arXiv:2301.07054v1 [math.GR] 17 Jan 2023

强 3-恩格尔群

IKER DE LAS HERAS、MARIALAURA NOCE 和 GUNNAR TRAUSTASON

Abstract. 本文研究强 3-恩格尔群。特别地，我们为强 3-恩格尔群及其子类——强亚交换 3-恩格尔群的幂零类找到了精确的上界。

1. Introduction

设 n 为正整数。若群 G 满足：对所有 x， $y \in G$，都有 $[[y,x],\overset{n}{\ldots},x] = 1.$，则称其为 n-恩格尔群。有限生成的 n-恩格尔群是否为幂零群，一直是一个悬而未决的问题。根据 Wilson 的结果，有限的 r-生成 n-恩格尔群是幂零类有界（界仅依赖于 n 和 r）的幂零群，因此任何有限生成的剩余有限 n-恩格尔群都是幂零群。有限 n-恩格尔群的类在 $n \geq 3$ 时取决于生成元的数量；然而，如果进一步假设 G 是一个强 p-群，情况便有所不同。

回顾一下，有限 p-群 G 在 p 为奇数时，若满足 $[G,G] \leq G^p$，而在 $p = 2$时，若满足 $[G,G] \leq G^4$，则称其为强群。强 n-Engel 群的幂零类只能由 n 界定，其原因在于 Burns 和 Medvedev 的一个著名定理 [1], 。根据该定理，存在只依赖于 n 的正整数 m 和 k，使得任意有限n-Engel 群都满足 $\gamma_m(G)^k = 1$。

设 G 为一个强 m-Engel p-群。强 p-群的一个众所周知的性质是 $\gamma_{m+l}(G) \leq \gamma_m(G)^{p^l}$。因此，若取 Burns 和 Medvedev 定理中的 $m = m(n)$ 和 $k = k(n)$，再选取满足对所有 p 都有 $p^l \geq k$ 的 l，便可看出每个强n-Engel p-群的幂零类至多为 $c = m + l - 1$。注意，幂零类的界只取决于 n，而不取决于 r 或 p。

在 [7] 和 [10] 中，已证明强力 2-Engel 群的幂零类最佳上界为 3。在这种情况下，我们得到的上界与一般 2-Engel 群的上界相同。不过，值得注意的是，已有证明表明，每个 3 生成元 2-恩格尔群都是幂零类至多为 2 的幂零群，因此满足定律 $[x,y,z] = 1$。这看起来或许有悖直觉，但应当记住，强 p-群的类对取子群并不封闭。

本文将把重点转向强 3-恩格尔群。近年来，人们对后者，尤其是群中 3-恩格尔元素的行为，进行了研究和探讨 $[4,6,9,11]$。

现在我们介绍主要结果。首先给出一个关于强 n-恩格尔群的一般性结果。注意，每个秩为 2 的强幂群 G都有一个循环导群。在这种情况下，若 G 也满足 n-恩格尔条件，我们证明 G 的幂零类至多为n。

定理 1.1。设 $n \geq 1$，且 G 是一个导出子群为循环群的 n-恩格尔群。那么 G 的幂零类至多为 n。此外，这一上界是最佳的。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20F45, 20D15, 20F19.*Key words and phrases.* Engel 群、强幂群、亚交换群、幂零类。

注 1.2。若 G 是一个由 2 个生成元生成的非强 3-恩格尔 p-群，则其导出子群不一定是循环群。在这种情况下，若 p 为奇数，则 G 的幂零类至多为 3；若 $p = 2$，则至多为 4（这一点已在 [5] 中证明，并在 [3] 的定理 2.1 中作了总结）。这些上界也都是最佳的。

我们的主要结果是确定强 3-恩格尔群的幂零类的最佳上界。由 [3] 我们知道，每个 3-恩格尔群都满足 $\gamma_5(G)^{20} = 1$，因此，当 G 是一个具有 $p \neq 2$ 的 p-群时，$\gamma_5(G) = 1$；当 $p = 5$ 时，$\gamma_5(G)^5 = 1$；当 $p = 2$时，$\gamma_5(G)^4 = 1$。由上述一般分析可知，若 G 进一步是强群，则 $\gamma_6(G) = 1$。我们将证明，幂零类的最佳上界是 5。下面的定理给出了更为详细的分析。

定理 1.3. 设 G 是一个强 3-恩格尔 p-群。若 $p \neq 2, 5$，则 G 是幂零类至多为 4 的幂零群。此外，若 G 的秩为 $r \geq 3$，则：

(i) 若 $r = 3$，则 G 的幂零类至多为 3；(ii) 若 $r \geq 4$，则 G 的幂零类至多为 4。

若 $p = 2$ 或 5，则 G 是幂零类至多为 5 的幂零群。此外：

(iii) 若 $r = 3$ 且 $p = 5$，则 G 的幂零类至多为 3；(iv) 若 $r = 3$ 且 $p = 2$，则 G 的幂零类至多为 4；(v) 若 $4 \leq r \leq 5$，则 G 的幂零类至多为 4；(vi) 若 $r \geq 14$，则 G 的幂零类至多为 5。

此外，这些上界都是最优的。

注 1.4. 对于 $6 \leq r \leq 13$，我们只知道幂零类的最优上界是 4 或 5。

最后，如果我们还知道 G 是亚交换的，那么可以得到以下结果。

定理 1.5. 设 G 是一个秩为 $r \geq 3$ 的强亚交换 3-恩格尔 p-群。如果 p 是奇数，那么 G 的幂零类至多为 3。如果 $p = 2$，那么 G的幂零类至多为 4。此外，这些上界都是最佳的。

Rem注 1.6. 在定理 1.5 中，如果 p 是奇数，或者如果 $r = 3$，那么假设 G 是强的并非必要，定理 3.2 和引理 3.4 表明了这一点。

记号与组织安排。我们的记号大多是标准的。对于群 G 及元素x、$y \in G$，x与 y的交换子是元素 $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$。对于长度为 ≥ 3 的交换子，我们采用左范数记号（例如，$[x, y, z] = [[x, y], z]$）。子集 $X \subseteq G$ 中长度为 $n \in \mathbb{N}$ 的交换子是形如 $[x_1, \ldots, x_n]$ 的交换子，其中 x_1、.....、 $x_n \in X$。我们用 G' 表示 G 的导出子群。

论文的组织结构如下。第 2 节将回顾并发展一些关于 3-恩格尔群中交换子的有用工具。第 3 节证明定理 1.5，该定理给出了强亚交换 3-Engel 群幂零类的上界。第 4 节证明秩 3 的强 3-恩格尔群满足定理 1.3(i)、(iii) 和 (iv)。最后，第 5 节完成定理 1.3 的证明，并由此描述强 3-恩格尔群的幂零类。

2. Preliminaries

在整篇论文中，Gupta 和 Newman 的以下恒等式 [3] 将发挥重要作用。

引理 2.1（Gupta 和 Newman [3, 引理 2.2]）。设 G 是一个 3-恩格尔群，且令a、b、$c \in G$。那么，模 $\gamma_5(G)$，有以下关系：

(i) $[c,a,a,b][c,a,b,a][c,b,a,a][c,a,b,b][c,b,a,b][c,b,b,a] \equiv 1$;
(ii) $[c,a,a,b]^2[c,a,b,a]^2[c,b,a,a]^2 \equiv 1$; (iii)
$[b,a,a,c] \equiv [c,b,a,a]^{-3}[c,a,a,b]^{-3}$; (iv)
$[c,a,a,b]^4[c,b,a,a]^6 \equiv 1$; (v) $[c,b,a,a]^2 \equiv [c,a,b,a]^4$。

引理 2.2（Gupta 和 Newman [3,引理 2.3]）。设 G 为一个 3-恩格尔群，且令a, b, $c \in G$。再令 $w_1 = [c,a,a,b,b]$, $w_2 = [c,a,b,a,b]$, $w_3 = [c,a,b,b,a]$, $w_4 = [c,b,a,a,b]$, $w_5 = [c,b,a,b,a]$ 和 $w_6 = [c,b,b,a,a]$。那么，模去 $\gamma_6(G)$ 后，有以下关系：

