、三角多项式。S.S. 获得美国国家科学基金会（DMS-2123224）和阿尔弗雷德·P·斯隆基金会的支持。

2. Results

2.1. 三角多项式。 我们首先证明一个具有以下风格的结果：
Kozma-Oravecz。 我们证明，无须统计加数的个数，
只需考察有贡献的频率个数即可。

定理 1。 若 $f\colon\ \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ 是一个平均值为 *0* 的实值三角多项式，其形式为

$$f(x) = \sum_{k\in S} a_k \exp\left(2\pi i \left\langle x, k\right\rangle\right),$$

那么，引入 $\Lambda = \{\|k\|\colon\ \ k \in S\}$, f 在每个半径为.....的球内都有一个零点

$$r(f) = d^{3/2} \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{\lambda}.$$

该结果与 Kozma-Oravecz 在维数 $d = 1$ 中的结果相同（常数的取值除外）。在更高维数下，这一改进更加显著，因为许多不同的三角多项式可能对应同一频率（在高维中，一个球面可以包含许多格点）。证明表明，最优常数或许有望随维数线性增长（或增长得更慢）；我们将在证明之后对此进行评论。

2.2. 球谐函数。 对于单位球面上任意多项式的限制，也存在类似结果。若 $p_n \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中次数为 n 的多项式，则其在单位球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的限制可以表示为次数至多为 n 的调和多项式的线性组合。

$$p_n(x)\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x) \qquad \text{where} \quad f_k \in \mathcal{H}_k^d.$$

我们回顾一下，次数为 k 的调和多项式空间是

$$\mathcal{H}_k^d = \left\{f \in \mathbb{R}\left[x_1, \ldots, x_d\right] : f \text{ homogenenous of degree } k \text{ and } \Delta f = 0\right\}.$$

有一种初等论证表明，若 $f \in \mathcal{H}_k^d$, 则 f 在每个半径为 $c_d k^{-1}$ 的球内都有零点（见下文）。这一结论可以推广到调和多项式的和。

定理 2. 如果 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_d]$ 满足限制条件

$$p(x)\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \sum_{k\in S} a_k f_k(x) \qquad \textit{where} \quad f_k \in \mathcal{H}_k^d$$

且在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的平均值为 *0*，那么 $p\big|_{\mathbb{S}^{d-1}}$ 在每个半径为.....的（测地）球上都有一个零点

$$r = \pi^2 d \sum_{k\in S} \frac{1}{k}.$$

这里的球 $B(x,\ r)$ 指 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上与 $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ 的（测地）距离不超过 r的所有点的集合。我们没有对常数 $\pi^2 d$进行优化。我们的方法必然会导致该常数随维数线性增长，而这种依赖关系有可能是最优的。

2.3. **拉普拉斯特征函数**。 在紧致光滑流形 $(M,\ g)$ 上，拉普拉斯特征函数是 $-\Delta f=\lambda f$的一个解。这类函数的一个基本性质是，f 在半径为 $c_M\cdot\lambda^{-1/2}$的每个球上都会变号。一个自然的问题是，这一性质能否推广到特征函数的线性组合 [6, 7, 11, 13, 16, 19,20, 21, 22]。这一问题在一维情形中已有充分研究，其答案可由斯图姆-刘维尔理论得出；我们参阅 B´érard-Helffer 的近期论文 [3, 4]。 $\mathbb{T}^d$ 上的拉普拉斯特征函数由三角多项式给出。 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的特征函数是调和多项式，并

$$\forall f\in\mathcal{H}_k^d\qquad -\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}}f=k(k+d-2)f.$$

定理 1 和定理 2 遵循相同的基本思路。

问题。 设$(M、\ g)$ 为紧致光滑流形，$-\Delta\phi_k=\lambda_k\phi_k$ 为拉普拉斯特征函数序列。是否存在一个仅依赖于该流形的 $0<c_M<\infty$，使得任意有限线性组合

$$f(x)=\sum_{k\in S}a_k\phi_k(x)\quad \textit{has a root in each ball of radius}\quad r=c_M\sum_{k\in S}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

我们从 Stefano Decio 那里了解到这个问题（另见 [10]）。定理 3 证明了该结论对于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$上的全局特征函数成立。就其精神而言，这一结果类似于定理 1 对于 $d=2,\ 3$ 的情形，但适用的函数类要大得多。

定理 3。 设 $d\in\{2,3\}$ 和 $n\in\mathbb{N}$。假设对于每个 $1\le k\le n$，光滑函数 $\phi_k:\ \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 都是 $-\Delta\phi_k=\lambda_k\phi_k$的全局解。那么

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k(x)$$

在每个半径为 $B\subset\mathbb{R}^d$ 的球中都有一个零点

$$r=2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

我们给出一种证明，该证明使用欧几里得空间中线性非齐次波动方程的闭式解。由于有限传播速度，这种方法或许也能以某种变体的形式适用于有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$。

2.4. **特征函数恒等式**。 定理 3 的证明暗示了一个关于拉普拉斯特征函数的有趣恒等式。

定理 4。 假设 $-\Delta\phi=\lambda\phi$ 在 $B(x,r)\subset\mathbb{R}^n$ 的一个邻域内，且 $n\ge3$。那么，对于一个明确的通用函数 $Q_n:\mathbb{R}_{\ge0}\to\mathbb{R}$，有

$$\int_{\|x-y\|\le r}\frac{\phi(y)}{\|y-x\|^{n-2}}dy=\frac{1}{\lambda}Q_n(\sqrt{\lambda}\cdot r)\cdot\phi(x).$$

