arXiv:2301.07146v1 [math.CA] 17 Jan 2023

# 振荡理论与非线性波的不稳定性

Peter Howard

德克萨斯农工大学

2023年1月19日

摘要

在近期的研究中，Baird等人提出了一种广义Maslov指标，使此前仅适用于具有底层哈密顿结构的特征值问题的振荡方法得以扩展到非哈密顿情形 [T. J. Baird、P. Cornwell、G. Cox、C. Jones 和 R. Marangell，《非哈密顿系统的广义马斯洛夫指标》，SIAM J. Math. Anal. 54 (2022) 1623-1668]。我们证明，这种方法可用于分析非线性波的谱不稳定性；我们采用的方程类别此前曾由 Pego 和 Weinstein 使用 Evans函数进行研究 [R. L. Pego 和 M. I. Weinstein，《孤立波的特征值与不稳定性》，Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 340 (1992) 47-94]。

## 1 引言

对于实开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 中的 $\lambda$ 值，我们考虑一阶常微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = A(x;\lambda)y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(x;\lambda) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \{2,3,\dots\}, \tag{1.1}$$

我们采用以下假设，改编自 [33]:

(A) 假设存在某个包含 $I$的开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，使得 $A \in C(\mathbb{R} \times \Omega\ \mathbb{C}^{n\times n})$，其中对所有$(x,\lambda) \in \mathbb{R} \times I$，均有 $A(x;\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}$，并且对每个 $x \in \mathbb{R}$，映射 $\lambda \mapsto A(x;\lambda)$ 在 $\Omega$ 上解析。

(B) 对每个 $\lambda \in \Omega$，极限

$$A_{\pm}(\lambda) := \lim_{x\to\pm\infty} A(x;\lambda)$$

存在，且在 $\Omega$ 的紧子集上一致地得到。

2020年数学学科分类：34C10、34L15

(C) 对每个 $\lambda \in \Omega$，矩阵 $A_\pm(\lambda)$ 都有一个唯一的（因此对$\lambda \in I$必为实数的）实部最大的特征值，且该特征值是单特征值。我们将此特征值记为 $\mu_\pm(\lambda)$，并将 $A_\pm(\lambda)$ 的其他特征值中最大的实部记为 $\mu_\pm^*(\lambda)$，因此

$$\operatorname{Re}\mu_\pm(\lambda) > \mu_\pm^*(\lambda) := \max\{\operatorname{Re}\nu : \nu \neq \mu_\pm(\lambda),\ \nu \in \sigma(A_\pm(\lambda))\}.$$

此外，$\mu_\pm(\lambda)$ 在 $\Omega$ 上是解析的，并且存在 $A_\pm(\lambda)$的解析（在 $\Omega$ 内）左、右特征向量选取，使其满足

$$(A_\pm(\lambda) - \mu_\pm(\lambda)I)v^\pm(\lambda) = 0, \quad w^\pm(\lambda)(A_\pm(\lambda) - \mu_\pm(\lambda)I) = 0, \quad w^\pm(\lambda)v^\pm(\lambda) = 1.$$

(D) 函数

$$E(x;\lambda) := \begin{cases} A(x;\lambda) - A_-(\lambda) & x < 0 \\ A(x;\lambda) - A_+(\lambda) & x > 0 \end{cases}$$

满足以下两个条件：(i) 对所有 $\lambda \in \Omega$，$\int_{\mathbb{R}} |E(x;\lambda)|dx$ 均有限；(ii) 该积分在 $\Omega$ 的紧子集上一致收敛。

与 [33], 一样，我们的分析主要源于对单个高阶非线性演化偏微分方程背景下出现的行波解 $\bar{u}(x - st)$ 稳定性的考察，

$$u_t + g(u) + f(u)_x = \sum_{k=2}^{n} (b_k(u)\partial_x^{k-1}u)_x, \quad n \in \{2, 3, \dots\}. \tag{1.2}$$

将 $f$ 替换为 $f - su$后，我们可以将这类解视为同一方程的定常解 $\bar{u}(x)$；经过线性化（其中 $u = \bar{u} + v$），可得

$$v_t + a_0(x)v + (a_1(x)v)_x = \sum_{k=2}^{n} (a_k(x)\partial_x^{k-1}v)_x, \tag{1.3}$$

with

$$a_0(x) = g'(\bar{u}(x)), \quad a_1(x) = f'(\bar{u}(x)) - \sum_{k=2}^{n} b_k{}'(\bar{u}(x))\partial_x^{k-1}\bar{u}(x),$$

and

$$a_k(x) = b_k(\bar{u}(x)), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

相应的特征值问题可表示为

$$L\phi := -\sum_{k=2}^{n} (a_k(x)\phi^{(k-1)})' + (a_1(x)\phi)' + a_0(x)\phi = \lambda\phi,$$

其中，我们采用的符号约定与以下情形一致：当 (1.2) 为二阶方程时，负号对应正算子。现在，我们将 (1) 表示为一阶系统 $y = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)^T$, $y_k = \phi^{(k-1)}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $y_n = a_n(x)\phi^{(n-1)}$，由此得到 (1.1)。第 6 节讨论的应用中会考察由此得到的具体矩阵。

在假设 (C) 下，存在一个 (1.1) 的一维解子空间，其中的解以最大指数速率 $e^{\mu_-(\lambda)x}$ 衰减，当 $x$ 趋于 $-\infty$ 时；同样，也存在一个 (1.1) 的 $(n-1)$ 维解子空间，其中的解在 $x$ 趋于 $+\infty$ 时不会以最大速率 $e^{\mu_+(\lambda)x}$ 增长。沿用 [33], ，我们的目标是确定使得存在解 $y(\cdot;\lambda) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ 属于这两个空间交集的值 $\lambda \in I$ 。虽然在整个分析过程中我们都将这些值称为特征值，但需要指出的是，只有当 $\mu_-(\lambda)$ 严格为正且是 $A_-(\lambda)$ 的唯一正特征值，并且 $\mu_+(\lambda)$ 非负且是 $A_+(\lambda)$ 的唯一非负实部特征值时，这些值才是“真正意义上”的特征值。按照通常的做法，若 $\lambda$ 是 (1.1) 的特征值，我们将所有对应解所构成空间的维数称为 $\lambda$ 的几何重数。我们的主要目标是证明，振荡理论可用于给出 (1.1) 在给定区间 $[\lambda_1,\lambda_2] \subset I$, $\lambda_1 < \lambda_2$ 上特征值 $\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1,\lambda_2])$ 数量的下界，计数时不考虑重数。由于我们对 $A(x;\lambda)$ 关于 $\lambda$ 的依赖关系所作的假设相对较弱，按上述定义的 (1.1) 的特征值在区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上可能不构成离散集。此时，按照我们的约定，取 $\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1,\lambda_2]) = +\infty$，并将关于 $\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1,\lambda_2])$ 的下界视为依约定成立。我们将看到，在许多情况下，可以将值 $\lambda_1$ 取为足够大的负数，使得 (1.1) 在 $\lambda_1$ 以下没有特征值；在这种情况下，我们常写作 $\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1,\lambda_2]) = \mathcal{N}_{\#}((-\infty,\lambda_2])$，以强调这表示对 (1.1) 在 $\lambda_2$ 处及以下的特征值数量进行计数。在稳定性分析中，我们最感兴趣的是取 $\lambda_2 = 0$ （因为按照我们的符号约定，负特征值对应不稳定性），因此我们最关注的计数是 $\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0])$。

