arXiv:2301.07075v1 [math.FA] 17 Jan 2023

李群上的哈代–李特尔伍德极大函数的一种修正

Maysam Maysami Sadr

ABSTRACT. 对于度量测度空间 (X, d, μ) 上的实值函数 f，其 Hardy-Littlewood 极大函数由以下“上确界范数”给出：

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(\mathcal{B}_{x,r})} \int_{\mathcal{B}_{x,r}} |f| d\mu.$$

本文将参数 r 上的上确界范数替换为带权函数 w 的 $\mathcal{L}_p$-范数（参数为 r），并定义 Hardy-Littlewood 积分函数 $I_{p,\ w} f$。文中证明，$I_{p,\ w} f$ 逐点收敛到 Mf，当$p \to \infty$时。本文还研究了次线性算子 $I_{p,\ w}$ 的有界性，以及函数 $I_{p,\ w} f$ 的连续性，其中 X 为李群、d 为左不变度量，且 μ 为左 Haar 测度（分别为右 Haar 测度）。

2020年数学主题分类。43Axx，42B25，43A15。
关键词：Hardy-Littlewood 极大函数，李群，度量测度空间。

1. INTRODUCTION

极大次线性算子及其有界性是欧几里得空间上的傅里叶分析诸多方面的主要工具之一 $\mathbb{R}^n$[9]。这类算子的原型是 Hardy-Littlewood 极大函数M，其定义如下：

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)| dy \tag{1}$$

对任意定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部可积函数 f。另一方面，人们一直尝试将傅里叶分析中的各种经典结果推广到一般的度量测度空间，尤其是黎曼流形和李群。我们仅提及近期几项不同方向的研究：[1, 3, 4, 5, 6, 8, 10]。这类推广所涉及的问题之一，是定义具有良好有界性性质的适当极大算子。在 [7] 中，我们探讨了关于 Hardy-Littlewood 极大函数算子的 (1, 1) 弱型有界性的抽象统一方法。本短文的主要思路是，在极大算子的定义中用参数空间上的适当积分取代“上确界”，从而找到一些适用于极大算子的替代形式。本文将这一思路应用于度量测度空间上的 Hardy-Littlewood 极大函数算子

中。例如，我们的修正版 (1) 变为

$$I_{p,w}f(x) := \left(\int_0^\infty \Big(\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y)|dy \Big)^p w(r)dr \right)^{\frac{1}{p}},$$

其中， w 是关于 r 和 $1 \le p < \infty$的可积函数。我们称$I_{p,\ w}f$ 为哈代–李特尔伍德积分函数。在 §2中，我们给出积分函数算子$I_{p,\ w}$的定义，并证明 $\lim_{p\to\infty} I_{p,\ w}f(x) = Mf(x)$。在 §3（分别在 §4）中，我们证明，对于任意具有左不变度量和左不变测度（分别具有右不变测度）的（非紧）李群 G $I_{p,\ w}$关于 $1 \le p \le q \le \infty$是（$\mathcal{L}_q(G)$ $\mathcal{L}_q(G)$）有界的（且 w满足适当条件）。我们还证明，$I_{p,\ w}f$ 关于 $f \in \mathcal{L}_p(G)$和$1 \le p < \infty$几乎处处连续。我们希望在未来的工作中给出一些应用。

致谢。作者谨向 Mahdi Hormozi 博士表示诚挚谢意，感谢他就傅里叶分析的各个方面进行的宝贵讨论。

2. The main definition

设 X 为一个度量空间，其距离函数 d无界。以 $x \in X$ 为中心、$r > 0$ 为半径的开球记作 $\mathcal{B}_{x,\ r}$。下面给出一个简单的引理。

引理 2.1. 设 ν 是定义在 X 上的博雷尔测度，且在有界子集上有限。那么函数 $(x,r) \mapsto \nu(\mathcal{B}_{x,\ r})$ 从 $X \times (0,\infty)$ 到 $[0,\infty)$ 是下半连续的，函数 $r \mapsto \nu(\mathcal{B}_{x,\ r})$ 是左连续的。若对于每个 x, r，都有 $\nu\{y\colon d(x,y) = r\} = 0$（例如，$X$是一个黎曼流形，且 d, ν 是 X上的典范度量和测度），那么函数 $(x,r) \mapsto \nu(\mathcal{B}_{x,\ r})$ 是连续的。

