arXiv:2301.07090v1 [math.RT] 17 Jan 2023

抛物 Verma 模的 Kostant 问题

Volodymyr Mazorchuk 和 Shraddha Srivastava

Abstract. 我们给出了一个完整的组合分类，确定了抛物范畴 $\mathcal{O}$ 主块中哪些与特殊线性李代数的极小或极大抛物子代数相关的抛物 Verma 模，其 Kostant 问题的答案为肯定。

1. Introduction and description of the results

设 $\mathfrak{g}$ 是复数域上的有限维单李代数，M 是一个 $\mathfrak{g}$-模。 M 的所有线性自同态构成的（结合）代数具有若干有趣的（结合）子代数。其中一个是包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的像，它自然同构于 $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}^{U(\mathfrak{g})}(M)$。另一个是代数 $\mathcal{L}(M,M)$，由在 M 上、关于 $\mathfrak{g}$ 的伴随作用局部有限的所有线性自同态构成。前一个代数是后一个代数的子代数，因此自然会问，对于哪些 M，包含关系

$$U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M) \hookrightarrow \mathcal{L}(M,M)$$

是一个同构。

对于给定的 M，这称为 Kostant 问题（针对 M），其定义由 Joseph 在 [Jo80] 中推广并广为传播。这是一个众所周知且通常仍未解决的问题。即使对于一般的单最高权模，这个问题也没有完整的答案。不过，已有一些模的族，其答案（有时为肯定，有时为否定）是已知的；历史概述见第3节第 3.5 小节。

最早一类非平凡的经典模族是 Verma 模，对这类模，Kostant 问题的答案已得到解决。早在 [Jo80] 中就已证明，对于所有 Verma 模，相应 Kostant 问题的答案都是肯定的。

Verma 模恰好是相对于 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ for $\mathfrak{g}$ 上的（本质上唯一的，见 [Co20]）最高权结构而言的标准模，参见 [BGG76, Hu08]。范畴 $\mathcal{O}$ 有许多不同的推广。其中一种由 [RC80], 提出，称为抛物范畴 $\mathcal{O}$，它与 $\mathfrak{g}$ 中选定的一个抛物子代数$\mathfrak{p}$ 相关。与其源范畴一样，抛物范畴 $\mathcal{O}$ 也是一个最高权范畴。相对于这一结构的标准对象是抛物 Verma 模。

根据构造，抛物 Verma 模是通常 Verma 模的商。在 [Ja83, Section 7.32]中，可以找到一个论证，证明只要 Verma 模在 $\mathcal{O}$中是投射的，那么任何 Verma 模的商的 Kostant 问题都有肯定答案。特别地，对于正则块的抛物范畴 $\mathcal{O}$中任何投射的抛物 Verma 模，Kostant 问题都有肯定答案。此时，自然会想知道一般抛物 Verma 模的 Kostant 问题答案如何。

在较小的秩以及针对特定模的情形下，有时可以通过直接计算回答 Kostant 问题。抛物范畴最小的非平凡例子

$\mathcal{O}$ 是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$，其中我们取对应于两个单根之一的抛物子代数。相应抛物范畴的正则块 $\mathcal{O}$ 包含三个抛物 Verma 模。正如我们上文已经提到的，对于投射抛物 Verma 模，Kostant 问题的答案是肯定的。对于单抛物 Verma 模，Kostant 问题的答案也已知是肯定的，见 [GJ81]。令我们颇感意外的是，通过直接计算发现，对于（剩下的）第三个抛物 Verma 模，Kostant 问题的答案是否定的。这清楚地表明，确定抛物 Verma 模的 Kostant 问题答案是一个非平凡问题，因为首先必须猜测哪些抛物 Verma 模应当得到肯定答案，哪些应当得到否定答案。迄今为止，文献中只有一个一般性结果，为一个相当自然的模的一般族回答了 Kostant 问题，并且在该族中，肯定答案和否定答案两种情形均会出现。这个模族是由完全可交换置换指标化的特殊线性李代数上的单最高权模，见最新预印本 [MMM22]。本文的主要结果是此类结果中的第二个。

本文研究了特殊线性李代数上抛物 Verma 模的 Kostant 问题，考察两个“相反”的情形。第一种情形是极小抛物子代数的情形，也就是说，抛物子代数的半单部分由一个单根给出。在这种情形下，抛物 Verma 模是 Verma 模除以 Verma 子模所得的商模。 [KMM21], 研究过这类商模，重点在于描述这类商模的底。这一描述对我们的证明至关重要。我们的论证还依赖另外两个重要要素：

- K˚ahrstr¨om 对 Kostant 问题提出的猜想性组合重述的一种改编，见 [KMM20，猜想1。2]。
- Kostant 问题的 2-表示论重述的一种适当类比，见 [KMM20，第 8.3] 小节。

我们考虑的第二种情形是极大抛物子代数的情形，也就是说，抛物子代数的半单部分恰好缺少一个单根。在这种情形下，相应抛物范畴的图示描述十分明确，见 $\mathcal{O}$ [BS11a, BS11b]。为了回答这一情形下关于抛物 Verma 模的 Kostant 问题，我们将这一描述与 [MMM22] 的主要结果结合起来。令人意外的是，在这种情形下，肯定答案确实非常罕见。事实上，有若干无穷族的例子，其中只有两个抛物 Verma 模的答案为肯定：投射模和单模；而单模的答案总是肯定的（正如上文提到的 $\mathfrak{sl}_3$ 例子一样）。

本文结构如下：第2节汇集了关于范畴 $\mathcal{O}$ 的所有相关预备知识。第3节概述 Kostant 问题及其历史。第4节研究极小抛物子代数的情形。这里的主要结果是定理 3，它完整解答了该情形下关于抛物 Verma 模的 Kostant 问题，并将其与 K˚ahrstr¨om 的组合重述联系起来。该定理见第4.2小节。第5节研究极大抛物子代数的情形。这里的主要结果是定理5，它完整解答了该情形下关于抛物 Verma 模的 Kostant 问题。该定理见第5.5小节。最后，我们在第6节给出一些一般性观察和推测。

致谢。第一作者的研究部分得到了瑞典研究理事会的资助。

2. Category $\mathcal{O}$ preliminaries

2.1. 预备设定。本文中，我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。

如上所述， $\mathfrak{g}$ 是一个有限维复单李代数。我们固定一个三角分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \tag{1}$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是某个固定的嘉当子代数。记 W 为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群，记 W 中与上文三角分解 (1) 对应的简单反射集合为 S。照例，记 W的最长元素为 w_0 。令 $\leq$ 表示 W 上的通常 Bruhat 序，并令 ℓ 表示 W上的长度函数。

本文主要考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ ，其标准三角分解由上三角矩阵、对角矩阵和下三角矩阵给出。在这种情形下，我们有 $W \cong \mathsf{S}_n$，即 $\{1, 2, \dots, n\}$上的对称群，其中 S为初等对换集合。

2.2. O 类范畴。与三角分解 (1) 相对应，我们定义 BGG 范畴 $\mathcal{O}$ ，它是由有限生成的 $\mathfrak{g}$-模构成的范畴的满子范畴，其中的模满足： $\mathfrak{h}$ 的作用可对角化，且 $\mathfrak{n}_+$ 的作用局部有限。详情请参阅 [BGG76、Hu08] 。

2.3. 主块。考虑 $\mathcal{O}$ 的主块 $\mathcal{O}_0$。该块定义为 $\mathcal{O}$ 的一个不可分解直和项，其中包含平凡的 $\mathfrak{g}$-模。 $\mathcal{O}_0$ 中简单对象的同构类自然地由 W 的元素标记。对于 $w \in W$，相应的简单最高权模为 $L_w := L(w \cdot 0)$。这里， $0 \in \mathfrak{h}^*$ 表示零权， $\cdot$表示 W 在 $\mathfrak{h}^*$ 上的点作用。对于 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，点作用定义如下： $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$。这里， ρ 是所有正根之和的一半。

此外，对于 $w \in W$，我们有 L_w 的 Verma 覆盖 Δ_w ，以及 L_w 的不可分解投射覆盖 P_w 。我们将 A 记为 $\mathcal{O}_0$ 的无重数投射生成元的自同态代数的相反代数。代数 A 是有限维结合代数。此外，所有有限维 A-模构成的范畴 A-mod 与范畴 $\mathcal{O}_0$ 等价。

2.4. 抛物范畴 $\mathcal{O}$。设 $\mathfrak{p}$ 是包含 $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ 的 $\mathfrak{g}$ 的抛物子代数。相应的抛物范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 定义为 $\mathcal{O}$ 的满子范畴，其中包含所有 $\mathfrak{p}$ 的作用局部有限的对象，见 [RC80]。我们进一步将 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$ 的主块 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 定义为 $\mathcal{O}_0 \cap \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}$。