在 [33], 中，作者通过埃文斯函数探讨了一个密切相关的问题，即确定在什么条件下，将 $\lambda_2 = 0$ 处埃文斯函数的取值及其适当阶导数，与 $\lambda$ 趋于 $-\infty$ 时的渐近信息结合起来，能够表明开半直线 $(-\infty, 0)$ 上至少存在一个特征值。我们的分析将 [33] 中的结果置于更广泛的背景下，并为此类特征值的存在性增添了一个几何判据。

我们在分析中主要使用的工具，是 [2], 中引入的 Maslov 指标的一种推广。就本引言而言，我们先对这一对象作简要而直观的讨论（更多细节见第 2 节，完整论述参见 [2] ）。具体来说，我们关注 [2]第 3.2 节所讨论的超平面情形。

首先，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 表示由所有 $\mathbb{R}^{2n}$中的 $n$维子空间构成的格拉斯曼流形，并用 $\mathcal{g}$ 表示 $Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 中的一个元素。空间 $\mathcal{g}$ 可由 $\mathbb{R}^{2n}$中的 $n$ 个线性无关向量张成；通常，我们将这些 $n$ 个向量作为列收集到一个 $2n \times n$ 矩阵 $\mathsf{G}$ 中，并称其为 $\mathcal{g}$ 的一个标架。我们通过适当的正交投影来定义 $Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 上的度量。具体而言，令 $\mathcal{P}_i$ 表示到$\mathcal{g}_i \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$上的正交投影矩阵，其中 $i = 1$, 2。也就是说，若 $\mathsf{G}_i$ 表示$\mathcal{g}_i$的一个标架，则 $\mathcal{P}_i = \mathsf{G}_i(\mathsf{G}_i^*\mathsf{G}_i)^{-1}\mathsf{G}_i^*$。我们将 $Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 上的度量 $d$ 定义为

$$d(\mathcal{g}_1,\mathcal{g}_2) := \|\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2\|,$$

其中 $\|\cdot\|$ 可以表示任意矩阵范数。如果格拉斯曼子空间路径$\mathcal{g}: [a,b] \to \Lambda(n)$在度量 $d$下连续，我们就称其为连续。

注记 1.1. 在此处及全文中，我们将尽可能一致地遵循以下记号约定：用$\mathcal{g}$ 或$\mathcal{h}$等花体字母表示格拉斯曼子空间，并分别用 $\{g_i\}_{i=1}^n$ 或$\{h_i\}_{i=1}^n$表示$\mathcal{g}$ 或$\mathcal{h}$ 的一组选定基元素。我们还会将这些基元素汇集成相应的标架，并用粗体大写字母表示，

$$\mathbf{G} = (g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n) \quad or \quad \mathbf{H} = (h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)$$

给定格拉斯曼子空间的连续路径$\mathcal{g}$：$[a,b] \to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 和固定目标空间 $q \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$, [2] 的广义Maslov指标（需满足下文讨论的某些附加条件）提供了一种方法，用于统计子空间$\mathcal{g}(t)$与$q$ 之间的交点，即当 $t$ 从 $a$ 增至 $b$时，按方向计数，但不计重数。（这里的重数指交点的维数；方向将在第 2 节详细讨论。）为了理解其原理，我们先回顾斜对称 $n$线性映射 $\omega$的核的概念。

定义 1.1. 对于斜对称的 $n$线性映射 $\omega$：$\mathbb{R}^{2n} \times \cdots \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$($\mathbb{R}^{2n}$出现$n$ 次)，我们将核 $\ker\omega$定义为 $\mathbb{R}^{2n}$的子集，

$$\ker\omega := \{v \in \mathbb{R}^{2n} : \omega(v, v_1, \ldots, v_{n-1}) = 0, \quad \forall\, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$

给定目标空间$q \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，我们首先确定一个斜对称的 $n$线性映射 $\omega_1$，使得$q = \ker\ \omega_1$。例如，若令$\{q_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ 表示$q$的一组基，则可以设

$$\omega_1(g_1, \ldots, g_n) := \det(g_1\ \ldots\ g_n\ q_1 \ldots q_n),$$

或者，如果我们将元素 $\{g_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{q_i\}_{i=1}^n$ 解释为 1-形式，

$$g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \wedge q_1 \wedge \cdots \wedge q_n = \omega_1(g_1, \ldots, g_n) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}. \tag{1.4}$$

为方便记号，我们通常写作

$$\omega_1(g_1, \ldots, g_n) = g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \wedge q_1 \wedge \cdots \wedge q_n$$

严格来说，我们指的是 (1.4)。

接下来，令 $\omega_2$ 表示任意一个斜对称的 $n$-线性映射，使得 $\ker\ \omega_2 \neq q$，并令

$$\mathcal{H}_{\omega_i} := \{\mathcal{g} \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n}) : \mathcal{g} \cap \ker\omega_i \neq \{0\}\}, \quad i = 1, 2.$$

那么，根据 [2],中的定义 1.3，集合

$$\mathcal{M} := Gr_n(\mathbb{R}^{2n}) \backslash (\mathcal{H}_{\omega_1} \cap \mathcal{H}_{\omega_2}) \tag{1.5}$$

是一个超平面Maslov-Arnold空间。

定义 1.2. 若数值满足以下条件，则称流 $t \mapsto \mathcal{g}(t)$ 关于 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 在 $[a,b]$ 上是不变的：

$$\omega_1(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \quad and \quad \omega_2(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

在任意 $t \in [a,b]$ 处均不同时为零（即，对所有 $t \in [a,b]$, $g(t) \in \mathcal{M}$）。为简便起见，我们称三元组（$g(\cdot)$ $\omega_1$, $\omega_2$）在 $[a,b]$ 上是不变的。（这里注意，在三元组记号中不需要 $q$，因为 $q$ 由 $\omega_1$ 确定。）类似地，若数值满足以下条件，则称映射$g$: $[a,b]\times[c,d]\to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 关于 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上是不变的:

$$\omega_1(g_1(s,t),\dots,g_n(s,t)) \quad and \quad \omega_2(g_1(s,t),\dots,g_n(s,t)) \tag{1.6}$$

在任何 $(s,t)$ 处都不同时为零 $\in [a,b]\times[c,d]$（即，对于所有 $(s,t) \in [a,b]\times[c,d]$, $g(s,t) \in \mathcal{M}$）。为简洁起见，我们称三元组 $(g(\cdot,\cdot)\ \omega_1,\omega_2)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上是不变的。最后，若映射 $g$: $[a,b]\times[c,d]\to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 的边界上的任何点 $(s,t)$ 处，式 (1.6) 中的值都不同时为零，则称该映射关于 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 在边界上是不变的。

注 1.2。“不变”这一术语取自 *[2],*，在那里它自然地表示这样一个条件：与流 $t\mapsto g(t)$ 相关联的路径完全位于 *[2]* 中引入的马斯洛夫–阿诺德空间内；该路径属于 $P(\bigwedge^n(\mathbb{R}^{2n}))$（即楔积空间 $\bigwedge^n(\mathbb{R}^{2n})$ 的所有一维子空间构成的射影空间）。虽然马斯洛夫–阿诺德空间这一概念对于 *[2],* 的发展至关重要，但我们在此仅间接使用它，因此不作精确定义。

