arXiv:2301.07061v1 [math.RT] 17 Jan 2023

Artin 诱导定理一个版本的拓扑证明

穆格·萨德托格鲁

[1]东地中海大学数学系，法马古斯塔，北塞浦路斯，经梅尔辛-10，土耳其

摘要

我们为有限群 G 以胞腔方式作用于其上的有限胞腔复形 X 定义欧拉示性数 $\chi(X,G)$。于是，每个 $K_i(X)$（以 X 的 i 胞腔为基的复向量空间）都是 G 的一个表示；我们将 $\chi(X,G)$ 定义为表示 $K_i(X)$ 的交错和，其中各项均视为群 G 的表示环 $R(G)$ 中的元素。通过改编通常的证明——即链复形维数的交错和等于同调群维数的交错和——我们证明，还可以用表示 $H_i(X)$ 的交错和来定义 $\chi(X,G)$，同样将其视为表示环 $R(G)$ 中的元素。我们还证明，相对于给定元素 g，这个虚表示 $\chi(X,G)$ 的特征标恰好等于该元素的不动点集的通常欧拉示性数。最后，我们给出 Artin 诱导定理一个版本的拓扑证明。更确切地说，我们证明，若 G 是一个具有维数大于 1 的不可约表示的群，则 G 的每个特征标都可以表示为有理系数的线性组合，其中各项是由 G 的真子群的特征标诱导而来的特征标。

关键词： 不可约表示；子表示；特征标；同调；复射影空间

1 引言

有限群表示论的起源可追溯到约一个世纪前 R. Dedekind 与 F. G. Frobenius 之间的一次通信 [2, 1]。该理论通过将抽象代数结构中的元素表示为向量空间上的线性变换来研究这些结构。具体来说，表示是一种使抽象代数对象更加具体的方式，即用矩阵及矩阵上的算术运算来定义其元素。线性代数和矩阵理论广为人知，也较少抽象，因此，借助熟悉的线性代数对象理解更抽象的对象，有助于推导其性质，并简化更抽象背景下的计算。表示论是抽象数学的一个分支，在数学以及化学、物理学、计算和统计学等其他科学领域都有许多重要应用。举几个例子： [3], 中利用 $SO(3)$的实不可约表示构造斜对称矩阵的算法（李理论中的应用）； [4], 中利用辫群的一个非阿贝尔四维酉表示，获得完全无泄漏的编织（计算机科学中的应用）；以及 [5], 中讨论了群表示论在物理学和量子化学诸领域的应用，尤其是核物理学和分子物理学。本研究的动机是运用表示论，为一个抽象问题给出拓扑证明。下面介绍研究方法：设 X为有限胞腔复形，令 $K_*(X)$为其带复系数的胞腔链复形，其中每个 $K_i(X)$s都是一个复向量空间，以 i-胞腔为基。现在，假设有限群 G 在 X上胞腔作用。那么，每个 $K_i(X)$都是 G的一个表示；通过让 G作用于 X ，我们可以定义一个更精确的欧拉示性数： $\chi(X,G) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[K_i(X;\mathbb{C})] \in R_{\mathbb{C}}(G)$。这个虚表示的维数恰好是 X的通常欧拉示性数。我们声称，$\chi(X,G)$还有另一种定义如下：$\chi(X,G) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[H_i(X;\mathbb{C})] \in R_{\mathbb{C}}(G)$，其中 $H_i(X)$是 X的第 i个同调群，且 G作用于其上。本文将研究以下问题。我们将尝试改造通常的证明