设 $W_{\mathfrak{p}}$ 为与 $\mathfrak{p}$ 对应的 W 的抛物子群。将 $W^{\mathfrak{p}}{}_{\text{短}}$ 记为 $W_{\mathfrak{p}} \backslash W$ 中最短陪集代表元的集合。范畴 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 是由简单对象 L_w 生成的 $\mathcal{O}_0$ 的 Serre 子范畴，其中 $w \in W^{\mathfrak{p}}{}_{\text{短}}$。范畴 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 与 A 的某个商 $A_{\mathfrak{p}}$ 的 $A_{\mathfrak{p}}$-mod 等价。

简言之，记 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$为相应的抛物 Verma 模，记 $P_w^{\mathfrak{p}}$为 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$中的相应不可分解射影模。

2.5. 投射函子。按照 [BGG80], , 对每个 $w \in W$，范畴 $\mathcal{O}_0$ 中存在唯一的（在同构意义下）不可分解投射自函子 θ_w，使得 $\theta_w P_e \cong P_w$。$\mathcal{O}_0$ 的任一不可分解投射自函子都同构于某个 $w \in W$对应的 θ_w。

考虑由 $\mathscr{P}$ 的所有投射自函子组成的幺半范畴。根据 Soergel 的组合描述，参见 [So92], , 幺半范畴 $\mathscr{P}$ 在幺半范畴意义下等价于 Weyl群 W的余不变代数上的 Soergel双模所构成的幺半范畴。

2.6. 扭曲函子。对于 $w \in W$，我们用 $\top_w$表示相应的扭曲函子，参见 [AS03、KhM04]。对于 x、$y \in W$，若 $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$，则有 $\top_x \Delta_y \cong \Delta_{xy}$。对我们而言，扭曲函子的主要性质是：它们与投射函子函子性地交换；它们在 Verma 模上是无环的；相应的左导出函子是等价，参见 [AS03]。

2.7. 分次提升。由 [So90], , 代数 A 是 Koszul 代数，因此带有相应的 Koszul $\mathbb{Z}$-分次。于是我们有有限维 $\mathbb{Z}$-分次 A-模范畴 ${}^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_0$。我们用 $\langle _ \rangle$ 表示分次平移函子，并约定 $\langle 1 \rangle$ 将度 0 平移至度 -1。

范畴 $\mathcal{O}_0$ 中的所有结构模都存在分次提升，详情见 [St03a] 。对所有不可分解模而言，这些分次提升在同构和平移意义下唯一。

我们为所有不可分解结构模选定标准分次提升，并滥用记号，对这些标准分次提升沿用 $\mathcal{O}_0$ 中相应非分次对象的记号。类似地，我们也有不可分解投射函子的标准分次提升，见 [St03a]。我们用 $\mathscr{P}^{\mathbb{Z}}$ 表示 ${}^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_0$ 上分次投射自函子所构成的相应幺半范畴。

代数 $A_{\mathfrak{p}}$ 是 A 的一个分次商，并且我们有范畴 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 的相应分次类比 ${}^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$。

2.8. Hecke代数组合。考虑 W的 Hecke代数 $\mathrm{H} = \mathrm{H}(W, S)$，其归一化采用 [So07]。它是交换环 $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$上的一个代数。该代数具有标准基 $\{H_w : \ w \in W\}$，以及 Kazhdan–Lusztig基 $\{\underline{H}_w : \ w \in W\}$，定义见 [KL79]。

范畴 ${}^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_0$ 的格罗滕迪克群 $\mathrm{Gr}[{}^{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_0]$ 同构于代数 H，该同构将 $[\Delta_w]$ 映到 H_w。此同构将 $\langle 1 \rangle$ 与乘法对应起来，并将 $[P_w]$ 映到 $\underline{H}_w$，见 [BB81, BK81]。

幺半范畴 $\mathscr{P}^{\mathbb{Z}}$ 的分裂格罗滕迪克群 $\mathrm{Gr}_{\oplus}[\mathscr{P}^{\mathbb{Z}}]$ 同构于 H，该同构将 $[\theta_w]$ 映到 $\underline{H}_w$。范畴 $\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}$ 上的定义作用 $\mathscr{P}^{\mathbb{Z}}$ 经过去范畴化后成为 H 的右正则表示，见 [So92]。

分别用 $\leq_L$、$\leq_R$ 和 $\leq_J$ 表示 W 上的左、右和双边 Kazhdan-Lusztig 预序。与这些预序相关的等价类称为左胞腔、右胞腔和双边胞腔。每个左胞腔和每个右胞腔都包含一个特殊的对合，称为 Duflo 对合。对于对称群，事实上，所有对合都是 Duflo 对合。

单元素集 $\{e\}$ 和 $\{w_0\}$ 是双边胞腔。此外，还有一个较小的双边胞腔 $\mathcal{J}_s$，其中包含所有简单反射。对于对称群 S_n，这个小胞腔恰好包含 $n-1$ 个左胞腔和 $n-1$ 个右胞腔，并由所有恰有一个唯一表达式的元素组成。将这个小双边胞腔中的元素与 w_0 相乘，可得倒数第二个双边胞腔 $\mathcal{J}_p$。

2.9. 双 Grassmannian 置换与 Verma 模嵌入的余核的底。回忆一下，若存在唯一的简单反射 s 使得 $sw < w$，且存在唯一的简单反射 t（注意，t 可能等于 s）使得 $wt < w$，则称元素 $w \in W$ 为双 Grassmannian。根据 KMM21 的定理 1], , 对于代数 $\mathfrak{sl}_n$，当 $w \in$S$_n$ 时，模 $\Delta_e/(\Delta_w\langle -\ell(w)\rangle)$ 的底为单模，当且仅当 w 是双格拉斯曼置换。

此外，映射 $w \mapsto \mathrm{Soc}(\Delta_e/(\Delta_w\langle -\ell(w)\rangle))$ 是 S$_n$ 中所有双 Grassmannian 元素的集合与 Δ_e 的形如 $L_w\langle i\rangle$ 的分次子商之间的双射，其中 $w \in \mathcal{J}_p$。若 $w \in$ S$_n$ 不是双格拉斯曼元素，则 $\Delta_e/(\Delta_w\langle -\ell(w)\rangle$ 的底由与上述双射相对应的元素给出，这些元素是 Bruhat 区间 $[e, w]$ 中所有双格拉斯曼元素里关于 Bruhat 序极大的元素。

3. Kostant 问题

3.1. Harish-Chandra 双模。回顾 [Ja83, Kapitel 6]，若一个 $\mathfrak{g}$-$\mathfrak{g}$-双模M 作为双模有限生成，并且 $\mathfrak{g}$ 在 M 上的伴随作用局部有限，且合成因子的重数有限，则称其为 Harish-Chandra 双模。例如，对任意 $M \in \mathcal{O}_0$，双模 $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}^{U(\mathfrak{g})}(M)$ 都是 Harish-Chandra 双模。

另一个例子如下：对于 $\mathcal{O}_0$ 中的两个对象 M 和 N，由所有从 M 到 N 的线性映射组成的空间 $\mathcal{L}(M, N)$ 中，$\mathfrak{g}$ 的伴随作用局部有限的那些映射构成一个 Harish-Chandra 双模。在情形 $M = N$ 中，我们有一个自然的包含映射 $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}^{U(\mathfrak{g})}(M) \subset \mathcal{L}(M, M)$。

3.2. 经典 Kostant 问题。如我们在引言中提到的，对于一个 $\mathfrak{g}$-模 M，相应的 Kostant 问题按 [Jo80]，中的表述如下：

Kostant 问题。这个嵌入

$$U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M) \hookrightarrow \mathcal{L}(M, M)$$

是一个同构吗?

我们用 K(M) $\in$ {true, false} 表示命题“嵌入 $U(\mathfrak{g})/\mathrm{Ann}^{U(\mathfrak{g})}(M) \hookrightarrow \mathcal{L}(M, M)$ 是一个同构”的逻辑值。

3.3. K˚ahrstr¨om 猜想。以下猜想由 Johan K˚ahrstr¨om 提出，见 [KMM21，猜想 1.2], :

猜想1. 设 d 是对称群 S$_n$中的一个对合。那么以下断言等价：

(1) K(L_d) = true。（2）对于满足 $x \neq y$、$\theta_x L_d \neq 0$ 和 $\theta_y L_d \neq 0$ 的 x、$y \in W$，有 $\theta_x L_d \ncong \theta_y L_d$。（3）对于满足 、且 的 $x\ y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x L_d \neq 0$ $\theta_y L_d \neq 0$ $[\theta_x L_d] \neq$，我们在 $[\theta_y L_d]$ $[\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}]$ Gr 中有 。（4）对于满足 、且 的 $x\ y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x L_d \neq 0$ $\theta_y L_d \neq 0$ $[\theta_x L_d] \neq$，我们在 $[\theta_y L_d]$ $[\mathcal{O}_0]$ Gr 中有 。

3.4. Kostant 问题与 2-表示理论。给定 $M \in \mathcal{O}$，我们可以考虑其湮灭子 $\mathrm{Ann}_{\mathscr{P}}(M)$，它是 $\mathscr{P}$ 的左幺半群理想。商 $\mathscr{P}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{P}}(M)$ 自然地是 $\mathscr{P}$ 的双表示。

