arXiv:2301.07106v1 [math.CA] 17 Jan 2023

非振荡函数及某些非常缓慢递减函数的傅里叶反演定理

TRISTRAM DE PIRO

Abstract. 我们研究非振荡函数，并证明一个适用于非常缓慢衰减函数的处处成立的傅里叶反演定理。证明依赖于非标准分析中的一些思想。

非常缓慢衰减的非振荡函数在 $L^2(\mathcal{R})$类中相当典型，并且在物理学中具有重要意义。本文给出的第一个结果对 Carlsen 的一项结果略作改进，见 [2],：收敛处处成立，而非仅几乎处处成立。这一性质有助于验证物理学中的某些可微性判据，这些判据主要源自麦克斯韦方程；也有助于证明与 Jefimenko方程相关的场所产生的衰减性质，见 [8] 和 [9]。在论文末尾，我们将说明，如何在不要求非振荡这一假设的情况下，将结果推广到仅具有非常缓慢衰减的函数。证明依赖于 [6] 和 [7]两篇论文中的一些非标准分析思想。

定义 0.1. 若存在常数 $C \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对于 $|x| > 1$， $f \in C(\mathcal{R})| \leq \frac{C}{|x|}$，则称 $f \in C(\mathcal{R})$ 非常缓慢衰减。若存在常数 $C \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对于 $|x| > 1$， $f \in C(\mathcal{R})| \leq \frac{C}{|x|^2}$，则称 $f \in C(\mathcal{R})$ 中等衰减。若存在有限个点 $\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$，使得 $f|_{(y_i,y_{i+1})}$ 单调， $1 \leq i \leq n-1$，且 $f|_{(-\infty,y_1)}$、$f|_{(y_n,\infty)}$ 单调，则称 $f \in C(\mathcal{R})$ 是非振荡的。若存在无限序列的点 $\{y_i : i \in \mathcal{Z}\}$，使得 $f|_{(y_i,y_{i+1})}$、 $i \in \mathcal{Z}$ 单调，且存在 $\delta \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对于 $i \in \mathcal{Z}$， $|y_{i+1} - y_i| \geq \delta$，则称 $f \in C(\mathcal{R})$ 是振荡的。

引理 0.2。设 $f \in C(\mathcal{R})$ 和 $\frac{df}{dx} \in C(\mathcal{R})$ 均具有非常缓慢的衰减，且 f 和 $\frac{df}{dx}$ 非振荡的，则定义傅里叶变换为；

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy \ (k \neq 0)$$

$\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{df}{dx}(y)e^{-iky}dy \ (k \neq 0)$

我们有 $\mathcal{F}(f)(k)$ 和 $\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)$ 有界，对 $|k| > k_0 > 0$ 而言，并且存在一个常数 $G \in \mathcal{R}_{>0}$，使得；

$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{G}{|k|^2}$

当 k足够大时。

证明。由于 f 非常缓慢衰减，我们有 f 连续，且 $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$。同理，$\frac{df}{dx}$连续，且 $lim_{|x|\to\infty} \frac{df}{dx} = 0$。由于 $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$，且 f 是非振荡的，我们有，对于 $k \neq 0$，不定积分；

$lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy$

$= lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)cos(ky)dy - ilim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)sin(ky)dy$

存在。由于 f 非常缓慢衰减且是非振荡的，我们有 $|f(x)| \leq \frac{D}{|x|}$，对于 $|x| > E$，并且在区间$(-\infty, E)$和(E, ∞)上单调。使用 [7], 的方法，令 $K = max(|f||_{[-E,E]})$，我们有；

$|lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)cos(ky)dy| \leq 2KE + 2(|\int_{E}^{\frac{\pi}{2|k|}+\frac{n_k\pi}{|k|}} \frac{Dcos(ky)}{y}dy| + |\int_{\frac{\pi}{2|k|}+\frac{n_k\pi}{|k|}}^{\frac{\pi}{2|k|}+\frac{(n_k+1)\pi}{|k|}} \frac{Dcos(ky)}{y}dy|)$

$\leq 2KE + \frac{2D}{E}(\frac{\pi}{2|k|} + \frac{n_k\pi}{|k|} - E) + 2\int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{Dsin(|k|(y-E))}{y}dy$

$\leq 2KE + \frac{2D\pi}{E|k|} + 2\int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{Dsin(|k|(y-E))}{y}dy$

$|lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)sin(ky)dy| \leq 2KE + 2(|\int_{E}^{\frac{m_k\pi}{|k|}} \frac{Dsin(ky)}{y}dy| + |\int_{\frac{m_k\pi}{|k|}}^{\frac{(m_k+1)\pi}{|k|}} \frac{Dsin(ky)}{y}dy|)$

$\leq 2KE + \frac{2D}{E}(\frac{m_k\pi}{|k|} - E) + 2\int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{Dsin(|k|(y-E))}{y}dy$

$\leq 2KE + \frac{2D\pi}{E|k|} + 2\int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{Dsin(|k|(y-E))}{y}dy$

其中 $n_k = \mu n(\frac{\pi}{2|k|} + \frac{n\pi}{|k|} \geq E : \ n \in \mathcal{Z}_{\geq 0})$且 $m_k = \mu n(\frac{n\pi}{|k|} \geq E : \ n \in \mathcal{Z}_{\geq 0})$

因此；

$|lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy| \le 4KE + \frac{4D\pi}{E|k|} + 4\int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{Dsin(|k|(y-E))}{y}dy$

$= 4KE + \frac{4D\pi}{E|k|} + 4D([\frac{-cos(|k|(y-E))}{|k|y}]_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} - \int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{cos(|k|(y-E))}{y^2}dy)$

$= 4KE + \frac{4D\pi}{E|k|} + 4D(\frac{1}{E|k|+\pi} + \frac{1}{E|k|} + \int_{E}^{E+\frac{\pi}{|k|}} \frac{cos(|k|(y-E))}{y^2}dy)$

$\le 4KE + \frac{4D\pi}{E|k|} + 4D(\frac{1}{E|k|+\pi} + \frac{1}{E|k|} + \int_{E}^{\infty} \frac{1}{y^2}dy)$

$\le 4KE + \frac{4D\pi}{E|k|} + 4D(\frac{2}{E|k|} + \frac{1}{E}) = N_k$

因此，对于 $|k| > k_0 > 0$， $\mathcal{F}(f)(k)$ 有界，同理， $\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)$ 也有界。

利用分部积分，我们得到：

$\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} \frac{df}{dx}(y)e^{-iky}dy$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}([f(y)e^{-iky}]_{-r}^{r} + ik\int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy)$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}[f(y)e^{-iky}]_{-\infty}^{\infty} + ik\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy$

$= ik\mathcal{F}(f)(k)$

因此，对于 $|k| > 1$:

$|\mathcal{F}(f)(k)| \le \frac{|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)|}{|k|}$, (†)

由于 $\frac{df}{dx}$ 连续且非振荡，根据 [7], 中引理 0.9 的证明并利用下溢，对于 $r \in \mathcal{R}_{>0}$，我们可以找到 $\{F_r, G_r\} \subset \mathcal{R}_{>0}$，使得对于所有 $|k| > F_r$，都有：

$|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\int_{-r}^{r} \frac{df}{dx}(y)e^{-iky}dy| < \frac{G_r}{|k|}$, $(**)$

从证明中很容易看出， $\{F_r, G_r\}$ 可以对 r一致地选取。于是，由 $(**)$ 可得，对于 $|k| > F$;

$|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)| < \frac{G}{|k|}$, for $|k| > F$

并且，根据 (†)，对于 $|k| > max(F, 1)$，有：

$$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)|}{|k|} < \frac{G}{|k|^2}$$

□

定义 0.3. 设 $f \in C^3(\mathcal{R})$，其中 f、f'、f''和 f'''有界，则我们通过以下要求定义一个逼近序列 $\{f_m : m \in \mathcal{N}\}$；

(i)。对于 $m \in \mathcal{N}$，$f_m \in C^2(\mathcal{R})$。

(ii)。$f_m|_{[-m,m]} = f|_{[-m,m]}$。

(iii)。f_m 是一致中等衰减的，即存在一个常数 $C \in \mathcal{R}_{>0}$，与 m 无关，使得；

$$|f_m(x)| \leq \frac{C}{|x|^2}, \, for \, x \in (-\infty, -m - \frac{1}{m}) \cup (m + \frac{1}{m}, \infty)$$

(iv)。存在常数 $\{D, E\} \subset \mathcal{R}_{>0}$，使得 $\int_{-m-\frac{1}{m}}^{m} |f_m(x)|dx \leq \frac{D}{m}$ 以及 $\int_{m}^{m+\frac{1}{m}} |f_m(x)|dx \leq \frac{D}{m}$。