证明。设 $(x_n)_n$ 和 $(r_n)_n$ 分别是 X 和 $(0,\infty)$ 中的序列，满足 $x_n \to x$ 和 $r_n \to r > 0$。我们有 $\cap_n \cup_{k\ge n} (\mathcal{B}_{x,r} \setminus \mathcal{B}_{x_k,r_k}) = \emptyset$，因此 $\nu(\mathcal{B}_{x,r} \setminus \mathcal{B}_{x_n,r_n}) \to 0$。于是，若 $\epsilon > 0$，则对充分大的 n，有 $\nu(\mathcal{B}_{x,r}) - \epsilon < \nu(\mathcal{B}_{x,\ r} \cap \mathcal{B}_{x_n,r_n}) \le \nu(\mathcal{B}_{x_n,r_n})$。这就证明了所需的下半连续性。由于 $r \mapsto \nu(\mathcal{B}_{x,r})$ 是递增函数，下半连续性蕴含所需的左连续性。我们有

$$\cap_n \cup_{k\ge n} (\mathcal{B}_{x_k,r_k} \setminus \mathcal{B}_{x,r}) \subseteq \{y : d(x,y) = r\}.$$

因此，如果 $\nu\{y\colon d(x,y) = r\} = 0$，那么 $\nu(\mathcal{B}_{x_n,r_n} \setminus \mathcal{B}_{x,r}) \to 0$，故当 n 充分大时，有 $\nu(\mathcal{B}_{x_n,r_n}) - \epsilon < \nu(\mathcal{B}_{x_n,r_n} \cap \mathcal{B}_{x,r}) \le \nu(\mathcal{B}_{x,r})$。□

设 μ 是 X 上的博雷尔测度，满足 $\mu(X) = \infty$，且对任意非空有界开子集 U，其中 X，都有 $0 < \mu(U) < \infty$。我们将 $\mathcal{F}_{loc}(X)$记为定义在 X 上的可测函数 f 的集合，其中对每个有界博雷尔子集 U，都有 $\int_U |f|d\mu < \infty$。对于任意 $f \in \mathcal{F}_{loc}(X)$，$f$ 的平均函数 Af 定义为

$$Af : X \times (0,\infty) \to [0,\infty), \quad Af(x,r) := \frac{1}{\mu(\mathcal{B}_{x,r})} \int_{\mathcal{B}_{x,r}} |f|d\mu.$$

根据引理 2.1，函数 $(x,r)\mapsto \int_{\mathcal{B}_{x,r}}|f|d\mu$ 和 $(x,r)\mapsto \frac{1}{\mu\,\mathcal{B}_{x(,r)}}$ 是可测的。因此，Af 是可测的。f 的哈代–李特尔伍德极大函数 Mf 是定义在 X 上的可测函数，其定义为

$$Mf: X\to[0,\infty],\quad Mf(x):=\sup_{r>0}Af(x,r).$$

因此，$Mf(x)$ 就是函数 $r\mapsto Af(x,r)$ 的上确界范数。我们的主要思路是用 $\mathcal{L}_p$-范数来替代上确界范数：

定义 2.2. 设 X,d,μ 如上。令 w 表示 $(0,\infty)$ 上一个非负可测函数，满足 $\|w\|:=\int_0^\infty w(r)dr<\infty$，并且 w 也几乎处处非零。我们称 w 为半径权。记 $\hat{}w$ 为 $(0,\infty)$ 上密度为 w 的有限测度。对于任意 $f\in\mathcal{F}_{loc}(X)$，类型为 (p,w) 的 Hardy-Littlewood 积分函数 $I_{p,w}f$，$1\le p\le\infty$，定义为 X 上由下式给出的可测函数

$$I_{p,w}f: X\to[0,\infty],\quad I_{p,w}f(x):=\|r\mapsto Af(x,r)\|_{\mathcal{L}_p(\hat{w})}.$$