特别是在三维中，$n=3$,

$$\int_{\|x-y\|\le r}\frac{\phi(y)}{\|y-x\|}dy=4\pi\frac{1-\cos(\sqrt{\lambda}\cdot r)}{\lambda}\cdot\phi(x).$$

该结论纯粹是局部性的，不依赖任何边界条件，因此可能有助于研究特征函数的行为。此外，函数 Q_n 完全是显式的，可以写成

$$Q_n(x) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(n/2)n\omega_n \int_0^x s^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(s)ds.$$

当 $n=3$ 时，我们得到 $J_{1/2}(x) = \sqrt{2/\pi x^{-1/2}}\sin(x)$，于是表达式得以化简。一个有趣的推论是，只要 $B(x,\ r) \subset \Omega$，该结论便在所有维数下都成立，

$$\text{if } \phi(x) = 0, \text{ then} \qquad \int_{\|x-y\|\le r} \frac{\phi(y)}{\|y-x\|^{n-2}}dy = 0$$

这意味着，根周围的质量相对于 $\|x-y\|^{2-n}$ 完全平衡。另一个有趣的推论涉及根的分布：例如，$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上满足狄利克雷边界条件的任意特征函数，在每个与定义域相交的 $\pi\lambda^{-1/2}$ 球内都有一个根，而且这个常数是最优的。由定理 4 可知，在半径为其两倍的球上

$$\int_{\|x-y\|\le 2\pi\lambda^{-1/2}} \frac{\phi(y)}{\|y-x\|}dy = 0$$

换言之，相对于库仑核，在每个半径为 $2\pi\lambda^{-1/2}$ 的球内，正质量与负质量之间都存在精确的平衡。在更高维数下，这一结论同样成立（此时以 Q_n 的最小正根为常数）。

3. Proof of Theorem 1

引理 1. 贝塞尔函数 $J_{d/2-1}$ 的最小正根满足

$$\forall\ d \ge 2 \qquad j_{\frac{d}{2}-1,1} \le \frac{j_{0,1}}{2}d.$$

证明概要。 贝塞尔函数根的渐近性质是一个经典课题。在我们的情形下，Tricomi 于 1949 年的一项早期结果 [26] 表明，对于某个 $\alpha \in \mathbb{R}$，当 $d \to \infty$时

$$j_{\frac{d}{2}-1,1} = \frac{d}{2} + \alpha d^{1/3} + \mathcal{O}(d^{-1/3}).$$

考察 d的前几个值可知，$j_{d/2-1,\ 1}/d$ 在 $d=1$时取最大值（随后便持续下降并趋近其极限 $1/2$）。对于 $d=1$，存在一个显式闭式表达式（即 $\pi/2$）。由于当 $d=1$时，我们的结果可由 Koksma-Oravecz 的结果推出，因此我们只关注 $d \ge 2$。当 $d=2$ 时取最大值，对应于 $j_{0,\ 1} \sim 2.404\ldots$。□

定理 *1* 的证明。 我们假设 $d \ge 2$。证明对 $\#\Lambda$ 使用归纳法。当 $\#\Lambda = 1$ 时，$\Lambda = \{\lambda\}$ 且 f 是拉普拉斯特征函数 $-\Delta f = 4\pi^2\lambda^2$，由此我们推导出如下结论：在每个半径为 $d^{3/2}\cdot\lambda^{-1}$ 的球中都存在变号。情形 $\#\Lambda = 1$。不妨设，在球 $B(x_0,r)$ 上 $f > 0$，其中 $x_0 = (1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$。我们考虑最大的连通区域 $B(x_0,r) \subset \Omega \subset \mathbb{T}^d$，它包含 x_0，并且在其上 f 为正。一个经典事实是，将特征函数限制在节点域 Ω 上所得的函数，是该区域上满足狄利克雷边界条件的第一非平凡特征函数的倍数（见 [2, 8]）。这意味着，将函数 f 限制在其节点域 Ω 上，我们得到

$$4\pi^2\lambda^2 = \frac{\int_\Omega |\nabla f|^2 dx}{\int_\Omega f^2\ dx} = \lambda_1(\Omega) = \inf_{\substack{g:\Omega\to\mathbb{R} \\ g|_{\partial\Omega}=0}} \frac{\int_\Omega |\nabla g|^2 dx}{\int_\Omega g^2\ dx}.$$

区域单调性表明，当我们将定义域限制到更小的子区域时，拉普拉斯特征值会增大。这也可以从变分刻画中看出，因为将定义域限制到子集后，在边界上为零的函数空间会严格缩小。由于 $B(x_0, r) \subset \Omega$，我们有

$$4\pi^2\lambda^2 = \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(B(x_0, r)).$$