引理 0.4。设 $f \in C(\mathcal{R})$ 和 $\frac{df}{dx} \in C(\mathcal{R})$ 具有非常缓慢的衰减，其中 f 和 $\frac{df}{dx}$是非振荡的。设 $\{f_m; \, m \in \mathcal{N}\}$ 是一个逼近序列。设 $\mathcal{F}$ 为普通傅里叶变换，对每个 f_m 定义，则对于任意 $k_0 > 0$，序列 $\{\mathcal{F}(f_m) : m \in \mathcal{N}\}$ 在 $\mathcal{R} \setminus (|k| < k_0)$ 上逐点且一致地收敛于 $\mathcal{F}(f)$，其中 $\mathcal{F}(f)$ 的定义见引理 0.2。特别地，$\mathcal{F}(f) \in C(\mathcal{R} \setminus \{0\})$。

证明。对于 $g \in C(\mathcal{R})$ 和 $n \in \mathcal{N}$，定义如下；

$$\mathcal{F}_n(g)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-n}^{n} f(y)e^{-iky}dy$$

对于 $k \in \mathcal{R} \setminus (|k| < k_0)$、$\{m, n\} \subset \mathcal{N}$ 和 $m \geq n$, $\epsilon > 0$,$\delta > 0$，我们有；

$$|\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k)| \leq |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_n(f)(k)| + |\mathcal{F}_m(f)(k) - \mathcal{F}_m(f_m)(k)|$$

$$+ |\mathcal{F}_m(f_m)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k)|$$

$$= |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + |\mathcal{F}_m(f_m)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k)|$$

$$\leq |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + \int_{-\infty}^{-m} |f_m(x)|dx + | + \int_{m}^{\infty} |f_m(x)|dx$$

$$= |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + \int_{-\infty}^{-m-\frac{1}{m}} |f_m(x)dx + \int_{-m-\frac{1}{m}}^{-m} |f_m(x)|dx$$

$$+ \int_m^{m+\frac{1}{m}} |f_m(x)dx + \int_{m+\frac{1}{m}}^{\infty} |f_m(x)|dx$$

$$\leq |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + \frac{D+E}{m} + \int_{-\infty}^{-m-\frac{1}{m}} \frac{C}{x^2}dx + \int_{m+\frac{1}{m}}^{\infty} \frac{C}{x^2}dx$$

$$\leq |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + \frac{D+E}{m} + \frac{2C}{m+\frac{1}{m}}$$

$$\leq |\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}_m(f)(k)| + \frac{2C+D+E}{m}$$

$$\leq \frac{C_{k_0}}{m} + \frac{2C+D+E}{m}$$

$\leq \epsilon + \delta$，对于 $m \geq max(\frac{C_{k_0}}{\epsilon}, \frac{2C+D+E}{\delta})$。由于 $\epsilon > 0$ 和 $\delta > 0$ 是任意的，我们得到第一个结果。逼近序列中的每个 $\mathcal{F}(f_m)$ 都连续，这一事实可由定义 0.3 中的 (iii) 和控制收敛定理得出。最后一个结果则立即可由 $k_0 > 0$ 是任意的这一事实，以及连续函数的一致极限仍连续得出。

□

引理 0.5. 若 $m \in \mathcal{R}_{>0}$ 足够大，则 $\{a_0, a_1, a_2\} \subset \mathcal{R}$，存在一个次数为 5 的 $h \in \mathcal{R}[x]$，满足：

$$h(m) = a_0,\ h'(m) = a_1,\ h''(m) = a_2,\ (i)$$

$$h(m+\tfrac{1}{m}) = h'(m+\tfrac{1}{m}) = h''(m+\tfrac{1}{m}) = 0\ (ii)$$

$$|h_{[m,m+\frac{1}{m}]}| \leq C$$

对于某个 $C \in \mathcal{R}_{>0}$，其与足够大的 m 无关，并且，若$h'''(m) > 0$，则 $h'''(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} > 0$；若 $h'''(m) < 0$，则 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} < 0$。特别地；

$$\int_m^{m+\frac{1}{m}} |h'''(x)|dx = |a_2|$$

证明。若 $p(x)$ 是任意多项式，则 $h(x) = (x-(m+\frac{1}{m}))^3 p(x)$ 满足条件 (ii)。于是；

$$h'(x) = 3(x-(m+\tfrac{1}{m}))^2 p(x) + (x-(m+\tfrac{1}{m}))^3 p'(x)$$

$h''(x) = 6(x-(m+\frac{1}{m}))p(x)+6(x-(m+\frac{1}{m}))^2p'(x)+(x-(m+\frac{1}{m}))^3p''(x)$

$h'''(x) = 6p(x) + 18(x-(m+\frac{1}{m}))p'(x) + 9(x-(m+\frac{1}{m}))^2p''(x)$

因此，我们可以通过要求以下条件来满足 (i)；

(a)。 $-\frac{p(m)}{m^3} = a_0$ (b)。 $^{3p}($

m $= a_1$ (c)。 $^{-6p}($

m^2 $-$ $p')(m)m^3$ $= a_2$

m $+$ $6p')($ m $-$ $p'')(m)m^3$

m m^2

其解为；

$p(m) = -a_0m^3$, $p'(m) = -3a_0m^4 - a_1m^3$, $p''(m) = -12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3$

并且可以通过该多项式来满足；

$p(x) = \frac{1}{2}(-12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3)(x-m)^2$

$+(-3a_0m^4 - a_1m^3)(x-m) + (-a_0m^3)$

$= \frac{1}{2}(-12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3)x^2 + (-m(-12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3)$

$+(-3a_0m^4 - a_1m^3))x + (\frac{m^2}{2}(-12a0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3)$

$-m(-3a_0m^4 - a_1m^3) - a_0m^3)$

$= (-6a_0m^5 - 3a_1m^4 - \frac{a_2}{2}m^3)x^2 + (12a_0m^6 + 6a_1m^5 + a_2m^4 - 3a_0m^4$

$-a_1m^3)x + (-6a_0m^7 - 3a_1m^6 - \frac{a_2}{2}m^5 + 3a_0m^5 + a_1m^4 - a_0m^3)$

$= (-6a_0m^5 - 3a_1m^4 - \frac{a_2}{2}m^3)x^2 + (12a_0m^6 + 6a_1m^5 + (a_2 - 3a_0)m^4$

$-a_1m^3)x + (-6a_0m^7 - 3a_1m^6 + (3a_0 - \frac{a_2}{2})m^5 + 3a_0m^5 + a_1m^4 - a_0m^3)$

$= ax^2 + bx + c$ $(*)$

因此 that

$h'''(x) = 6(ax^2+bx+c)+18(x-(m+\frac{1}{m}))(2ax+b)+9(x-(m+\frac{1}{m}))^2 2a$

$= (60a)x^2 + (24b - 72a(m+\frac{1}{m}))x + (6c - 18(m+\frac{1}{m})b + 18a(m+\frac{1}{m})^2)$

并利用计算（$*$）

$h'''(x) = (60(-6a_0m^5) + O(m^4))x^2 + (24.12a_0m^6 - 72m(-6a_0m^5)$

$+O(m^5))x + (6. - 6a_0m^7 - 18m(12a_0m^6) + 18m^2(-6a_0m^5) + O(m^6))$

$= (-360a_0m^5 + O(m^4))x^2 + (740a_0m^6 + O(m^5))x +$

$(-360a_0m^7 + O(m^6))$

根据求根公式，当；时有根，

$x = \frac{-740a_0m^6 + \sqrt{740^2a_0^2m^{12} - 4(-360a_0m^5)(-360a_0m^7)}}{2.-360a_0m^5} + O(1)$

$= \frac{740m}{720} + \frac{170m}{720} + O(1)$

$= \frac{19m}{24} + O(1)$ or $\frac{91m}{72} + O(1)$

我们有 $m > \frac{19m}{24}$和 $m + \frac{1}{m} < \frac{91m}{72}$当且仅当 $m > \sqrt{\frac{72}{19}}$，显然，当 m 充分大时，我们可以忽略 $O(1)$ 项。特别地，当 m 充分大时，$h'''(x)$ 在区间 $[m, m+\frac{1}{m}]$ 内没有根，因此 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} > 0$或 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} < 0$。

我们计算得:

$|h_{[m,m+\frac{1}{m}]}| = |(x-(m+\frac{1}{m}))^3 p(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]}|$

$\leq \frac{1}{m^3}|p(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]}$

$= \frac{1}{m^3}|[\frac{1}{2}(-12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3)(x-m)^2$

$+(-3a_0m^4 - a_1m^3)(x-m) + (-a_0m^3)]|_{[m,m+\frac{1}{m}]}$

$\leq \frac{1}{m^3}[\frac{1}{2}|-12a_0m^5 - 6a_1m^4 - a_2m^3|\frac{1}{m^2} + |-3a_0m^4 - a_1m^3|\frac{1}{m} + |-a_0m^3|]$

$\leq \frac{12|a_0|m^5 + 6|a_1|m^4 + |a_2|m^3|}{m^5} + \frac{3|a_0|m^4 + |a_1|m^3}{m^4} + \frac{|a_0|m^3}{m^3}$