若流 $t\mapsto g(t)$ 关于 $[a,b]$ 在 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 下是不变的，则 [2] 的广义Maslov指标可计算为映射在射影空间$\mathbb{R}P^1$ 中的绕数

$$t\mapsto [\omega_1(g_1(t),\dots,g_n(t)) : \omega_2(g_1(t),\dots,g_n(t))] \tag{1.7}$$

经由 $[0:\ 1]$（计数到达和离开时采用适当的约定；见下文第 2 节）。如果马斯洛夫–阿诺德空间是如 (1.5) 所示的超平面Maslov-Arnold空间，则该值称为超平面指标。由于目前的分析将完全处于超平面情形，今后我们将把这类计数称为超平面指标。

依照 $[2,]$的约定，我们用 $\mathrm{Ind}(\cdots)$ 表示超平面指标，不过我们的具体记号改编自 $[25,\ 26],$，写作 $\mathrm{Ind}(g(\cdot), q; [a,b])$；也就是说，$\mathrm{Ind}(g(\cdot), q; [a,b])$ 是一个有向计数，表示当 $t$从 $a$增加到 $b$时，子空间 $g(t)$ 与$q$发生非平凡交集的次数，且不计重数。$\mathrm{Ind}(g(\cdot), q; [a,b])$ 显然取决于 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的选择，但通常我们会在记号中省略这些选择，因为一般而言，从上下文即可明确这些选择。对于 $\omega_1$，我们总是采用 (1.4)，但 $\omega_2$的选择具有相当大的灵活性。在考虑 $\omega_2$ 的两种可能选择时，我们将另一种选择记为 $\omega_3$；为区分由此得到的超平面指标，我们分别记为 $\mathrm{Ind}_{\omega_2}(g(\cdot), q; [a,b])$ 和 $\mathrm{Ind}_{\omega_3}(g(\cdot), q; [a,b])$。

对于许多应用，我们希望计算一对演化空间 $g, h:\ [a,b]\to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 所对应的超平面指标；或者更一般地（如当前情形），计算一对演化空间 $g:\ [a,b]\to Gr_m(\mathbb{R}^n)$ 和 $h:$ $[a,b]\to Gr_{n-m}(\mathbb{R}^n)$ 所对应的超平面指标，其中$m\in\{1,2,\dots,n-1\}$。按照 [19] 第3.5节的方法（该方法针对当前情形的发展见 [23]），我们可以令 $\mathrm{G}(t)$ 和 $\mathrm{H}(t)$ 分别表示标架

对于 $\mathcal{g}(t)$ 和 $\mathcal{h}$ （$t$），并指定一个演化子空间 $\mathcal{f}$：$[a,b] \to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，其标架为 me

$$\mathbf{F}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{G}(t) & \mathbf{0}_{n\times(n-m)} \\ \mathbf{0}_{n\times m} & \mathbf{H}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

随后，我们固定一个目标空间 $\tilde{\Delta} \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，其标架为 $\tilde{\mathbf{\Delta}} = \left(\begin{smallmatrix} -I_n \\ I_n \end{smallmatrix}\right)$，并将对 $\mathcal{g}$、$\mathcal{h}$：
$[a,b] \to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 定义的超平面指标记为

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), \mathcal{h}(\cdot); [a,b]) := \mathrm{Ind}(\mathcal{f}(\cdot), \tilde{\Delta}; [a,b]), \tag{1.9}$$

其中，右侧按照上述说明精确计算（即按照 [2] 中的方式），并且一如既往地取决于对 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的指定选择。

根据（1.4），$\omega_1$ 取为

$$\omega_1(f_1, f_2, \ldots, f_n) := f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \tilde{\delta}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\delta}_n, \tag{1.10}$$

~ ~其中，向量 $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ 构成 $\mathbf{\Delta} = \left(\begin{smallmatrix} -I_n \\ I_n \end{smallmatrix}\right)$ 的各列。为了利用 $\omega_2$ 所带来的额外灵活性，我们首先固定一个（经过精心选择的）可逆 $n \times n$ 矩阵 $M$，并令

$$\omega_2(f_1, f_2, \ldots, f_n) := f_1 \wedge \cdots \wedge f_n \wedge \tilde{\sigma}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\sigma}_n, \tag{1.11}$$

~其中，向量 $\{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1}^n$ 构成 $\mathbf{\Sigma} = \left(\begin{smallmatrix} -M \\ I_n \end{smallmatrix}\right)$ 的各列。

回到 (1.1)，我们将在第 3 节证明，在假设 (A) 至 (D) 下，存在 (1.1) 的唯一解 $\eta^-(x;\lambda)$，使得

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda) = v^-(\lambda), \tag{1.12}$$

其中 $\mu_-(\lambda)$ 和 $v^-(\lambda)$ 如假设 (C) 中所述。我们将以带有标架 $\eta^-(x;\lambda)$ 的格拉斯曼子空间路径表示 $\mathcal{g}(x;\lambda) \in Gr_1(\mathbb{R}^n)$。对于空间 $\mathcal{h}(x;\lambda)$，我们首先注意到，在假设 (A) 至 (D) 下，可以取一组线性无关的 (1.1) 的解 $\{y_i^+(x;\lambda)\}_{i=1}^n$，并按如下方式选取：

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\mu_+(\lambda)x}y_n^+(x;\lambda) = v^+(\lambda), \tag{1.13}$$

其中 $\mu_+(\lambda)$ 和 $v^+(\lambda)$ 如假设 (C) 中所述。以这种方式指定 $y_n^+(x;\lambda)$ 后，我们将 $\mathcal{h}(x;\lambda) \in Gr_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 取为由这组元素 $\{y_i^+(x;\lambda)\}_{i=1}^{n-1}$ 张成的空间。此外，我们通过指定楔积来刻画这个空间

$$\mathcal{Y}^+(x;\lambda) := y_1^+(x;\lambda) \wedge \cdots \wedge y_{n-1}^+(x;\lambda), \tag{1.14}$$

关于这一点，我们将在下面的注记中确立一些通用记号。

注 1.3。在许多情况下，我们会将向量 $v \in \mathbb{R}^n$ 与 $\bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$、$v = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n$ 中相应的元素联系起来；同样，我们也会将向量 $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^n$ 与 $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 中相应的元素联系起来，

$$\mathcal{V}_1e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} + \mathcal{V}_2e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-2} \wedge e_n + \cdots + \mathcal{V}_ne_2 \wedge e_3 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

虽然通常会对向量及其对应的形式使用相同的记号，但我们会始终对 1-形式使用小写字母，对 $(n-1)$-形式使用花体大写字母，以区分这两种情况。在整个分析过程中，我们经常会用到如下关系

$$v \wedge \mathcal{V} = \Big( \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_i \mathcal{V}_{n+1-i} \Big) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n. \tag{1.15}$$

根据 (1.14) 定义的 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$，不难验证

$$\mathcal{Y}^{+\prime}(x;\lambda) = \Big( (\operatorname{tr} A(x;\lambda)) I + \tilde{A}(x;\lambda) \Big) \mathcal{Y}^+, \tag{1.16}$$

其中

$$\tilde{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{nn} & a_{(n-1)n} & -a_{(n-2)n} & \cdots & (-1)^n a_{1n} \\ a_{n(n-1)} & -a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-2)(n-1)} & \cdots & (-1)^{n-1} a_{1(n-1)} \\ -a_{n(n-2)} & a_{(n-1)(n-2)} & -a_{(n-2)(n-2)} & \cdots & (-1)^{n-2} a_{2(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^n a_{n1} & (-1)^{n-1} a_{(n-1)1} & (-1)^{n-2} a_{(n-2)1} & \cdots & -a_{11} \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