*通讯 es作者。电子邮件： muge.saadetoglu@emu.edu .tr

即 $\sum_i(-1)^i\dim_{\mathbb{C}}K_i(X;\mathbb{C}) = \sum_i(-1)^i\dim_{\mathbb{C}}H_i(X;\mathbb{C})$，从而得到一个类似公式，使等式在 $R_{\mathbb{C}}(G)$中作为元素成立，其中 G 作用于 X。我们还将寻找一个公式，用 $X^g = \{x \in X | gx = x\}$的通常欧拉示性数来表示 $\chi(X, G)$的特征标。最后，借助这些结果，我们为 Artin 诱导定理的一个版本给出拓扑证明。Artin 诱导定理指出，有限群的任意特征标都可以表示为由循环子群诱导而来的特征标的有理线性组合。在本文中，我们证明了该定理的一个版本；更确切地说，我们证明：如果 G 是一个具有维数大于 1 的不可约表示的群，那么 G 的每个特征标都可以表示为由 G的真子群的特征标向上诱导而来的特征标的有理线性组合。

本文结构如下。第 2 节将介绍表示论和拓扑学的预备知识。第 3 节和第 4 节将分别给出使用链群定义和同调群定义计算欧拉示性数的示例。最后，我们将在第 5 节给出结果。

本工作发表于 2014 年在韩国首尔举行的国际数学家大会 ICM2014。

2 预备知识

这里的主要参考文献是 [6, 7, 8]。请注意，底域是复数域。

定义 2.1. 设 $\varphi\colon G \to GL(V)$ 是一个线性表示，且 W 是 V 的一个子空间。假设 W 在 G 的作用下不变，也就是说，假设 $w \in W$ 蕴含 $\varphi_s(w) \in W$，对所有 $s \in G$ 均成立。于是，φ_s 在 W 上的限制 φ^W 是 W 到自身的一个同构。因此，$\varphi^W\colon G \to GL(W)$ 是 G 在 W 上的一个线性表示，称为 G 的一个子表示。

定义 2.2. 若一个非零线性表示没有非平凡的真子表示，则称其为不可约表示。

定义 2.3. 设 G是一个有限群，H是指数为 n的子群，且 (π, V) 是 H的一个任意表示。设 $x_1, x_2, \ldots, x_n$是 G中 G/H的陪集代表元。诱导表示 $Ind_H{}^G\pi$作用于 $W = \bigoplus x_iV$，其中 i遍历陪集代表元；通过此表示，G按如下方式作用于 W：$g.\sum x_iv_i = \sum x_{j(i)}\pi(h_i)v_i$，其中 $v_i \in V$。

下面我们陈述一些表示论中众所周知的定理，这些定理将在接下来的章节中发挥作用。

定理 2.1 (不动点公式)。设 V 是有限群 G的一个表示，且 X 是一个有限G-集合。那么，对于每个 $g \in G$，X 中（在 g的作用下）的左不动元素个数为 $\chi_V(g)$。

定理 2.2. G 的共轭类数与 G的不可约表示数相同（在同构意义下）。

Theo注 *2.3. </style}*群 G 是阿贝尔群，当且仅当所有不可约表示的次数 1.

定理 2.4. 不同不可约表示的维数平方和等于给定群 G 的阶。

定理 2.5. 设 V 是 G 的一个线性表示，其特征标为 ϕ，且假设 V 可分解为不可约表示 $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ 的直和。那么，如果 W 是一个特征标为 χ 的不可约表示，与 W 同构的 W_i 的个数等于标量积 $(\phi|\chi)$，其中

$$(\phi|\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G}\phi(t)\chi(t).$$

接下来，我们陈述代数拓扑学中的一些著名定理。 K 是一个有限单纯复形。

定理 2.6。 $H_0(K)$ 是一个自由阿贝尔群，其秩等于 $|K|$的连通分支数。

定理 2.7。如果 $|K|$ 是连通的，则将其基本群阿贝尔化可得 K的第一同调群 .