现在我们区分两种情况：若 $r > 1/2$，则显然有 $B(x_0,\ 1/2) \subset B(x_0,\ r)$。在这种情况下，我们只需将 $B(x_0,\ 1/2) \subset [0,1]^d$ 视为欧几里得空间的一个子集。在 $B(x_0,\ 1/2)$ 上寻找一个瑞利–里兹商较小的函数（在边界上为零），比在 Ω 上寻找这样的函数严格更难（因为前者中的每个函数也是后者的一个例子）。然而，第一个问题可以用闭式求解。在欧几里得空间中，$\mathbb{R}^d$ 我们有

$$\lambda_1(B(x_0, r)) = r^{-2} j^2_{\frac{d}{2}-1,1},$$

其中 $j_{d/2-1,\ 1} > 0$ 是指标为 $d/2-1$ 的贝塞尔函数的最小正零点。若 $r > 1/2$，则利用引理可推出

$$4\pi^2\lambda^2 = \lambda_1(\Omega) \leq 4 j^2_{\frac{d}{2}-1,1} \leq j^2_{0,1} d^2$$

因此

$$1 \leq \frac{j_{0,1} d}{2\pi\lambda}.$$

在这种情况下，我们还可以得出结论：由于 f 的平均值为 0，且在某处消失，因此 $r \leq \sqrt{d}/4 = \operatorname{diam}(\mathbb{T}^d)/2$ 显然是一个可接受的（尽管平凡的）不等式。由此可得

$$r \leq \frac{\sqrt{d}}{4} \leq \frac{\sqrt{d}}{4} \frac{j_{0,1}}{2\pi} \frac{d}{\lambda} \leq \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\lambda}.$$

若 $r < 1/2$，那么，通过与欧几里得情形直接比较，

$$4\pi^2\lambda^2 = \lambda_1(\Omega) \leq r^{-2}\lambda_1(B) = r^{-2} j^2_{\frac{d}{2}-1,1}.$$

利用引理，

$$r \leq \frac{j_{d/2-1,1}}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \leq \frac{j_{0,1}}{4\pi} \frac{d}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \frac{d}{\lambda} \leq \frac{d^{\frac{3}{2}}}{\lambda}.$$

情形 $\#\Lambda \geq 2$. 现在假设 $\#\Lambda \geq 2$，且集合 Λ 由$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$给出。现假设存在一个函数 $f\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$，其支撑于这些频率，并且对于某个半径为 $r(f)$ 的球 B，不妨设 $f > 0$。我们的目标是将 f 变换为一个支撑在频率 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ 上的函数，该函数在一个半径不会小很多的球上为正，由此通过归纳法得到所需结果（注意，整体结构与 [17]中的相同）。剩下的就是说明这一构造。我们考虑一个新函数 $g_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$g_\delta(x) = \chi_{\|x\| \leq \delta}$$

我们可以将其识别为周期函数 $h_\delta : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$，其定义如下

$$h_\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g_\delta(x + k).$$

函数 g 是一个以原点为中心、半径为 δ 的球的示性函数。 g 的傅里叶系数有一个显式公式，并且

$$\widehat{g_\delta}(\xi) = \alpha_d \frac{J_{d/2}(2\pi\|\xi\|\delta)}{\|2\pi\xi\delta\|^{d/2}},$$

其中 α_d 是仅依赖于 d 的某个常数，而 $J_{d/2}$ 是 $d/2$阶贝塞尔函数。对于 h 的傅里叶系数，同样的公式也成立，并且

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \qquad \widehat{h_\delta}(k) = \alpha_d \frac{J_{d/2}(2\pi\|k\|\delta)}{\|2\pi k\delta\|^{d/2}},$$

现在令$j_{d/2,1} > 0$ 为 $J_{d/2}$的最小正根，即 $J_{d/2}(j_{d/2,1}) = 0$.于是，取

$$\delta^* = \frac{j_{d/2,1}}{2\pi\lambda_n}$$

这意味着傅里叶变换 $\widehat{g_{\delta^*}}$ 在模长为 $\|k\| = \lambda_n$的所有格点上都为零。现在我们考虑卷积

$$(f * h_{\delta^*})(x) = \int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)h_{\delta^*}(y)\ dy.$$

卷积在傅里叶侧变为乘法，因此如果

$$f(x) = \sum_{k\in S} a_k \exp\left(2\pi i \left\langle x, k\right\rangle\right),$$

then

$$(f * h_{\delta^*})(x) = \sum_{k\in S} a_k \cdot \widehat{h_{\delta^*}}(k) \cdot \exp\left(2\pi i \left\langle x, k\right\rangle\right).$$

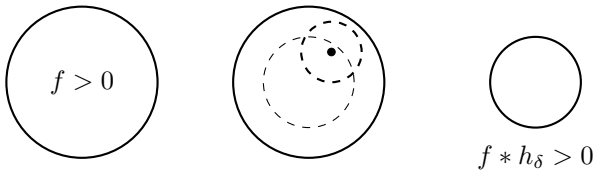

FIGURE 1. 归纳步骤：若 $f > 0$ 在半径为 r 的球上为正，并且我们将 f 与一个支撑在半径为δ^*的球上的正函数进行卷积，那么该卷积在半径为 $r - \delta^*$的球上为正。