˜更简洁地说， $A$ 的元素 $\{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 与 $A$ 的元素 $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 之间满足关系

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j+1} a_{(n+1-j)(n+1-i)}. \tag{1.18}$$

（关于直接验证，请参见下文第 3 节。）我们设

$$\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda) := e^{-\int_0^x \operatorname{tr} A(\xi;\lambda) d\xi} \mathcal{Y}^+(x;\lambda) \tag{1.19}$$

从而

$$\tilde{\mathcal{Y}}^{+\prime} = \tilde{A}(x;\lambda) \tilde{\mathcal{Y}}^+, \tag{1.20}$$

并且我们将在下文的命题 3.6 中看到

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\mu_+(\lambda) x} \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda) = \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda),$$

˜其中， $\mu_+(\lambda)$ 如假设 (C) 所述，而 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 是

$$\tilde{A}_+(\lambda) := \lim_{x \to +\infty} \tilde{A}(x;\lambda),$$

˜与特征值 $-\mu_+(\lambda)$ 对应的右特征向量（在缩放常数意义下唯一确定）；该特征值是 $A_+(\lambda)$ 的最左特征值。

为了使用按 (1.11) 指定的 $\omega_2$，我们用 $M$ 表示为 $\omega_2$ 引入的矩阵，并令

$$\mathcal{Y}_M^+(x;\lambda) := (M y_1^+(x;\lambda)) \wedge \cdots \wedge (M y_{n-1}^+(x;\lambda)). \tag{1.21}$$

那么，$\mathcal{Y}_M^+(x;\lambda)$ 满足与 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$ 相同的关系，只是其中的 $A(x;\lambda)$ 均被替换为

$$\mathcal{A}(x;\lambda) := M A(x;\lambda) M^{-1}.$$

特别地，若我们令

$$\tilde{\mathcal{Y}}_M^+(x;\lambda) := e^{-\int_0^x \operatorname{tr}\mathcal{A}(\xi;\lambda)d\xi}\mathcal{Y}_M^+(x;\lambda),$$

then

$$\tilde{\mathcal{Y}}_M^{+\prime} = \tilde{\mathcal{A}}(x;\lambda)\tilde{\mathcal{Y}}_M^+,$$

其中，$\tilde{\mathcal{A}}(x;\lambda)$ 与 $\mathcal{A}(x;\lambda)$ 的关系，和 $A(x;\lambda)$ 与 $A(x;\lambda)$ 的关系相同（通过 (1.18)）。根据下面的命题 3.6，我们有

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\mu_+(\lambda)x}\tilde{\mathcal{Y}}_M^+(x;\lambda) = \tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda),$$

其中，$\tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda)$ 是.....的右特征向量（除一个缩放常数外唯一确定）

$$\tilde{\mathcal{A}}_+(\lambda) := \lim_{x\to+\infty}\tilde{\mathcal{A}}(x;\lambda), \tag{1.22}$$

对应于特征值 $-\mu_+(\lambda)$。

采用一般记号，现取 $\mathbf{G}(x;\lambda) = \eta^-(x;\lambda)$，并且

$$\mathbf{H}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} y_1^+(x;\lambda) & y_2^+(x;\lambda) & \dots & y_{n-1}^+(x;\lambda)\end{pmatrix},$$

并且，对于某个在分析过程中选取的充分大的值 $c>0$，我们令

$$\mathbf{F}^c(x;\lambda) := \begin{pmatrix}\mathbf{G}(x;\lambda) & 0_{n\times(n-1)}\\ 0_{n\times1} & \mathbf{H}(c;\lambda)\end{pmatrix}.$$

按照 (1.10) 和 (1.11) 中的 $\omega_1$ 和 $\omega_2$，相应地令

$$\tilde{\omega}_1^c(x;\lambda) := \omega_1(f_1^c(x;\lambda),\dots,f_n^c(x;\lambda)) = \eta^-(x;\lambda)\wedge\mathcal{Y}^+(c;\lambda) \tag{1.23}$$

and

$$\tilde{\omega}_2^c(x;\lambda) := \omega_2(f_1^c(x;\lambda),\dots,f_n^c(x;\lambda)) = \eta^-(x;\lambda)\wedge\mathcal{Y}_M^+(c;\lambda), \tag{1.24}$$

其中，向量函数 $\{f_j^c(x;\lambda)\}_{j=1}^n$ 构成 $\mathbf{F}^c(x;\lambda)$ 的各列，而 $\mathcal{Y}^+$ 和 $\mathcal{Y}_M^+$ 分别定义于 (1.14) 和 (1.21) 中。与 $\tilde{\omega}_1^c(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\omega}_2^c(x;\lambda)$ 相对应，我们定义相应的归一化函数

$$\tilde{\psi}_i^c(x;\lambda) = \frac{\tilde{\omega}_i^c(x;\lambda)}{|\eta^-(x;\lambda)||\mathcal{Y}^+(c;\lambda)|}, \quad i=1,2. \tag{1.25}$$

此处，为简洁起见，记号 (1.23) 和 (1.24) 对左右两边的解释稍作变通。第 2 节将详细讨论这一约定。

我们将分别关注当 $c$ 趋于 $+\infty$ 时，以及当 $x$趋于 $-\infty$或 $+\infty$时的极限，因此引入以下记号约定。首先，对于当 $c$ 趋于$+\infty$时的极限，我们注意到可以写成

$$\tilde{\psi}_1^c(x;\lambda) = \frac{\eta^-(x;\lambda)\wedge(e^{\mu_+(\lambda)c}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c;\lambda))}{|\eta^-(x;\lambda)||e^{\mu_+(\lambda)c}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c;\lambda)|}, \tag{1.26}$$

由此显然可知

$$\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda) := \lim_{c\to+\infty} \tilde{\psi}_1^c(x;\lambda) = \frac{\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)}{|\eta^-(x;\lambda)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}, \tag{1.27}$$

其中我们令

$$\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda) := \eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda). \tag{1.28}$$

同理，以完全相同的方式，我们可得

$$\tilde{\psi}_2^+(x;\lambda) := \lim_{c\to+\infty} \tilde{\psi}_2^c(x;\lambda) = \frac{\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda)}{|\eta^-(x;\lambda)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}, \tag{1.29}$$

其中我们令

$$\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda) := \eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda). \tag{1.30}$$

接下来，对于 $\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)$，我们可以写成

$$\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda) = \frac{e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|},$$

由此显然可知

$$\tilde{\psi}_1^{+,-}(\lambda) := \lim_{x\to-\infty} \tilde{\psi}_1^+(x;\lambda) = \frac{v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|v^-(\lambda)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}, \tag{1.31}$$

类似地

$$\tilde{\psi}_2^{+,-}(\lambda) := \lim_{x\to-\infty} \tilde{\psi}_2^+(x;\lambda) = \frac{v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda)}{|v^-(\lambda)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}. \tag{1.32}$$

在我们最一般的假设下，当 $x$ 趋于$+\infty$ 时，$\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)$和$\tilde{\psi}_2^+(x;\lambda)$的极限不一定存在；但在这些极限存在的情况下，我们分别将它们记为 $\tilde{\psi}^{+,}{}_1{}^+(\lambda)$和 $\tilde{\psi}^{+,}{}_2{}^+(\lambda)$。