更明确地说，对于 $1\le p<\infty$，有

$$I_{p,w}f(x):=\Big(\int_0^\infty w(r)(Af(x,r))^p dr\Big)^{1/p}.$$

根据引理 2.1，$r\mapsto Af(x,r)$ 是左连续的。因此，对于 $p=\infty$，我们有

$$I_{\infty,w}f(x)=Mf(x).$$

由于 A 是次线性的，$I_{p,\,w}$ 在 $\mathcal{F}_{loc}(X)$ 上是次线性的。

引理 2.3. 设 θ 是可测空间 T 上的有限测度，且$\phi\colon T\to[0,\infty)$ 可测。那么 $\|\phi\|_{\mathcal{L}_\infty(\theta)}=\lim_{p\to\infty}\|\phi\|_{\mathcal{L}_p(\theta)}$。

证明. 我们用 $\|\cdot\|_p$ 表示$\|\cdot\|_{\mathcal{L}_p(\theta)}$。假设 $\|\phi\|_\infty<\infty$。不失一般性，假设 $\|\phi\|_\infty=1$ 且 $\theta(T)=1$。我们有 $\limsup_p\|\phi\|_p\le 1$。1 对于 $\epsilon>0$，令 $S_\epsilon:=\{t:\ \phi(t)>1-\epsilon\}$。那么 $(1-\epsilon)\theta(S_\epsilon)^{\frac{1}{p}}\le\|\phi\|_p$。由于$\theta(S_\epsilon)\neq 0$，我们有 $(1-\epsilon)\le\liminf_p\|\phi\|_p$，因此 $1\le\liminf_p\|\phi\|_p$。于是$\|\phi\|_\infty=\lim_p\|\phi\|_p$。现在假设 $\|\phi\|_\infty=\infty$。令 $S'_n:=\{t:\ \phi(t)\le n\}$。由证明的第一部分，我们有 $\|\phi|_{S'_n}\|_\infty=\lim_p\|\phi|_{S'_n}\|_p$。因此 $\|\phi|_{S'_n}\|_\infty\le\liminf_p\|\phi\|_p$。由于 $\sup_n\|\phi|_{S'_n}\|_\infty=\infty$，我们有 $\lim_p\|\phi\|_p=\infty$。□

定理 2.4. 对任意 $f\in\mathcal{F}_{loc}(X)$ 和每个 $x\in X$，我们有

$$\lim_{p\to\infty}I_{p,w}f(x)=Mf(x).$$

证明. 由引理 2.3 可得，其中 $T=(0,\infty)$，$\theta=\hat{}w$, $\phi=Af(x,\cdot)$。□

定理 2.5. 对于 $q\in[1,\infty)$，以下陈述等价：

(i) M 是 $(\mathcal{L}_q(X),\mathcal{L}_q(X))$-有界的。(ii) 族 $\{I_{p,w}\}_{1\le p<\infty}$ 是一致 $(\mathcal{L}_q(X),\mathcal{L}_q(X))$-有界的。(iii) 存在一个序列 $(p_n)_n$ 属于 $[1,\infty)$，使得 $p_n\to\infty$，并且族 $\{I_{p_n,w}\}_n$ 一致 $(\mathcal{L}_q(X),\mathcal{L}_q(X))$-有界。

1证明。由于 $Af(x,r) \le Mf(x)$，我们有 $I_{p,\ w}f(x) \le \|w\|^{\frac{1}{p}} Mf(x)$。因此 $\|I_{p,\ w}f\|_{\mathcal{L}_q(X)} \le \|w\|^{\frac{1}{p}} \|Mf\|_{\mathcal{L}_q(X)}$。这表明 (i)⇒(ii)。由定理 2.4 和 Fatou 引理，我们有 $\int_X (Mf)^q d\mu \le \liminf_p \int_X (I_{p,\ w}f)^q d\mu$。这表明 (iii)⇒(i)。(ii)⇒(iii)显然。□