(i) $[c,a,b,a,a] \equiv 1$; (ii)
$[c,a,a,b,a] \equiv 1$; (iii) $w_3 \equiv w_4 \equiv w_1^{-1}w_2^{-1}$,
$w_2 \equiv w_5$, $w_1 \equiv w_6$; (iv) $[b,a,a,b,c] \equiv 1$;
(v) $w_2 \equiv w_1^3$, $w_3 \equiv w_1^{-4}$; (vi) $w_1^{10} \equiv 1$。

下述著名引理将在整篇论文中发挥作用。

引理 2.3. 设 G 是一个群，且 x_1、…、x_n、$y \in G$。那么，

$$[x_1,\dots,x_n,y] \in \langle [y,x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}] \mid \sigma \in S_n\rangle \gamma_{n+2}(G),$$

其中 S_n 是 n 次对称群。

3. Powerful 3-Engel metabelian groups

本节旨在研究强 3-恩格尔亚贝尔群。我们首先证明关于导出子群为循环群的 n-恩格尔群的首个主要结果。

定理 1.1 的证明。设 $G = \langle x_1、\dots、x_r\rangle$ 和 $G' = \langle y\rangle$，其中 $r \geq 2$。对于 $1 \leq i < j \leq r$和 $1 \leq k \leq r$，记

$$[x_i,x_j] = y^{p^{\gamma(i,j)}\delta(i,j)} \quad \text{and} \quad [y,x_k] = y^{p^{\alpha(k)}\beta(k)}, \tag{1}$$

其中 $\gamma(i,j)$ $\alpha(k) \geq 0$且 p不整除 $\delta(i,j)$ 和 $\beta(k)$。我们假设 $\gamma_{n+2}(G) = 1$，并断言

$$[x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}] = 1$$

对任意 $1 \leq i_1,\dots,i_{n+1} \leq r$ 均成立。(1) 中的关系给出

$$[x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}] = y^{p^{\gamma(i_1,i_2)+\alpha(i_3)+\cdots+\alpha(i_{n+1})}\delta(i_1,i_2)\beta(i_3)\cdots\beta(i_{n+1})}. \tag{2}$$

取 $1 \leq j \leq n$ 使得 $\alpha(i_j)$ $=\min\{\alpha(i_1)$ $\alpha(i_2)\dots,\alpha(i_{n+1})\}$。我们依次区分两种情况： $j \in \{1,2\}$ 和 $j \geq 3$。

首先假设 $j = 1$。由于群 G 是 n-Engel 群，因此

$$1 = [x_{i_2},x_{i_1},\overset{n}{.\,.},x_{i_1}] = y^{-p^{\gamma(i_1,i_2)+(n-1)\alpha(i_1)}\delta(i_1,i_2)\beta(i_1)^{n-1}},$$

于是 $y^{p^{\gamma(i_1,i_2)+(n-1)\alpha(i_1)}} = 1$。由于 $(n-1)\alpha(i_1) \leq \alpha(i_3) + \cdots + \alpha(i_{n+1})$，我们推得$[x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}] = 1$，这正是所要证明的。若 $j = 2$，则 $[x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}] = [x_{i_2},x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}]^{-1}$，这由情况 $j = 1$ 得出。

现在，假设 $j \geq 3$。由 (2) 立即可得

$$[x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}] = [x_{i_1},x_{i_2},x_{i_{\sigma(1)+2}},\dots,x_{i_{\sigma(n-1)+2}}] \tag{3}$$

对于任意 $\sigma \in S_{n-1}$，因此我们可以进一步假设 $j = 3$。现在，由于 $\gamma_{n+2}(G) = 1$，Hall-Witt 恒等式给出

$$[x_{i_1},x_{i_2},x_{i_3},\dots,x_{i_{n+1}}] = [x_{i_3},x_{i_2},x_{i_1},\dots,x_{i_{n+1}}][x_{i_3},x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_{n+1}}]^{-1},$$

结论由前一种情况即可得出。

由于下面的例 3.1，这个界无法进一步改进。 □

例 3.1. 设 p 为奇素数或 4，并定义 $G = \langle a、\ b \mid [a,b] = a^p、\ a^{p^n} = b^{p^{n-1}} = 1\rangle$。则 G 是一个导出子群为循环群、幂零类为 n 的强 n-恩格尔群。

如果我们的 3-恩格尔群 G 的导出子群不是循环群，那么寻找 G 幂零类的最佳上界就要复杂得多。不过，以下由 Gupta 和 Newman 给出的结果揭示了当 G' 为阿贝尔群时 G 的结构。

定理 3.2（Gupta 和 Newman [2]）。设 G为亚交换 3-恩格尔群。则有

$$\gamma_4(G)^{16} = \gamma_5(G)^2 = 1.$$

由此定理可直接得出，若 G 是一个 3-恩格尔亚交换 p-群，则除非 $p = 2$，否则它是幂零类至多为 3 的幂零群。这个界显然是最佳的，因为所有幂零类 3 的群都是 3-恩格尔群。因此，对亚交换 3-恩格尔强幂群幂零类的研究可归结为 $p = 2$ 的情形。在这种情况下，我们有

$$\gamma_6(G) = [\gamma_5(G), G] \leq \gamma_5(G)^4 = 1,$$

其中，最后一个不等式由 Shalev 交换引理 [8] 得出。因此， G 的幂零类至多为 5。正如我们在定理 1.5 中所证明的，这个上界还可以进一步改进。在证明该定理之前，我们需要以下引理。

引理 3.3. 设 G 是一个亚交换 3-恩格尔 2-群。那么对于所有 a、b、c、$d \in G$，有

$$[a,b,c,d]^2[a,c,b,d]^2[a,d,c,b]^2 \in \gamma_5(G).$$

证明。我们可以假设 $\gamma_5(G) = 1$。于是，由引理 2.1(i) 得

$$1 = [a,bc,bc,d]^2[a,d,bc,bc][a,bc,d,d][a,d,d,bc]^2.$$

展开交换子并再次应用引理 2.1(i)，得到

$$\begin{aligned} 1 =& [a,b,b,d]^2[a,d,b,b][a,b,d,d][a,d,d,b]^2[a,c,c,d]^2[a,d,c,c][a,c,d,d][a,d,d,c]^2 \\ & [a,b,c,d]^2[a,c,b,d]^2[a,d,b,c][a,d,c,b] = [a,b,c,d]^2[a,c,b,d]^2[a,d,c,b]^2, \end{aligned}$$

即得所需结论。 □

定理 1.5 的证明。由定理 3.2，我们只需证明 $p = 2$ 的情形。因此，由于 G 是强的，我们可以找到 G 的生成元 x_1、……、x_n，使得 $G' = \langle x_1^{4\alpha_1}、\ \ldots\ldots、\ x_k^{4\alpha_k}\rangle$，其中 $1 \leq k \leq n$，且 α_1、……、$\alpha_k \in \mathbb{Z}$。此外，根据定理 1.1，我们可以假设 $k > 1$。因此，只需证明对所有 a、b、c、$\in G$，均有 $[x_i^{4\alpha_i}, a, b, c] = 1$。为此，我们可以假设 $\gamma_5(G)^2 = \gamma_6(G) = 1$，于是由 Hall-Petresco 恒等式可得

$$[x_i^{4\alpha_i}, a, b, c] = [x_i, a, b, c]^{4\alpha_i}$$

对所有 $1 \leq i \leq k$。现在，由引理 3.3 可推得

$$\begin{aligned} [x_i, a, b, c]^{4\alpha_i} &= ([a, x_i, b, c]^2)^{-2\alpha_i} \\ &= ([a, b, x_i, c]^{-2}[a, c, b, x_i]^{-2}g)^{-2\alpha_i} \\ &= [a, b, x_i, c]^{4\alpha_i}[a, c, b, x_i]^{4\alpha_i} \end{aligned}$$

对某个 $g \in \gamma_5(G)$。又由于 Hall-Petresco 恒等式，

$$[a, b, x_i, c]^{4\alpha_i}[a, c, b, x_i]^{4\alpha_i} = [a, b, x_i^{4\alpha_i}, c][a, c, b, x_i^{4\alpha_i}] = 1,$$

定理得证。 □

正如注 1.6 中所指出的，我们现在证明，即使放宽 G 是强的这一条件，当 G 的秩为 3 时，强 3-恩格尔亚交换 2-群的幂零类上界仍保持不变。

引理 3.4. 设 $G = \langle a, b, c\rangle$ 是一个亚交换 3-恩格尔 2-群。则 $\gamma_5(G) = 1$.