有了这些记号，我们便可以陈述主定理所需的最后一组假设。这些假设主要涉及不变性，且在一定程度上较为技术性，因此我们在陈述之后立即附上一段较长的注记，说明应如何理解这些假设以及如何验证它们。

**(E)** 假设 $[\lambda_1,\lambda_2] \subset I$、 $\lambda_1 < \lambda_2$满足以下条件：**(1)** 对于 $i = 1, 2$，极限

$$\tilde{\psi}_1^{+,+}(\lambda_i) := \lim_{x\to+\infty} \tilde{\psi}_1^+(x;\lambda_i) \quad \text{and} \quad \tilde{\psi}_2^{+,+}(\lambda_i) := \lim_{x\to+\infty} \tilde{\psi}_2^+(x;\lambda_i)$$

有定义；**(2)** 对于 $i = 1, 2$， $\tilde{\psi}_2^+(x;\lambda_i)$ 和 $\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda_i)$ 的值在任何 $x \in \mathbb{R}$ 处都不会同时为零，并且极限函数 $\tilde{\psi}^{+,}{}_1{}^+(\lambda_i)$ 和 $\tilde{\psi}^{+,}{}_2{}^+(\lambda_i)$ 不会同时为零；**(3)** $\tilde{\psi}^{+,}{}_1{}^-(\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}^{+,}{}_2{}^-(\lambda)$ 的值在任何 $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$处都不会同时为零；以及 **(4)** 存在一个足够大的常数 $c_0 > 0$ ，使得对于所有 $c \geq c_0$ 和所有 $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$， $\psi_1^c(c;\lambda)$ 和 $\psi_2^c(c;\lambda)$ 的值不会同时为零。

注 1.4. 我们将在第 4 节证明，在假设 (C)、(E)(1) 下，对于任何不是 (1.1) 的特征值的 $\lambda_i$，条件都成立；而如果 $\lambda_i$ 是 (1.1) 的特征值，则 (E)(1) 是否成立将取决于其关联特征函数在 $x$ 趋近 $+\infty$ 时的极限行为。（对于我们所考虑的应用，$\lambda_1$ 将取为足够负，使其不是特征值，而 $\lambda_2$ 将取为 0，它是一个特征值。）对于 (E)(2)，我们通常可以证明，$\lambda_1$ 可以取为足够负，使得对所有 $x \in \mathbb{R}$，$\psi_1^+(x;\lambda_1) \neq 0$，从而满足该条件的一半。另一方面，我们会发现，对于所有 $x \in \mathbb{R}$，$\psi_1^+(x;\lambda_2)$ 和 $\psi_2^+(x;\lambda_2)$ 往往可以精确求出，因此可以检验另一半条件。对于 (E)(3)，我们将看到，在许多重要应用中，包括当前分析第 6 节所考虑的应用，我们可以证明，对所有 $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$，$\psi^+,_{\lambda_1}{}^-(\lambda) \neq 0$，这比所需条件更强。最难验证的假设是 (E)(4)，因为该方法的特点是间接获取关于 (1.1) 的谱的信息，而不直接计算随着 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增至 $\lambda_2$ 时 $\psi_1^+(x;\lambda)$ 和 $\psi_2^+(x;\lambda)$ 的值。然而，在实践中，我们会作出以下重要观察。如果 (1.1) 在区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上没有特征值，那么我们可以选择足够大的 $c$，使得对所有 $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$，$\psi_1^+(c;\lambda) \neq 0$。这样，我们便得到一个有用的二分：如果假设 (E)(4) 不成立，那么可以断定 (1.1) 在区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上至少有一个特征值。也就是说，如果在假设 (E)(4) 下检测到 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上存在特征值，且已证明假设 (E) 的其他部分成立，那么要么由于假设 (E) 成立，$[\lambda_1,\lambda_2]$ 上存在特征值；要么由于假设 (E)(4) 不成立，$[\lambda_1,\lambda_2]$ 上存在特征值。无论哪种情况，我们都可以严格地断定区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上存在一个特征值。

我们将在第 4 节看到，在假设 (A) 至 (E) 下，存在一个充分大的常数$C > 0$，使得对于所有 $c \geq C$，超平面指标之和

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(-c;\cdot),\mathcal{h}(c;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}(c;\lambda_2);[-c,c])\\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c;\cdot),\mathcal{h}(c;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2]) - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}(c;\lambda_1);[-c,c])\end{aligned}$$

保持不变。我们将此常数记为 $\mathfrak{m}$，并称之为边界不变量。接下来，我们将定义记号

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda),\mathcal{h}^+(\lambda);[-\infty,+\infty]) \tag{1.33}$$

表示映射在射影空间 $\mathbb{R}P^1$ 中的绕数

$$x \mapsto [\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda) : \tilde{\psi}_2^+(x;\lambda)]$$

当 $x$ 从 $-\infty$ 增加到 $+\infty$时的绕数，其中包括左侧渐近极限所对应的可能离开，以及右侧渐近极限所对应的可能到达。同样，我们用

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot),\mathcal{h}^+(\cdot);[\lambda_1,\lambda_2]) \tag{1.34}$$

映射在射影空间 $\mathbb{R}P^1$ 中的绕数

$$\lambda \mapsto [\tilde{\psi}_1^{+,-}(\lambda) : \tilde{\psi}_2^{+,-}(\lambda)]$$

当 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增加到 $\lambda_2$时。

关于 (1.33)，该值是通过追踪点 $p^+(x;\lambda)$ 绕着 $S^1$ 旋转而计算得出的，其中 $x$ 从 $-\infty$ 增加到 $+\infty$。在我们的假设下，极限

$$p^{+,-}(\lambda_i) := \lim_{x\to-\infty} p^+(x;\lambda_i) \quad \text{and} \quad p^{+,+}(\lambda_i) := \lim_{x\to+\infty} p^+(x;\lambda_i)$$

二者均存在。若 $p^{+,\pm}(\lambda_i) \neq (-1,0)$，则对应一侧不存在渐近交叉点，且可像往常一样在该侧计算超平面指标。若 $(-1,0)$ 作为这些渐近极限之一达到，情况会稍微复杂一些。具体而言，假设

$$p^{+,+}(\lambda_1) = (-1,0).$$

可能出现这样的情况：当 $x$ 逐渐增大并趋近于 $+\infty$ 时，点 $p^+(x;\lambda_1)$ 与 $(-1,0)$ 穿越无穷多次，因此无法得到有效的交叉计数。尽管如此，由于极限

$$\lim_{x\to+\infty} p^+(x;\lambda_1)$$

有良好定义，我们可以如下定义

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [0,+\infty])$$

（将定义限制在一个无穷端点，是为了只关注一侧； $-\infty$ 的情形可类似处理。）给定任意 $\epsilon > 0$，存在一个足够大的值 $L$，使得

$$|p^+(x;\lambda_1) - (-1,0)| < \epsilon \tag{1.35}$$

对所有 $x \geq L$ 均成立。$p^+(L;\lambda_1)$ 的位置有三种可能：(a) $p^+(L;\lambda_1)$ 在顺时针方向上距 $(-1,0)$ 很近；或 (b) $p^+(L;\lambda_1) = (-1,0)$；或 (c) $p^+(L;\lambda_1)$ 在逆时针方向上距 $(-1,0)$ 很近。我们定义

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [0,+\infty]) := \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [0,L]) + \begin{cases} 1 & \text{case (a)} \\ 0 & \text{cases (b) and (c).} \end{cases}$$