$f * h_{\delta^*}$是一个频率位于 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1}$中的三角多项式。同时，如果对于某个半径为 $r(f)$ 的球 $B(x_0, r(f))$，有 $f > 0$，那么显然$f * h_{\delta^*}$ 在球 $B(x_0, r(f) - \delta^*)$上也具有相同的性质。由此可得

$$r(f) \le r(f * h_{\delta^*}) + \delta^*.$$

再次运用引理，我们得到

$$\delta^* = \frac{j_{0,1}(d+2)}{4\pi\lambda_n} = \frac{j_{0,1}}{4\pi\lambda_n}\frac{d+2}{d}d \le \frac{j_{0,1}}{2\pi}\frac{d}{\lambda_n} \le \frac{1}{2}\frac{d}{\lambda_n} \le \frac{d^{3/2}}{\lambda_n}.$$

□

问题。 只有在建立归纳情形时才会出现缩放因子 $d^{3/2}$。由此自然产生一个问题：如果 $-\Delta f = \lambda f$ 是定义在 $\mathbb{T}^d \cong [0,1]^d$ 上的特征函数（由对应于同一频率的三角函数项相加而成），那么每个半径为 $r = 100d \cdot \lambda^{-1/2}$ 的球内是否都有一个根?

4. Proof of Theorem 2

我们首先指出，只需证明 $d \geq 3$ 的情形即可。 $d = 2$ 的情形可由定理 1 得出，因为 $\mathbb{S}^{d-1} = \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{T}$，因此问题都归结为余弦。一个重要的新工具是 Funk-Hecke 公式：它描述了卷积对球面的作用，表现为对球谐函数产生乘法效应。更多细节请参阅 Dai-Xu [9]。

引理 2（Funk-Hecke 公式）。 设 $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$ 可积，且

$$\int_{-1}^{1} |g(t)|(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt < \infty,$$

那么对每个 $q(x) \in \mathcal{H}_k^d$，都有

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\langle x, y\rangle) q(y) d\sigma(y) = \lambda_k(f) \cdot q(x),$$

其中， C_n^λ 表示 *Gegenbauer* 多项式，

$$\lambda_k(g) = \frac{\omega_{d-1}}{C_k^{\frac{d-2}{2}}(1)} \int_{-1}^{1} g(t) \cdot C_k^{\frac{d-2}{2}}(t) \cdot (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt,$$

定理 *2* 的证明。 我们对 $\#S$ 使用归纳法来证明这一结果。

情形 $\#S = 1$。 我们从这样的情形开始：$\#S = 1$ 这对应于它是一个单独的调和多项式 $f \in \mathcal{H}_k^d$。我们将证明，在这种情形下，每个半径为

$$r \leq 2\pi \frac{d}{k}.$$

假设 $f \in \mathcal{H}_k^d$，并且它在（测地）球 $B(x_0, r) \subset \mathbb{S}^{d-1}$ 上为正，然后考虑相应的节点集 $B(x_0, r) \subset \Omega$。定理 1 的证明中相同的论证表明

$$k^2 \leq k(k+d-2) = \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(B(x,r)).$$

$B(x,r)$ 是一个 $(d-1)$ 维带边流形，即一个球冠；我们关注的是 Laplace-Beltrami 算子在此类球冠上的基态。Borisov-Freitas [5] 研究了这个问题，并证明

$$\lambda_1(B(x,r)) \leq \begin{cases} \frac{j_{0,1}^2}{r^2} + \frac{1}{3} & \text{on } \mathbb{S}^2 \\ \frac{\pi^2}{r^2} + 1 & \text{on } \mathbb{S}^3 \\ \frac{j_{(d-2)/2,1}^2}{r^2} - \frac{(d-1)^2}{4} + \frac{(d-1)(d-3)}{4}\left[\frac{1}{s(r)^2} - \frac{1}{r^2}\right] & \text{on } \mathbb{S}^d, d \geq 4, \end{cases}$$

其中 $s(r) = \sin r$。由于 $0 \leq r \leq \pi$，我们可以从上方估计前两项，得到 $2\pi^2/r^2$。这意味着在维数 $d \in \{2,3\}$ 下，我们有

$$1 \leq k^2 \leq k(k+d-2) = \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(B(x,r)) \leq \frac{2\pi^2}{r^2}$$

从而

$$r \leq \frac{2\pi}{k} \leq 2\pi \frac{d}{k}.$$

剩下需要处理的是 $d \geq 4$ 的情形。经过少量计算可知，或者

$$-\frac{(d-1)^2}{4} + \frac{(d-1)(d-3)}{4}\left[\frac{1}{s(r)^2} - \frac{1}{r^2}\right] \leq 0 \qquad \text{or} \qquad r \geq 2.$$

再次利用区域单调性，并注意到这些球冠随着 r 的增大而变大，我们得出特征值必定随 r 单调递减，因此可以将 $d \geq 4$ 时的第三个上界改进为

$$\lambda_1(B(x,r)) \leq \max\left\{\frac{j^2_{(d-2)/2,1}}{r^2}, \frac{j^2_{(d-2)/2,1}}{4}\right\}.$$

利用引理 1，还可以进一步简化为

$$\lambda_1(B(x,r)) \leq \frac{j^2_{0,1}\cdot d^2}{4}\max\left\{\frac{1}{r^2}, \frac{1}{4}\right\} \leq \frac{3d^2}{2}\max\left\{\frac{1}{r^2}, \frac{1}{4}\right\}.$$

因此，结合前面的论证，我们得到

$$k^2 \leq \lambda_1(B(x,r)) \leq \frac{3d^2}{2}\max\left\{\frac{1}{r^2}, \frac{1}{4}\right\}.$$