证明。我们将证明 $\{a, b, c\}$ 中所有长度为 5 的交换子都是平凡的。由于 G 是 3-恩格尔群，引理 2.2 已经表明，任何含有三重项的交换子都是平凡的。因此，根据引理 2.3，且由于 G 是亚交换的，只需证明形如 $[x, y, y, z, z]$ 的交换子与 $x, y, z \in \{a, b, c\}$ 都是平凡的。由于 $[x, y, y, z, z] = [x, y, z, z, y]$，并且根据引理 2.2，我们还有 $[x, y, z, z, y] = [x, y, y, z, z]^{-4}$，由此可得 $[x, y, y, z, z]^5 = 1$。由于 G 是一个 2-群，结论得证。□

本节最后指出，这个界是最佳的，下面的例子将说明这一点。

例 3.5. 令 $p = 2$，并令 $G = \langle a、\ b、\ c\rangle$ 为一个具有如下表示的群：

$$\begin{array}{lll} [a,b] = a^{-p^5}, & [a,c] = b^{3p^6}a^{p^4}, & [b,c] = b^{p^7}a^{p^2}, \\ [a^{p^2}, b^{p^6}] = 1, & [a^{p^2}, b] = a^{-p^7}, & [a^{p^2}, c] = a^{-p^2}b^{3p^8}a^{17p^2}, \\ [b^{p^6}, a] = a^{p^{11}}, & [b^{p^6}, c] = a^{p^8}, & \\ a^{p^{12}} = 1, & b^{p^{11}} = 1, & c^{p^{10}} = 1. \end{array}$$

那么， G 是一个幂零类为 4 的强 3-恩格尔 2-群。

4. Powerful 3-Engel groups of rank 3

本节旨在证明定理 1.3(i)、(iii) 和 (iv)。为此，令G 为一个

$$\text{powerful 3-Engel } p\text{-group such that } \begin{cases} \gamma_5(G) = \gamma_4(G)^p = 1 \text{ if } p \neq 2 \\ \gamma_6(G) = \gamma_5(G)^2 = 1 \text{ if } p = 2. \end{cases} \tag{4}$$

在本节余下部分，我们固定 $a、\ b、\ c \in G$ 以及 $i、\ j、\ k \in \mathbb{N}$，其中 $i \leq j \leq k$ 满足$G = \langle a、\ b、\ c\rangle$ 和 $G' = \langle a^{p^i}、\ b^{p^j}、\ c^{p^k}\rangle$。此外，由于 G是强的，令 $r、\ s、\ t、\ u、\ v、\ w、\ \alpha、\ \beta、\ \gamma \in \mathbb{Z}$满足

$$[a,b] = a^{rp^i}b^{sp^j}c^{tp^k}, \quad [c,a] = a^{up^i}b^{vp^j}c^{wp^k}, \quad [c,b] = a^{\alpha p^i}b^{\beta p^j}c^{\gamma p^k}. \tag{5}$$

下面的注记将会频繁用到。

注 4.1. 假设 $\gamma_n(G)^p = \gamma_{n+1}(G) = 1$ 对某个 $n \geq 2$成立。如果 $x^{p^i} \in G'$ 对某个$x \in G$ 和 $i \geq 0$成立，那么

$$1 = [x^{p^i}, y_1, \ldots, y_{n-2}]^p = [x, y_1, \ldots, y_{n-2}]^{p^{i+1}}$$

对所有 $y_1, \ldots, y_{n-2} \in G$均成立。

首先我们将证明定理 1.3(i) 和 (iii)，也就是说，我们将证明对于 (4) 中满足 $p \neq 2$ 的 G，有 $\gamma_4(G) = 1$。为此，我们首先需要以下两个引理。

引理 4.2. 设 G 如 (4) 中所示，且满足 $p \neq 2$。若 $i < j \leq k$，则 $\gamma_4(G) = 1$。

证明。根据 $[3, \text{引理 } 2.1]$,， $\{a, b, c\}$ 中仅含两个不同元素的长度为 4 的换位子均为平凡的。因此，我们将重点放在 $\{a, b, c\}$ 中含有 3 个不同元素的长度为 4 的换位子上。

注意到

$$[x, y, a, z] = [a^{\sigma_1 p^i}b^{\sigma_2 p^j}c^{\sigma_3 p^k}, a, z] = [a, b, z]^{-\sigma_2 p^j}[a, c, z]^{-\sigma_3 p^k}$$

对每个 $x, y, z \in G$，其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{Z}$。由于 $i < j, k$和 $n = 4$，由注 4.1可得 $[x, y, a, z] = 1$，因此所有第三个

位置为 的长度为 4 的换位子都是平凡的。特别地， $[c,b,a,b]$, $[c,b,a,a]$和 $[b,c,a,c]$ 都是平凡的，因此由引理 2.1的 (iv) 和 (v) 可知， a,b 和 c的所有可能组合都会产生平凡的交换子，这正是所需。□

引理 4.3. 设 G 如 (4) 所示，且满足 $p \neq 2$。若 $i = j < k$，则 $\gamma_4(G) = 1$。

证明。根据 [3, 引理 2.1], , $\{a,b,c\}$ 中长度为 4 且仅含两个不同项的交换子均为平凡元。

首先假设 $\{a,b,c\}$ 中恰有一个项来自 c 的所有长度为 4 的交换子均为平凡元。于是，由引理 2.1 的 (iv) 和 (v)，我们只需证明$[c,a,b,c]$、 $[c,b,a,c]$ 或 $[a,b,c,c]$ 中有一个是平凡元。按照 (5) 中的记号，我们有

$$[c,a,b,c] = [a,b,c]^{up^i}[b,c,c]^{-wp^k} = [a,b,c]^{up^i}, \tag{6}$$

$$[c,b,a,c] = [b,a,c]^{\beta p^i}[a,c,c]^{-\gamma p^k} = [b,a,c]^{\beta p^i}, \tag{7}$$

$$[a,b,c,c] = [a,c,c]^{rp^i}[b,c,c]^{sp^i}, \tag{8}$$

其中，根据注 4.1 有 $[b,c,c]^{-wp^k} = [a,c,c]^{-\gamma p^k} = 1$，且 $k > i$。注意，类似地，我们有

$$1 = [a,b,b,c] = [a,b,c]^{rp^i}[c,b,c]^{tp^k} = [a,b,c]^{rp^i},$$
$$1 = [a,b,a,c] = [b,a,c]^{sp^i}[c,a,c]^{tp^k} = [b,a,c]^{sp^i}.$$

因此，若 $p \nmid r$或 $p \nmid s$，则 $[a,b,c]^{p^i} = 1$或 $[b,a,c]^{p^i} = 1$，所以（6）或（7）分别是平凡的。因此，我们可以假设 p 同时整除 r 和 s，但由注 4.1 可知，此时（8）是平凡的，证毕。

现在去掉“在 $\{a,b,c\}$ 中恰有一个元素属于 c 的所有长度为 4 的交换子都平凡”这一假设。由引理 2.3，我们只需证明形如 $[c,x,y,z]$ 的交换子是平凡的，其中 x、 z、 $y \in \{a,b\}$。此外，我们只考虑在 a中有 2 个元素的长度为 4 的交换子。在 b 中有 2 个元素的交换子也平凡，这一点可由对称论证得出。注意，由注 4.1 可知，对每个x、 $y \in G$，都有 $[c,x,y]^{p^k} = 1$。我们将不再特别指出这一事实。还要牢记（5）中的记号，据此我们区分以下几种情况。