或者，加性闭包 $\mathrm{add}(\mathscr{P}M)$ 也是 $\mathscr{P}$ 的双表示。映射

$$\mathscr{P} \ni \theta \mapsto \theta(M) \in \mathrm{add}(\mathscr{P}M)$$

定义了一个从 $\mathscr{P}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{P}}(M)$ 到 $\mathrm{add}(\mathscr{P}M)$ 的双表示单射态射。 [KMM20 第8.3] 小节中的论证表明，当且仅当 $\mathrm{K}(M)$ =成立时，这个态射是等价的。

事实上，$\mathscr{P}M$ 的双表示 $\mathrm{add}(\mathscr{P}M)$ 由代数 $\mathcal{L}(M,M)$ 给出，这一点可由 [Ja83 第 6.8]小节推出。 $\mathscr{P}$ 的主双表示，即 $\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{P}$ 上的自然左作用，根据 [M-T19 公式 (4.2)]，对应于 $\mathscr{P}$ 的恒等1-态射。在 Harish-Chandra 双模的范畴中，代数 $U(\mathfrak{g})$ 满射到 $\mathscr{P}$ 的恒等1-态射。因此，$\mathscr{P}$ 在 $\mathscr{P}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{P}}(M)$ 上诱导的作用，对应于这样一个代数：它是 $\mathscr{P}$ 的恒等1-态射（因而也是 $U(\mathfrak{g})$）除以 M 的湮灭子所得的商。代数同态 $U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{L}(M,M)$ 体现了这样一个事实： $\mathscr{P}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{P}}(M)$ 是 $\mathrm{add}(\mathscr{P}M)$ 的子双表示。因此，对于 M，Kostant 问题的肯定答案可重新表述为：这个自然嵌入是等价的。

这一重新表述使我们能够将与扭曲函子相关的模的 Kostant 问题的答案联系起来。

引理 2. 设 $M \in \mathcal{O}$和 $w \in W$满足 $\mathcal{L}\top_w(M) \cong \top_w(M) \in \mathcal{O}$。则 $\mathrm{K}(M)$ =$\mathrm{K}(\top_w(M))$。

证明。这由上述 Kostant 问题的双表示理论表述，结合第 2.6 小节中提到的扭曲函子的性质，立即得到。□

3.5. 关于 Kostant 问题的已知结果。下面我们列出在现有文献中找到的关于 Kostant 问题的结果。

- 在对称群的情形下，正如 [MS08a, 定理 61]所示，$\mathrm{K}(L_w)$ 在 Kazhdan–Lusztig 左胞腔上为常数。
- 令 $w_0^{\mathfrak{p}}$表示 $W_{\mathfrak{p}}$中的最长元素。则 $\mathrm{K}(L_{w_0^{\mathfrak{p}}w_0})$ =为真，见 [GJ81, 定理 4.4] 以及 [Ja83, 第 7 节32]。
- 如果 $s \in W^{\mathfrak{p}}$是一个简单反射，那么 $\mathrm{K}(L_{sw_0^{\mathfrak{p}}w_0})$ =成立，参见 [Ma05，定理 1]。
- [Ka10，定理 1.1] 将某些最高权 $\mathfrak{g}$模的 Kostant 问题的答案，与 $\mathfrak{p}$的 Levi 商上某些最高权模的 Kostant 问题的答案联系起来。
- [KaM10，定理 1] 提出了对等式 $\mathrm{K}(L_w)$ =成立的一种模论刻画。
- 在 [KaM10 的第 4], 节中，可以找到关于 $\mathfrak{sl}_n$上的单最高权模的 Kostant 问题的完整答案，其中 $n = 2$为 3、4、5；此外，还给出了同一问题对 $\mathfrak{sl}_6$的部分答案。 [Ka10 的第 6]节中计算了更多 $\mathfrak{sl}_6$答案。最高权 $\mathfrak{sl}_6$方面的问题则在 [KMM20 的第 10.1]小节中得到解决。

[MMM22] 这篇论文给出了由完全可交换置换标记的单最高权 $\mathfrak{sl}_n$模的 Kostant 问题的完整答案。

4. Main results: minimal parabolic subalgebras

4.1. 预备知识。对于 $n \geq 1$，我们考虑对称群 S_n。我们将 S_n 中的元素视为 $\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$ 上的函数，并按从右到左的顺序进行复合。

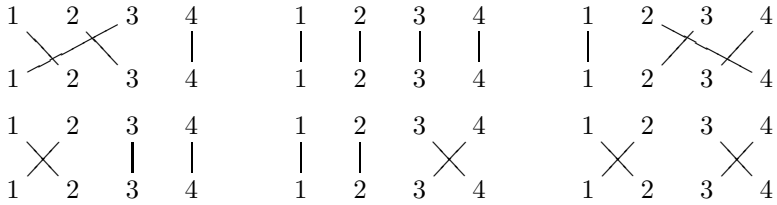
固定 $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$。对于 $1 \leq i < j \leq n$，记 $\tau^{n,k}_{i,j}$ 为 S_n 中满足以下条件的唯一元素

- $\tau^{n,k}_{i,j}(i) = k$;
- $\tau^{n,k}_{i,j}(j) = k+1$;
- 对于所有 $s < t$ 属于 $\underline{n} \setminus \{i, j\}$ 的情形，我们有 $\tau^{n,k}_{i,j}(s) < \tau^{n,k}_{i,j}(t)$。

我们用 $\mathcal{X}_{n,k}$ 表示所有这些 $\tau^{n,k}_{i,j}$ 构成的集合。显然，$|\mathcal{X}_{n,k}| = \binom{n}{2}$。我们进一步将 $\mathcal{X}_{n,k}$ 分成两个不相交子集：$\mathcal{X}_{n,k} = \mathcal{X}^+_{n,k} \coprod \mathcal{X}^-_{n,k}$，其中

$$\mathcal{X}^+_{n,k} = \{\tau^{n,k}_{i,i+1} : i = 1, 2, \dots, n-1\} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}^-_{n,k} = \mathcal{X}_{n,k} \setminus \mathcal{X}^+_{n,k}.$$

下面给出一个关于 $n = 4$ 和 $k = 2$的例子，第一行列出$\mathcal{X}^+_{4,3}$中的所有元素，第二行列出 $\mathcal{X}^-_{4,3}$中的所有元素，（为方便起见，我们将这些图中通向洋红色 的重要边标出，它们通向 $k = 2$和 $k+1 = 3$）：



我们用 G_k 表示 $(k, k+1)$ 在 S_n 中的中心化子。群 G_k 由 S_n 中所有保持 $\{k, k+1\}$ 不变的元素构成；特别地，G_k是作用在 $\{k, k+1\}$ 和 $\underline{n} \setminus \{k, k+1\}$上的对称群的直积。因此 $|G_k| = 2 \cdot (n-2)!$。ˆ令 G_k 表示 G_k 中所有同时固定 k 和 $k+1$的元素构成的子群。则 ˆ G_k 自然同构于作用在 $\underline{n} \setminus \{k, k+1\}$ 上的对称群，并且| ˆ$G_k| = (n-2)!$。

4.2. 表述。对于 $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$，考虑与简单反射 $(k, k+1)$ 对应的 $\mathfrak{sl}_n$ 的抛物子代数 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k$。$\mathrm{S}_n$ 中的合成 $\circ$ 导出一个双射

$$\hat{G}_k \times \mathcal{X}_{n,k} \to (\mathbf{S}_n)^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{short}}.$$

定理 3。对于 $w \in W^{\mathfrak{p}}$ 短，以下断言等价：

(a) K($\Delta^{\mathfrak{p}}_w$) = 真。(b) 对于 $x, y \in W$，满足 $x \neq y$, $\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$ 且 $\theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$，我们有 $\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w \not\cong \theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w$（作为非分次模）。(c) 对所有

x $y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$ $\theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$ $[\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w] \neq$, $[\theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w]\langle i \rangle$ $i \in \mathbb{Z}$ $[\mathcal{O}^{\mathbb{Z}}_0]$

满足 , 且 , 我们在 Gr 中有 , 对于 。(d) 对所有

x $y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$ $\theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w \neq 0$ $[\theta_x \Delta^{\mathfrak{p}}_w] \neq$, $[\theta_y \Delta^{\mathfrak{p}}_w]$ $[\mathcal{O}_0]$

满足 , 且 , 我们在 Gr 中有 。(e) $w \in$ ˆ$G_k \circ \mathcal{X}^+_{n,k}$。

(f) $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 在 $U(\mathfrak{g})$ 中的湮灭子是一个本原理想。

我们想指出定理 3(c) 与猜想 1(3) 之间的细微差异。定理 3 为上述设定下抛物 Verma 模的 Kostant 问题给出了完整答案。

4.3. 正例。设 $w \in {}^{\hat{}}G_k \circ \mathcal{X}_{n,k}^{+}$。对于这个 w，我们将证明定理 3 中的所有断言都成立。注意，定理 3(e) 显然成立。另请注意，定理 3(d) ⇒定理 3(c) ⇒定理 3(b) 这些蕴含关系显然成立。