我们分两种情况讨论：若 $r \geq 2$，则

$$k^2 \leq \frac{3d^2}{8} \qquad \text{then} \qquad \frac{d}{k} \geq \sqrt{\frac{3}{8}} \geq \frac{3}{5}$$

然后

$$r \leq \pi \leq 2\pi\frac{3}{5} \leq 2\pi\frac{d}{k}.$$

若 $r \leq 2$，则可推出

$$r \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d}{k} \leq 2\pi\frac{d}{k}$$

由此得到了所需的结果。

情形 $\#S \geq 2$. 现在我们假设

$$f(x) = \sum_{k\in S} a_k f_k(x) \qquad \text{where} \quad f_k \in \mathcal{H}^d_k,$$

已给定，且 $\#S \geq 2$ with $\max S = m$。对于一个适当的函数g，我们考虑如下新函数：$[-1,1] \to \mathbb{R}$ 该函数尚待构造

$$f^*(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\langle x,y\rangle) f(y) d\sigma(y).$$

Funk-Hecke 公式表明

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\langle x,y\rangle)\sum_{k\in S} a_k f_k(y) d\sigma(y) \\ &= \sum_{k\in S} a_k \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\langle x,y\rangle) f_k(y) d\sigma(y) = \sum_{k\in S} a_k \lambda_k(g) f_k(x). \end{aligned}$$

受定理 1 证明的启发，以这样的方式设计 g 是合理的：使其支撑尽可能接近 1，同时满足 $\lambda_m(g) = 0$。回想一下，对于某个常数 $\alpha_{d,\ m} \in \mathbb{R}$

$$\lambda_m(g) = \alpha_{d,m}\int_{-1}^{1} g(t)\cdot C_m^{\frac{d-2}{2}}(t)\cdot(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt,$$

有一种特别自然的选择：若将 g 定义为一个适当局部化在 Gegenbauer 多项式最大根附近的凸起函数，就能保证得到一个紧支撑函数，其支撑接近 1，且$\lambda_m(g) = 0$。Driver-Jordaan 的一个结果 [12]（另见 Nikolov [18]）表明， $C_m^\lambda(x)$ 的最大根满足

$$x_1 > 1 - \frac{(\lambda+3)^2}{m^2}.$$

[12, 18] 中的界限略强于该界限（在常数的层面上）；为使叙述简洁，我们选用了代数上稍容易处理的形式。

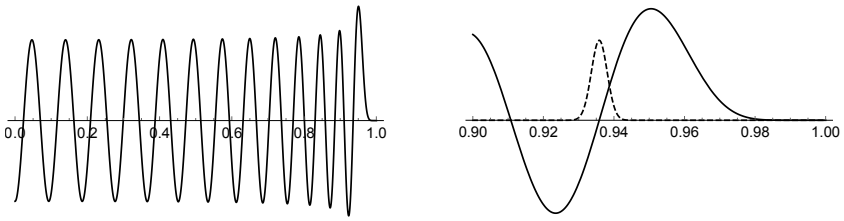

FIGURE 2. 左：在 $[0,1]$ 上的函数 $C_{50}^{(20)}(x)(1-x^2)^{10}$，其中 $(1-x^2)^{10}$ 被乘入以突出整体的符号结构（注意 $C_{50}^{(20)}(1) \neq 0$）。右：展示同一函数在 1 附近的情况，并用虚线示意 g 的一种可能取法。

Gegenbauer 多项式的根都是单根，这意味着 $C_m^{(\lambda)}$ 在 x_1 中变号。此时，我们定义函数 $g:\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ 是一个正的凸起函数，其支撑紧包含于 x_1 周围一个足够小的区间 J 中，其中 J 的选取满足

$$1 - \frac{(\lambda+3)^2}{m^2} = \inf J < x_1 < \sup J \leq 1$$

并且 g 的选取方式使得 $g \geq 0$ 且

$$\int_J g(t) \cdot C_m^{\frac{d-2}{2}}(t) \cdot (1-t^2)^{\frac{d-3}{2}} dt = 0.$$

由于我们对 g没有进一步要求，因此可以通过许多不同的方式做到这一点：任意一个具有紧支撑的凸起函数都可以缩放，使其支撑在一个足够小的区间内；然后将其滑过根，并利用介值定理即可构造出一个例子。回想一下， $\lambda = (d-2)/2$,

$$J \subseteq \left(1 - \frac{(d+4)^2}{4m^2}, 1\right).$$

注意，如果 $a,\ b \in \mathbb{S}^{d-1}$ 是球面上的两点，且内积为 $\langle a,b\rangle = x_1$，那么这两点之间的欧几里得距离满足

$$\|a-b\|^2 = 2 - 2\langle a,b\rangle \leq 2 - 2\left(1 - \frac{(d+4)^2}{4m^2}\right) = \frac{(d+4)^2}{2m^2}$$

因此

$$\|a-b\| \le \frac{d+4}{\sqrt{2}}\frac{1}{m}.$$

我们现在回到新函数

$$f^*(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\langle x,y\rangle) f(y) d\sigma(y)$$