情形 1: $p \nmid r$。于是 $1 = [a,b,b,a] = [a,b,a]^{rp^i}$，因此 $[a,b,a]^{p^i} = 1$。现在，$[c,b,a,a] = [b,a,a]^{\beta p^i} = 1$，由引理 2.1(iv) 和 (v) 可得 $[c,a,b,a] = [c,a,a,b] = 1$。

情形 2: $p \nmid s$。于是 $1 = [a,b,a,a] = [b,a,a]^{sp^i}$，因此 $[b,a,a]^{p^i} = 1$。因此，$[c,a,b,a] = [a,b,a]^{up^i} = 1$，再次由引理 2.1 可得 $\gamma_4(G) = 1$。

情形 3: $p|r$, $p|s$。那么，根据注 4.1， $[a,b,c,a] = [a,c,a]^{rp^i}[b,c,a]^{sp^j} \leq \gamma_4(G)^p = 1$。因此，由引理 2.1(iv) 和 (v)， $[c,b,a,a] = [c,a,b,a] = [c,a,a,b] = 1$□

前两个引理立即推出，对于陈述中所述的 G，若 G' 可由 2 个元素生成，则 $\gamma_4(G) = 1$。事实上，在这种情况下，存在生成元 a,b,c，使得 $G' = \langle a^{p^i}, b^{p^j} \rangle$，而且我们可以令 k任意大。下面的定理证明了一般情形（其中 $p \neq 2$），即当 G' 是 3-生成时的结果，从而解决了 1.3(i) 和 (iii)。

定理 4.4。设 G 如式 (4) 所示，且有 $p \neq 2$。则 $\gamma_4(G) = 1$。

证明。由引理 4.2 和引理 4.3，我们可以假设 $i = j = k$。我们将证明 $\{a,b,c\}$ 中的所有长度为 4 的换位子都平凡。如前所述，只含两个不同元素的交换子都平凡，因此我们只考虑含 3 个不同元素的交换子。我们断言，恰好含有两个 a 的长度为 4 的交换子都平凡。然后，通过完全对称的论证可以证明，含有两个 b 或

c 的交换子也都平凡，因此结论成立。注意，由引理 2.3，只需考虑 c 位于第一项的交换子。事实上，由于 $p \neq 2$，我们只需证明 $[c,b,a,a]$ 或 $[c,a,b,a]$ 之一平凡，然后根据引理 2.1(iv) 和 (v) 得出 $\gamma_4(G) = 1$。我们沿用 (5) 中的记号，并根据 p 是否整除 u、v 或 w来区分几种情况。

情形 1：$p|w$。由注 4.1 可得 $1 = [c,a,a,a] = [b,a,a]^{vp^i}$、$[c,a,b,a] = [a,b,a]^{up^i}$ 和 $[c,a,a,b] = [b,a,b]^{vp^i}$。我们进一步考虑若干子情形。

情形 1.1：$p|u$。于是我们有 $[c,a,b,a] = 1$。

情形 1.2：$p \nmid v$。于是 $[b,a,a]^{p^i} = 1$，因此 $[c,a,b,a] = 1$。

情形 1.3：$p \nmid u$、$p|v$。在这种情况下，$[c,a,a,b] = 1$，因此若 $p \neq 3$，则由引理 2.1(iv) 可如前所述完成论证。现在假设 $p = 3$。注意到 $1 = [c,a,c,a] = [a,c,a]^{up^i}$，且由于 $p \nmid u$，我们得到 $[a,c,a]^{p^i} = 1$。若 $p|\beta$，则 $[c,b,a,a] = [c,a,a]^{\gamma p^i} = 1$，论证即告完成。若 $p \nmid \beta$，则由引理 2.1(iv) 可知 $1 = [c,b,c,a] = [b,c,a]^{\beta p^i}$，因此$[a,b,c,a] = [b,c,a]^{sp^i} = 1$。由引理 2.1(v) 可得 $[c,b,a,a] = 1$，正如所需。

情形 2：$p \nmid w$。

情形 2.1：$p|u$，$p \nmid v$。于是 $1 = [c,a,c,a] = [b,c,a]^{vp^i}$，因此 $[b,c,a]^{p^i} = 1$。所以，$[c,a,b,a] = [a,b,a]^{up^i}[c,b,a]^{wp^i} = 1$。

情况 2.2：$p \nmid u$，$p|v$。注意到 $1 = [c,a,c,a] = [a,c,a]^{up^i}$，这意味着$[a,c,a]^{p^i} = 1$。现在，若 $p \nmid s$，则 $1 = [a,b,a,a] = [b,a,a]^{sp^i}$意味着 $[b,a,a]^{p^i} = 1$。因此，$[c,b,a,a] = [b,a,a]^{\beta p^i}[c,a,a]^{\gamma p^i} = 1$，问题得以解决。若 $p|s$，则 $[a,b,c,a] = [a,c,a]^{rp^i}[b,c,a]^{sp^i} = 1$，由引理 2.1(v) 可得 $\gamma_4(G) = 1$。

情况 2.3：$p|u$、$p|v$、$p \neq 3$。于是 $1 = [c,a,a,a] = [c,a,a]^{wp^i}$，所以 $[c,a,a]^{p^i} = 1$。因此$1 = [a,b,a,a] = [b,a,a]^{sp^i}[c,a,a]^{tp^i} = [b,a,a]^{sp^i}$。

现在，若 $p \nmid s$，则 $[b,a,a]^{p^i} = 1$，所以 $[c,b,a,a] = [b,a,a]^{\beta p^i}[c,a,a]^{\gamma p^i} = 1$，问题得证。

若 $p|s$，但 $p \nmid t$，则 $1 = [a,b,a,b] = [b,a,b]^{sp^i}[c,a,b]^{tp^i} = [c,a,b]^{tp^i}$，所以 $[c,a,b]^{p^i} = 1$。因此，$[c,a,a,b] = [c,a,b]^{wp^i} = 1$，并且由于 $p \neq 3$，由引理 2.1(iv)即可完成证明。

如果 $p|s$，$p|t$，但 $p \nmid r$，那么 $1 = [a,b,b,a] = [a,b,a]^{rp^i}$，所以 $[a,b,a]^{p^i} = 1$，因此，$[c,b,a,a] = [b,a,a]^{\beta p^i}[c,a,a]^{\gamma p^i} = 1$。

最后，如果 $p|s$，$p|t$ 且 $p|r$，那么可得 $[a,b] \in (G')^p$，因此 G' 可由两个元素生成。结论由引理 4.3 后面的讨论得出。

情形 2.4：$p|u$，$p|v$，$p = 3$。与前一种情形一样，我们有 $[c,a,a]^{p^i} = 1$。现在，由于$p = 3$，由引理 2.1(iv)可得 $1 = [c,b,c,a] = [a,c,a]^{\alpha p^i}[b,c,a]^{\beta p^i} = [b,c,a]^{\beta p^i}$。

如果 $p \nmid \beta$，那么 $[b,c,a]^{p^i} = 1$，因此 $[c,a,b,a] = [a,b,a]^{up^i}[c,b,a]^{wp^i} = 1$。如果 $p|\beta$，那么$[c,b,a,a] = [b,a,a]^{\beta p^i}[c,a,a]^{\gamma p^i} = 1$。

情形 2.5：$p \nmid u, p \nmid v$。那么 $1 = [c,a,a,a] = [b,a,a]^{vp^i}[c,a,a]^{wp^i}$，因此 $[a,b,a]^{vp^i} = [a,c,a]^{-wp^i}$。同理，$1 = [c,a,c,a] = [a,c,a]^{up^i}[b,c,a]^{vp^i}$，因此 $[c,b,a]^{vp^i} = [a,c,a]^{up^i}$。现在，

$$[c,a,b,a]^v = [a,b,a]^{vup^i}[c,b,a]^{vwp^i} = [a,c,a]^{-uwp^i}[a,c,a]^{uwp^i} = 1,$$