这里我们强调，该定义不依赖于对 $L$的具体选择，而只依赖于 (1.35)。

现在我们可以陈述分析的主定理。

**定理 1.1.** 对于 (1.1)，设假设 (A) 至 (D) 成立，并且对于某个固定区间$[\lambda_1,\lambda_2] \subset I$，$\lambda_1 < \lambda_2$，假设 (E) 也成立。若 $\mathcal{N}_\#([\lambda_1,\lambda_2])$ 表示 (1.1) 在区间 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 上的特征值个数（不计重数），则

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\#([\lambda_1,\lambda_2]) \geq \Big| &\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2), \mathcal{h}^+(\lambda_2); [-\infty,+\infty]) - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [-\infty,+\infty]) \\ &+ \mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot), \mathcal{h}^+(\cdot); [\lambda_1,\lambda_2]) - \mathfrak{m}\Big|.\end{aligned} \tag{1.36}$$

在本引言的其余部分，我们将介绍本文分析的背景和语境，并概述本文的安排。就背景而言，我们的分析受到线性哈密顿系统振荡结果的启发，这些结果分别源自 Sturm 和 Morse 的经典工作 [34] 和 [31]。正如 [24], 中详细讨论的那样，许多作者为这类结果的发展和应用作出了贡献，线性哈密顿系统的理论也已日趋成熟（例如， [10, 22, 24] 介绍一般理论的发展， [3, 4, 13, 27, 28, 29] 讨论应用， [6, 5, 8, 9, 12]则涉及相关的数值计算。

这类结果此前都局限于线性哈密顿系统或具有内在哈密顿结构的系统，但近期的结果 [2] 提供了一种工具，可应用于本文所考察的完全非哈密顿情形。在 [2], 中，作者运用其广义Maslov指标，获得了有界区域上非哈密顿系统的一个振荡结果；而目前的分析似乎是首次尝试，为定义在 $\mathbb{R}$上的一类非哈密顿系统获得此类振荡结果。

本文结构安排如下。第 2 节回顾后续推导中将用到的超平面指标相关内容；第 3 节概述证明定理 1.1 所需的关于方程 (1.1) 解的一些一般结果。第 4 节证明定理 1.1，第 5 节讨论埃文斯函数在当前情形中的作用。最后，第 6 节给出两个示例性应用：首先是广义 KdV 方程，其次是 KdV-Burgers 方程。

# 2 超平面指标的性质

本节着重讨论超平面指标中与我们的分析相关的性质，而将理论的完整阐述留待 [2]。特别是，要恰当地讨论这一对象，需要用到代数拓扑中的一些内容，这些内容：（1）已在 [2] 中清晰而简洁地介绍；（2）对我们结果的推导并非关键。除偶尔为感兴趣的读者作出澄清说明外，本节不讨论这些内容。

与引言中一样，我们用 $\mathcal{g}:\ [a,b] \to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 表示一条 Grassmann 子空间的连续路径，并用 $q \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 表示一个固定的目标子空间。我们令 $\omega_1$表示一个斜对称的 $n$-线性映射，使得 $\ker \omega_1 = q$; 并令 $\omega_2$ 表示另一个斜对称的 $n$-线性映射，使三元组 $(\mathcal{g}(\cdot)\ \omega_1, \omega_2)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足定义 1.2 中所述的不变性性质（即，对所有 $t \in [a,b]$，都有 $\mathcal{g}(t) \in \mathcal{M}$，其中 $\mathcal{M}$ 如式 (1.5) 所示）。回顾一下，我们的记号约定是固定一组标架 $G(t)$, 其对应于$\mathcal{g}(t)$，列为 $\{g_i(t)\}_{i=1}^n$，于是令

$$\tilde{\omega}_i(t) := \omega_i(g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)), \quad i = 1, 2. \tag{2.1}$$

也就是说， $\omega_i$ 始终表示一个斜对称的 $n$ 线性映射，而 $\tilde{\omega}_i$ 始终表示沿特定路径映射 $[a,b]$ 到 $Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$ 对 $\omega_i$ 的求值。

超平面指标 $\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), q; [a,b])$ 随后按照 (1.7) 中的描述计算，并采用适当的约定来计数进入和离开射影空间中点 $[0\ \text{的次数：}\ 1]$ （如下所述）。在实际操作中，我们通过追踪一个点 $p(t) \in S^1$ 来进行，具体可定义为

可精确指定为

$$p(t) := \begin{cases} \left( \frac{\tilde{\omega}_2(t)}{\sqrt{\tilde{\omega}_1(t)^2+\tilde{\omega}_2(t)^2}}, \frac{\tilde{\omega}_1(t)}{\sqrt{\tilde{\omega}_1(t)^2+\tilde{\omega}_2(t)^2}} \right) & \tilde{\omega}_2(t) \le 0 \\ -\left( \frac{\tilde{\omega}_2(t)}{\sqrt{\tilde{\omega}_1(t)^2+\tilde{\omega}_2(t)^2}}, \frac{\tilde{\omega}_1(t)}{\sqrt{\tilde{\omega}_1(t)^2+\tilde{\omega}_2(t)^2}} \right) & \tilde{\omega}_2(t) > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

或者等价地，将 $\tilde{\omega}_1(t)$ 和 $\tilde{\omega}_2(t)$ 替换为缩放变量

$$\tilde{\psi}_1(t) = \frac{\tilde{\omega}_1(t)}{|g_1(t) \wedge g_2(t) \wedge \cdots \wedge g_n(t)|} \quad \tilde{\psi}_2(t) = \frac{\tilde{\omega}_2(t)}{|g_1(t) \wedge g_2(t) \wedge \cdots \wedge g_n(t)|}. \tag{2.3}$$

按照通常的做法，我们将映射 $\mathbb{R}P^1$ 到单位圆的左半部分，然后令点 $(0,1)$ 与 $(0,-1)$ 重合，从而闭合到 $S^1$。显然，当且仅当 $p(t_*) = (-1,0)$ 时，$t_*$ 是流的交叉点（即满足 $\mathcal{g}(t_*) \cap \mathcal{q} \neq \{0\}$ 的点），因此，超平面指标可通过统计点 $p(t)$ 穿越 $(-1,0)$ 的次数来计算。我们将沿顺时针方向的穿越记为负，将沿逆时针方向的穿越记为正。关于端点处的行为，若 $p(t)$ 随着 $t$ 从 0 增大而沿顺时针方向转离 $(-1,0)$，则超平面指标减 1；若 $p(t)$ 随着 $t$ 从 0 增大而沿逆时针方向转离 $(-1,0)$，则超平面指标不变。同样，若 $p(t)$ 随着 $t$ 增至 1 而沿逆时针方向转入 $(-1,0)$，则超平面指标加 1；若 $p(t)$ 随着 $t$ 增至 1 而沿顺时针方向转入 $(-1,0)$，则超平面指标不变。最后，$p(t)$ 可能在 $t = t_*$ 时到达 $(-1,0)$，并在 $t$ 遍历某个区间时一直停留在 $(-1,0)$。在这些情况下，超平面指标仅在到达或离开时才增加或减少，增减量的判定方式与端点处相同（离开时按 $t = 0$ 的情形判定，到达时按 $t = 1$ 的情形判定）。

注 2.1. 在 *[2]*,中，作者将 $S^1$ 视为 $\mathbb{C}$中的一个圆，并作出如下规范

$$\tilde{p}(t) := \left( \frac{\tilde{\omega}_1(t) - i\tilde{\omega}_2(t)}{|\tilde{\omega}_1(t) - i\tilde{\omega}_2(t)|} \right)^2.$$