并由上述计算和 $\lambda_m(g)=0$ 得出结论：

$$f^*(x) = \sum_{k\in S\setminus\{m\}} a_k \lambda_k(g) f_k(x).$$

我们知道，如果存在一个半径为 $r(f)$ 的欧几里得球 $B(x,r(f))$，使得 f 在 $B(x,r(f)) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ 中没有零点，那么 f^* 至少包含一个半径为

$$r(f^*) \ge r(f) - \frac{d+4}{\sqrt{2}}\frac{1}{m}$$

的球，在该球上此函数没有零点。根据归纳假设，我们有

$$r(f) \le r(f^*) + \frac{d+4}{\sqrt{2}}\frac{1}{m} \le \frac{d+4}{\sqrt{2}}\frac{1}{m} + 2\pi d \sum_{k\in S\setminus\{m\}} \frac{1}{k} \le 2\pi d \sum_{k\in S}\frac{1}{k}$$

这个常数是相对于在 $\mathbb{R}^d$ 中使用欧几里得范数测量距离而言的；改用测地距离还会带来一个 $\pi/2$ 的因子，从而证明所需结果。□

5. Proof of Theorem 3

证明。我们再次使用关于 n 的归纳法进行论证。

情形 $n=1$。我们首先证明推论，从而确立这一情形。设 $-\Delta\phi = \lambda\phi$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的光滑全局特征函数，其中 $d\in\{2,3\}$。我们论证的主要工具是非齐次波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(t,x) = \phi(x)$$

且满足零初始条件

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = 0.$$

直接计算表明，该方程具有如下闭式解

$$u(t,x) = \frac{\cos(\sqrt{\lambda}t)-1}{\lambda}\phi(x).$$

特别地，我们注意到，在时刻 $t^* = 2\pi/\sqrt{\lambda}$，有 $u(t,\ x) = 0$。然而，在 $\mathbb{R}^d$ 上、满足 $d\in\{2,3\}$ 且具有零初始条件的非齐次波动方程同样具有漂亮的闭式解。在 $\mathbb{R}^2$ 中，该解为

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{2\pi(t-s)^2}\int_{B(x,t-s)} \frac{(t-s)^2\phi(y)}{((t-s)^2-|y-x|^2)^{1/2}} dyds.$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中，解为

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(y)}{\|y-x\|} dx.$$

我们令 $t^* = 2\pi/\sqrt{\lambda}$，并注意到 ϕ 在每个半径为 $r = 2\pi\lambda^{-1/2}$. 的球内都有一个根情形 $n \geq 2$。现在令

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k(x)$$

并且不失一般性地，假设对所有 $1 \leq i \leq n$， $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ 和 $a_i \neq 0$。我们再次考虑非齐次波动方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u(t,x) = f(x)$$

满足零初始条件 $u|_{t=0} = 0$ 和 $u_t|_{t=0} = 0$，并注意到

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}t) - 1}{\lambda_k} \phi_k(x).$$

在时刻 $t^* = 2\pi/\sqrt{\lambda_n}$，解可以写为

$$g(x) = u(t^*, x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{\cos(\sqrt{\lambda_k}t) - 1}{\lambda_k} \phi_k(x).$$

现在假设 $f(x)$ 在球 $B(z, r(f))$ 内没有零点，且在该区域内恒正或恒负。根据波动方程的显式解公式可知，对所有 $0 \leq t \leq r(f)$，函数

$$u(t,x) \qquad \text{does not change sign on} \quad B(z, r(f) - t).$$

令 $t^* = 2\pi/\sqrt{\lambda_n}$，并由此得出 $u(t^*, x)$ 在半径为 $r(f) - t^*$ 的球内不变号（注意，如果 $r(f) \leq t^*$，那么所需结论便自动成立）。然而，根据归纳假设，我们有

$$u(t^*, x) \qquad \text{must change sign on every ball of radius} \qquad 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$$

因此

$$r(f) - t^* \leq 2\pi \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$$

所需结果由此得证。 □

6. Proof of Theorem 4

证明。在整个论证过程中，我们假设 $n \geq 3$。设 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$在球的某个邻域内满足 $-\Delta f = \lambda f$

$$B = B\left(x, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

我们引入以 x 为中心、半径为 r 的球壳上的平均值

$$\mathrm{Av}(r) = \fint_{\partial B(x,r)} f(y)dy.$$

在公式中使用 $\mathbb{R}^n$ 格林恒等式（见 [14, §2.2.2]）

$$\frac{\partial}{\partial r} \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dy = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y)dy$$

我们推导得出

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Av}(r)=\frac{r}{n}\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)}\Delta f\ dy.$$

注意，若 ω_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积，则球壳的表面积为 $n\omega_n r^{n-1}$ ，因为

$$\omega_n r^n=\int_{B(x,r)}1dy=\int_0^r n\omega_n s^{n-1}ds.$$

由于 $\Delta f=-\lambda f$，将所有内容改写为球面平均的形式，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\mathrm{Av}(r)&=-\frac{\lambda}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)}f(y)dy\\&=-\frac{\lambda}{n\omega_n r^{n-1}}\int_0^r\omega_n n s^{n-1}\mathrm{Av}(s)dy\\&=-\frac{\lambda}{r^{n-1}}\int_0^r s^{n-1}\mathrm{Av}(s)dy.\end{aligned}$$

最后一个要用到的函数是

$$Q(r)=\int_{B(x,r)}\frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}dy.$$

注意，由于 f 局部有界，当 r 较小时，我们有

$$|Q(r)|\lesssim\int_{B(x,r)}\frac{\|f\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}}}{\|x-y\|^{n-2}}dy\lesssim\|f\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}}\cdot r^2$$