至此，证明完成。 □

定理 4.4 中 G 的幂零类上界显然是最佳的，因为每个幂零类为 3 的幂零群都是 3-恩格尔群。我们将通过证明定理 1.3(iv) 来结束本节。

定理 4.5. 设 G 如 (4) 中所述，且满足 $p=2$。那么 $\gamma_5(G)=1$。

证明。由引理 2.2，任何长度为 5 且有 3 个项相同的交换子都是平凡的。此外，由引理 2.3，我们只需考虑非重复项位于首位的交换子。我们断言，所有首项为 c、且 a 和 b 各出现 2 次的长度为 5 的交换子都是平凡的。然后，完全对称的论证即可完成证明。

沿用 (5) 中的记号，我们有 $[c,a,a,b,b]=[c,a,b,b]^{w2^k}$，因此若 $p|w$，则由注 4.1 得 $[c,a,a,b,b]=1$，而该断言由引理 2.2(iii) 和 (v) 得证。

若 $p\nmid w$，注意到 $1=[c,a,a,b,a]=[b,a,b,a]^{v2^j}[c,a,b,a]^{w2^k}$，并且由 [3, 定理 2.1] 可得 $[b,a,b,a]^2=1$。因此 $[c,a,b,a]^{2^k}=1$，从而 $[c,b,a,b,a]=[c,a,b,a]^{\gamma 2^k}=1$，结果再次由引理 2.2 得出。□

注意，例 3.5 表明定理 4.5 中的上界是最佳的。

5. Powerful 3-Engel groups of rank greater than 3 and the proof of Theorem 1.3

以下由 Gupta 和 Newman 给出的定理，连同其后的例 5.2 和 5.3，证明了定理 1.3(ii)。

定理 5.1（Gupta 和 Newman [3, 定理 4.4]）。设 G 是一个 3-恩格尔群。那么，$\gamma_5(G)^{20}=1$。

例 5.2。设 $p=3$，并设 $G=\langle a、\ b、\ c、\ d\rangle$ 是一个由以下表示定义的群：

$$\begin{gathered}[b,c]=b^{2p^2},\quad [b,d]=a^p,\qquad [c,d]=d^{p^2},\\ [a,b]=1,\qquad [a,c]=a^{p^2}c^{-p^4},\quad [a,d]=c^{p^2},\\ a^{p^5}=1,\quad b^{p^6}=1\quad c^{p^6}=1,\quad d^{p^4}=1.\end{gathered}$$

那么 G 是一个幂零类为 4 的强 3-恩格尔 3-群。

例 5.3. 令 $p>3$，并令 $G=\langle a,b,c,d\rangle$ 为具有如下表示的群：

$$\begin{gathered}[b,c]=c^{p^4},\qquad [b,d]=b^{p^3},\quad [c,d]=a^p,\\ [a,b]=a^{-p^4}c^{p^6},\quad [a,c]=1,\qquad [a,d]=a^{\alpha p^3}c^{\gamma p^5},,\\ c^{p^9}=a^{-3p^7},\quad a^{p^9}=1,\quad b^{p^9}=1,\quad c^{p^{11}}=1,\quad d^{p^8}=1,\end{gathered}$$

其中 $\alpha=-5r,\gamma=-11s$，且 r 和 s 的选取满足 $3r\equiv 1$ (模 p^9) 以及 $9s\equiv 1$(模 p^{11})。那么 G 是一个幂零类为 4 的强 3- 恩格尔 p- 群。

注意，定理 5.1 表明，如果 $p\notin\{2,5\}$，则 $\gamma_5(G)=1$。下面的结果表明，即使素数为 2 或 5，只要群的秩较小，结论仍然成立。这证明了定理 1.3(v)。

Th定理 5.4. 设 G 是一个秩至多为 5 的强 3-恩格尔 p-群。那么 $\gamma_5(G)=1$.

证明。若 $p\neq 2,5$，则结论由定理 5.1 立即得出，因此设 $p\in\{2,5\}$。我们假设 $\gamma_6(G)=\gamma_5(G)^p=1$，首先断言，对每个 $a,b,c\in G$，都有 $[c,a,a,b,b]=1$。因此，固定 $a,b,c\in G$，并考虑子群

$$H=\langle [c,a,a],[c,b,b],[c,a,b],[c,b,a],[a,b,b],[b,a,a]\rangle.$$

由于 G 是秩为 5 的强群， H 的秩至多为 5；又由于 $\gamma_3(G)^p \leq Z_2(G)$，存在 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta \in \mathbb{F}_p$，它们不全为零，使得

$$[c,a,a]^\alpha[c,b,b]^\beta[c,a,b]^\gamma[c,b,a]^\delta[b,a,a]^\epsilon[a,b,b]^\zeta \equiv 1 \pmod{Z_2(G)}.$$

如果 $\alpha \neq 0$，那么 $[c,a,a]$ 可以写成其余交换子的乘积模 $Z_2(G)$；又由于根据引理 2.2(i) 和 (ii)，包含三个重复项的长度为 5 的交换子都是平凡的，因此可得 $[c,a,a,b,b]=1$。于是我们可以假设 $\alpha=0$；根据引理 2.2(iii)，我们可以对 $[c,b,b]$ 重复相同的论证，并假设 $\beta=0$。

现在，如果 $p=2$，那么引理 2.2(v) 得出 $[c,b,a,a,b]=1$；因此，如果 $\gamma\neq 0$，则可得 $[c,a,b,a,b]=1$。由此，引理 2.2(v) 得出 $[c,a,a,b,b]=1$，所以我们可以假设 $\gamma=0$。对称的论证表明，我们还可以假设 $\delta=0$。最后，如果 $\epsilon\neq 0$，那么引理 2.1(iii) 得出

$$[c,a,a,b,b]=[b,c,a,a,b][b,a,a,c,b]=[c,b,a,a,b]=1,$$

如果 $\zeta\neq 0$，情况也类似。

若 $p=5$，则由引理 2.2(iii) 和 (v)，有 $[c,a,b,b,a]=[c,a,a,b,b]$ 和 $[c,a,b,a,b]=[c,a,a,b,b]^3$。于是，若 $\gamma\neq 0$，一方面必有，

$$[c,a,a,b,b]^3=[c,a,b,a,b]=[c,b,a,a,b]^{-\delta\gamma^{-1}}=[c,a,a,b,b]^{-\delta\gamma^{-1}},$$

因此 $-\delta\gamma^{-1}=3$。另一方面，

$$[c,b,a,b,a]=[c,a,b,a,b]=[c,b,a,a,b]^{-\delta\gamma^{-1}}=[c,a,b,b,a]^{-\delta\gamma^{-1}}=[c,b,a,b,a]^{(-\delta\gamma^{-1})^2},$$

因此 $(-\delta\gamma^{-1})^2=1$，这就产生了矛盾。因此 $\gamma=0$，类似地也有 $\delta=0$。最后，若 $\epsilon\neq 0$，则由引理2.1(iii)可得

$$[c,a,a,b,b]=[b,c,a,a,b]^{-3}[b,a,a,c,b]^{-3}=[c,b,a,a,b]^3=[c,a,a,b,b]^3.$$

因此 $[c,a,a,b,b]=1$，若 $\zeta\neq 0$ 情况也类似，故结论成立。

现在，对于任意 a、b、c、$d\in G$，我们都有

$$1=[a,bc,bc,d,d]=[a,b,c,d,d][a,c,b,d,d],$$

从而 $[a,b,c,d,d]=[c,a,b,d,d]$。因此，由 Hall-Witt 恒等式可得

$$1=[a,b,c,d,d][c,a,b,d,d][b,c,a,d,d]=[a,b,c,d,d]^3,$$

进而 $[a,b,c,d,d]=1$。

若 $p=5$，则我们两次应用引理 2.1(iv)，从而对任意 a、b、c、$d\in G$，得到 $[a,d,d,b,c]=1$。再次应用相同的论证，我们得出对任意 a、b、c、d、$e\in G$，有 $[a,b,c,d,e]=1$，正如所需。