定理 2.8。 $H_2(K)$ 若 $|K|$ 是可定向曲面，则为 $\cong \mathbb{Z}$；若不是，则为0 。

备注 2.1。 下文第 3 节和第 4 节中的例子为定理 5.1 提供了证据，该定理将在第 5 节中证明。

3 使用链群定义计算 $\chi(X, G)$

本节将通过链群定义，计算一些例子中的 $\chi(X, G)$。

例 3.1： D_3 作为对称群作用于等边三角形。

D_3 表示 3 阶二面体群，换句话说，即 6 阶二面体群。它是等边三角形的 6 个对称变换组成的群。这些变换包括沿穿过 3 个顶点的轴反射，以及绕中心旋转 $120°$ 的整数倍。我们用 e, ρ, ρ^2 表示旋转，用 α, β, γ 表示反射。群 D_3 有 2 个一维不可约表示（平凡表示和交错表示），以及 1 个二维不可约表示（标准表示）；参见 [8, 7]。我们分别将它们记作 $\mathbf{1}$, σ, τ。对于平凡表示，对所有 $g \in G$，都有 $\chi_{\mathbf{1}}(g) = 1$ 。交错表示的特征标值为：当 $g \in A_3$ 时， $\chi_\sigma(g) = 1$ ；当 $g \notin A_3$ 时， $\chi_\sigma(g) = -1$ 。最后，二维表示 τ 的特征标值为 $\chi_\tau(e) = 2$ 、 $\chi_\tau(\alpha) = 0$ 和 $\chi_\tau((123)) = -1$。

这里， K_0 是一个维数为 3 的表示空间，其维数等于 0-胞腔的数量。令 P 为与之对应的表示。根据不动点公式（定理 2.1），该表示的特征标值如表 1 所示。

表 1：表示 P的特征标表。

	e	ρ	ρ^2	α	β	γ
χ_P	3	0	0	1	1	1

根据定理 2.5，与$\mathbf{1}$ 同构的不可约表示的数量为 $(\chi, \phi_1) = 1$，其中 ϕ_1 表示平凡表示的特征标。类似地，$(\chi, \phi_2) = 0$ 和 $(\chi, \phi_3) = 1$，其中 ϕ_2 和 ϕ_3 分别是 σ 和 τ的特征标。因此， $P = \mathbf{1} \oplus \tau$.

类似地， K_1 是一个维数为 3 的表示空间。将这个表示记为 Q。 Q 的特征标值见表 2。

表 2：表示 Q的特征标表。

	e	ρ	ρ^2	α	β	γ
χ_Q	3	0	0	-1	-1	-1

标量积分别为（χ, ϕ_1）$= 0$、（χ, ϕ_2）$= 1$ 和（χ, ϕ_3）$= 1$。因此， $Q = \sigma \oplus \tau$.最后， K_2 是一个一维表示空间，我们将其称为 R。 R 的特征标值为 a re 见表3。

表3：表示 R的特征标表。

	e	ρ	ρ^2	α	β	γ
χ_R	1	1	1	-1	-1	-1

这里，标量积的值分别为 $(\chi, \phi_1) = 0$、$(\chi, \phi_2) = 1$ 和 $(\chi, \phi_3) = 0$。因此 $R = \sigma$.因此，

$$\begin{aligned}\chi(X;G) &= P \oplus -Q \oplus R = (\mathbf{1} \oplus \tau) - (\rho \oplus \tau) + (\rho) \\ &= \mathbf{1}.\end{aligned}$$

例 3.2. $C_2 \times C_2$ 作用于八面体上，绕着穿过相对顶点的三条轴旋转 π 度。

C_2 在这里表示2阶循环群。因此，阿贝尔群 $C_2 \times C_2$ 有四个元素：一个阶为1的单位元，其余三个元素的阶均为2。我们用e、 ρ_1、 ρ_2、 ρ_3表示这些元素，其中 ρ_1 是连接顶点5和6的轴， ρ_2 是连接顶点3和4的轴，最后ρ_3 是连接顶点1和2的轴；参见图1。