不难看出，若将“$(\mathcal{L}_q(X),\ \mathcal{L}_q(X))$-有界”替换为“$(\mathcal{L}_q(X),\ \mathcal{L}_q(X))$-弱有界”，则定理 2.5 的陈述仍然成立。众所周知，在 $X = \mathbb{R}^n$, d 为标准欧几里得距离，且 μ 为 n 维勒贝格测度的情形下，M 对于 $1 < q \le \infty$ 是 $(\mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n))$-有界的，同时也是 $(\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n))$-弱有界的（[9]）。因此，将 M 替换为 $I_{p,\ w}$后，后一个陈述仍然成立。由定理 3.3 可知，$I_{1,\ w}$ 也是 $(\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n))$-有界的。下一个结果由 $I_{p,\ w}$的定义直接推出，故略去证明。

定理 2.6. 在 $X = \mathbb{R}^n$的情形下，对 $\mathbb{R}^n$ 上的任意非负施瓦茨测试函数 f 以及每个 $p \in [1,\infty)$，$I_{p,\ w}f$ 均为连续 $[p]$ 次可微，其中 $[p]$ 表示 $\le p$的最大整数。

由定理 3.4 可知，对于任意 $p \in [1,\infty)$ 以及每个 $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$，函数 $I_{p,\ w}f$ 几乎处处连续。

注记 2.7. 显然，上述“将参数空间上的上确界范数替换为 $\mathcal{L}_p$-范数”的形式化方法，几乎可用于任何类型的最大次线性算子。也可以像 [7] 中那样采用抽象框架。本文只考虑以球心为中心的 Hardy-Littlewood 极大函数算子的这种形式化方法。

3. $I_{p,\ w}$ on Lie groups (I)

采用 §2 中的记号 X, d, μ, w，设 $X = G$ 是一个非紧李群，并设 d 和 $\mu = \lambda$ 分别表示由 G 上的左不变黎曼度量典范诱导的距离函数和测度。因此，d 是左不变度量，而 λ 是 G 上的左 Haar 测度。空间 $\mathcal{F}_{loc}(G)$ 与 G 上局部可积函数的向量空间相同。由引理 2.1 可知，对于任意 $f \in \mathcal{F}_{loc}(G)$，函数 $Af\colon G \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ 连续。

引理 3.1. 对任意 $f \in \mathcal{F}_{loc}(G)$ $r \in (0,\infty)$ $p \in [1,\infty)$，我们有

$$\|Af(\cdot,r)\|_{\mathcal{L}_p(G)} \le \Big(\frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})} \int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Delta(y^{-1}) d\lambda(y)\Big)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\mathcal{L}_p(G)}. \tag{2}$$

此外，我们有 $\|Af(\cdot,r)\|_{\mathcal{L}_\infty(G)} \le \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(G)}$。

这里，Δ 表示 G ([2])的模函数，即满足以下条件的唯一映射$\Delta\colon G \to (0,\infty)$：对于每个 $x \in G$ 以及 G的每个博雷尔子集 B，均有 $\lambda(Bx) = \Delta(x)\lambda(B)$。注意，$\Delta$ 是连续群同态。

因此，由于$\mathcal{B}_{e,\ r}$ 在 G中相对紧，等式（2）右侧的积分是有限的。对于幺模群（例如阿贝尔群）， $\Delta \equiv 1$。因此，对于幺模 G，（2）变为

$$\|Af(\cdot,r)\|_{\mathcal{L}_p(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_p(G)}.$$

证明。假设 $f \geq 0$。对于 $1 \leq p < \infty$，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}
\int_G (Af(x,r))^p d\lambda(x) &\leq \int_G \Big(\frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{x,r})}\int_{\mathcal{B}_{x,r}} f^p(y)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x) \\
&= \int_G \Big(\frac{1}{\lambda(x\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} f^p(xy)d\lambda(y)\Big)d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Big(\int_G f^p(xy)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Big(\Delta(y^{-1})\int_G f^p(x)d\lambda(x)\Big)d\lambda(y) \\
&= \frac{\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Delta(y^{-1})d\lambda(y).
\end{aligned}$$