对于 $p=2$ 的情形，注意到对任意 a、b、c、d、$e\in G$，我们都有

$$1=[a,b,c,de,de]=[a,b,c,d,e][a,b,c,e,d],$$

从而 $[a,b,c,d,e]=[a,b,c,e,d]$。现在由 Hall-Witt 恒等式可得

$$1=[a,b,c,d,e][d,e,[a,b,c]][e,[a,b,c],d]=[d,e,[a,b,c]],$$

因此 $[G',\gamma_3(G)]=1$。由三子群引理可知，

$$[G',G',G]\leq[G',G,G'][G,G',G']=[\gamma_3(G),G']=1,$$

因此，对于每个 a、b、c、d、$e\in G$，都有 $[a,b,c,d,e]=[a,b,d,c,e]$。特别地，这表明

$$[a,b,c,c,d]=[a,b,c,d,c]=[a,b,d,c,c]=1$$

对于每个 a、b、c、$d\in G$。

现在我们证明，对于每个 $a,b,c,d\in G$，$[a,b,b,c,d]=1$。固定 $a,b,c,d\in G$。由引理2.1(iii)，由于 $[c,a,b,b,d]=1$，我们得到 $[a,b,b,c,d]=[c,b,b,a,d]$。因此，我们推得

(9) $[a,b,b,c,d]=[a,b,c,b,d]=[a,b,d,b,c]=[c,b,b,a,d]=[c,b,d,b,a]=[d,b,b,a,c].$

Let

$$H = \langle [a,b,b],[a,b,c],[a,b,d],[c,b,b],[c,b,d],[d,b,b]\rangle.$$

如果 $H \leq Z_2(G)$，那么 $[a,b,b,c,d]=1$，所以不妨设 $H \not\leq Z_2(G)$。注意到 $\gamma_3(G)^2 \leq Z_2(G)$，因此由于 G 是秩为 5 的强群，必存在 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta \in \{0,1\}$，它们不全为 0，使得

$$[a,b,b]^\alpha [a,b,c]^\beta [a,b,d]^\gamma [c,b,b]^\delta [c,b,d]^\epsilon [d,b,b]^\zeta \equiv 1 \pmod{Z_2(G)}.$$

现在，若 $\alpha \neq 0$，则有

$$[a,b,b] \equiv [a,b,c]^\beta [a,b,d]^\gamma [c,b,b]^\delta [c,b,d]^\epsilon [d,b,b]^\zeta \pmod{Z_2(G)},$$

将其代入 $[a,b,b,c,d]$，得到 $[a,b,b,c,d]=1$。若 β、γ、δ、ϵ、ζ 中任意一个非零，则根据 (9)，同样的论证仍然适用。因此，对于任意 a、b、c、$d \in G$，都有 $[a,b,b,c,d]=1$，正如我们所希望的。

现在，$1=[a,bc,bc,d,e]=[a,b,c,d,e][a,c,b,d,e]$，换言之，对于任意 a、b、c、d、$e \in G$，有 $[a,b,c,d,e]=[a,c,b,d,e]$。因此，Hall-Witt 恒等式给出

$$1=[a,b,c,d,e][b,c,a,d,e][c,a,b,d,e]=[a,b,c,d,e]^3=[a,b,c,d,e],$$

因此结论得证。 □

最后，在下面的定理 5.5 和定理 5.7 中，我们将证明，一般而言，$\gamma_6(G)=1$，并且当 G 的秩超过 5 时，$\gamma_5(G)$ 可能非平凡。由此将证明定理 1.3(vi)，从而完成主要结果的证明。

定理 5.5. 设 G 是一个强 3-恩格尔 p-群。那么，$\gamma_6(G)=1$。

证明。由定理 5.1，$\gamma_5(G)^{20}=1$，因此，如果 $p \notin \{2,5\}$，则 $\gamma_5(G)=1$；又由于 G 是强的，

$$\gamma_6(G)=[\gamma_5(G),G] \leq \gamma_5(G)^{2p}=1$$

如果 $p=2$ 或 5。 □

引理 5.6. 设 G 是一个幂零类为 $c \leq p^i$ 的有限 p-群，其中 $i \geq 1$。如果 p 为奇数，则 G^{p^i} 是强的；如果 $p=2$，则 $G^{2^{i+1}}$ 是强的。

证明。设 p 为奇数。由 Hall-Petresco 恒等式可得

$$[x^{p^i},y^{p^i}]=[x^{p^i},y]^{p^i} c_2^{\binom{p^i}{2}} \cdots c_{p^i-1}^{\binom{p^i}{p^i-1}} c_{p^i},$$

其中 $c_j \in \gamma_j(\langle [x^{p^i},y],y\rangle) \leq G^{p^i} \cap \gamma_{j+1}(G)$，对于 $j=2,\ldots,p$。特别地，$c_{p^i} \in \gamma_{p^i+1}(G)=1$，因此 $[G^{p^i},G^{p^i}] \leq (G^{p^i})^p$。对于 $p=2$，证明类似，因为对每个$2 \leq j \leq 2^i-1$都有 $4 \mid \binom{2^{i+1}}{j}$。□

定理 5.7。对于 $p \in \{2,5\}$，存在一个强 3-恩格尔 p-群，使得 $\gamma_5(G) \neq 1$。

证明。为帮助读者，我们先构造一个类似的李环例子，然后以 Mal'cev 对应为指引，在 $\mathbb{Q}$上的李代数与 $\mathbb{Q}$-幂群之间，以类似的方式构造所需的群。

设 $F=\langle a、b、c\rangle_{\mathbb{Q}}$为由 3 个生成元生成的自由 $\mathbb{Q}$-李代数。设 I为 $F\mathbb{Q}$生成的理想：

- $\{a,b,c\}$ 中所有长度为 6 的交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中所有含有 2 个 a项的交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中所有含有 3 个 b项的交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中所有含有 3 个 c项的交换子。
- $\{b,c\}$ 中所有含有 b 和 c 的交换子。

我们首先考虑 $p=5$ 的情形。稍微滥用一下记号，记作 $L=F/I=\langle a,b,c\rangle_{\mathbb{Q}}$，并注意到 $\gamma_6(L)=1$。注意， $\mathbb{Q}$-代数 L 的基为 a, b, c, $[a,b]$,$[a,c]$, $[b,c]$, $[a,b,b]$, $[a,b,c]$, $[a,c,b]$, $[a,c,c]$, $[b,c,c]$, $[c,b,b]$, $[a,b,b,c]$, $[a,b,c,b]$, $[a,c,b,b]$,$[a,c,c,b]$, $[a,c,b,c]$, $[a,b,c,c]$, $[a,b,b,c,c]$, $[a,b,c,b,c]$, $[a,b,c,c,b]$, $[a,c,c,b,b]$, $[a,c,b,c,b]$,$[a,c,b,b,c]$。因此，$\dim_{\mathbb{Q}}(L)=24$，且 $\dim_{\mathbb{Q}}(\gamma_5(L))=6$。现在考虑由 $\frac{1}{p}a$, $\frac{1}{p}b$ 和 $\frac{1}{p}c$, $M=\langle\frac{1}{p}a,\frac{1}{p}b,\frac{1}{p}c\rangle_{\mathbb{Z}}$ 生成的 L 的李子环，并定义 $K=pM\subseteq L$。于是