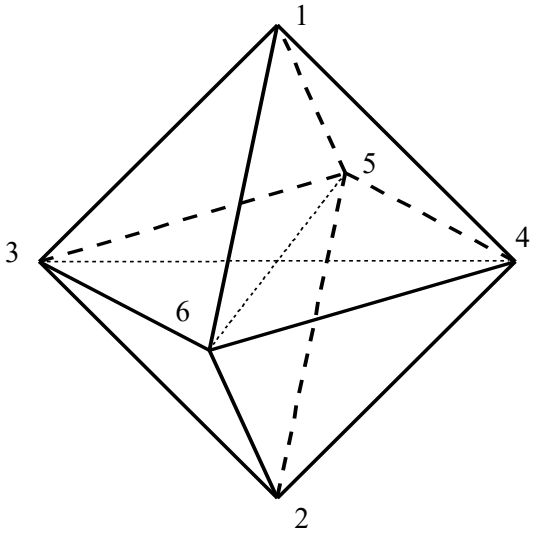

图1： $C_2 \times C_2$ 作用于八面体上，绕着连接相对顶点的三条轴旋转 $180°$ 。

由于这个群是阿贝尔群，所有不可约表示的次数均为1。此外，不同不可约表示的维数平方和等于 $C_2 \times C_2$的阶，因此它们必有4个。根据 [8, 7]，这些表示列于表4。

表4： $C_2 \times C_2$的特征标表。

	e	ρ_1	ρ_2	ρ_3
$\chi_{\mathbf{1}}$	1	1	1	1
χ_{T_1}	1	1	-1	-1
χ_{T_2}	1	-1	1	-1
χ_{T_3}	1	-1	-1	1

令 P 为与维数6的空间 K_0 对应的表示。类似于前一个例子的推导可得 $P = 3\mathbf{1} \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$. 接下来，令 Q 为与维数12的空间K_1 对应的表示。我们得到 $Q = 3\mathbf{1} \oplus 3T_1 \oplus 3T_2 \oplus 3T_3$. 最后，如果 R 是与之对应的表示

维数为8的空间 K_2，那么 $R = 2\mathbf{1} \oplus 2T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3$. 因此，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(X;G) &= 3\mathbf{1} \oplus T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 - (3\mathbf{1} \oplus 3T_1 \oplus 3T_2 \oplus 3T_3) + (2\mathbf{1} \oplus 2T_1 \oplus 2T_2 \oplus 2T_3) \\ &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}.\end{aligned}$$

例3.3。 $C_2 \times C_2 \times C_2$ 作为反射群作用于八面体，反射发生在三个坐标平面上。

根据前面的例子， $C_2 \times C_2 \times C_2$ 是一个阶为 8 的阿贝尔群，其中单位元的阶为 1，其余七个元素的阶均为 2。将关于 xy平面的反射记为 α ，关于 yz平面的反射记为 β ，关于 xz平面的反射记为 γ ；见图2。因此， $C_2 \times C_2 \times C_2$ 的元素为 e、 α、β、 γ、 $\alpha \circ \beta$、 $\alpha \circ \gamma$、 $\beta \circ \gamma$、 $\alpha \circ \beta \circ \gamma$（我们将用记号 $\alpha\beta$ 表示元素 $\alpha \circ \beta$）。与前面例子类似的计算表明， $\chi(X, G) = V_1 \oplus V_8$，其中 V_1 是平凡表示，而 V_8 将 e、 $\alpha\beta$、 $\alpha\gamma$、 $\beta\gamma$ 映射为 1，将其余元素映射为 -1。（群 $C_2 \times C_2 \times C_2$ 是阿贝尔群；因此，它有 8 个次数为 1 的不可约表示；见表 5 [8, 7]。）