情形 $p = \infty$ 是平凡的。 □

定义 3.2. 在上述假设下，任意半径权 w 的 G-范数记作 $\|w\|_G$，定义为

$$\|w\|_G := \int_0^\infty \frac{w(r)}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\Big(\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Delta(y^{-1})d\lambda(y)\Big)dr.$$

若 G 是幺模的，则有 $\|w\|_G = \|w\| < \infty$。显然，对于任意 G，都存在具有有限 G-范数的半径权。例如：

$$w(r) = \begin{cases} \frac{e^{-r^2}\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}{\int_{\mathcal{B}_{e,r}}\Delta(y^{-1})d\lambda(y)} & \text{if } 1 < \frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}}\Delta(y^{-1})d\lambda(y) \\ e^{-r^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

定理 3.3. 在本节关于 G 的假设下，假设 w 是具有有限 G-范数的半径权，则有

$$\|I_{p,w}f\|_{\mathcal{L}_q(G)} \leq \|w\|^{\frac{q-p}{qp}}\|w\|_G^{\frac{1}{q}}\|f\|_{\mathcal{L}_q(G)}, \quad (f \in \mathcal{F}_{loc}(G), 1 \leq p \leq q \leq \infty).$$

（注意，按照惯例， $\frac{\infty-p}{\infty p} = \frac{1}{p}$ 和 $\frac{1}{\infty} = 0$。）

证明。由詹森不等式和引理 3.1，对于 $q \neq \infty$ ，我们有

$$\begin{aligned}
\|I_{p,w}f\|^q_{\mathcal{L}_q(G)} &= \int_G \Big(\int_0^\infty w(r)(Af(x,r))^p dr \Big)^{\frac{q}{p}} d\lambda(x) \\
&= \|w\|^{\frac{q}{p}} \int_G \Big(\int_0^\infty \frac{w(r)}{\|w\|}(Af(x,r))^p dr \Big)^{\frac{q}{p}} d\lambda(x) \\
&\leq \|w\|^{\frac{q}{p}} \int_G \int_0^\infty \frac{w(r)}{\|w\|}(Af(x,r))^q dr d\lambda(x) \\
&= \|w\|^{\frac{q-p}{p}} \int_0^\infty w(r) \Big(\int_G (Af(x,r))^q d\lambda(x) \Big) dr \\
&\leq \|w\|^{\frac{q-p}{p}} \int_0^\infty \frac{w(r)\|f\|^q_{\mathcal{L}_q(G)}}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})} \Big(\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \Delta(y^{-1}) d\lambda(y) \Big) dr \\
&= \|w\|^{\frac{q-p}{p}} \|w\|_G \|f\|^q_{\mathcal{L}_q(G)}.
\end{aligned}$$

由此可轻易得出所需的不等式。 □

定理 3.4. 在本节关于 G 的假设下，设 w 是任意半径权函数。令 $f \in \mathcal{L}_p(G)$，其中 $1 \leq p < \infty$。那么，对于任意满足以下条件的 $x \in G$ ： f 在 x 的某个邻域上本质有界， $I_{p,\ w}f$ 在 x 处连续。特别地， $I_{p,\ w}f$ 几乎处处连续。

证明。不妨设 $f \geq 0$。令 $\epsilon > 0$ 为任意固定的对象。选取一个正实数 a ，使得 $\int_0^a w(r)dr < \epsilon$ ，并且使得 $M := \operatorname{ess\,sup} f|_{\mathcal{B}(x,3a)} < \infty$。于是，对于任意满足 $d(x,y) < a$ 的 $y \in G$ ，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^a w(r) \big| Af(x,r) - Af(y,r) \big|^p dr \\
&= \int_0^a w(r) \big| \frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})} \int_{\mathcal{B}_{e,r}} (f(xz) - f(yz)) d\lambda(z) \big|^p dr \\
&\leq \int_0^a w(r) \big(\frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})} \int_{\mathcal{B}_{e,r}} |f(xz) - f(yz)| d\lambda(z) \big)^p dr \\
&\leq \int_0^a w(r) 2^p M^p dr < 2^p M^p \epsilon.
\end{aligned} \tag{3}$$