$$[K,K]=[pM,pM]=p^2[M,M]\leq p^2M=pK,$$

因此， $R=K/p^5K$ 是一个强 p-李环。此外， $\langle a,b,c\rangle_{\mathbb{Z}}\leq K$，所以 K 的幂零类为 5。同样在这种情况下，我们有 $\dim_{\mathbb{Z}}(K)=24$ ，且 $\dim_{\mathbb{Z}}(\gamma_5(K))=6$。$\mathbb{Z}$-基由以下元素组成： a, b, c, $d_1=\frac{1}{p}[a,b]$, $d_2=\frac{1}{p}[a,c]$, $d_3=\frac{1}{p}[b,c]$,$e_1=\frac{1}{p^2}[a,b,b]$, $e_2=\frac{1}{p^2}[a,b,c]$, $e_3=\frac{1}{p^2}[a,c,b]$, $e_4=\frac{1}{p^2}[a,c,c]$, $e_5=\frac{1}{p^2}[b,c,c]$, $e_6=\frac{1}{p^2}[c,b,b]$, $f_1=\frac{1}{p^3}[a,b,b,c]$, $f_2=\frac{1}{p^3}[a,b,c,b]$, $f_3=\frac{1}{p^3}[a,c,b,b]$, $f_4=\frac{1}{p^3}[a,c,c,b]$, $f_5=\frac{1}{p^3}[a,c,b,c]$, $f_6=\frac{1}{p^3}[a,b,c,c]$, $g_1=\frac{1}{p^4}[a,b,b,c,c]$, $g_2=\frac{1}{p^4}[a,b,c,b,c]$, $g_3=\frac{1}{p^4}[a,b,c,c,b]$,$g_4=\frac{1}{p^4}[a,c,c,b,b]$, $g_5=\frac{1}{p^4}[a,c,b,c,b]$, $g_6=\frac{1}{p^4}[a,c,b,b,c]$。

注意到 $\gamma_5(K)\cap p^5K=p\gamma_5(K)$，因此 $R=K/p^5K$ 是类 5 幂零群，且作为阿贝尔 p-群，其维数为 24。现在考虑由字 $[x,y,y,y]$ 和 p^5x 生成的 K 的词理想 J。由于 $p>3$, J 也由 p^5x 和多线性字生成

$$\sum_{\sigma\in S_3}[x,y_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},y_{\sigma(3)}].$$

由此可得， J 是 a中的多重分次理想 $,b,c,d_1,d_2,d_3,e_1,\cdots\cdots,e_6,f_1,\cdots\cdots,f_6,g_1,\cdots\cdots,g_6$。注意， e_1、……、 e_6、 f_1、……、 f_6、 g_1、……、 g_6 都属于第三中心；非平凡且不只涉及 a、b、 c的多重齐次分量仅有$\{b,c,c,d_1\}$、 $\{b,b,c,d_2\}$、 $\{a,b,c,d_3\}$中的那些。我们先考虑其中的两个。

不难看出且众所周知， [3], 这些多齐次分量的关系子由以下元素生成

$$\frac{1}{p}[a,b,b,c,c]=[d_1,b,c,c] = 2[d_1,c,b,c]=\frac{2}{p}[a,b,c,b,c]; \tag{10}$$

$$\frac{1}{p}[a,b,c,c,b]=[d_1,c,c,b] = -3[d_1,c,b,c]=-\frac{3}{p}[a,b,c,b,c]; \tag{11}$$

$$\frac{1}{p}[a,c,c,b,b]=[d_2,c,b,b] = 2[d_2,b,c,b]=\frac{2}{p}[a,c,b,c,b]; \tag{12}$$

$$\frac{1}{p}[a,c,b,b,c]=[d_2,b,b,c] = -3[d_2,b,c,b]=-\frac{3}{p}[a,c,b,c,b]. \tag{13}$$

我们还从 [3] 得知，仅涉及 a、 b、 c的3-恩格尔恒等式所推出的权重 5 关系子为

$$\begin{aligned}
[a,b,c,b,c] &= 3[a,b,b,c,c];\\
[a,b,c,c,b] &= -4[a,b,b,c,c];\\
[a,c,b,c,b] &= 3[a,b,b,c,c];\\
[a,c,b,b,c] &= -4[a,b,b,c,c];\\
[a,c,c,b,b] &= [a,b,b,c,c];\\
p[a,b,b,c,c] &= 0. \qquad (14)
\end{aligned}$$

最后，我们考察 (a,b,c,d_3)。3-恩格尔关系化简为

$$\begin{aligned}
0 &= [a,d_3,b,c]+[a,d_3,c,b]+[a,b,d_3,c]+[a,c,d_3,b]+[a,b,c,d_3]+[a,c,b,d_3];\\
0 &= [d_3,a,b,c]+[d_3,a,c,b]+[d_3,b,a,c]+[d_3,b,c,a]+[d_3,c,a,b]+[d_3,c,b,a].
\end{aligned}$$

由第一个方程可得（利用 (10)-(13)）

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{p}[a,[b,c],b,c]]+\frac{1}{p}[a,[b,c],c,b]+\frac{1}{p}[a,b,[b,c],c]+\frac{1}{p}[a,c,[b,c],b]+\frac{1}{p}[a,b,c,[b,c]]+\frac{1}{p}[a,c,b,[b,c]]\\
&= \frac{1}{p}[a,b,c,b,c]-\frac{1}{p}[a,c,b,b,c]+\frac{1}{p}[a,b,c,c,b]-\frac{1}{p}[a,c,b,c,b]+\frac{1}{p}[a,b,b,c,c]-\frac{1}{p}[a,b,c,b,c]\\
&+ \frac{1}{p}[a,c,b,c,b]-\frac{1}{p}[a,c,c,b,b]+\frac{1}{p}[a,b,c,b,c]-\frac{1}{p}[a,b,c,c,b]+\frac{1}{p}[a,c,b,b,c]-\frac{1}{p}[a,c,b,c,b]\\
&= \frac{3}{p}[a,b,c,b,c]-\frac{3}{p}[a,c,b,c,b].
\end{aligned}$$

这给出

$$\frac{1}{p}[a,b,c,b,c]=\frac{1}{p}[a,c,b,c,b]. \tag{15}$$

还要注意，(14) 与 $p^5x=0$ 相容，且是其推论，因为 $p[a,b,b,c,c]=p^5g_1$。由此分析可知，在 K/J 中，$\overline{g_2}$ 的阶为 p^5，尤其是 $0\neq p^4\bar{g_2}=\overline{[a,b,c,b,c]}$。因此，$K/J$ 是一个幂零类 5 的 3-恩格尔强幂李环。

现在我们想构造一个类似的群论例子。遗憾的是，我们不能直接使用 Mal'cev 对应，但受到上面的李环例子的启发，可以模仿这一过程。我们从一个与李代数 F 相对应的 $\mathbb{Q}$-幂群 $F^*=\langle a,b,c\rangle^{\mathbb{Q}}$ 开始，并令 I^* 为由以下元素生成的正规 $\mathbb{Q}$-子群：

- $\{a,b,c\}$ 中长度为 6 的所有交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中长度为 5 且有 2 个项属于 a 的所有交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中有 3 个项属于 b 的所有交换子。
- $\{a,b,c\}$ 中有 3 个项属于 c 的所有交换子。
- $\{b,c\}$ 中有 2 个项属于 b 且有 2 个项属于 c 的所有交换子。