假设 $w = \sigma \circ \tau^{n,\,i^{k},\,i+1}$，其中 $\sigma \in {}^{\hat{}}G_k$ 且 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$。我们有短正合列

$$0 \to \Delta_{(i,i+1)} \to \Delta_e \to \Delta_e^{\mathfrak{p}_i} \to 0.$$

由于 $\Delta_e^{\mathfrak{p}_i}$ 是 Δ_e 的一个商，根据 [Ja83，第 7.32] 节，我们有 $\mathrm{K}(\Delta_e^{\mathfrak{p}_i}) =$ 成立。

注意，$\tau^{n,\,i^{k},\,i+1} \circ (i, i+1) = (k, k+1) \circ \tau^{n,\,i^{k},\,i+1}$，并且 $\sigma \circ (i, i+1) = (i, i+1) \circ \sigma$，因为 $\sigma \in {}^{\hat{}}G_k$。根据 ${}^{\hat{}}G_k$ 的定义，还可推出 $\ell((k, k+1)w) = \ell(w) + 1$。因此，将 $\top_w$ 应用于上述短正合列，我们得到

$$0 \to \Delta_{(k,k+1)w} \to \Delta_w \to \Delta_w^{\mathfrak{p}} \to 0.$$

由于 $\top_w$ 在 Verma 模上是正合且无环的，我们现在可以应用引理 2，并得出 $\mathrm{K}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) =$ 为真，从而得到定理 3(a)。

形如 $\theta_x \, \Delta_e^{\mathfrak{p}_i}$ 的非零对象恰好是 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}_i}$ 中的不可分解投射对象。由于后一个范畴是最高权范畴，它具有有限整体维数，因此不可分解投射对象的像构成该范畴格罗滕迪克群的一组基。特别地，这些像线性无关，因而彼此不同。

由于 $\mathcal{L}\top_w$ 是导出等价，形如 $\top_w \theta_x \, \Delta_e^{\mathfrak{p}_i}$ 的非零模的类在相应的格罗滕迪克群中也线性无关。特别地，它们彼此不同，这意味着定理 3(d) 成立（因而定理 3(c) 和定理 3(b) 也成立，见上文）。

剩下的任务是证明定理 3(f)。通过局部化构造扭曲函子（见 [KhM04]）立即推出 $\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\top_w M) \supset \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(M)$。扭曲函子的右伴随在作用于 Verma 模时可由 Enright 完备化函子实现，并具有相同的性质。这意味着 $\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\Delta_e^{\mathfrak{p}_i})$。后一个湮灭子与 $\Delta_e^{\mathfrak{p}_i}$ 的（单模）底的湮灭子相同，这是一个标准事实，例如可由 [Ka10，命题 5.1] 推出。因此，$\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\Delta_e^{\mathfrak{p}_i})$（从而 $\mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})}(\Delta_w^{\mathfrak{p}})$ 也）是一个本原理想。

至此，所有正例的证明均已完成。

4.4. 反例。令 $w \in {}^{\hat{}}G_k \circ \mathcal{X}_{n,k}^{-}$。对于此 w，我们将证明定理 3 中的所有断言均不成立。注意，定理 3(e) 显然成立。另请注意，定理 3(b) 显然蕴含定理 3(d)。

上一小节中使用扭曲函子的论证，将当前的考察归结为情形 $w \in \mathcal{X}_{n,k}^{-}$，即 $w = \tau^{n,\,i^{k},\,j}$，其中 $j \geq i+2$。注意，这个 w 不是双格拉斯曼元素。我们使用 [KMM21] 的结果来分析形如 L_x 的 $\Delta_{\tau^{n,i^{k},j}}^{\mathfrak{p}} = \Delta_{\tau^{n,i^{k},j}} / \Delta_{(k,k+1)\tau^{n,i^{k},j}}$ 的子商，其中 $x \in \mathcal{J}_p$。我们姑且将这类子商称为倒数第二层子商。

要理解 $\Delta^{\mathfrak{p}}_{\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}}$ 中的倒数第二层子商，只需比较模 $\Delta_e/\Delta_{\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}}$ 与 $\Delta_e/\Delta_{(k,k+1)\tau^{n,}\ _{i}\ ^{k}\ _{,j}}$ 的这类子商。根据 [KMM21，定理 1], ，这两组子商之间的差异与 Bruhat 补集 $[e,(k,k+1)\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}]\setminus[e,\tau^{n,k}_{i,j}]$中的双 Grassmannian 元素构成双射。考虑到 $\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}$和 $(k,k+1)\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}$的具体形式，我们可以确定这个 Bruhat 补集中的所有双 Grassmannian 元素。不过，这需要考察若干不同的情形。

为简化记号，我们将 $\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}$ 简记为 τ。我们还将初等对换 $(l,l+1)$ 记为 s_l。

4.5. 情况 1： $k=i$。在此情形下， $\tau=s_{k+1}s_{k+2}\dots s_{j-1}$，而 Bruhat 补集 $[e,s_k\tau]\setminus[e,\tau]$包含以下双 Grassmannian 元素： s_k, s_ks_{k+1},…， $s_k\tau$。注意，这样的元素至少有两个，且它们的右下降各不相同。

因此，模 $\Delta^{\mathfrak{p}}_{\tau^{n,i}\ ^{k}\ _{,j}}$ 至少包含两个（两两）非同构的倒数第二个子商。由 [KMM21，命题 22] 可知，它们出现在不同的次数中。设 L_x 和 L_y 是其中两个（分别处于某些次数中）。注意， x 和 y 都属于同一个 Kazhdan-Lusztig 右胞腔，即 $\mathcal{J}_p$ 中唯一一个为 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 中的某些单模提供指标的右胞腔。由于 $x\neq y$，这两个元素属于不同的 Kazhdan-Lusztig 左胞腔。特别地，由 [MM11，引理 12]可知，$\theta_{x^{-1}}$ 消去 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 中除 L_x 之外的所有单模，而 $\theta_{y^{-1}}$ 消去 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 中除 L_y之外的所有单模。

因此，在分次平移意义下，$\theta_{x^{-1}}\Delta^{\mathfrak{p}}_w$与$\theta_{x^{-1}}L_x$同构。类似地，$\theta_{y^{-1}}\Delta^{\mathfrak{p}}_w$与$\theta_{y^{-1}}L_y$同构。然而，我们有 $\theta_{x^{-1}}L_x\cong P^{\mathfrak{p}}_d\cong\theta_{y^{-1}}L_y$，其中 d是 x的右胞腔中的 Duflo 对合，参见 Ma10 第 3]节。注意，后一个胞腔与 y的右胞腔重合。这表明定理 3(b)、定理 3(c)和定理 3(d)均不成立。

由于定理 3(b)不成立，双表示 $\mathscr{P}$/Ann$\mathscr{P}$($\Delta^{\mathfrak{p}}_w$)和add($\mathscr{P}$ $\Delta^{\mathfrak{p}}_w$)不可能等价，因此定理 3(a)也不成立。

最后，由于 L_x 和 L_y 属于同一个双边胞腔内不同的左胞腔，它们的湮灭子是不可比较的本原理想，且具有最小的 Gelfand-Kirillov 维数（在$\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 的所有其他本原理想中）。因此， $\Delta^{\mathfrak{p}}_w$ 的湮灭子必包含于这两个理想的交集中，故不可能是本原理想。这表明定理 3(f)不成立，并完成情况 1。

4.6. 情况 2： $k+1=j$。此情形可利用根系的对称性，由情况 1 推得。

4.7. 情况 3： $i>k$。在此情形下， $\tau=s_{k+1}s_{k+2}\dots s_{j-1}s_ks_{k+1}\dots s_{i-1}$，而 Bruhat 补集 $[e,s_k\tau]\setminus[e,\tau]$ 包含以下双格拉斯曼元素：$s_ks_{k+1}\dots s_i$、$s_ks_{k+1}\dots s_{i+1}$…… $s_ks_{k+1}\dots s_{j-1}$。注意，这样的元素至少有两个（因为 $j\neq i+1$）。对它们应用情况 1 中的论证，即完成证明。

4.8. 情况 4： $j<k+1$。这一情形可利用根系的对称性，由情况 3 推得。

4.9. 情况 5： $i < k$和 $j > k+1$。在此情形下，$\tau = s_{k-1}s_{k-2}\dots s_i s_{k+1}s_{k+2}\dots s_{j-1}$和 Bruhat 补集 $[e, s_k\tau] \setminus [e,\tau]$包含以下双格拉斯曼元素： s_k, $s_k s_{k+1}$,…， $s_k s_{k+1}\dots s_{j-1}$, $s_k s_{k-1}$,… $s_k s_{k-1}\dots s_i$。显然，这类元素至少有两个。对它们应用情况 1 中的论证，即可完成证明。

4.10. 渐近行为。由定理 3 可知，正情形与反例的比值等于

$$\frac{|\mathcal{X}^+_{n,k}|}{|\mathcal{X}^-_{n,k}|} = \frac{n-1}{\binom{n}{2}-(n-1)}.$$