选取一个正实数 b，使得 $\lambda\overset{1}{\mathcal{B}}_e(\cdot,b) < \epsilon$。于是，根据詹森不等式，对于任意 $y \in G$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_b^\infty w(r)\big|Af(x,r) - Af(y,r)\big|^p dr \\
&\le \int_b^\infty w(r)\Big(\frac{1}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} |f(xz) - f(yz)|d\lambda(z)\Big)^p dr \\
&\le \int_b^\infty \frac{w(r)}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} |f(xz) - f(yz)|^p d\lambda(z)dr \qquad (4)\\
&\le \int_b^\infty \frac{w(r)}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}\int_G |f(x\cdot) - f(y\cdot)|^p d\lambda dr \\
&\le \int_b^\infty \frac{w(r)}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})} 2^p\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}dr < 2^p\|w\|\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}\epsilon.
\end{aligned}
$$

由于 Af 连续，因此存在 $\delta > 0$，使得对任意 $y \in \mathcal{B}_{x,\delta}$:

$$|Af(x,r) - Af(y,r)| < \epsilon, \quad (a \le r \le b),$$

因此

$$\int_a^b w(r)\big|Af(x,r) - Af(y,r)\big|^p dr \le \|w\|\epsilon^p. \qquad (5)$$

若 $d(x,y) < \min\{a,\delta\}$，则由 (3)、(4)、(5) 得

$$
\begin{aligned}
\big|I_{p,w}f(x) - I_{p,w}f(y)\big|^p &\le \int_0^\infty w(r)\big|Af(x,r) - Af(y,r)\big|^p dr \\
&\le \big(2^pM^p\epsilon\big) + \big(\|w\|\epsilon^p\big) + \big(2^p\|w\|\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}\epsilon\big).
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

4. $I_{p,\ w}$ on Lie Groups (II)

采用 §2 中的记号 X, d, μ, w，假设 $X = G$ 是一个非紧李群。考虑 G 上的两个黎曼度量，其中一个是左不变的，另一个是右不变的，并且这两个度量在 G 的李代数上相同。令 G 上由左不变度量诱导的距离函数为 d，令 G 上由右不变度量诱导的测度为 $\mu = \rho$。因此，ρ 是 G 上的右 Haar 测度。如果 λ 表示 §3 中由左不变度量诱导的测度，那么对于 G 中任意的 $x \in G$ 和博雷尔子集 B，我们有 $\lambda(B) = \rho(B^{-1})$ 且 $\rho(xB) = \Delta(x^{-1})\rho(B)$。

引理 4.1. 对任意 $f \in \mathcal{F}_{loc}(G)$ $r \in (0,\infty)$ $p \in [1,\infty]$，我们有

$$\|Af(\cdot,r)\|_{\mathcal{L}_p(G)} \le \|f\|_{\mathcal{L}_p(G)}.$$

.

证明. 假设 $f \geq 0$。对于 $1 \leq p < \infty$，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}\int_G (Af(x,r))^p d\rho(x) &\leq \int_G \Big(\frac{1}{\rho(\mathcal{B}_{x,r})}\int_{\mathcal{B}_{x,r}} f^p(y)d\rho(y)\Big)d\rho(x)\\ &= \int_G \Big(\frac{1}{\Delta(x^{-1})\rho(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{x\mathcal{B}_{e,r}} f^p(y)d\rho(y)\Big)d\rho(x)\\ &= \frac{1}{\rho(\mathcal{B}_{e,r})}\int_G\int_{\mathcal{B}_{e,r}} f^p(xy)d\rho(y)d\rho(x)\\ &= \frac{1}{\rho(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}}\int_G f^p(xy)d\rho(x)d\rho(y)\\ &= \frac{1}{\rho(\mathcal{B}_{e,r})}\int_{\mathcal{B}_{e,r}} \|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}d\rho(y)\\ &= \|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}.\end{aligned}$$