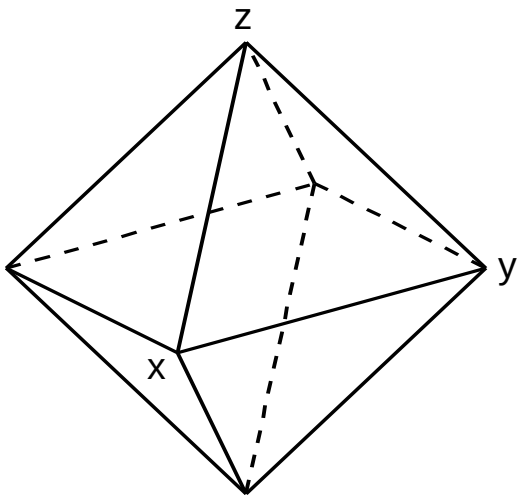

图2： $C_2 \times C_2 \times C_2$ 作用于八面体。

表5： $C_2 \times C_2 \times C_2$的特征标表。

	e	α	β	γ	$\alpha\beta$	$\alpha\gamma$	$\beta\gamma$	$\alpha\beta\gamma$
χ_{V_1}	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_{V_2}	1	1	1	−1	1	−1	−1	−1
χ_{V_3}	1	1	−1	1	−1	1	−1	−1
χ_{V_4}	1	1	−1	−1	−1	−1	1	1
χ_{V_5}	1	−1	1	1	−1	−1	1	−1
χ_{V_6}	1	−1	1	−1	−1	1	−1	1
χ_{V_7}	1	−1	−1	1	1	−1	−1	1
χ_{V_8}	1	−1	−1	−1	1	1	1	−1

4 使用同调群定义计算 $\chi(X, G)$

本节将使用同调群定义，计算上述示例中的 $\chi(X, G)$。

*Ex*充分 4.1。 群 D_3 作为对称群作用于等边三角形 .

不可约表示为$\mathbf{1}$、 σ、 τ。我们使用以下公式

$$\chi(X,G)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[H_i(X)].$$

没有任何变换会影响连通性；因此，维数为 1 的群 $H_0\cong\mathbb{C}$ 对 $[H_0]$ 的贡献为 $\mathbf{1}$ 。维数为 0 的群 $H_1=0$ ；因此，对 $[H_1]$ 没有贡献。最后，第二同调群也是 0；因此，对 $[H_2]$ 也没有贡献。因此， $\chi(X,\ G)=\mathbf{1}$.

例 4.2。群 $C_2\times C_2$ 作为旋转群作用于八面体上。

不可约表示为 $\mathbf{1}$、T_1、T_2、T_3。

对于维数为 1 的群 $H_0\cong\mathbb{C}$ ，如同前一个例子，对 $[H_0]$ 的贡献为 $\mathbf{1}$。第一同调群为 0，因此对 $[H_1]$ 没有贡献。最后， $H_2\cong\mathbb{C}$ 由八面体的三角剖分中所有三角形之和生成。如果将此表示记为 P，则再次利用不动点公式， P 的特征标值由 $\chi_P(e)=1,\ \chi_P(\rho_1)=1,\ \chi_P(\rho_2)=1,\ \chi_P(\rho_3)=1$ 给出，因此 H_2 对 $[H_2]$ 的贡献为 $\mathbf{1}$。因此， $\chi(X,\ G)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[H_i(X;\ \mathbb{C})]=\mathbf{1}\oplus\mathbf{1}$.

例 4.3。群 $C_2\times C_2\times C_2$ 在三个坐标平面上对八面体进行反射。

群 H_0 同构于 $\mathbb{C}$ ，对 $[H_0]$贡献 $\mathbf{1}$ 。 $H_1\cong 0$，因此对 $[H_1]$没有贡献；最后， $H_2\cong\mathbb{C}$ 的维数为 1。若 P是与此对应的表示，则 P在旋转和反射下的特征标值分别为 1 和 -1 。如前所述，该表示是V_8。因此， $\chi(X;G)=\mathbf{1}\oplus V_8$.

5 结果

定理 5.1。 作为表示环中的元素，

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[K_i(X;\mathbb{C})]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[H_i(X;\mathbb{C})]$$

对于一般情形。

证明。 设 Z_n 为由 n-循环构成的群， B_n 为由边界 n-循环构成的群。存在两个短正合列

$$0\to Z_n\rightarrowtail K_n\twoheadrightarrow B_{n-1}\to 0$$
$$0\to B_n\rightarrowtail Z_n\twoheadrightarrow H_n\to 0$$

并且这些序列是分裂的。因此，我们有 $K_n=Z_n\oplus B_{n-1}$ 和 $Z_n=B_n\oplus H_n$。这意味着$K_n=B_n\oplus H_n\oplus B_{n-1}$。因此， $\chi_{K_n}=\chi_{B_n}+\chi_{H_n}+\chi_{B_{n-1}}$.