当 n 趋于无穷时，该比值趋于 0，这与 [MMM22 第 6] 节的结果一致。另一个有趣的观察是，该比值不依赖于 k。

5. Main results: maximal parabolic subalgebras

5.1. 设定。对于 $1 \le k < n$，令 $m = n-k$。令 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_k$为 $\mathfrak{sl}_n$中唯一一个 Levi因子为 $\mathfrak{sl}_k \oplus \mathfrak{sl}_m$的抛物子代数，其中 $\mathfrak{sl}_k$在左上角作了调整。这意味着 $\mathfrak{q}_k$所遗漏的唯一简单反射是 $(k, k+1)$。

5.2. 权与定向杯图。现在我们将简要介绍 [BS11a、BS11b]，中范畴 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{q}}$ 的组合图示描述；技术细节请读者参阅这两篇论文。

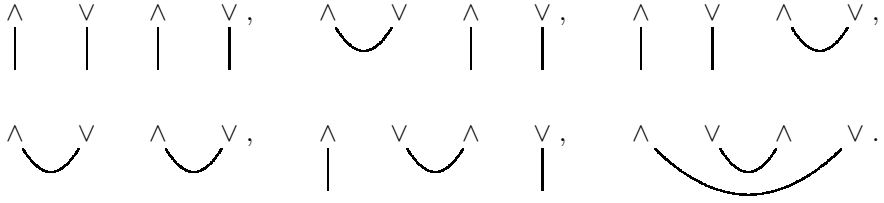
我们用 $\mathcal{W}_{n,k}$ 表示字母表中由两个字母 $\vee$ 和 $\wedge$构成的所有长度为 n 的词的集合，其中字母 $\wedge$ 恰好出现 k 次。字母 $\vee$ 应被视为一个向下箭头的箭头头部，而字母 $\wedge$ 应被视为一个向上箭头的箭头头部。例如，我们有：

$$\mathcal{W}_{4,2} = \{\wedge\wedge\vee\vee,\ \wedge\vee\wedge\vee,\ \wedge\vee\vee\wedge,\ \vee\wedge\wedge\vee,\ \vee\wedge\vee\wedge,\ \vee\vee\wedge\wedge\}$$

我们称 $\mathcal{W}_{n,k}$ 中以 k 个楔形符号开头的唯一词为支配词。因此，在上面的例子中，支配词是 $\wedge\wedge\vee\vee$。

群 S_n 通过置换词中字母的位置作用于 $\mathcal{W}_{n,k}$。这一作用在 $W^{\mathfrak{q}}$短与 $\mathcal{W}_{n,k}$之间诱导出一个自然的双射 Φ，它将 $w \in W^{\mathfrak{q}}$短映到支配词在 w^{-1}作用下的像。

给定一个元素 $\lambda \in \mathcal{W}_{n,k}$，我们可以在 λ 的字母上连接竖直向下延伸的线段端点和杯，构成一个平面定向图，从而得到一个定向杯图。特别地，定向这一要求意味着杯的两个端点必须连接到不同的字母（即一个连接到 $\wedge$，另一个连接到 $\vee$）。例如，以下是元素 $\wedge\vee\wedge\vee$ 所能绘制出的六个定向杯图：



定向杯图的度是按顺时针方向定向的杯的数量。

5.3. 标准模。若一张定向杯图中不存在任何位于 $\vee$ 下方且在位于 $\wedge$ 下方的竖直线段左侧的竖直线段，则称该图为可容许的。例如，对于元素 $\wedge\vee\wedge\vee$，上面六张定向杯图中，除第一张（即有四条竖直线段的那张）外，其余均为可容许的。

对于每个 $\lambda \in \mathcal{W}_{n,\ k}$，都存在唯一的度为零的 λ 的可容许定向杯图 $\mathsf{d}(\lambda)$。它可以通过以下算法递归构造。若 λ 在某个 $\wedge$ 的左侧不含任何 $\vee$，则 $\mathsf{d}(\lambda)$ 由竖直弦组成。否则，λ 必须包含一个子词 $\vee\wedge$，我们用一个杯将其连接起来，该杯的方向为逆时针。现在可以移除此杯并继续递归。

反过来，给定一个至多有 $\min(k,m)$ 个杯的无向杯图 d，存在唯一的 $\lambda \in \mathcal{W}_{n,\ k}$，使得去掉 $\mathsf{d}(\lambda)$ 的定向后，得到 d。为了构造 λ，我们将 d 中的每个杯都定向为逆时针，然后将剩余的 $\wedge$ 写在剩余字母位置的左侧，将剩余的 $\vee$ 写在右侧。例如，若 $n=7$ 和 $k=3$，则对于图

$\mathbf{d} =$ ,

我们得到相应的元素 $\vee\vee\wedge\wedge\vee\vee\wedge \in \mathcal{W}_{7,\ 3}$。

下面的命题是对 [BS11a, 定理 5.1] 的重新表述（并根据我们的术语作了调整）。

命题 4. 设 $x, y \in W^{\mathfrak{q}}_{\text{短}}$ 且 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。当且仅当存在一个关于 $\Phi(x)$ 的零度可容许定向杯图，使其对应的无向杯图与 $\mathsf{d}(\Phi(y))$ 所对应的无向杯图一致，而后者的度为 i 时，简单模 L_y 才会以次数 i（此时重数必为一）作为抛物 Verma 模 $\Delta^{\mathfrak{q}}_x$ 的简单子商出现。

考虑 $n=4$ 和 $k=2$ 的例子。在此例中，我们有

$$W^{\mathfrak{q}}_{\text{short}} = \{e, s_2, s_2s_1, s_2s_3, s_2s_1s_3, s_2s_1s_3s_2\}.$$

对于元素 $x=e$，相应的可容许定向杯图如下：



相应的度从左到右依次为：0、1 和 2。对于每个底层无向杯图，现在可以写出使该图的度变为零的相应词：



我们看到，第一个词对应于 e，第二个词对应于 s_2，第三个词对应于 $s_2s_1s_3s_2$。由此可得，$\Delta^{\mathfrak{q}}_e$ 在度 0 时具有 L_e，在度 1 时具有 L_{s_2}，最后在度 2 时具有 $L_{s_2s_1s_3s_2}$。

对于元素 $x=s_2$，我们在第 5.2 小节中看到了五个可容许定向杯图。由此可知，$\Delta^{\mathfrak{q}}_{s_2}$ 在度 0 时有 L_{s_2}，接着在度 1 时有 $L_{s_2s_1}$、$L_{s_2s_3}$ 和 $L_{s_2s_1s_3s_2}$，最后在度 2 时有 $L_{s_2s_1s_3}$。

5.4. 薄标准模。设 a $=\min(k,m)$。对于 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短，若存在唯一的$y\in W^{\mathfrak{q}}$短使得

- L_y 是 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$ 的子商；
- 图 d(Φ(y)) 恰好包含 a 个杯。

注意，对于 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短，d(Φ(w)) 中杯的数量与 Lusztig 的 a 函数在 w 处的取值一致，参见 [Lu87]。因此，a 值是 a 函数在 $W^{\mathfrak{q}}$短 的元素上所取得的最大值。根据 Irving 的一项结果，参见 [Ir85，命题 4，3], 任意 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$ 的任意底层构成因子 L_y，其中 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短，都具有这样的性质：图 d(Φ(y)) 恰好包含 a 个杯。因此，薄抛物 Verma 模必定具有简单底。

通过直接计算很容易验证，在我们贯穿全文的例子 $n=4$ 和$k=2$ 中，所有薄抛物 Verma 模的列表如下：

$$\Delta_e^{\mathfrak{q}},\quad \Delta_{s_2s_1}^{\mathfrak{q}},\quad \Delta_{s_2s_3}^{\mathfrak{q}},\quad \Delta_{s_2s_1s_3s_2}^{\mathfrak{q}}.$$

5.5. 表述。设 n 和 k 如上所述。用 $\mathcal{Y}_{n,k}$ 表示满足以下性质的所有元素$w\in W^{\mathfrak{q}}$短 的集合：单词 Φ(w) 满足：

- 如果 $k<n-k$，那么 w 中的所有 $\vee$ 都彼此相邻；
- 如果 $k>n-k$，那么 w 中的所有 $\wedge$ 都彼此相邻；
- 如果 $k=n-k$，那么 w 中的所有 $\vee$ 或所有 $\wedge$ 都彼此相邻 r.