$\leq 12|a_0| + 6|a_1| + |a_2| + 3|a_0| + |a_1| + |a_0|$ $(m > 1)$

$\leq 16|a_0| + 7|a_1| + |a_2|$

对于最后一个断言，由于 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} > 0$ 或 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} < 0$，根据微积分基本定理，我们有；

$\int_m^{m+\frac{1}{m}} |h'''(x)|dx = |\int_m^{m+\frac{1}{m}} h'''(x)dx|$

$= |h''(m+\frac{1}{m}) - h''(m)| = |-h''(m)| = |a_2|$

□

引理 0.6. 若 $m \in \mathcal{R}_{>0}$, $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \subset \mathcal{R}$，则存在 $h \in C^3(\mathcal{R})$，使其具有如下性质；

$h(m) = a_0,\ h'(m) = a_1,\ h''(m) = a_2,\ h'''(m) = a_3,\ (i)$

$h(m+\frac{1}{m}) = h'(m+\frac{1}{m}) = h''(m+\frac{1}{m}) = h'''(m+\frac{1}{m}) = 0\ (ii)$

$|h|_{[m,m+1]} \leq C$

其中 $C \in \mathcal{R}_{>0}$ 与 $m > 1$无关；并且，若 $a_3 > 0$, $h'''(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \geq 0$, $a_3 < 0$, $h'''(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \leq 0$。特别地；

$\int_m^{m+\frac{1}{m}} |h'''(x)|dx = |a_2|$

证明。设 $g(x)$为一个多项式，则显然，多项式$h_1(x) = (x-(m+\frac{1}{m}))^n g(x)$，对于 $n \geq 4$，具有性质（ii），即$h_1(m+\frac{1}{m}) = h_1'(m+\frac{1}{m}) = h_1''(m+\frac{1}{m}) = h_1'''(m+\frac{1}{m}) = 0$。条件（$i$）于是归结为以下方程；

$(i)'\ \frac{g(m)}{(-1)^n m^n} = a_0$

$(ii)'\ \frac{ng(m)}{(-1)^{n-1}m^{n-1}} + \frac{g'(m)}{(-1)^n m^n} = a_1$

$(iii)'\ \frac{n(n-1)g(m)}{(-1)^{n-2}m^{n-2}} + \frac{2ng'(m)}{(-1)^{n-1}m^{n-1}} + \frac{g''(m)}{(-1)^n m^n} = a_2$

$(iv)'\ \frac{n(n-1)(n-2)g(m)}{(-1)^{n-3}m^{n-3}} + \frac{3n(n-1)g'(m)}{(-1)^{n-2}m^{n-2}} + \frac{3ng''(m)}{(-1)^{n-1}m^{n-1}} + \frac{g'''(m)}{(-1)^n m^n} = a_3$

我们可以通过要求满足以下条件来求解:

$(i)''\ g(m) = (-1)^n a_0 m^n (ii)''\ g'(m) = (-1)^n a_1 m^n + (-1)^n a_0 n m^{n+1} (iii)$
$''\ g''(m) = (-1)^n a_2 m^n + 2(-1)^n n a_1 m^{n+1} + (-1)^n n(n+1) a_0 m^{n+2} (iv)$
$''\ g'''(m) = (-1)^n a_3 m^n + 3n(-1)^n a_2 m^{n+1} + (-1)^n a_1 n(n+3) m^{n+2} + n($
$n+1)(n+2)(-1)^n a_0 m^{n+3}\ (*)$

Let;

$g_1(x) = ((-1)^n a_3 m^n + 3n(-1)^n a_2 m^{n+1} + (-1)^n a_1 n(n+3) m^{n+2}$

$+n(n+1)(n+2)(-1)^n a_0 m^{n+3})(x-m)^3 + ((-1)^n a_2 m^n + 2(-1)^n n a_1 m^{n+1}$

$+(-1)^n n(n+1) a_0 m^{n+2})(x-m)^2 + ((-1)^n a_1 m^n + (-1)^n a_0 n m^{n+1})$

$(x-m) + ((-1)^n a_0 m^n)$

那么 $g_1(x)$ 满足 $(*)$，任何形如 $g_2(x) + g_1(x)$ 的函数也满足该条件，其中；

$g_2(m) = g_2'(m) = g_2''(m) = g_2'''(m) = 0$

条件是 $g_2 \in C^3(\mathcal{R})$。在这种情况下，如果；

$h(x) = (x - (m + \frac{1}{m})^n (g_2(x) + g_1(x))$

那么 h 满足 (i)、(ii)。我们有：

$|x - (m + \frac{1}{m})^n g_1(x)|_{[m, m+\frac{1}{m}]} \leq \frac{1}{m^n}(|g_2|_{[m, m+\frac{1}{m}]} + |g_1|_{[m, m+\frac{1}{m}]})$

$\leq \frac{1}{m^n}(|g_2|_{[m, m+\frac{1}{m}]} + \frac{1}{m^n}|((-1)^n a_3 m^n + 3n(-1)^n a_2 m^{n+1} + (-1)^n a_1 n(n+3) m^{n+2}$

$+n(n+1)(n+2)(-1)^n a_0 m^{n+3})\frac{1}{m^3} + ((-1)^n a_2 m^n + 2(-1)^n n a_1 m^{n+1}$

$+(-1)^n n(n+1) a_0 m^{n+2})\frac{1}{m^2} + ((-1)^n a_1 m^n + (-1)^n a_0 n m^{n+1})$

$\frac{1}{m} + ((-1)^n a_0 m^n)|$

$= |((-1)^n a_3 m^n + 3n(-1)^n a_2 m^{n+1} + (-1)^n a_1 n(n+3)m^{n+2}$

$+n(n+1)(n+2)(-1)^n a_0 m^{n+3})\frac{1}{m^{n+3}} + ((-1)^n a_2 m^n + 2(-1)^n n a_1 m^{n+1}$

$+(-1)^n n(n+1)a_0 m^{n+2})\frac{1}{m^{n+2}} + ((-1)^n a_1 m^n + (-1)^n a_0 n m^{n+1})$

$\frac{1}{m^{n+1}} + ((-1)^n a_0)|$

$\leq |a_3| + 3n|a_2| + n(n+3)|a_1| + n(n+1)(n+2)|a_0| + |a_2| + 2n|a_1| + n(n+1)|a_0| + |a_1| + n|a_0| + |a_0|, (m \geq 1)$

$= \frac{1}{m^n}(|g_2|_{[m,m+\frac{1}{m}]} + (n+1)(n^2+3n+1)|a_0| + (n^2+5n+1)|a_1 + (3n+1)|a_2| + |a_3| = F \ (F)$

其中 $F \in \mathcal{R}_{>0}$ 与 m无关。使用乘积法则， $h'''(x) = 0$ 在区间 $(m, m+\frac{1}{m})$ 内成立的条件为；

$n(n-1)(n-2)(x-(m+\frac{1}{m}))^{n-3}(g_2+g_1)(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))^{n-2}(g_2+g_1)'(x)$

$+3n(x-(m+\frac{1}{m}))^{n-1}(g_2+g_1)''(x) + (x-(m+\frac{1}{m}))^n(g_2+g_1)'''(x) = 0$

将其除以 $(x-(m+\frac{1}{m}))^{n-3}$， 可化简为；

$n(n-1)(n-2)(g_2+g_1)(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))(g_2+g_1)'(x) +$

$3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2(g_2+g_1)''(x) + (x-(m+\frac{1}{m}))^3(g_2+g_1)'''(x) = 0$

and;

$n(n-1)(n-2)g_2(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_2'(x) + 3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2 g_2''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3 g_2'''(x) = -(n(n-1)(n-2)g_1(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_1'(x)$

$+3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2 g_1''(x) + (x-(m+\frac{1}{m}))^3 g_1'''(x)) \ (A)$

不失一般性，假设；

$-(n(n-1)(n-2)g_1(x)+3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_1'(x)+3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2g_1''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3g_1'''(x))|_m=-(n(n-1)(n-2)a_0-\frac{3n(n-1)a_1}{m}+\frac{3na_2}{m^2}$

$-\frac{a_3}{m^3}\geq 0$

我们可以在 $[m,m+\frac{1}{m}]$ 上选取一个解析函数 $\phi(x)$；

$(a).\ \phi(x)\leq -(n(n-1)(n-2)g_1(x)+3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_1'(x)+3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2g_1''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3g_1'''(x))$

$(b).\ \phi(m)=0$

g_2 的三阶微分方程；

$n(n-1)(n-2)g_2(x)+3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_2'(x)+3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2g_2''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3g_2'''(x)=\phi(x),\ \text{on}\ [m,1+m]\ (B)$

根据要求 $g_2(m)=g_2'(m)=g_2''(m)=0$，由皮亚诺存在定理可知，它在 $C^3([m,m+\frac{1}{m}))$ 中有一个解。根据事实 (b)，我们必有 $g_2'''(m)=0$。将 ϕ 在 $[m,m+\frac{1}{m}]$ 上的幂级数写成：