令 $L^*=F^*/I^*$，并考虑子群 $M^*=\langle a^{1/p},b^{1/p},c^{1/p}\rangle$。接着令 $K^*=(M^*)^p$。由引理 5.6 可知 $[K^*,K^*]\leq (K^*)^p$。注意，K^* 是一个无挠群，且为类 5 幂零群，因此是剩余有限的 p-群。取足够大的 l，使得 $[a,b,b,c,c]\notin (K^*)^{p^l}$。特别地，$R^*=K^*/(K^*)^{p^l}$ 是类 5 幂零的。现在考虑由 x^{p^l} 和 $[y,x,x,x]$ 生成的词子群 J^*。由于 $p>3$，J 也由 x^{p^5} 和“多线性词”生成

$$\prod_{\sigma\in S_3}[x,y_{\sigma(1)},y_{\sigma(2)},y_{\sigma(3)}].$$

注意到，R^* 由 a、b、c、$d_1=[a^{1/p},b^{1/p}]^p$、$d_2=[a^{1/p},c^{1/p}]^p$、$d_3=[b^{1/p},c^{1/p}]^p$ 和 $\gamma_3(K^*)$ 生成。由于 $\gamma_3(K^*)\leq Z_3(K^*)$，出于与李环情形类似的理由可知，只需考虑在 $\{b,c,c,d_1\}$、$\{b,b,c,d_2\}$、$\{a,b,c,d_3\}$ 中具有多重权的 Engel 关系，以及在 $\langle a$、b、$c\rangle$ 中成立的那些关系。与李环情形类似的计算表明，我们得到 J^* 的以下定义关系（连同使用 [3] 的 $x^{p^l}=1$）

$$\begin{aligned}
[a,b,b,c,c]^{1/p} &= [a,b,c,b,c]^{2/p};\\
[a,b,c,c,b]^{1/p} &= [a,b,c,b,c]^{-3/p};\\
[a,c,c,b,b]^{1/p} &= [a,c,b,c,b]^{2/p};\\
[a,c,b,b,c]^{1/p} &= -[a,c,b,c,b]^{-3/p};\\
[a,b,c,b,c]^{1/p} &= [a,c,b,c,b]^{1/p};\\
[a,c,b,c,b]^{5} &= 1.
\end{aligned}$$

因此，群 K^*/J^* 是一个幂零类为 5 的强 3-恩格尔 5-群。

现在转而讨论情形 $p = 2$。令 $q = 16$。由于所采用的方法非常相似，我们只概述证明。对于李环情形，我们从相同的 F 和 I开始。现在考虑由 $\frac{1}{16}a$、$\frac{1}{16}b$和 $\frac{1}{16}c$、$M = \langle \frac{1}{16}a, \frac{1}{16}b, \frac{1}{16}c\rangle_{\mathbb{Z}}$生成的 L的李子环，并定义 $K = 16M \subseteq L$。其基为 a、b、c、$d_1 = \frac{1}{q}[a,b]$、$d_2 = \frac{1}{q}[a,c]$、$d_3 = \frac{1}{q}[b,c]$、$e_1 = \frac{1}{q^2}[a,b,b]$、$e_2 = \frac{1}{q^2}[a,b,c]$、$e_3 = \frac{1}{q^2}[a,c,b]$、$e_4 = \frac{1}{q^2}[a,c,c]$、$e_5 = \frac{1}{q^2}[b,c,c]$、$e_6 = \frac{1}{q^2}[c,b,b]$、$f_1 = \frac{1}{q^3}[a,b,b,c]$、$f_2 = \frac{1}{q^3}[a,b,c,b]$、$f_3 = \frac{1}{q^3}[a,c,b,b]$、$f_4 = \frac{1}{q^3}[a,c,c,b]$、$f_5 = \frac{1}{q^3}[a,c,b,c]$、$f_6 = \frac{1}{q^3}[a,c,b,b]$、$g_1 = \frac{1}{q^4}[a,b,b,c,c]$、$g_2 = \frac{1}{q^4}[a,b,c,b,c]$、$g_3 = \frac{1}{q^4}[a,b,c,c,b]$、$g_4 = \frac{1}{q^4}[a,c,c,b,b]$、$g_5 = \frac{1}{q^4}[a,c,b,c,b]$、$g_6 = \frac{1}{q^4}[a,c,b,b,c]$。

注意，$\gamma_5(K) \cap 4q^4K = 4\gamma_5(K)$，因此 $R = K/4q^4K$ 是类 5 幂零的，且作为阿贝尔 2-群，其维数为 24。接下来

$$[K,K] = [qM, qM] = q^2[M,M] \leq 4 \cdot qM = 4K,$$

因此，$R = K/4q^4K$ 是一个强 2-李环，作为阿贝尔 2-群，其秩也为 24。现在考虑由词 q^5x 和 $[y,x,x,x]$生成的 K 的词理想 J。这里情况稍微复杂一些，因为理想 J 不是多重分次的。不过，它相对于生成元的总权重是分次的。更确切地说，恒等式 $[y,x,x,x] = 0$等价于以下条件对上述生成集中的所有 x、y、z、x_1、x_2、x_3均成立。

$$\begin{aligned} [y,x,x,x] &= 0; \\ [y,z,x,x] + [y,x,z,x] + [y,x,x,z] + [y,x,z,z] + [y,z,x,z] + [y,z,z,x] &= 0; \quad (16) \\ \sum_{\sigma \in S_3} [y, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}] &= 0. \quad (17) \end{aligned}$$

注意，再次有 e_1、$\ldots$、e_6、f_1、$\ldots$、f_6、g_1、$\ldots$、g_6属于第三中心；而不涉及 a、b、c的 3-恩格尔恒等式所能推出的齐次分量中，只有那些对 (b、c、d_1) 使用 (16)、对 (b、c、d_2) 使用 (16)，以及对 (a、b、c、d_3) 使用 (17) 的分量例外。我们已经从 [3] 知道，若没有这些恒等式，该代数将是类 5 幂零的。与$p = 5$ 情形一样，这些附加恒等式与此相容，因此可以得出结论：类仍为 5。群的情形也与之前类似。□

最后，我们总结前两节中得到的结果。

定理 1.3 的证明。(i) 和 (iii) 部分由定理 4.4 得出；这些界是最佳的，因为每个幂零类 3 的群总是 3-恩格尔群。(ii) 部分由定理 5.1 得出，而例 5.2 和 5.3 表明这个上界是最佳的。(iv) 部分由定理 4.5 得出，而例 3.5 表明这个上界是最佳的。(v) 部分由定理 5.4 得出，而例 3.5 和 5.3 表明这个上界是最佳的。(vi) 部分由定理 5.5 和定理 5.7 得出。□

References

[1] R. G. Burns 和 Y. Medvedev，*A note on engel groups and local nilpotence*，《J. Aust. Math. Soc.》64（1998），92–100。[2] N. D. Gupta 和 M. F. Newman，*On metabelian groups*，《J. Aust. Math. Soc.》6（1966），第 3 期，362–368。[3]，*Third Engel groups*，《Bull. Aust. Math. Soc.》40（1989），第 2 期，215–230。[4] A. Hadjievangelou、M. Noce 和 G. Traustason，*Locally finite p-groups with a left 3-engel element whose normal closure is not nilpotent*，《International Journal of Algebra and Computation》31（2021），第 1 期，135–160。[5] H. Heineken，*Engelsche elemente der lange drei*，《Illinois J. Math.》5（1961），681–707。[6] G. Traustason、M. Noce、G. Tracey，*A left 3-Engel element whose normal closure is not nilpotent*，《J. Pure Appl. Algebra》224（2020），第 3 期，1092–1101。

[7] M. Primoˇz 和 G. Traustason, *Powerful* 2*-Engel groups*, 《Commun. Algebra》36（2008），第 11 期，4096– 4119。[8] A. Shalev, *On almost fixed point free automorphisms*, 《代数学杂志》157（1993），271–282。[9] G. Tracey 和 G. Traustason, *Left* 3*-engel elements in groups of exponent* 60, 《Internat. J. Algebra Comput.》28（2018），673–695。[10] G. Traustason, *Powerful* 2*-Engel groups II*, 《代数学杂志》319（2008），第 8 期，3301–3323。[11] , *Left* 3*-engel elements in groups of exponent* 5, 《代数学杂志》414（2014），41–71。[12] J. S. Wilson, *Two-generator conditions for residually finite groups*, 《Bull. London Math. Soc.》23（1991），第 3 期，239–248。

Iker de las Heras: Mathematisches Institut der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf, Germany*Email address*: iker.delasheras@ehu.eus

Marialaura Noce: Department of Mathematics, University of Salerno, via GiovanniPaolo II 132, 84084 Fisciano (SA), Italy*Email address*: mnoce@unisa.it

Department of Mathematical Sciences, University of Bath, Claverton Down, Bath BA27AY, United Kingdom*Email address*: gt223@bath.ac.uk