因此 $Q(0)=0$ ，且 $Q'(0)=0$。利用特征函数的连续性，可推得，当 $r\to 0$时，

$$\begin{aligned}Q(r)&=\int_{B(x,r)}\frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}dy=(f(x)+\mathcal{O}(r))\int_{B(x,r)}\frac{1}{\|x-y\|^{n-2}}dy\\&=(f(x)+\mathcal{O}(r))\int_0^r\frac{n\omega_n s^{n-1}}{s^{n-2}}ds=(f(x)+\mathcal{O}(r))\frac{n\omega_n}{2}r^2\end{aligned}$$

由此可推得 $Q''(0)=n\omega_n f(x)$。改用极坐标，

$$Q(r)=\int_0^r n\omega_n s\mathrm{Av}(s)ds.$$

两边求导得到 $Q'(r)=n\omega_n r\mathrm{Av}(r)$，再求一次导

$$\begin{aligned}Q''(r)&=n\omega_n\mathrm{Av}(r)+n\omega_n r\left(-\frac{\lambda}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)}f(y)dy\right)\\&=n\omega_n\mathrm{Av}(r)-n\omega_n\frac{\lambda r}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B(x,r)}f(y)dy\\&=n\omega_n\mathrm{Av}(r)-n\omega_n\frac{\lambda}{r^{n-2}}\int_0^r s^{n-1}\mathrm{Av}(s)ds.\end{aligned}$$

因此

$$rQ''(r)=n\omega_n r\mathrm{Av}(r)-\frac{\lambda}{r^{n-3}}\int_0^r\mathrm{Av}(s)n\omega_n s^{n-1}ds.$$

利用恒等式 $Q'(r) = n\omega_n r\mathrm{Av}(r)$，我们可以将其改写为

$$rQ''(r) = Q'(r) - \frac{\lambda}{r^{n-3}} \int_0^r s^{n-2} Q'(s) ds.$$

分部积分可得

$$\begin{aligned}\int_0^r s^{n-2} Q'(s) ds &= Q(s)s^{n-2}\big|_0^r - (n-2)\int_0^r Q(s)s^{n-3} ds \\ &= Q(r)r^{n-2} - (n-2)\int_0^r Q(s)s^{n-3} ds.\end{aligned}$$

因此

$$rQ''(r) = Q'(r) - \lambda Q(r)r + \frac{(n-2)\lambda}{r^{n-3}} \int_0^r Q(s)s^{n-3} ds.$$

此时我们已经看出，$Q(s)$ 由某种积分微分方程所支配，而该方程与具体的特征函数相当独立。论证的其余部分将致力于弄清这个方程的具体形式。两边乘以 r^{n-3}，得到

$$r^{n-2}Q''(r) = r^{n-3}Q'(r) - \lambda Q(r)r^{n-2} + (n-2)\lambda \int_0^r Q(s)s^{n-3} ds.$$

对 r 求导可得

$$\begin{aligned}r^{n-2}Q'''(r) + (n-2)r^{n-3}Q''(r) = (n-3)r^{n-4}Q'(r) + r^{n-3}Q''(r) - \lambda Q'(r)r^{n-2} \\ - (n-2)\lambda Q(r)r^{n-3} + (n-2)\lambda Q(r)r^{n-3}.\end{aligned}$$

最后两项相互抵消，方程简化为

$$r^{n-2}Q'''(r) + (n-2)r^{n-3}Q''(r) = (n-3)r^{n-4}Q'(r) + r^{n-3}Q''(r) - \lambda Q'(r)r^{n-2}$$

进一步简化可得

$$r^{n-2}Q'''(r) + (n-3)r^{n-3}Q''(r) = (n-3)r^{n-4}Q'(r) - \lambda Q'(r)r^{n-2}.$$

此时我们分情况讨论。若 $n = 3$，则该系统可简化为$r^{n-2}Q'''(r) = -\lambda Q'(r)r^{n-2}$，因此 $Q'''(r) = -\lambda Q'(r)$。由此结合初始条件可得

$$Q(r) = 4\pi \frac{1 - \cos(\sqrt{\lambda} \cdot r)}{\lambda} \cdot \phi(x).$$

在论证的其余部分，我们现在可以假设 $n \geq 4$，因此特别地，两边除以 r^{n-4}，得到

$$r^2 Q'''(r) + (n-3)rQ''(r) = (n-3)Q'(r) - \lambda Q'(r)r^2.$$

改为使用导数 $R(r) = Q'(r)$，我们可推出 $R(0) = 0$，以及$R'(0) = n\omega_n f(x)$，并结合方程

$$r^2 R''(r) + (n-3)rR'(r) - (n-3)R(r) + \lambda R(r)r^2 = 0.$$

该方程的两个线性无关解可用第一类和第二类贝塞尔函数表示

$$r^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} \cdot r) \qquad \text{and} \qquad r^{\frac{4-n}{2}} Y_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} \cdot r).$$

第二类贝塞尔函数在 $r = 0$ 处有一个奇点，这使我们得到一个单参数族

$$R(r) = \alpha \lambda^{\frac{n-4}{4}} (\sqrt{\lambda} \cdot r)^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda} \cdot r).$$