$\phi(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_j(x-(m+\frac{1}{m}))^j$

我们可以使用待定系数法，求得一个特解，其中：

$g_{2,part}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{j,part}(x-(m+\frac{1}{m}))^j,\ \text{with;}$

$a_{j,part}=\frac{b_j}{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)j+3nj(j-1)+j(j-1)(j-2)},\ (j\geq 3)$

$a_{2,part} = \frac{b_2}{n(n-1)(n-2)+6n(n-1)+3n}$ $a_{1,part} = \frac{b_1}{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}$ $a_{0,part} = \frac{b_0}{n(n-1)(n-2)}$

使得 $g_{2,\ part}$ 是解析的，因为 $|a_{j,\ 0}| \leq {}_{n\ \frac{|b_j|}{n\ \ 1\ \ ()(n-2)}}$ 对于 $j \geq 0$。

求解齐次欧拉方程；

$n(n-1)(n-2)g_2(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_2'(x) + 3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2 g_2''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3 g_2'''(x) = 0 \text{ on } [m, m+\frac{1}{m}]$

我们可以作代换 $y = m + \frac{1}{m} - x$，将其化简为方程；

$n(n-1)(n-2)g_{2,\ m}(y) + 3n(n-1)yg_{2,\ m}'(y) + 3ny^2 g_{2,\ m}''(y) + y^3 g_{2,\ m}'''(y) = 0$关于 $[0, \frac{1}{m}]$

其中 $g_{2,\ m}(y) = g_2(m + \frac{1}{m} - y)$。进一步作代换$y = e^u$，并令 $r_{2,\ m}(u) = g_{2,\ m}(e^u)$，我们得到；

$r_{2,m}'(u) = g_{2,m}'(e^u)e^u$

$r_{2,m}''(u) = g_{2,m}''(e^u)e^{2u} + g_{2,m}'(e^u)e^u$

$r_{2,m}'''(u) = g_{2,m}'''(e^{3u}) + 3g_{2,m}''(e^u)e^{2u} + g_{2,m}'(e^u)e^u$

因此；

$n(n-1)(n-2)g_{2,m}(e^u) + 3n(n-1)e^u g_{2,m}'(e^u) + 3ne^{2u} g_{2,m}''(e^u) + e^{3u} g_{2,m}'''(e^u)$

$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + 3n(n-1)e^u(r_{2,m}'(u)e^{-u}) + 3ne^{2u}((r_{2,m}''(u) - g_{2,m}'(e^u)e^u)e^{-2u})$

$+e^{3u}((r_{2,m}'''(u) - 3g_{2,m}''(e^u)e^{2u} - g_{2,m}'(e^u)e^u)e^{-3u})$

$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + 3n(n-1)r_{2,m}'(u) + 3nr_{2,m}''(u) - 3ng_{2,m}'(e^u)e^u + r_{2,m}'''(u) - 3g_{2,m}''(e^u)e^{2u}$

非振荡的函　　数及某些函数的傅里叶反演定理，适用于

$$-g'_{2,m}(e^u)e^u$$

$$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + 3n(n-1)r'_{2,m}(u) + 3nr''_{2,m}(u) + r'''_{2,m}(u) - (3n+1)g'_{2,m}(e^u)e^u - 3g''_{2,m}(e^u)e^{2u}$$

$$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + 3n(n-1)r'_{2,m}(u) + 3nr''_{2,m}(u) + r'''_{2,m}(u) - (3n+1)r'_{2,m}(u)$$

$$-3e^{2u}((r''_{2,m}(u) - g'_{2,m}(e^u)e^u)e^{-2u})$$

$$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + (3n^2-6n-1)r'_{2,m}(u) + 3nr''_{2,m}(u) + r'''_{2,m}(u) - 3r''_{2,m}(u) + 3g'_{2,m}(e^u)e^u$$

$$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + (3n^2-6n-1)r'_{2,m}(u) + 3(n-1)r''_{2,m}(u) + r'''_{2,m}(u) + 3r'_{2,m}(u)$$

$$= n(n-1)(n-2)r_{2,m}(u) + (3n^2-6n+2)r'_{2,m}(u) + (3n-3)r''_{2,m}(u) + r'''_{2,m}(u) = 0 \ (C)$$

我们有:

$$(\lambda^3 + 3(n-1)\lambda^2 + (3n^2-6n+2)\lambda + n(n-1)(n-2))' = 3\lambda^2 + 6(n-1)\lambda + (3n^2-6n+2)$$

其根满足 $\lambda = -(n-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}$，因此，当 n 足够大时，$(C)$ 的特征多项式恰有一个实根 λ_1 和两个非实复共轭根 $\{\lambda_2 + i\lambda_3, \lambda_2 - i\lambda_3\}$。由此可得，$(C)$ 的通解为;

$$r_{2,m}(u) = A_1 e^{\lambda_1 u} + A_2 e^{\lambda_2 u + i\lambda_3} + A_3 e^{\lambda_2 u - i\lambda_3}$$

其中 $\{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{C}$，并且我们可以得到一个符合相应初始条件的实解，其形式为;

$$r_{2,m}(u) = B_1 e^{\lambda_1 u} + B_2 e^{\lambda_2 u} cos(\lambda_3 u) + B_3 e^{\lambda_2 u} sin(\lambda_3 u)$$

其中 $\{B_1, B_2, B_3\} \subset \mathcal{R}$。由此可得;

$$g_{2,m}(y) = r_{2,m}(ln(y))$$

$g_2(x) = g_{2,m}(m+\frac{1}{m}-x)+g_{2,part}(x) = r_{2,m}(ln(m+\frac{1}{m}-x))+g_{2,part}(x)$

$= B_1 e^{\lambda_1 ln(m+\frac{1}{m}-x)} + B_2 e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)} cos(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x))$

$+B_3 e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)} sin(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x)) + g_{2,part}(x)$ (on $[m, m+\frac{1}{m}]$)

我们有;

$\lambda_1|\lambda_2 + i\lambda_3|^2 = -n(n-1)(n-2)$

$\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 + \lambda_2 - i\lambda_3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 = -3(n-1)$

计算特征多项式中 n 项的最高次数，可得，对于 $\lambda = \alpha n$;

$\alpha^3 n^3 + 3n(\alpha n)^2 + 3n^2(\alpha n) + n^3 = n^3(\alpha+3)^3 = 0$

因此 $\alpha = -3$, $\lambda_1 = -3n + O(1)$ 且 $2\lambda_2 = -3(n-1) - (-3n + O(1)) = 3 - O(1) = O(1)$

那么，若 $B_1 = 0$，我们可以看到 $g_2(x)$ 在 $(m+\frac{1}{m})$ 处至多有一个 $\frac{1}{x^{O(1)}}$ 奇点，这可以通过为 $\{\phi(m)\ \phi'(m)\ \phi''(m)\}$ 的初始条件选择一个二维参数族来实现。若;

$-(n(n-1)(n-2)a_0 - \frac{3n(n-1)a_1}{m} + \frac{3na_2}{m^2} - \frac{a_3}{m^3} \neq 0$

我们显然可以实现这一点，同时满足 (a)、(b)。若;

$-(n(n-1)(n-2)a_0 - \frac{3n(n-1)a_1}{m} + \frac{3na_2}{m^2} - \frac{a_3}{m^3} = 0$

通过要求满足附加性质 (c);

$\phi'(m) < -(n(n-1)(n-2)g_1(x) + 3n(n-1)(x-(m+\frac{1}{m}))g_1'(x) + 3n(x-(m+\frac{1}{m}))^2 g_1''(x)$

$+(x-(m+\frac{1}{m}))^3 g_1'''(x))'|_m$

我们显然也可以满足（a）、（b）。

那么，当 n 足够大时;

$$lim_{x\to 0}(\frac{B_2x^n}{x^{O(1)}}sin(\lambda_3 ln(x)) + \frac{B_3x^n}{x^{O(1)}}cos(\lambda_3 ln(x)))$$

$$= lim_{x\to 0}(\frac{B_2x^n}{x^{O(1)}}sin(\lambda_3 ln(x)) + \frac{B_3x^n}{x^{O(1)}}cos(\lambda_3 ln(x)))'$$

$$= lim_{x\to 0}(\frac{B_2x^n}{x^{O(1)}}sin(\lambda_3 ln(x)) + \frac{B_3x^n}{x^{O(1)}}cos(\lambda_3 ln(x)))''$$

$$= lim_{x\to 0}(\frac{B_2x^n}{x^{O(1)}}sin(\lambda_3 ln(x)) + \frac{B_3x^n}{x^{O(1)}}cos(\lambda_3 ln(x)))''' = 0$$