例如，如果 $n=5$ 和 $k=2$，那么 $k=2<3=n-k$ 和

$$\mathcal{Y}_{5,2}=\{\wedge\wedge\vee\vee\vee,\quad \wedge\vee\vee\vee\wedge,\quad \vee\vee\vee\wedge\wedge\}.$$

同时，如果 $n=4$ 和 $k=2$，那么 $k=n-k$，并且我们有：

$$\mathcal{Y}_{4,2}=\{\wedge\wedge\vee\vee,\quad \wedge\vee\vee\wedge,\quad \vee\wedge\wedge\vee,\quad \vee\vee\wedge\wedge\}.$$

现在我们可以表述关于极大抛物子代数的主要结果。

定理5. 令 n 和 k 如上。
(a) 如果 $k\in\{1,n-1,\frac{n}{2}\}$，那么使 K($\Delta_w^{\mathfrak{q}}$) $=$ 成立的唯一 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短 是 $w=e$ 和 $w=w_0^{\mathfrak{q}}w_0$。
(b) 如果 $k\neq\frac{n}{2}$，那么对于 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短，K($\Delta_w^{\mathfrak{q}}$) $=$ 成立当且仅当 $w\in\mathcal{Y}_{n,\ k}$。

我们注意到，情形 $k\in\{1,n-1\}$ 同时涵盖于定理5的两个陈述中。

接下来的两个小节将用于证明定理5。

5.6. 非薄抛物 Verma 模具有 Kostant 负性。若 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$ 不是薄的，对于某个 $w\in W^{\mathfrak{q}}$短，则存在不同的、具有极大 a 值的 x 和 $y\in W^{\mathfrak{q}}$短，使得 L_x和 L_y都是 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$的子商（其重数必为 1）。设 d是 x 的 Kazhdan-Lusztig 右胞腔中的唯一对合（该胞腔与 y对应的胞腔重合）。那么

$$\theta_{x^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{q}}\cong\theta_{x^{-1}}L_x\cong\theta_dL_d\cong\theta_{y^{-1}}L_y\cong\theta_{y^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{q}}.$$

由于 $\theta_{x^{-1}}\ncong\theta_{y-1}$ 而 $\theta_{x^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{q}}\cong\theta_{y^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{q}}$，根据第3.4小节可知 K($\Delta_w^{\mathfrak{q}}$) $=$ 为假。

5.7. 薄抛物 Verma 模的 Kostant 问题。根据上一小节的观察，我们接下来要考虑薄抛物 Verma 模。我们从这类模的分类开始。

命题6. 对于 $w \in W^{\mathfrak{q}}$ 短，模 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$ 是薄的，当且仅当 $w \in \mathcal{Y}_{n,\ k}$。

证明. 对于 $\lambda \in \mathcal{W}_{n,\ k}$，将 λ 的符号序列定义为由正整数组成的向量 $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$，其中

- λ 从左侧开始，接着是 a_1 个相同字母 $\vee$ （或 $\wedge$）；
- λ 接下来是 a_2 个相同字母 $\wedge$ （分别为 $\vee$）；
- 依此类推。

例如， $\vee\wedge\wedge\vee\wedge\wedge\wedge$ 的符号序列等于 (1, 2, 1, 3)。数值 l 称为翻转数，在我们的例子中为 4。
不难验证，所有翻转数至多为二的 λ 都对应薄抛物 Verma 模。因此，取一个翻转数为 $l > 2$ 的 λ。假设存在 $1 < i < l$，使得 $a_i < a_{i+1} + a_{i-1}$。我们断言，在这种情形下， λ 对应的抛物 Verma 模不是薄的。

为证明这一点，我们需要为这个 λ 构造至少两个不同的定向杯图，每个图都有 $\min(k, n-k)$ 个杯。任取一个连通子词 $\wedge\vee$ 或 $\vee\wedge$，其中一个字母位于 λ 的 a_i 部分，用一个杯连接该子词中的两个字母，然后将其删去。这样一来， a_i 减少 1，而 a_{i+1} 或 a_{i-1} 也会减少 1。我们可以递归地进行这一操作，使 a_i 减至 1，同时保持新的 $a_{i\pm1}$ 为正数。这就得到一个形如 $\vee\wedge\vee$ 或 $\wedge\vee\wedge$ 的连通子词。显然，我们可以将中间的字母用一个杯连接到右边的字母，也可以连接到左边的字母。由此便得到所需的两个不同定向杯图。

因此，如果 λ 标记一个薄抛物 Verma 模，那么对所有 $1 < i < l$，都有 $a_i \geq a_{i+1} + a_{i-1}$。特别地， $a_i \geq a_{i+1}$ 和 $a_i \geq a_{i-1}$。因此 $l \leq 3$。由于情形 $l \leq 2$ 已经解决，接下来只需考虑情形 $l = 3$。

在情形 $a_2 < a_1 + a_3$中，上述论证表明， λ 标记一个并非薄的抛物 Verma 模。如果 $a_2 \geq a_1 + a_3$，根据定义可得 $\lambda \in \mathcal{Y}_{n,\ k}$。容易看出，这样的 λ 确实标记薄抛物 Verma 模。□

现在我们需要考虑两种情形。请注意，为了避免平凡情形，我们假设 $1 \leq k \leq n-1$。设 w 满足 $\lambda = \Phi(w)$。注意，如果 λ 的翻转数等于 2，那么要么 $w = e$，要么 $w = w_0^{\mathfrak{q}} w_0$。在第一种情形中，相应的抛物 Verma 模是投射 Verma 模的商，因此是 Kostant 正的。在第二种情形中，相应的抛物 Verma 模是单模，因而是 Kostant 正的。因此我们假设 λ 的翻转数等于 3。

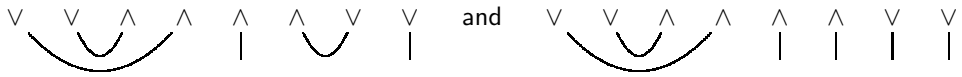
情况 1。假设 $k = \frac{n}{2}$。在这种情形下，我们有 $a_2 = a_1 + a_3$。这意味着，任何对应于 λ 且具有 k 个杯的可容许定向杯图，都必须包含两个相邻且互不嵌套的杯。根据 [MMM22], 的主要结果，对应的简单模 L_u（即我们这个抛物 Verma 模的底）具有 Kostant 负性。

现在让我们更详细地分析模 $\Delta_w^{\mathfrak{q}}$。对于 λ，存在唯一一个带有 k 个杯的可容许定向杯图。对于 λ，其他任何可容许定向杯图都

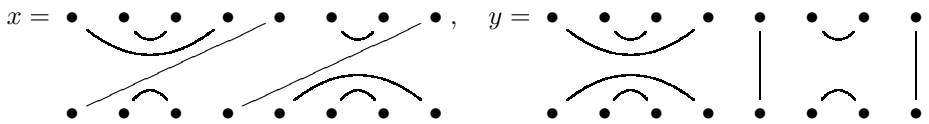
可以通过将其中一些最外侧顺时针定向的杯替换为竖直弦而得到。以下是 $n = 8$ 和 $k = 4$ 的一个原始杯图示例



以及通过替换其中一些顺时针定向的外侧杯而得到的杯图：



在 [MMM22 的第5节中，可以找到两个不同元素 x 和 y 的显式构造，它们属于 W，并满足 $\theta_x L_u \cong \theta_y L_u$。对于上述（一般）例子，这些元素 x 和 y 由以下图给出：



请注意 x 中右下方的外侧杯。对于 λ 的所有可容许定向杯图，除了原始图之外，这个杯都会碰到竖直线段。这意味着 θ_x 消去相应的简单模，换言之，$\theta_x L_u \cong \theta_x \Delta^{\mathfrak{q}}_w$。类似的论证适用于一般的 w，并得出相同结论 $\theta_x L_u \cong \theta_x \Delta^{\mathfrak{q}}_w$。

由于 $\theta_x L_u \cong \theta_y L_u$ 和 $\theta_y L_u$ 是 $\theta_y \Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 的子模，因此我们有一个从 $\theta_x \Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 到 $\theta_y \Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 的非零零度态射。由于 θ_x 和 θ_y 不可分解且不同构，并且投射函子的自同态代数是正分次的，因此这个从 $\theta_x \Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 到 $\theta_y \Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 的零度映射不可能是将某个从 θ_x 到 θ_y 的映射在 $\Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 处取值所得。由第3.4小节可知，$\Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 的 Kostant 问题的答案是否定的。

情形 2。假设 $k \neq \frac{n}{2}$。在此情形下，我们有 $a_2 > a_1 + a_3$。这意味着，对于 λ，任何含有 $\min(k, n-k)$ 个杯的定向杯图都必须有一条竖直线段，将两组嵌套杯分隔开。根据 [MMM22], 的主要结果，相应的简单模 L_u（即我们的抛物 Verma 模的底）是 Kostant 正。对于 W 中不同的 x 和 y，存在一个单射限制映射，将 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\theta_x \Delta^{\mathfrak{q}}_w, \theta_y \Delta^{\mathfrak{q}}_w)$ 映到 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\theta_x L_u, \theta_y L_u)$。

由于 L_u 是 Kostant 正，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}}(\theta_x, \theta_y)$ 满射到后者，因此也满射到前者。这意味着 $\Delta^{\mathfrak{q}}_w$ 是 Kostant 正。