根据上面的等式，我们有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\chi_{K_i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\chi_{B_i}+\chi_{H_i}+\chi_{B_{i-1}}).$$

除 $\chi_{B_{-1}}$ 和 χ_{B_n}外，所有 χ_{B_i}s 和 $\chi_{B_{i-1}}$s 都相互抵消，因此现在来考虑这几种情况。由于 $\chi_{K_0}=\chi_{B_0}+\chi_{H_0}$，我们有$\chi_{B_{-1}}=0$。此外， $B_n=0$，因为不存在 $\{n+1\}$ 维面。因此，$\chi_{B_n}=0$。所以，

$$\chi(X;G):=\sum(-1)^i\chi_{K_i}=\sum(-1)^i\chi_{H_i}$$

这意味着

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[K_i(X;\mathbb{C})]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i[H_i(X;\mathbb{C})].$$

□

命题 5.1。 $\chi(X;\ G)$ 的特征标等于 X^g 的通常欧拉示性数，其中 $X^g=\{x\in X|\,gx=x\}$。

证明。 令 ν 表示 $\chi(X;G)$ 的特征标，并令 χ 表示通常欧拉示性数。我们有

$$\nu(\chi(X;G)(g)) = \sum(-1)^i \nu_{K_i}(g).$$

然而， $\nu_{K_i}(g)$是 X 中被 g固定的 i-胞腔的数量，因此， $\sum(-1)^i\nu_{K_i}(g)$等于 $\chi(X^g)$。 □

注记 5.1。 若有限 G 作用于任意集合 S，且 $\sigma \in S$ 满足 $\mathrm{Stab}_G(\sigma) = H$，则 G-集合 $G\cdot\sigma$ 与 G/H 同构（轨道-稳定子定理的证明）。因此， $\mathbb{C}\{G/H\}$ 与以 $G.\sigma$为基的向量空间同构。对于 G-CW-复形，若 σ 是一个稳定子为 H的 n-胞腔，则轨道 $G.\sigma$ 对 $K_n(X)$贡献一份 $\mathbb{C}\{G/H\}$ 。任意子群的平凡表示的诱导表示是其陪集上的置换表示，因此

$$\mathbb{C}\{G/H\} \cong \mathrm{Ind}_H^G(1_H),$$

并且$\chi_{Ind_H^G(\mathbf{1}_H)(g)}$ 等于 σ 中被 g固定的轨道 $G.\sigma$ 里的元素数量。

定理 5.2 （Artin 诱导定理（较弱版本））。 设 G 是一个群，且有一个维数大于 1 的不可约表示。那么， G 的每个特征标都可以表示为有理系数的线性组合，其中各项是由 G 的真子群的特征标诱导而来的特征标。

证明。 只需证明平凡表示 $\mathbf{1}$ 可以写成这种形式，因为根据弗罗贝尼乌斯互反律 [8],

$$\mathrm{Ind}_H^G(a \otimes \mathrm{Res}_H^G(b)) = \mathrm{Ind}_H^G(a) \otimes b.$$

因此，如果

$$\mathbf{1} = \sum_{H_i,\varphi_i,\lambda_i} \lambda_i Ind_{H_i}^G(\varphi_i)$$

then

$$b = \mathbf{1} \otimes b = \sum_{H_i,\varphi_i,\lambda_i} \lambda_i Ind_{H_i}^G(\varphi_i \otimes Res(b)).$$

为了证明该定理，我们需要一个满足以下三个性质的空间 X： X 的欧拉示性数必须非零， G 应在 X 上作用，且所有胞腔稳定子群都是其真子群； G 在 $H_*(X)$上的作用必须是平凡的。 $\mathbb{C}P^n$，即复射影 n-空间，恰好就是我们需要的空间。给定 b： $G \to GL(V)$，一个 G 的 $(n+1)$ 维复表示，我们便得到 G 在 $\mathbb{C}P^n$ 上的作用，其形式为 $g[v] = [b(g)v]$。这里我们使用 CP^n 的一个三角剖分，其中单形在 G-作用下保持不变， [9]。参见 [10] ，或者 [11],$\mathbb{C}P^n$ 是一个维数为 $2n$ 的 CW 复形。事实上，该空间在每个偶数维数 $2j$ 都有一个开胞腔。因此，

$$H_*(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } * = 0, 2, 4, \ldots, 2n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这里， $\chi(\mathbb{C}P^n) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q$，其中 β_q是 $H_q(\mathbb{C}P^n)$的自由阿贝尔部分的秩，因此 $\chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$，故不为零。