我们得到，$(x-(m+\frac{1}{m}))^n g_2(x)$ 可延拓为 $C^3([m, m+\frac{1}{m}])$ 中的一个解，而 $(x-(m+\frac{1}{m}))^n(g_2+g_1)(x) \in C^3([m, m+\frac{1}{m}])$。根据事实 (a)，(A) 在 $(m, m+\frac{1}{m})$ 中没有解，因此 $h'''(x) \geq 0$。

我们有：

$$|(x-(m+\frac{1}{m})^n g_2(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} = |(x-(m+\frac{1}{m})^n(B_2e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)}cos(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x))$$

$$+B_3e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)}sin(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x)) + g_{2,part}(x))|$$

$$\leq |B_2|m^{\lambda_2-n} + |B_3|m^{\lambda_2-n} + m^{-n}|g_{2,part}(x)|$$

注意到 (a) 的右侧在 $[m, m+\frac{1}{m}]$ 上由 $O(m^n)$ 有界，因此无论初始条件 $\{\phi(m)\ \phi'(m)\ \phi''(m)\}$ 如何选择，我们也可以令 $\phi(x)$ 和 $g_{2,part}(x)$ 在 $[m, m+\frac{1}{m}]$ 上为 $O(m^n)$。特殊情况下，我们有 $\phi'(m) = O(m^{n+1})$，因此选择足够小的$\{B_2, B_3\}$，注意到；

$$(x-(m+\frac{1}{m})^n(B_2e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)}cos(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x))$$

$$+B_3e^{\lambda_2 ln(m+\frac{1}{m}-x)}sin(\lambda_3 ln(m+\frac{1}{m}-x)))'|_m = O(max(B_2m^{n-\lambda_2-1}, B_3m^{n-\lambda_2-1}))$$

我们可以假设：

$$|(x-(m+\frac{1}{m})^n g_2(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \leq D$$

其中 $D \in \mathcal{R}_{>0}$ 与 m无关，因此利用（F）；

$$|h(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \leq |(x-(m+\frac{1}{m})^n g_1(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} + |(x-(m+\frac{1}{m})^n g_2(x)|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \leq F + D$$

对于最后的结论，当 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \geq 0$或 $h'''|_{[m,m+\frac{1}{m}]} \leq 0$时，利用微积分基本定理可得；

$\int_m^{m+\frac{1}{m}} |h'''(x)|dx = |\int_m^{m+\frac{1}{m}} h'''(x)dx|$

$= |h''(m+\frac{1}{m}) - h''(m)| = |-h''(m)| = |a_2|$

□

引理 0.7。设 f 如定义 0.3 所述，则存在一个逼近序列 $\{f_m : m \in \mathcal{N}\}$。此外，对于充分大的$m$，$|\mathcal{F}(f_m)(k)| \leq \frac{Cm}{|k|^3}$，对于 $|k| > 1$，其中 $C \in \mathcal{R}_{>0}$ 与 m无关。

证明。令 f_m 为；

$f_m(x) = f(x)$ for $x \in [-m, m]$

$f_m(x) = h_{1,m}(x)$, for $x \in [-m - \frac{1}{m}, -m]$

$f_m(x) = h_{2,m}(x)$, for $x \in [m, m + \frac{1}{m}]$

$f_m(x) = 0$, for $x \in (-\infty, -m - \frac{1}{m}]$

$f_m(x) = 0$, for $x \in [m + \frac{1}{m}, \infty)$

其中 $\{h_{1,m}, h_{2,m}\} \subset C^2([-m - \frac{1}{m}, -m] \cup [m, m + \frac{1}{m}])$由引理 0.5 或引理 0.6 所保证的数据 $a_{1,m,0} = f(-m), a_{1,m,1} = f'(-m), a_{1,m,2} = f''(-m), a_{2,m,0} = f(m), a_{2,m,1} = f'(m), a_{2,m,2} = f''(m)$生成。由引理 0.5 和引理 0.6 的构造可知，定义 0.3 中的条件 (i) 成立。根据定义，有 (ii)。由于 f_m在 $(-\infty, -m - \frac{1}{m}] \cup [m + \frac{1}{m}, \infty)$ 上恒为零，因此 (iii) 成立。根据引理 0.5 的证明，或利用引理 0.6，可得；

$max(|h_{1,m}|_{[m,m+\frac{1}{m}]}|, |h_{2,m}|_{[-m-\frac{1}{m},-m]}|) \leq 16||f||_\infty + 7||f'||_\infty + ||f''||_\infty$

由此可得；

$\int_{-m-\frac{1}{m}}^{-m} |f_m(x)|dx \leq (16||f||_\infty + 7||f'||_\infty + ||f''||_\infty)(-m - (-m - \frac{1}{m}))$

$\leq \frac{D}{m}$

$\int_m^{m+\frac{1}{m}} |f_m(x)|dx \leq (16||f||_\infty + 7||f'||_\infty + ||f''||_\infty)((m+\frac{1}{m}) - m)$

$\leq \frac{E}{m}$

其中 $D = E = (16||f||_\infty + 7||f'||_\infty + ||f''||_\infty)$

从而证明（iv）。对于第二个结论，我们有；

$\mathcal{F}(f_m''')(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m'''(x)e^{-ikx}dx$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}([f_m''(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - ik\int_{-\infty}^{\infty} f_m''(x)e^{-ikx}dx$

$= \frac{-ik}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}([f_m'(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - ik\int_{-\infty}^{\infty} f_m'(x)e^{-ikx}dx)$

$= \frac{-k^2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}([f_m(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} - ik\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)e^{-ikx}dx)$

$= \frac{ik^3}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)e^{-ikx}dx)$

因此，对于 $|k| > 1$;

$|\mathcal{F}(f_m)(k)| = |\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x)e^{-ikx}dx|$

$= \frac{|\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f_m'''(x)e^{-ikx}dx|}{|k|^3}$

$\leq \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_m'''(x)e^{-ikx}|dx$

$= \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_m'''(x)|dx$

$= \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(\int_{-m-\frac{1}{m}}^{-m} |h_{1,m}'''(x)|dx + \int_{-m}^{m} |f'''(x)|dx + \int_m^{m+\frac{1}{m}} |h_{2,m}'''(x)|dx)$

$\leq \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(|f''(-m)| + 2m|f'''|_\infty + |f''(m))$

$\leq \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2||f''||_\infty + 2m||f'''||_\infty)$

$\leq \frac{1}{|k|^3(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2m + 2m||f'''||_\infty),\ (m > ||f''||_\infty$

$= \frac{Cm}{|k|^3}$

where $C = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2 + 2||f'''||_\infty)$

□

引理 0.8. 设 $f \in C^3(\mathcal{R})$，其中 f 和 $\frac{df}{dx}$ 是非振荡的且非常缓慢衰减，并且 $\{f, f', f'', f'''\}$ 有界，则 $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathcal{R})$，并且我们有：

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$$

其中，对于 $g \in L^1(\mathcal{R})$;

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

证明。由引理 0.2，存在 $C \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对于充分大的 k，有 $|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{C}{|k|^2}$，$(*)$。由于 f 非常缓慢衰减，对于 $|x| > 1$，有 $|f|^2 \leq \frac{D}{|x|^2}$，因此，由于 $f \in C^0(\mathcal{R})$，可得$f \in L^2(\mathcal{R})$。于是 $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathcal{R})$，且对于任意 $n \in \mathcal{N}$，有 $\mathcal{F}(f)|_{[-n,n]} \in L^1(\mathcal{R})$，$(**)$。结合 $(*)$、$(**)$，得到 $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathcal{R})$。令 $\{f_m : m \in \mathcal{N}\}$ 为引理 0.7 给出的逼近序列，则由于 $f_m \in L^1(\mathcal{R})$，$\mathcal{F}(f_m)$ 连续，并且由引理 0.4，它在 $\mathcal{R} \setminus \{0\}$ 上一致收敛到 $\mathcal{F}(f)$。于是 $\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathcal{R} \setminus \{0\})$。由于 $f_m \in C^2(\mathcal{R})$ 和 $f_m'' \in L^1(\mathcal{R})$，存在常数 $D_m \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对于充分大的 k，有 $|\mathcal{F}(f_m)(k) \leq \frac{D_m}{|k|^2}$。此外，由于 $x^n f_m(x) \in L^1(\mathcal{R})$，对于 $n \in \mathcal{N}$，$\mathcal{F}(f_m) \in C^\infty(\mathcal{R})$。因此，傅里叶反演定理 $f_m = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))$，$(***)$，对每个 f_m 都成立，证明见 [6]。由引理 0.4，对于$k_0 > 0$，有 $|\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k)| \leq \frac{E_{k_0}}{m}$，其中 $|k| > k_0$。由于 f 非常缓慢衰减，有 $f - f_m \in L^2(\mathcal{R})$，且$||f - f_m||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$，当 $m \to \infty$时，$||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$；特别地，对于充分大的 m，有 $||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^2(\mathcal{R})} \leq 1$。于是，对于 $\epsilon > 0$，我们有：

$$\begin{aligned}
&||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^1((-\epsilon,\epsilon)} \\
&=< |\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)|, 1_{(-\epsilon,\epsilon)} >_{L^2((-\epsilon,\epsilon))} \\
&\leq ||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^2((-\epsilon,\epsilon))} ||1_{(-\epsilon,\epsilon)}||_{L^2((-\epsilon,\epsilon))} \\
&= \sqrt{2}\epsilon^{\frac{1}{2}} ||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^2((-\epsilon,\epsilon))} \\
&\leq \sqrt{2}\epsilon^{\frac{1}{2}} \ (A)
\end{aligned}$$