这一选择恰好导出与上文所述相同的动力学，尤其是超平面指标的取值也相同。

我们强调，正如引言中所述，与拉格朗日流中的 Maslov 指标不同，超平面指标不会追踪交点的维数。

为引入一些记号，设 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 与上文相同，并用 $\mathcal{P}_{\omega_1,\omega_2}([a,b])$表示所有连续路径 $\mathcal{g}: [a,b] \to \mathcal{M}$的集合，其中 $\mathcal{M}$ 如 (1.5) 中所述。（也就是说，$\mathcal{P}_{\omega_1,\omega_2}([a,b])$由所有关于斜对称 $n$-线性映射 $\omega_1$ 和 $\omega_2$不变的连续路径 $\mathcal{g}: [a,b] \to Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$组成。） [2] 的超平面指标具有以下性质（见 [2]中的命题 3.8）。

˜(P1)（路径可加性）如果 $\mathcal{g} \in \mathcal{P}_{\omega_1,\omega_2}([a,b])$ 且 $\mathcal{q} = \ker \omega_1$，那么对于任意 $\tilde{a}$、$b$、$\tilde{c} \in [a,b]$，满足 $\tilde{a} < b < \tilde{c}$，我们有

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), \mathcal{q}; [\tilde{a}, \tilde{c}]) = \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), \mathcal{q}; [\tilde{a}, \tilde{b}]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), \mathcal{q}; [\tilde{b}, \tilde{c}]).$$

(P2)（同伦不变性）如果 $\mathcal{g}$、$\mathcal{h}\in \mathcal{P}_{\omega_1,\omega_2}([a,b])$ 在 $\mathcal{M}$ 中同伦，且 $\mathcal{g}(a) = \mathcal{h}(a)$，并且 $\mathcal{g}(b) = \mathcal{h}(b)$（即 $\mathcal{g}$、$\mathcal{h}$在端点固定的条件下同伦），那么

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot), \mathcal{q}; [a,b]) = \mathrm{Ind}(\mathcal{h}(\cdot), \mathcal{q}; [a,b]).$$

## 2.1 格拉斯曼流形对

本节通过对随时间演化的格拉斯曼流形空间对的超平面指标计算作一般性推导，阐明引言中的方法和记号。设$\mathcal{g}$: $[a,b] \to Gr_m(\mathbb{R}^n)$ 和$\mathcal{h}$: $[a,b] \to Gr_{n-m}(\mathbb{R}^n)$，其中 $m \in \{1,2,\ldots,n-1\}$。为便于进行此类计算，我们可以令 F($t$) 表示式 (1.8) 中定义的矩阵函数，并分别取 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 为式 (1.10) 和 (1.11) 中所定义的量。由此可得关系式

$$\begin{aligned}\omega_1(f_1, f_2, \ldots, f_n) &= \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_{n-1} \end{pmatrix} \wedge \tilde{\delta}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\delta}_n \\ &= g_1 \wedge h_1 \wedge \cdots \wedge h_{n-1} \wedge e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n},\end{aligned}$$

这促使我们设定

$$\tilde{\omega}_1(t) := g_1(t) \wedge h_1(t) \wedge \cdots \wedge h_{n-1}(t). \tag{2.4}$$

同样，我们设定

$$\begin{aligned}\omega_2(f_1, \ldots, f_n) &= \begin{pmatrix} g_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_1 \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_{n-1} \end{pmatrix} \wedge \tilde{\sigma}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{\sigma}_n \\ &= g_1 \wedge (Mh_1) \wedge \cdots \wedge (Mh_{n-1}) e_{n+1} \cdots \wedge e_{2n},\end{aligned}$$

并且

$$\tilde{\omega}_2(t) := g_1(t) \wedge (Mh_1(t)) \wedge \cdots \wedge (Mh_{n-1}(t)).$$

有了这些 指定了 $\omega_1$ 和 $\omega_2$后，现在引入归一化变量也很方便 s

$$\psi_i(f_1, \ldots, f_n) := \frac{\omega_i(f_1, \ldots, f_n)}{|f_1 \wedge \cdots \wedge f_n|}, \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

同理

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_i(t) &:= \frac{\tilde{\omega}_i(t)}{\left| \begin{pmatrix} g_1(t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_1(t) \end{pmatrix} \wedge \cdots \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ h_{n-1}(t) \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{\tilde{\omega}_i(t)}{|g_1(t)||h_1(t) \wedge \cdots \wedge h_{n-1}(t)|}, \quad i = 1, 2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

显然，根据 $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=1}^2$ 与 $\{\tilde{\psi}_i\}_{i=1}^2$ 之间的关系，如果在表达式 (2.2) 中将 $\{\tilde{\omega}_i\}_{i=1}^2$ 替换为 $\{\psi_i\}_{i=1}^2$，用于表示跟踪点 $p(t)$，那么 $p(t)$ 的值不会改变。

## 2.2 旋转方向

我们可以在 [2]中采用第 4 节的方法，对与给定交叉点相关的方向进行局部分析。为此，我们从以下观察出发：当 $p(t)$ 接近 $(-1, 0)$ 时，可以通过角度来跟踪 $p(t)$ 的位置

$$\theta(t) = \pi + \tan^{-1} \frac{\tilde{\omega}_1(t)}{\tilde{\omega}_2(t)}, \tag{2.7}$$

其中 $\pi$ 源自我们将交叉点置于 $(-1,0)$ 的约定。由 $\tan^{-1} x$ 的单调性可知，在满足 $\theta(t_*) = \pi$ 的值 $t = t_*$ 附近， $\theta(t)$ 的方向由比值 $r(t) = \frac{\tilde{\omega}_1(t)}{\tilde{\omega}_2(t)}$ 的导数决定，其中 $r(t_*) = 0$。具体而言，若 $r'(t_*) = \frac{\tilde{\omega}_1'(t_*)}{\tilde{\omega}_2(t_*)} < 0$ ，则 $p(t)$ 在 $t_*$ 处顺时针旋转，对应于超平面指标减小；若 $r'(t_*) > 0$ ，则为逆时针旋转，对应于超平面指标增大。

## 2.3 边界不变量 $\mathfrak{m}$

处理超平面指标时，最具挑战性的方面之一是计算边界不变量 $\mathfrak{m}$。 [2], 中提出的一种策略是令

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(\tilde{\psi}_1(t)^2 + \tilde{\psi}_2(t)^2), \tag{2.8}$$

并直接证明，对于所有 $t \in [a, b]$， $\rho(t) \neq 0$ 。在某些情况下，这种方法在 [2] 和 [23], 中都已证明有效，但这两项分析都关键地利用了自变量定义域有界这一点。

更一般地， [2] 中的引理4.9和4.10的一个推论是，在相当一般的条件下， $\mathfrak{m}$ 必须是偶整数。本节的目标是稍微放宽这些引理中的假设。我们从以下交换原理开始，探讨将斜对称 线性形式 $\omega_2$ 换成另一种选择 $\omega_3$ 时会发生什么。