情形 $p = \infty$ 是平凡的。 □

省略以下定理的证明。该证明与定理 3.3 的证明类似，但使用了引理 4.1。

定理 4.2。在本节关于 G的假设下，设 w 是任意的半径权。我们有

$$\|I_{p,w}f\|_{\mathcal{L}_q(G)} \leq \|w\|^{\frac{1}{p}}\|f\|_{\mathcal{L}_q(G)}, \quad (f \in \mathcal{F}_{loc}(G), 1 \leq p \leq q \leq \infty).$$

定理 3.4 的结论在本节关于 G的新假设下仍然成立。证明也与定理 3.4 的证明类似。唯一可能需要解释的是对（4）的相应修改：我们有 $\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)} = \Delta(x^{-1})\int_G f^p(x\cdot)d\rho$。因此，如果我们使 y足够接近 x，使得 $\Delta(y) \leq 2\Delta(x)$，那么我们有

$$\begin{aligned}\int_G |f(x\cdot) - f(y\cdot)|^p d\lambda dr &= \|f(x\cdot) - f(y\cdot)\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}\\ &\leq \Big(\|f(x\cdot)\|_{\mathcal{L}_p(G)} + \|f(y\cdot)\|_{\mathcal{L}_p(G)}\Big)^p\\ &= \Big(\Delta(x)^{\frac{1}{p}} + \Delta(y)^{\frac{1}{p}}\Big)^p\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}\\ &\leq 3^p\Delta(x)\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}.\end{aligned}$$

因此，我们将（4）的最后一行替换为

$$\leq \int_b^\infty \frac{w(r)}{\lambda(\mathcal{B}_{e,r})}3^p\Delta(x)\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}dr < 3^p\Delta(x)\|w\|\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(G)}\epsilon.$$

References

[1] V. Chousionis、S. Li、S. Zimmerman, *Singular integrals on $C^{1,\alpha}$ regular curves in , , Carnot groups* 146 2022 299 326 1912 13279 [ ]（arXiv: . math.CA）[2] G.B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, 美国，CRC 出版社，1995年。《数学分析杂志》（）：–。

[3] G. Forni, *Twisted cohomological equations for translation flows*, 《遍历理论与动力系统》42（2022）：881–916。（arXiv:2007.04084 [math.DS]） [4] M. Hormozi, K. Yabuta, *Comments on: Sharp weighted estimates for square functions associated to operators on spaces of homogeneous type* 32 2022 1 8 , 《几何分析杂志》（ ）： –。

[5] A.D. Ionescu 、 A. Magyar 、 M. Mirek 、 T.Z. Szarek, *Polynomial averages and pointwise ergodic theorems on nilpotent groups* 2022 1 118 2112 , 《数学发明》（ ）： –。03322

（arXiv: .[ ] math.DS ） [6]

E. Papageorgiou, *Riesz means on locally symmetric spaces*, 《复分析与算子理论》16（2022）： 1–14。（arXiv:2006.11045 [math.FA]） [7] M.M. Sadr、M.B. Ganji, *Abstract Hardy-Littlewood maximal inequality*, 《伊朗科学技术学报：A辑（科学）》45（2021）： 1717–1724。（arXiv:2005.12846 [math.FA]） [8] F. Santagati, *Hardy spaces on homogeneous trees with flow measures*, 《数学分析与应用杂志》510（2022）：126015。（arXiv:2107.09958 [math.FA]） [9] E.M. Stein、T.S. Murphy, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals* 1993 普林斯顿大学出版社， 。[10] L. Yang 、 P. Li, *Schrödinger operators on Heisenberg groups* *Boundedness and compactness of commutators related with* 14 2023 , 《伪微分算子应用杂志》（ ）： 1–59。

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences, Zanjan, Iran
Email address: sadr@iasbs.ac.ir