证明至此完成。

5.8. 例：极端极大抛物子代数。考虑 $\mathfrak{sl}_n$ 中与除第一个单根以外的所有单根的选取相对应的抛物子代数 $\mathfrak{p}$。那么，$\mathfrak{p}$ 的 Levi因子同构于 $\mathfrak{sl}_{n-1}$。令 $s_i = (i, i+1)$，我们有：

$$W^{\mathfrak{p}}_{\mathrm{short}} = \{e, s_1, s_1 s_2, \dots, s_1 s_2 s_3 \cdots s_{n-1}\}.$$

众所周知，例如参见 [St05], ，相应的范畴 $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_0$ 与以下箭图的模范畴等价

$$n-1 \underset{\beta_{n-1}}{\overset{\alpha_{n-1}}{\rightleftarrows}} n-2 \underset{\beta_{n-2}}{\overset{\alpha_{n-2}}{\rightleftarrows}} \dots \underset{\beta_3}{\overset{\alpha_3}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 0$$

满足以下关系：

$$\alpha_1\beta_1 = 0, \quad \alpha_i\alpha_{i+1} = 0, \quad \beta_i\beta_{i-1} = 0, \quad \alpha_i\beta_i = \beta_{i-1}\alpha_{i-1}.$$

这里，顶点 0 对应于 e，对于 $i > 0$，顶点 i 对应于 $s_1 s_2 \cdots s_i$。

在这一关系下，抛物 Verma 模是具有以下（唯一）拟遗传结构的标准模：

$$\Delta_0 = \underset{\downarrow}{0}\,, \qquad \Delta_1 = \underset{\downarrow}{1}\,, \qquad \Delta_{n-2} = \underset{\downarrow}{n-2}\,, \qquad \Delta_{n-1} = n-1\,.$$
$$1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad n-1$$

e 的a值为零，而$(S_n)^{\mathfrak{p}}$ 短中所有其他元素的a值均为1。因此，唯一的薄抛物 Verma 模是 Δ_0 和 Δ_{n-1}。由定理5可知，在此情形下，这两个抛物 Verma 模是唯一的Kostant正抛物 Verma 模。

事实上，在此情形下，可以按如下方式推广定理5：

命题7。对于 $w \in W^{\mathfrak{p}}$ 短，以下断言等价：

(a) $\mathrm{K}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) =$ 真。(b) 对于 x、$y \in W$ 满足 $x \neq y$、$\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$ 和 $\theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$，我们有 $\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}} \ncong \theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}}$（作为非分次模）。(c) 对所有满足、以及的
$x\ y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$ $\theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$ $[\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}}] \neq$，
$[\theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}}]\langle i \rangle$ $i \in \mathbb{Z}$ $[\mathcal{O}_0^{\mathbb{Z}}]$

在Gr中，对于，有。(d) 对所有满足、以及的
$x\ y \in W$ $x \neq y$ $\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$ $\theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}} \neq 0$ $[\theta_x \Delta_w^{\mathfrak{p}}] \neq$，
$[\theta_y \Delta_w^{\mathfrak{p}}]$ $[\mathcal{O}_0]$

在Gr中有。(e) $w \in \{e, s_1 s_2 \cdots s_{n-1}\}$。(f) $U(\mathfrak{g})$中的 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 的湮灭子是一个本原理想。

证明。我们从 $w = e$ 开始。由定理5可知，$\mathrm{K}(\Delta_e^{\mathfrak{p}}) =$ 成立，从而得到断言 (a)。将（两两非同构的）不可分解投射函子作用于 $\Delta_e^{\mathfrak{p}}$，所得结果要么为零，要么是 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 中（两两非同构的）不可分解投射对象。由于后者是一个最高权范畴，这些不可分解投射对象在（分次）格罗滕迪克群中的像线性无关。这就推出了断言 (b)、(c) 和 (d)。由于 L_e 是平凡模，$\Delta_e^{\mathfrak{p}}$ 的湮灭子与 L_{s_1} 的湮灭子相同，因而是一个本原理想，从而得到断言 (f)。

接下来考虑 $w = s_1 s_2 \cdots s_{n-1}$。同样，由定理5可知，$\mathrm{K}(\Delta_{w_0}^{\mathfrak{p}}) =$ 成立，从而得到断言 (a)。将（两两非同构的）不可分解投射函子作用于$L_{w_0^{\mathfrak{p}} w_0}$，所得结果要么为零，要么是 $\mathcal{O}_0^{\mathfrak{p}}$ 中（两两非同构的）不可分解倾斜模。由于后者是一个最高权范畴，这些不可分解投射对象在（分次）格罗滕迪克群中的像线性无关。这就推出了断言 (b)、(c) 和 (d)。由于 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 是单模，其湮灭子是一个本原理想，从而得到断言 (f)。

对于 $w \notin \{e, s_1 s_2 \cdots s_{n-1}\}$，相应的 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$并非薄的。它的顶为 L_w，底为 L_{ws_i}，其中 i。我们有 $\theta_{s_i} L_w = 0$和 $\theta_{s_{i-1}} L_{ws_i} = 0$，而 $\theta_{s_i} L_{ws_i} \cong \theta_{s_{i-1} s_i} L_w$。这说明断言 (a)–(d) 均不成立。此外，由于 L_w和 L_{ws_i}的湮灭子是不可比较的本原理想，因此 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 的湮灭子包含于这两个本原理想的交中，从而不是本原理想。因此，断言 (f) 也不成立。

证明至此完成。 □

6. Upshot: general observations and speculations

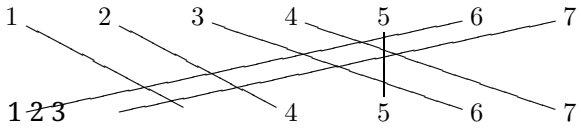
6.1. 预备定义。对于一个合成 $\mu \models n$，我们用 $\mathsf{c}(\mu) \vdash n$ 表示 n 的相应分拆。分拆 $\mathsf{c}(\mu)$ 是通过将后者的各部分按弱递减顺序排列得到的。对于两个合成 μ、$\nu \models n$，若满足 $\mu \sim \nu$，我们记作 $\mu = \nu$。

n 的合成与 $\mathfrak{sl}_n$ 的抛物子代数之间存在一个自然双射，定义如下：对于 $\mu =$（μ_1、μ_2、.....），相应的子代数 $\mathfrak{p}_\mu$ 沿主对角线从西北到东南方向排列时，其对角块的大小依次为 μ_1、μ_2、.....。

对于 $\mu =$（μ_1、μ_2、.....、μ_k）$\models n$，定义集合

$$X_1 = \{1, 2, \dots, \mu_1\}, X_2 = \{\mu_1 + 1, \mu_1 + 2, \dots, \mu_1 + \mu_2\} \quad \text{and so on.}$$

我们称这些集合为 μ 的块。记 G_μ 为 S_n 的子群，由所有满足以下性质的置换 π 组成：对每个 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$，存在某个 $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 使得 $|X_i| = |X_j|$，并且 π 将 X_i 中的元素映射到 X_j 中的元素，同时保持这些元素之间的自然顺序。下面给出 $G_{(2,2,1,2)}$ 中一个元素的例子，其中 $X_1 = \{1, 2\}$、$X_2 = \{3, 4\}$、$X_3 = \{5\}$ 和 $X_4 = \{6, 7\}$:

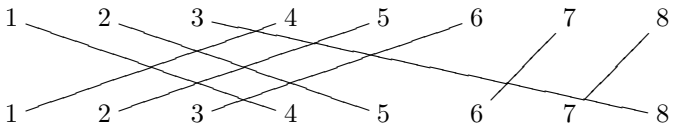


设 μ、$\nu \models n$ 是两个合成，使得 $\mu \sim \nu$。设 X_1、X_2、...、X_K 是 μ 的块，Y_1、Y_2、...、Y_K 是 ν 的块。存在唯一的 $\tau \in S_k$，使得

- $|X_i| = |Y_{\tau(i)}|$, for all i;
- if $i < j$ and $|X_i| = |X_j|$, then $\tau(i) < \tau(j)$.