我们注意到

$$S(r) = r^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r) \quad \text{satisfies} \qquad \lim_{r\to 0} S'(r) = \frac{2^{-\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n/2)}.$$

因此

$$n\omega_n f(x) = R'(0) = \alpha \frac{2^{-\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n/2)} \lambda^{\frac{n-2}{4}}$$

由此可得

$$\alpha = \frac{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(n/2) n\omega_n}{\lambda^{\frac{n-2}{4}}}.$$

因此

$$\begin{aligned} R(r) &= \alpha \lambda^{\frac{n-4}{4}} (\sqrt{\lambda}\cdot r)^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) \\ &= \frac{2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(n/2) n\omega_n}{\lambda^{\frac{n-2}{4}}} \lambda^{\frac{n-4}{4}} (\sqrt{\lambda}\cdot r)^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) \\ &= 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(n/2) n\omega_n \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\sqrt{\lambda}\cdot r)^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}\cdot r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S_n(\sqrt{\lambda}\cdot r), \end{aligned}$$

其中

$$S_n(s) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma(n/2) n\omega_n s^{\frac{4-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(s).$$

引入原函数

$$T_n(s) = \int_0^s S_n(z)dz,$$

我们推得

$$Q(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} T_n(\sqrt{\lambda}\cdot r) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}\cdot T_n(\sqrt{\lambda}\cdot r).$$

□

References

[1] A. G. Babenko，多项式极值问题。Mat. Zametski 35/3 (1984), 349–356。英文译本：《数学札记》35/3–4 (1984), 181–186。[2] R. Band、S. K. Egger、A. J. Taylor，环面上诺伊曼域的谱位置，《几何分析杂志》 31 2021 4561 4585 ( )，第 – 页。P. Berard 和 B. Helffer，[3] 特征函数线性组合零点的施图姆定理，《数学展示》 38 2020 27 50 ( )，第 – 页。P. Berard 和 B. Helffer，特征函数之和零点的施图姆定理：盖尔范德策略的实现。《莫斯科数学杂志》。20 (2020), 1–25。[4] D. Borisov 和 P. Freitas，球对称流形上测地球的谱，《分析与几何通讯》25 (2017)，第 507–544 页。[5] T. Carroll、X. Massaneda 和 J. Ortega-Cerda，针对瓦瑟斯坦距离的增强型不确定性原理。《伦敦数学会公报》52 (2020)，第 1158–1173 页。[6] F. Cavalletti 和 S. Farinelli，奇异空间中的不确定性估计与节点集的大小，《数学进展》389 (2021)：107919。[7] R. Courant，关于自伴微分表达式特征函数理论的一个一般定理。Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen Math Phys，1923年7月，K1：81–84。[8] F. Dai 和 Y. Xu，《球面与球上的逼近论和调和分析》，Springer 数学专著，Springer，2013。[9] S. Decio，特征函数之和零点集的密度。《偏微分方程通讯》46 (2021)，第5期，935–952

[11] H. Donnelly，黎曼流形上特征函数之和的节点集。《美国数学会会刊》121，第3期 (1994)，967–973。[12] K. Driver 和 K. Jordaan，若干经典正交多项式极端零点的界。逼近理论杂志，164 (2012)，1200–1204。[13] A. Eremenko 和 D. Novikov，具有谱隙的函数的振荡，J. Math. Pures Appl. (9) 83 (2004)，第3期，313–365。[14] L. C. Evans，《偏微分方程》，美国数学会（普罗维登斯，罗得岛州），2010。[15] A. D. Gilbert 和 C. J. Smyth，尽可能长时间保持非负的零均值余弦多项式。伦敦数学会杂志 2, 62/2 (2000), 489–504。[16] D. Jerison 和 G. Lebeau，特征函数之和的节点集。《调和分析与偏微分方程》，芝加哥大学出版社，芝加哥 (1999)，223–239。[17] G. Kozma 和 F. Oravecz，三角多项式零点间隔的研究。实分析交流 28 (2002/03)，第2期，447–454。[18] G. Nikolov，雅可比多项式极端零点的新界。《美国数学会会刊》147 (2019)，第 1541–1550 页。[19] A. Sagiv 和 S. Steinerberger，输运与界面：关于Wasserstein距离的不确定性原理。SIAM数学分析杂志，52(3)，3039–3051。[20] S. Steinerberger，振荡函数在一个大集合上消失。《亚洲数学杂志》24 (2020)，177–190。[21] S. Steinerberger，二维度量斯图姆-刘维尔理论。变分法与偏微分方程 59, 12 (2020)。[22] S. Steinerberger，斯图姆振荡定理中的定量投影，Journal de Math´ematiques Pures et Appliqu´ees 144 (2020)，第 1–16 页。[23] G Szeg˝ő，《正交多项式》。美国数学会，纽约，1959。[24] L. V. Taikov，三角多项式的一系列极值问题，数学科学进展，20/3 (1965)，205–211。[25] S. Tabachnikov，关于相对于有限群均值为零的函数，泛函分析及其应用 31 (1997)，93–94。英文译本：泛函分析及其应用 31 (1997)，73–74。[26] F. G. Tricomi，关于阶数与自变量几乎相等的贝塞尔函数，都灵科学院物理、数学与自然科学部学报，83 (1949)，第 3–20 页

Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA
Email address: steinerb@uw.edu