容易看出，当且仅当 $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\} = \langle v\rangle$ 是 G的子表示时， $\mathrm{Stab}_G([v]) = G$ 。因此，如果 V 没有一维直和项，那么每个 $\mathrm{Stab}_G([v])$ 都是一个真子群。因此， $\mathbb{C}P^n$ 满足我们上面列出的全部三个性质。于是，由定理 5.1 可得

$$\chi(X) \cdot \mathbf{1} = \sum_i (-1)^i K_i(X)$$

and

$$K_i(X) \cong \oplus_j \mathbb{C}[G/\mathrm{Stab}_G(\sigma_j)]$$

其中， j 遍历 i-胞腔的轨道代表元 σ_j 。因此，根据注 5.1，定理得证。 □

推论 5.1。 如果 G 是非阿贝尔群，那么它有一个维数大于1的不可约表示，因此满足上述定理。

6 结论

本文中，给定一个带有有限群 G 在其上作胞腔作用的有限胞腔复形 X，我们将由链复形和同调群交替求和定义为表示环中的元素，从而为带有此作用的有限胞腔复形定义一个更精确的欧拉示性数。我们证明这两种定义等价，并且相对于给定元素 g，这个虚表示的特征标恰好是该元素的不动点集的通常欧拉示性数。最后，我们运用表示论，为 Artin 诱导定理的一个较弱版本给出拓扑证明。E. Artin 的诱导定理指出，有限群的任意特征标都可以表示为由循环子群诱导的特征标的有理线性组合。在我们的工作中，我们证明了该定理的一个版本；事实上，我们证明，如果 G 是一个具有维数大于 1 的不可约表示的群，那么 G 的每个特征标都是由 G 的真子群的特征标诱导而来的特征标的有理线性组合。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

资金支持

本研究未获得外部资金支持。

致谢

作者谨此感谢 Ian Leary 教授在本研究开展过程中提出的见解并进行的宝贵讨论。

参考文献

[1] Conrad, K. 表示论的起源。《数学教学》**1998**，*44*，361–392。[2] Lam, T.Y. 有限群表示：百年回顾。第一部分、第二部分。《美国数学学会通报》**1998**，*45*，361–372。[3] Stursberg, C.R. so(3) 实不可约表示的矩阵元的初等推导。《对称性》**2015**，*7*，1655–1669。http://dx.doi.org/10.3390/sym7031655。[4] Dally, M.M.; Abdulrahim, M.N. 关于辫群 B6 的酉表示。《数学》**2019**，*7*，1080。https://doi.org/10.3390/math7111080。[5] Chen, J.Q.; Ping, J.; Wang, F. 物理学家的群表示论，第2版；世界科学出版社：新加坡，2002。https://doi.org/10.1142/5019。[6] Armstrong, M.A. 基础拓扑学；施普林格：纽约，美国纽约州，1983。[7] Kao, D. 对称群的表示。2010。http://math.uchicago.edu/~may/VIGRE/ VIGRE2010/REUPapers/（访问日期：2010年10月10日）。[8] Serre, J.P.有限群的线性表示；数学研究生教材第42卷；施普林格：纽约，美国纽约州，1977。[9] Illman, S. 有限群的 G-流形的光滑等变三角剖分。《数学年刊》**1978**，*233*，199–220。[10] Munkres, J.R. 代数拓扑学基础；艾迪生-韦斯利：门洛帕克，美国加利福尼亚州，1984。[11] Hatcher, A.代数拓扑学；剑桥大学出版社：剑桥，美国马萨诸塞州，2002。