我们将把 $\omega_{\mu,\ \nu}$ 记作 S_n 中唯一满足以下条件的元素：对于每个 i，它将 X_i 中的元素映到 $Y_{\tau(i)}$ 中的元素，同时保持这些元素的自然顺序。例如：

$\omega_{(2,1,3,2),\ (3,2,2,1)} =$



注意，$\omega_{\mu,\ \nu} G_\mu = G_\nu \omega_{\mu,\ \nu}$。

与合成 μ 对应的 S_n 的抛物子群 W_μ 是对称群的乘积 $S_{X_1} \times S_{X_2} \times \cdots \times S_{X_k}$。

6.2. 一些正例。对于 $\mu \models n$，考虑 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mu$。

命题 8. 对于 $w \in (\mathsf{S}_n)^{\mathfrak{p}\ \text{短}}$，若存在 $\nu \models n$ 使得 $\mu \sim \nu$ 且 $w \in G_\mu \omega_{\nu,\ \mu}$，则 $\mathsf{K}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) =$ 为真。

证明。证明与第 4.3 小节中的证明类似。 □

注意，若 ν 和 ν' 是 n 的不同合成，且 $\mu \sim \mu$ 和 $\nu' \sim \mu$，则集合 $G_\mu \omega_{\nu,\ \mu}$ 与 $G_\mu \omega_{\nu',\ \mu}$ 不相交。

6.3. 一些反例。对于 $\mu \models n$，考虑 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mu$。令 w_0^μ 为对应于 $\mathfrak{p}$的 W 的抛物子群中的最长元素。令 $\mathcal{R}$ 表示包含元素 $w_0^\mu w_0$的 W 的右 Kazhdan-Lusztig 胞。

对于 $w \in (S_n)^{\mathfrak{p}\text{ 短}}$，如果存在唯一的 $u \in \mathcal{R}$ 使得 $[\Delta_w^{\mathfrak{p}} : L_u] \neq 0$，且 $[\Delta_w^{\mathfrak{p}} : L_u] = 1$，我们就称抛物 Verma 模 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 是薄的。
以下命题是第5节所用论证的一个一般性推论。

命题 9. 对于 $w \in (S_n)^{\mathfrak{p}\text{ 短}}$，若 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 不薄，则 $\mathrm{K}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) =$ 为假。

证明。对于 $u \in \mathcal{R}$，$\theta_{u^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 同构于如下直和：$L_u]$ 个 $\theta_d L_d$ 的副本，其中 d 是 $\mathcal{R}$ 中的 Duflo 对合。由第 3.4 小节可知，$\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 的 Kostant 正性意味着 $\theta_{u^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{p}}$ 要么不可分解，要么为零。特别地，对于每个这样的 u，必有 $[\Delta_w^{\mathfrak{p}} : L_u] \leq 1$。

如果我们有两个不同的 u、$\hat{}u \in \mathcal{R}$，使得 $[\Delta_w^{\mathfrak{p}} : L_u] = [\Delta_w^{\mathfrak{p}} : L_{\hat{u}}] = 1$，那么我们有 $\theta_{u^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{p}} \cong \theta_{\hat{u}^{-1}}\Delta_w^{\mathfrak{p}}$，这意味着 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$是 Kostant 负性，这再次由第3.4小节得出。证明至此完成。□

6.4. 一些推测。上述结果将抛物 Verma 模的 Kostant 问题归结为尚未由第6.2节涵盖的薄抛物 Verma 模情形。每个薄抛物 Verma 模都有简单底。第5节的结果表明，对于底为 L_u 的薄抛物 Verma 模 $\Delta_w^{\mathfrak{p}}$，我们有 $\mathrm{K}(\Delta_w^{\mathfrak{p}}) = \mathrm{K}(L_u)$。我们不知道这是否普遍成立；如果成立，也不知道该如何证明。无论如何，这只是将问题归结为一个仍未解决的问题：确定 $\mathrm{K}(L_u)$。

上述结果还表明，薄抛物 Verma 模的分类是一个有趣且重要的问题。

References

[AS03] Andersen, H.; Stroppel, C. 关于 $\mathcal{O}$的扭曲函子。《表示论》7 (2003), 681–699. [BB81] Beilinson, A.; Bernstein, J. $\mathfrak{g}$-模的局部化。巴黎科学院报告，数学系列 I 292 (1981), 第 1 期，15–18. [BGG76] Bernstein, I.; Gelfand, I.; Gelfand, S. 一个特定的 $\mathfrak{g}$-模范畴。（俄文）Funkcional. Anal. i Prilozen. 10 (1976), 第 2 期，1–8. [BGG80] Bernstein, J.; Gelfand, S. 半单李代数的有限维与无限维表示的张量积。Compos. Math. 41 (1980), 第 2 期，245–285. [BS11a] Brundan, J.; Stroppel, C. 由 Khovanov 图代数产生的最高权范畴 I：胞性。Mosc. Math. J. 11 (2011), 第 4 期，685–722. [BS11b] Brundan, J.; Stroppel, C. 由 Khovanov 图代数产生的最高权范畴 III：范畴 $\mathcal{O}$。《表示论》15 (2011), 170–243. [BK81] Brylinski, J.-L.; Kashiwara, M. Kazhdan–Lusztig 猜想与全纯系统。《数学发明》64 (1981), 第 3 期，387–410. [Co20] Coulembier, K. BGG O 类中块的分类。Math. Z. 295 (2020), 第 1–2 期，821–837.[GJ81] Gabber, O.; Joseph, A. 关于 Bernstein-Gelfand-Gelfand 分解与 Duflo 求和公式。Compos. Math. 43 (1981), 第 1 期，107–131. [Hu08] Humphreys, J. BGG O 类中半单李代数的表示。Graduate Studies in Mathematics, 94. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008. xvi+289页。[Ir85] Irving, R. O 类中的投射模：自对偶。《美国数学会会刊》291 (1985), 第 2 期，701–732. [Ja83] Jantzen, J. 半单李代数的包络代数。（德文）Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 3. Springer-Verlag, Berlin, 1983. ii+298 页。

[Jo80] Joseph, A. Kostant 问题、Goldie 秩与 Gelfand-Kirillov 猜想。《数学发明》56 (1980), 第 3 期, 191–213. [KL79] Kazhdan, D.; Lusztig, G. Coxeter 群与 Hecke 代数的表示。《数学发明》53 (1979), 第 2 期，165–184. [KhM04] Khomenko, O.; Mazorchuk, V. 由具有极小湮灭子的单模诱导的模的结构。《加拿大数学杂志》56 (2004), 第 2 期，293–309. [Ka10] K¨ahrstr¨om, J. Kostant 问题与抛物子群。《格拉斯哥数学杂志》52 (2010), 第 1 期，19–32.[KaM10] K¨ahrstr¨om, J.; Mazorchuk, V. 研究 Kostant 问题的新方法。《代数与数论》4 (2010), 第 3 期，231–254. [KMM21] Ko, H.; Mazorchuk, V.; Mr¯den, R. 双 Grassmannian 置换与 Verma 模。《精选数学》（新系列）27 (2021), 第 4 期，论文编号 55，共 24 页。[KMM20] Ko, H.; Mazorchuk, V.; Mr¯den, R. O 类 V 的一些同调性质。预印本 arXiv:2007.00342，即将在《国际数学研究通知》发表。[Lu87] Lusztig, G. 仿射 Weyl 群中的胞腔。II。《代数杂志》109 (1987), 第 2 期，536–548. [MMM22] Mackaay, M.; Mazorchuk, V.; Miemietz, V.; 关于完全可交换置换的 Kostant 问题。预印本 arXiv:2205.09090.[M-T19] Mackaay, M.; Mazorchuk, V.; Miemietz, V.; Tubbenhauer, D.; 通过（余）代数 1 1，1 68 2019 33 -态射构造简单传递 2-表示。《印第安纳大学数学杂志》（），第 – 期。[Ma05] Mazorchuk, V. 研究 Kostant 问题的扭曲方法。《格拉斯哥数学杂志》47 (2005), 第 3 期，549–561.[Ma10] Mazorchuk, V. O 类 II 的一些同调性质。《表示论》14 (2010), 249–263. [MM11] Mazorchuk, V.; Miemietz, V. 有限型 2-范畴的胞腔 2-表示。《组合数学》147 (2011), 第 5 期，1519–1545. [MS08a] Mazorchuk, V.; Stroppel, C. （诱导）胞腔模的范畴化与广义 Verma 模的粗略结构。《数学进展》219 (2008), 第 4 期，1363–1426. [MS08b] Mazorchuk, V.; Stroppel, C. $\mathbb{C}[S_n]$ 的 Wedderburn 基的范畴化。《数学档案》（巴塞尔）91 (2008), 第 1 期，1–11. [RC80] Rocha-Caridi, A. 抛物子群诱导的 $\mathfrak{g}$-模的分裂判据，以及有限维不可约 $\mathfrak{g}$-模的 Bernstein-Gelfand-Gelfand 分解。《美国数学会会刊》262 (1980), 第 2 期，335–366. [So90] Soergel, W. 范畴 $\mathcal{O}$、反常层以及 Weyl 群余不变量上的模。《美国数学会杂志》3 (1990), 第 2 期，421–445. [So92] Soergel, W. Harish-Chandra 双模的组合学。《纯粹与应用数学杂志》429 (1992), 49–74. [So07] Soergel, W. Kazhdan–Lusztig 多项式与多项式环上不可分解双模。（德文）《朱西厄数学研究所杂志》6 (2007), 第 3 期，501–525. [St03a] Stroppel, C. O 类：分次与平移函子。《代数杂志》（），第 – 期。[St03b] Stroppel, C. O 类：箭图与投射对象的自同态环。《表示论》7 (2003), 322–345. [St05] Stroppel, C. 通过投射函子实现 Temperley-Lieb 范畴、缠结与协边的范畴化。《杜克数学杂志》126 (2005), 第 3 期，547–596.

V. M.：乌普萨拉大学数学系，邮政信箱 480，SE-75106，瑞典乌普萨拉，电子邮件：mazor@math.uu.se

S. S.：印度科学研究所数学系，班加罗尔，560012，电子邮件：maths.shraddha@gmail.com