对于充分大的 m。由于 f 是振荡的且非常缓慢衰减， f 在区间 $(-\infty,-E)$ 和 (E,∞) 上单调；并且对于 $|k|>\epsilon$， $m>max(E,1)$ 在区间 $(-\infty,-m)$ 和 (m,∞) 上单调，其中 $|f|_{(-\infty,-m)}|\leq\frac{C}{m}$, $|f|_{(m,\infty)}|\leq\frac{C}{m}$, 某个$C\in\mathcal{R}_{>0}$。然后，利用交错级数判别法的证明，见 [1]；

$$|\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(m)(k)|=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|lim_{r\to\infty}\int_{m<|x|<r}f(x)e^{-ikx}dx|$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|lim_{r\to\infty}\int_{m<|x|<r}f(x)cos(kx)dx|+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|lim_{r\to\infty}\int_{m<|x|<r}f(x)sin(kx)dx|$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|\int_{m}^{\frac{\pi(n_k+\frac{1}{2})}{|k|}}f(x)cos(kx)dx+\int_{-\frac{\pi(n_k+\frac{1}{2})}{|k|}}^{-m}f(x)cos(kx)dx+\int_{m}^{\frac{m_k\pi}{|k|}}f(x)sin(kx)dx$$

$$+\int_{-\frac{m_k\pi}{|k|}}^{-m}f(x)sin(kx)dx+lim_{r\to\infty}\int_{\frac{\pi(n_k+\frac{1}{2})}{|k|}<|x|<r}f(x)cos(kx)dx$$

$$+lim_{r\to\infty}\int_{\frac{m_k\pi}{|k|}<|x|<r}f(x)sin(kx)dx|$$

$$\leq\frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{C}{m}\frac{\pi}{|k|}+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|lim_{r\to\infty}\int_{\frac{\pi(n_k+\frac{1}{2})}{|k|}<|x|<r}f(x)cos(|k|x)dx|$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|lim_{r\to\infty}\int_{\frac{m_k\pi}{|k|}<|x|<r}f(x)sin(|k|x)dx|$$

$$\leq\frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{C}{m}\frac{\pi}{k_0}+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|\int_{\frac{\pi(n_k+\frac{1}{2})}{|k|}}^{\frac{\pi(n_k+\frac{3}{2})}{|k|}}f(x)cos(|k|x)dx|+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|\int_{\frac{m_k\pi}{|k|}}^{\frac{(m_k+1)\pi}{|k|}}f(x)sin(|k|x)dx|$$

$$\leq\frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{C}{m}\frac{\pi}{k_0}+\frac{4}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{C}{m}\frac{\pi}{k_0}$$

$$=\frac{8\pi^{\frac{1}{2}}C}{2^{\frac{1}{2}}k_0m}=\frac{E_{k_0}}{m}\ (B)$$

其中 $n_k=\mu n(n\in\mathcal{Z}_{>0},\frac{\pi}{(n+\frac{1}{2})|k|}\geq m)$， $m_k=\mu n(n\in\mathcal{Z}_{>0},\frac{\pi n}{|k|}\geq m)$。那么，对于 $n\in\mathcal{N},m\in\mathcal{N}$，当 $m=n^{\frac{3}{2}}$ 时，利用引理 0.7 以及 (A)、(B)，我们得到，对于 $x\in\mathcal{R}$，有；

$$|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)-\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x)|=|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k))|$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|\int_{-n}^{n}(\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k))e^{ikx}dk+\int_{|k|>n}(\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k))e^{ikx}dk|$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(\int_{-n}^{n}|\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k)|dk+\int_{|k|>n}|\mathcal{F}(f)(k)|dk+\int_{|k|>n}|\mathcal{F}(f_m)(k)|dk)$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(\int_{-\epsilon}^{\epsilon}|\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k)|dk+\frac{2nE_\epsilon}{m}+\int_{|k|>n}\frac{C}{|k|^2}dk+\int_{|k|>n}\frac{Cm}{|k|^3}dk)$$

$$\leq\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(\sqrt{2}\epsilon^{\frac{1}{2}}+\frac{2nE_\epsilon}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{2C}{n}+\frac{Cn^{\frac{3}{2}}}{n^2})$$

$< 2\epsilon^{\frac{1}{2}}$

当 n 充分大时，因此，由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，对于 $x \in \mathcal{R}$；

$lim_{m\to\infty}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x), (***)$

并且，根据定义 0.3，$(***)$、$(****)$；

$f(x) = lim_{m\to\infty} f_m(x) = lim_{m\to\infty}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x)$

□

评注 0.9。前一个引理证明了一个适用于非常缓慢衰减的非振荡函数的反演定理。这类函数属于 $L^2(\mathcal{R})$，而关于傅里叶级数的类似结果见 $[2],$ ，其中证明的是几乎处处收敛，而非处处收敛。相应的变换结果为；

$If\ f \in L^p(\mathcal{R}),\ p \in (1, 2],\ then;$

$f(x) = lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|k|\leq R}\mathcal{F}(f)(k)e^{ixk}dk$

对于几乎处处的 $x \in \mathcal{R}$。

当 $f \in L^1(\mathcal{R})$ 时，我们可以使用通常的傅里叶变换方法定义函数 $\mathcal{F}_1(f)(k)$，其中 $k \in \mathcal{R}$，参见 $[10],$ ；此外，当 f 是非常缓慢衰减且非振荡的函数时，我们可以使用极限定义函数 $\mathcal{F}_2(f)(k)$，其中 $k \in \mathcal{R}_{\neq 0}$；这是 $f \in L^2(\mathcal{R})$ 的一个特例。然而，算子 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 不一定可交换，因此，即使我们证明了 $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 = Id$，也不一定能推出 $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = Id$。从某种意义上说，第一个断言已在 $[4]$ 中得到证明；

若对所有 $k \neq 0$ 和 $A \in \mathcal{R}_{\geq 0}$，$f \in L^1(\mathcal{R}) \cap C^0(\mathcal{R})$ 且 $|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{A}{|k|}$，则；

$f(x) = lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{|k|\leq R}\mathcal{F}(f)(k)e^{ixk}dk$

对每个 $x \in \mathcal{R}$ 均成立。

定义 0.10. 我们称 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 在无穷远处解析，如果$f(\frac{1}{x})$ 对于 $|x| < \epsilon$，$\epsilon > 0$有收敛幂级数展开。我们称 f 最终单调，如果存在 $y_0 \in \mathcal{R}_{>0}$ 使得

$f|_{(-\infty,-y_0)}$ 和 $f|_{(y_0,\infty)}$ 是单调的。

注 0.11. 在物理学中，无穷远处解析且非常缓慢衰减的函数类十分重要。如果相应的电荷和电流（$\rho, \overline{J}$）光滑且具有紧支撑，则可以证明，由杰菲缅科方程生成的因果场各分量具有这一性质。

以下引理给出了判定函数是否为非振荡函数或最终单调函数的一个准则；

引理 0.12. 若 $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, f \neq 0$ 是解析且无穷远处解析的，则其零点有限。若 $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \frac{df}{dx}$ 是解析且无穷远处解析的，并且 $f \neq c$，其中 $c \in \mathcal{R}$，则 f 是非振荡的。若 $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, f$ 在 $|x| > a$ 上解析，其中 $a \in \mathcal{R}_{\geq 0}$，且无穷远处解析，并且 $f|_{|x|>a} \neq 0$，则 f 在区域 $|x| > a+1$ 内有有限个零点。若 $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, \frac{df}{dx}$ 在 $|x| > a$ 上解析、无穷远处解析，并且 $f|_{|x|>a} \neq c$，其中 $c \in \mathcal{R}$，则 f 最终单调。

证明。对于第一个断言，假设 f 有无穷多个零点。那么我们可以找到一个序列 $\{y_i; i \in \mathcal{N}\}$，满足 $f(y_i) = 0$。如果该序列有界，那么根据博尔查诺–魏尔斯特拉斯定理，我们可以找到一个子序列 $\{y_{i_k}; k \in \mathcal{N}\}$，满足 $f(y_{i_k}) = 0$，且收敛到 $y \in \mathcal{R}$。由连续性可知，$f(y) = 0$，并且 y 是零点的一个聚点。由于 f 是解析函数，根据恒等定理，它必定恒等于零，这与假设矛盾。如果该序列无界，那么我们可以找到一个子序列 $\{y_{i_k}; k \in \mathcal{N}\}$，满足 $f(y_{i_k}) = 0$，并且$lim_{k\to\infty} y_{i_k} = \infty$ 或 $lim_{k\to\infty} y_{i_k} = -\infty$。由于 f 在 ∞处解析，我们可以找到 $\epsilon > 0$，使得当 $|y| > \frac{1}{\epsilon}$时，$f(y) = 0$。再次根据恒等定理，f 恒等于零，这与假设矛盾。因此，f 只有有限多个零点。对于第二个断言，由于 $\frac{df}{dx} \neq 0$，根据第一部分，存在有限多个点 $\{y_1, \ldots, y_n\}$，满足当 $1 \leq i \leq n$时有 $\frac{df}{dx}|_{y_i} = 0$，且当 $1 \leq i \leq n-1$时有 $y_i < y_{i+1}$。特别地，我们有 $f|_{(-\infty,y_1)}$、$f|_{(y_n,\infty)}$ 和 $f|_{(y_i,y_{i+1})}$ 在$1 \leq i \leq n-1$上单调，因此 f是非振荡的。对于第三个断言，假设 f在区域 $|x| > a+1$内有无穷多个零点，那么我们可以找到一个序列 $\{y_i; i \in \mathcal{N}\}$，满足 $f(y_i) = 0$且 $|y_i > a+1$。如上所述，如果该序列有界，我们可以找到一个子序列$\{y_{i_k}; k \in \mathcal{N}\}$，满足 $f(y_{i_k}) = 0$，且收敛到 $y \in \mathcal{R}$，其中 $|y| \geq a+1 > a$。由于 f在 $|x| > a$内解析，根据恒等定理，它必定在区域 $|x| > a$内恒等于零，这与假设矛盾。如果该序列无界，根据上述相同的论证，f 必定恒等于

零于区域 $|x| > a$内，这与假设矛盾。因此，f 在区域 $|x| > a + 1$内只有有限多个零点。对于第四个断言，由于 $\frac{df}{dx}|_{|x|>a} \neq 0$，根据第一部分，存在有限多个点$\{y_1, \ldots, y_n\}$，满足$\frac{df}{dx}|_{y_i} = 0$和 $|y_i| > a + 1$，当 $1 \leq i \leq n$时。取 $y_0 > max_{1\leq i\leq n}(|y_i|)$，则 $\frac{df}{dx}|_{|x|>y_0} \neq 0$，使得 $f|_{|x|>y_0}$单调。

□

引理 0.13. 若 $f \in C^0(\mathcal{R})$ 且 f 非常缓慢衰减，则通过以下方式定义傅里叶变换；

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(y)e^{-iky}dy$$

我们有，$\mathcal{F}(f)(k)$ 定义了一个函数 $\mathcal{F}(f)(k) \in L^2(\mathcal{R})$，其中$||\mathcal{F}(f)||_{L^2(\mathcal{R})} = ||f||_{L^2(\mathcal{R})}$。存在一个序列 $\{r_n\colon n \in \mathcal{N}\}$，满足$r_n \in \mathcal{R}_{>0}$，使得；

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{n\to\infty} \int_{-r_n}^{r_n} f(y)e^{-iky}dy$$

几乎处处收敛。

证明。根据假设，我们有 $f \in L^2(\mathcal{R})$，且若 $f_r = f\chi_{(-r,r)}$，其中 $\chi_{(=r,r)}$ 是区间 $(-r, r)$ 上的示性函数，则 $f_r \in L^1(\mathcal{R}) \cap L^2(\mathcal{R})$ 且 $||f - f_r||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$，因为 $r \to \infty$，特别是序列$\{f_r\colon r \in \mathcal{R}\}$ 是柯西序列。根据 [3], 中的一个结果，通常的傅里叶变换 $\mathcal{F}\colon L^1(\mathcal{R}) \cap L^2(\mathcal{R}) \to L^2(\mathcal{R})$ 是等距映射，因此序列 $\{\mathcal{F}(f_r)\colon r \in \mathcal{R}\}$ 也是柯西序列。由$L^2(\mathcal{R})$ 的完备性，存在 $g \in L^2(\mathcal{R})$，使得 $||g - \mathcal{F}(f_r)||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$，因为$r \to \infty$。我们有；

$$||\mathcal{F}(f)(k)||_{L^2(\mathcal{R})} = ||lim_{r\to\infty}\mathcal{F}(f_r)||_{L^2(\mathcal{R})}$$

$$= lim_{r\to\infty}||\mathcal{F}(f_r)||_{L^2(\mathcal{R})}$$

$$= lim_{r\to\infty}||f_r||_{L^2(\mathcal{R})}$$

$$= ||lim_{r\to\infty}f_r||_{L^2(\mathcal{R})}$$

$$= ||f||_{L^2(\mathcal{R})}$$

最后，根据 [5], 如果我们选择 $r_n \in \mathcal{R}_{>0}$ 使得 $||f - f_{r_n}||_{L^2(\mathcal{R})} \leq 2^{-n}$，那么 $||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_{r_n})||_{L^2(\mathcal{R})} \leq 2^{-n}$并且 $|\mathcal{F}(f_{r_n})(k) -$

非振荡函　　数及某些函数的傅里叶反演定理，这些函数具有

$\mathcal{F}(f)(k)| \to 0$几乎处处。

□

备注 0.14。我们用 $\mathcal{F}(f)(k)$ 表示这个几乎处处极限。

引理 0.15。设 $f \in C^2(\mathcal{R})$ 和 $\{f, \frac{df}{dx}\} \subset C(\mathcal{R})$ 具有非常中等衰减，且 $\frac{d^2f}{dx^2}$ 具有中等衰减，则存在一个常数$G \in \mathcal{R}_{>0}$，使得；

$$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{G}{|k|^2}$$

对 $|k| > 1$。特别地， $\mathcal{F}(f)(k) \in L^1(\mathcal{R})$ 对所有 $k \neq 0$ 都有定义。

设 $f \in C^1(\mathcal{R})$ 具有非常缓慢衰减，且 $\frac{df}{dx}$ 具有非常缓慢衰减并且是振荡的，则存在一个常数 $G \in \mathcal{R}_{>0}$，使得：

$$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{G}{|k|^2}$$

当 $|k|$ 充分大时。特别地， $\mathcal{F}(f)(k) \in L^1(\mathcal{R})$ 对于 $k \neq 0$ 有定义。

证明。我们有 $\frac{d^2f}{dx^2} \in L^1(\mathcal{R})$，并且：

$$|\mathcal{F}(\frac{d^2f}{dx^2})(k)| = |\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2f}{dx^2}(y)e^{-iky}dy|$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{d^2f}{dx^2}(y)e^{-iky}|dy$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{d^2f}{dx^2}(y)|dy$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} ||\frac{d^2f}{dx^2}||_{L^1(\mathcal{R})}$$

$$\leq G$$

其中 $G \in \mathcal{R}_{>0}$。然后，利用分部积分和控制收敛定理，对于 $k \neq 0$, 我们有：

$$\mathcal{F}(\frac{d^2f}{dx^2})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{d^2f}{dx^2}(y)e^{-iky}dy$$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}([\frac{df}{dx}(y)e^{-iky}]_{-r}^{r} + ik\int_{-r}^{r}\frac{df}{dx}(y)e^{-iky}dy)$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}[\frac{df}{dx}e^{-iky}]_{-\infty}^{\infty} + ik\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{df}{dx}e^{-iky}dy$

$= \frac{ik}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{df}{dx}e^{-iky}dy$

$= \frac{ik}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(lim_{r\to\infty}([f(y)e^{-iky}]_{-r}^{r} + ik\int_{-r}^{r}f(y)e^{-iky}dy))$

$= -k^2(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}f(y)e^{-iky}dy$

$= -k^2\mathcal{F}(f)(k)$

计算表明， $\mathcal{F}(f)(k)$ 和 $\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)$ 在$k \neq 0$时有定义，并且对于 $|k| > 1$;

$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{|\mathcal{F}(\frac{d^2f}{dx^2})(k)|}{|k|^2}$

$\leq \frac{G}{|k|^2}$

我们有 $\mathcal{F}(f)(k) \in L^2(\mathcal{R})$，因此 $\mathcal{F}(f)|_{(-1,1)}(k) \in L^2(\mathcal{R}) \subset L^1(\mathcal{R})$, 并且 $\mathcal{F}(f)(k) \in L^1(\mathcal{R})$

.

对于第二个断言，我们有 $\frac{df}{dx} \in L^1(\mathcal{R})$，同上可得 $|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)| \leq H$，其中 $H \in \mathcal{R}_{>0}$ 和 $k \in \mathcal{R}$。对 $k \neq 0$ 使用控制收敛定理;

$\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{df}{dx}(y)e^{-iky}dy$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}([f(y)e^{-iky}]_{-r}^{r} + ik\int_{-r}^{r}f(y)e^{-iky}dy)$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}[f(y)e^{-iky}]_{-\infty}^{\infty} + ik\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}f(y)e^{-iky}dy$

$= \frac{ik}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}f(y)e^{-iky}dy$

$= ik\mathcal{F}(f)(k)$

这表明 $\mathcal{F}(f)(k)$ 对于 $k \neq 0$ 有定义，且对于 $|k| > 1$;

$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)|}{|k|}$ $(*)$

$\leq \frac{H}{|k|}$

我们有，$\frac{df}{dx}|_{(-1,1)}$ 是非振荡的，而且至多有 $\frac{2}{\delta}$ 个单调区间。利用 [7], 中的证明，对于充分大的 $|k|$，可得；

$|\int_{-1}^{1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy| < \frac{E_1}{|k|}$

其中$E_1 \leq \frac{4C\pi}{\delta}$且 $C = max_{x\in\mathcal{R}}|\frac{df}{dx}|$。由于 $\frac{df}{dx}$是中等衰减的，对于 $|x| > 1$，有$|\frac{df}{dx}| \leq \frac{D}{|x|^2}$，其中 $D \in \mathcal{R}_{>0}$。然后再次利用 [7] 中的证明，并根据振荡的定义，对于充分大的 $|k|$，可得；

$|\int_{|y|>1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy| < (\frac{2\pi}{|k|} \sum_{|y_i|>1} \frac{D}{|y_i|^2})$

$\leq (\frac{4\pi}{|k|} \sum_{n\in\mathcal{Z}_{\geq 0}} \frac{D}{(y_{i_0}+n\delta)^2})$

$\leq \frac{4\pi D}{\delta|k|} \int_{y_{i_0}}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

$= \frac{4\pi D}{\delta|k|y_{i_0}}$

$\leq \frac{4\pi D}{\delta|k|}$

其中 $|y_{i_0}| \geq 1$ 且 $|y_{i_0}| \leq |y_i|$，对所有 $|y_i| \geq N$均成立。由此可得；

$|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)| = |\int_{-1}^{1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy + \int_{|y|>1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy|$

$\leq |\int_{-1}^{1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy| + |\int_{|y|>1} \frac{df}{dx} e^{-iky} dy|$

$\leq \frac{E_1}{|k|} + \frac{4\pi D}{\delta|k|}$

$\leq \frac{4C\pi}{\delta|k|} + \frac{4\pi D}{\delta|k|}$

$= \frac{R}{|k|}$ $(**)$

其中 $R = \frac{4\pi}{(C+D)\ \delta}$。结合（$*$）和（$**$），我们得到：对于充分大的 $|k|$;

$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{|\mathcal{F}(\frac{df}{dx})(k)|}{|k|}$

$\leq \frac{G}{|k|^2}$

其中 $G = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} R$

□

引理 0.16. 设 $f \in C^3(\mathcal{R})$，其中 $\{f, \frac{df}{dx}\}$ 非常缓慢衰减，$\frac{d^2 f}{dx^2}$非常缓慢衰减，且 $\{f, f', f'', f'''\}$有界，则$\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathcal{R})$，并且有；

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)$$

其中，对于 $g \in L^1(\mathcal{R})$;

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

若 $f \in C^3(\mathcal{R})$，且 f 非常缓慢衰减，$\frac{df}{dx}$非常缓慢衰减且振荡，$\{f, f', f'', f'''\}$有界，则同样的结论成立。

证明。根据引理 0.15，存在 $E \in \mathcal{R}_{>0}$，使得$|\mathcal{F}(f)(k)| \leq \frac{E}{|k|^2}$，对充分大的 k，$(*)$。由于 f 的衰减非常缓慢，对于 $|x| > 1$，有 $|f|^2 \leq \frac{D}{|x|^2}$，因此，由于$f \in C^0(\mathcal{R})$，我们有 $f \in L^2(\mathcal{R})$。由此可得 $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathcal{R})$，且对任意 $n \in \mathcal{N}$，有 $\mathcal{F}(f)|_{[-n,n]} \in L^1(\mathcal{R})$，$(**)$。结合 $(*)$、$(**)$，可得 $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathcal{R})$。令 $\{f_m \colon m \in \mathcal{N}\}$ 为引理 0.7 给出的逼近序列，则由于 $f_m \in L^1(\mathcal{R})$，$\mathcal{F}(f_m)$ 连续。由于 $f_m \in C^2(\mathcal{R})$ 且 $f_m'' \in L^1(\mathcal{R})$，存在常数 $D_m \in \mathcal{R}_{>0}$，使得对充分大的k，$|\mathcal{F}(f_m)(k) \leq \frac{D_m}{|k|^2}$。此外，由于 $x^n f_m(x) \in L^1(\mathcal{R})$，对于 $n \in \mathcal{N}$，$\mathcal{F}(f_m) \in C^\infty(\mathcal{R})$。由此可知，对每个 f_m，傅里叶反演定理 $f_m = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))$，$(***)$，均成立，证明见 [6]。由于 f 的衰减非常缓慢，我们有，$f - f_m \in L^2(\mathcal{R})$ 且$||f - f_m||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$，$||\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f_m)||_{L^2(\mathcal{R})} \to 0$，当 $m \to \infty$时成立。于是，对 $n \in \mathcal{N}$，我们有 $m \in \mathcal{N}$;

$$|\int_{-n}^{n} (\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k)) dk|$$

$$\leq (2n)^{\frac{1}{2}} ||\mathcal{F}(f - f_m)||_L^2$$

$$\leq (2n)^{\frac{1}{2}} ||f - f_m||_{L^2}$$

$= (2n)^{\frac{1}{2}}(\int_{|x|>m} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$

$\leq (2n)^{\frac{1}{2}}(\int_{|x|>m}(\frac{D^2}{x^2})(x)dx)^{\frac{1}{2}}$

$= (2n)^{\frac{1}{2}}(\frac{2D^2}{m})^{\frac{1}{2}}$

$= 2D\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}\ (A)$

其中 $D \in \mathcal{R}_{>0\infty}$ 那么，对于 $n \in \mathcal{N}$、 $m \in \mathcal{N}$，在 $m = [n^{\frac{3}{2}}]$ 的条件下，利用引理 0.7 和 (A)，可得对于 $x \in \mathcal{R}$，有；

$|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) - \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x)| = |\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)(k) - \mathcal{F}(f_m)(k))|$

$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}|\int_{-n}^{n}(\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k))e^{ikx}dk+\int_{|k|>n}(\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k))e^{ikx}dk|$

$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(|\int_{-n}^{n}|\mathcal{F}(f)(k)-\mathcal{F}(f_m)(k)|dk|+\int_{|k|>n}|\mathcal{F}(f)(k)|dk+\int_{|k|>n}|\mathcal{F}(f_m)(k)|dk)$

$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2D\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} + \int_{|k|>n}\frac{E}{|k|^2}dk + \int_{|k|>n}\frac{Cm}{|k|^3}dk)$

$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2D\frac{n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}} + \frac{2E}{n} + \frac{Cn^{\frac{3}{2}}}{n^2})$

$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}(2D(\frac{n}{[n^{\frac{3}{2}}]})^{\frac{1}{2}} + \frac{2E}{n} + \frac{Cn^{\frac{3}{2}}}{n^2})$

$< \epsilon$

对充分大的 n，因此，由于 $\epsilon > 0$ 是任意的，对 $x \in \mathcal{R}$；

$lim_{m\to\infty}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x),\ (***)$

并且，根据定义 0.3，$(***)$、$(****)$；

$f(x) = lim_{m\to\infty}f_m(x) = lim_{m\to\infty}\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f_m))(x) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f)(x)$

□

References

[1] 《实分析导论》，R. Bartle 和 D. Sherbert，Wiley，（1982）。

[2] 关于傅里叶级数部分和的收敛与增长，L. Carlsen，《数学学报》，116 (1): 135–157，（1966）。

[3] 傅里叶变换讲义，W. Faris，亚利桑那大学数学系，（2008）[4] 傅里叶分析，T. Korner，剑桥大学出版社，（1988）[5] 数学 Stack Exchange，https://math.stackexchange.com/questions/138043/doe

s-

Lp 收敛蕴含几乎处处收敛，（2022）[6] 利用非标准分析证明傅里叶反演定理的一个简单证明，Tristram de Piro，可见 http://www.curvalinea.net（19），（2013）[7] 利用非标准分析证明黎曼-勒贝格引理的简单证明，Tristram de Piro，可见 http://www.curvalinea.net（51），（2019）[8]量子理论中波动方程的一些论证，Tris- tram de Piro，《开放数学科学期刊》，可见 http://www.curvalinea.net（58），（2021）[9] 量子理论中波动方程的一些论证 4，Tristram de Piro，可见 http://www.curvalinea.net（64），（2023），进行中。[10]《傅里叶分析导论》，E. Stein 和 R. Sakarchi，普林斯顿数学讲座，（2003）。

Flat 3, Redesdale House, 85 The Park, Cheltenham, GL50 2RP电子邮箱：t.depiro@curvalinea.net