引理2.1（交换原理）。假设对某个区间 $[a, b]$， $a < b$，我们有$\mathcal{g} \in C([a, b], Gr_n(\mathbb{R}^{2n}))$，且 $\{\omega_i\}_{i=1}^3$ 是定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的三个斜对称 $n$ 线性形式，并且 $\ker \omega_1 = \mathcal{q}$。若三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_2)$ 和 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_3)$ 在 $[a, b]$ 上均为不变，且端点 $t = a$ 和 $t = b$ 均不是交叉点，则在 $[a, b]$ 上计算得到的 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_2)$ 和 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_3)$ 的超平面指标至多相差一个偶整数（若有差异）。

证明。从三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_2)$ 出发，当且仅当$\tilde{\omega}_1(t_*) = 0$时，值 $t_* \in [a, b]$ 是一个交叉点；根据我们关于不变性的假设，相应地必有 $\tilde{\omega}_2(t_*) \neq 0$。当 $t$ 经过 $t_*$时， $\tilde{\omega}_1(t)$的符号可能会改变，但根据连续性， $\tilde{\omega}_2(t)$不会改变。如果 $\tilde{\omega}_1(t)$的符号发生改变，那么对超平面指标的贡献为 $+1$或 $-1$。另一方面，如果 $\tilde{\omega}_1(t)$的符号没有改变，那么对超平面指标没有贡献。

转而考虑三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_3)$，上述结论完全同样成立。特别地，我们看到，当且仅当 $\tilde{\omega}_1(t)$ 在 $t$ 递增经过 $t_*$时符号不发生变化，交叉点 $t_*$ 不会对超平面指标产生贡献。这意味着将会

对于三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$，当且仅当对于三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_3)$在 $t_*$处对超平面指标有非零贡献时，在 $t_*$处对超平面指标也会有非零贡献。

根据这些考虑，三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$ 在 $[a,b]$上的超平面指标，与三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_3)$ 在 $[a,b]$上的超平面指标，恰好具有相同数量的非零穿越。若 $P_2$ 和 $N_2$ 分别表示 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$ 的正交叉数和负交叉数，而 $P_3$ 和 $N_3$ 分别表示 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_3)$ 的正交叉数和负交叉数，则必有 $P_2+N_2=P_3+N_3$。由此可知，在 $[a,b]$ 上计算的 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$ 与 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_3)$ 的超平面指标之差是

$$P_3-N_3-(P_2-N_2)=(P_2+N_2-N_3)-N_3-P_2+N_2=2N_2-2N_3,$$

一个偶数。 □

引理 2.2. 假设对于某些区间 $[a,b]$, $a<b$ 和 $[c,d]$, $c<d$，有 $\mathcal{g}\in C([a,b]\times[c,d],Gr_n(\mathbb{R}^{2n}))$；并且对于某个固定的 $\mathcal{q}\in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，令 $\omega_1$ 表示定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的斜对称 $n$-线性形式，使得 $\ker\ \omega_1=\mathcal{q}$。令 $\omega_2$ 表示定义在$\mathbb{R}^{2n}$ 上的另一个斜对称 $n$-线性形式，并假设对于 $[a,b]\times[c,d]$ 内部的某个点 $(s_*,t_*)$，有

$$\omega_i(g_1(s_*,t_*),g_2(s_*,t_*),\ldots,g_n(s_*,t_*))=0,\quad i=1,2,$$

但存在一个足够小的球 $B\subset\mathbb{R}^2$，以 $(s_*,t_*)$ 为中心，使得对于所有 $(s,t)\in B\backslash\{(s_*,t_*)\}$，这些值

$$\omega_i(g_1(s,t),g_2(s,t),\ldots,g_n(s,t)),\quad i=1,2,$$

不同时为 0。简言之，三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$ 在孤立点 $(s_*,t_*)$ 处失去不变性。因此，存在某个足够小的 $\epsilon>0$，使得对于任何以 $(s_*,t_*)$ 为中心且半径小于 $\epsilon$ 的球 $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g},\mathcal{q};\partial\mathcal{B})\in 2\mathbb{Z},$$

与所有边界指标的情形一样，我们令 $\partial\mathcal{B}$ 沿逆时针方向遍历（不过，对于结果而言，方向并非严格重要）。

证明。首先，令 $\omega_3$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上任意一个第三阶斜对称 $n$-线性形式，使得 t

$$\omega_3(g_1(s_*,t_*),g_2(s_*,t_*),\ldots,g_n(s_*,t_*))\neq 0.$$

只需选择向量 $\{g_i\}_{i=n+1}^{2n}$，使集合 $\{g_i(s_*,t_*)\}_{i=1}^{n}\cup\{g_i\}_{i=n+1}^{2n}$ 构成 $\mathbb{R}^{2n}$ 的一组基，并令 $\omega_3$ 的核为集合 $\{g_i\}_{i=n+1}^{2n}$ 的张成空间（确保向量 $\{g_i(s_*,t_*)\}_{i=1}^{n}$ 均不属于 $\omega_3$ 的核），即可做到这一点。由$\mathcal{g}$的连续性，我们可以取足够小的 $\epsilon>0$，使得对于任何以 $(s_*,t_*)$ 为中心且半径小于 $\epsilon$ 的球 $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^2$

$$\omega_3(g_1(s,t),g_2(s,t),\ldots,g_n(s,t))\neq 0,\quad\forall\,(s,t)\in\overline{\mathcal{B}},$$

其中上横线表示闭包。也就是说，三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_3)$ 在 $\overline{\mathcal{B}}$ 上是不变的，因此根据同伦不变性

$$\mathrm{Ind}_{\omega_3}(\mathcal{g},\mathcal{q},\partial\mathcal{B})=0.$$

若对于 $(s,t) \in \partial\mathcal{B}$，$\omega_1(g_1(s,t)\ldots,g_n(s,t))$ 恒等于 0，则 $\mathrm{Ind}_{\omega_i}(\mathcal{g}, \mathcal{q} \partial\mathcal{B}) = 0 \text{for} i = 2,3$，结论显然成立。否则，我们可以任取满足$\omega_1(g_1(s_0,t_0)\ldots,g_n(s_0,t_0)) \neq 0$的 $(s_0,t_0) \in \partial\mathcal{B}$，并沿着 $\partial\mathcal{B}$，从 $(s_0,t_0)$ 出发再回到该点，计算 $\mathrm{Ind}_{\omega_i}(\mathcal{g}, \mathcal{q} \partial\mathcal{B})$，$i = 2,3$。由交换原理可立即得到差值

$$\mathrm{Ind}_{\omega_2}(\mathcal{g}, \mathcal{q}, \partial\mathcal{B}) - \mathrm{Ind}_{\omega_3}(\mathcal{g}, \mathcal{q}, \partial\mathcal{B})$$

是一个偶数。由于被减去的指标为 0，因此得证。 □

现在，我们可以使用引理 2.2 来证明，在相当普遍的条件下，边界不变量是一个偶数。

命题 2.1. 假设对于某些区间 $[a,b]$，$a < b$和 $[c,d]$，$c < d$，$\mathcal{g} \in C([a,b]\times[c,d], Gr_n(\mathbb{R}^{2n}))$，并且对于某个固定的 $\mathcal{q} \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，令 $\omega_1$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的一个斜对称$n$-线性形式，使得 $\ker\ \omega_1 = \mathcal{q}$。令 $\omega_2$ 表示 $\mathbb{R}^{2n}$上的另一个斜对称 $n$-线性形式，并假设三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1, \omega_2)$ 在矩形$\mathcal{R} := [a,b]\times[c,d]$ 的边界上不变，并且在 $\mathcal{R}$内部除至多有限个点外也处处不变。那么

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}, \mathcal{q}; \partial\mathcal{R}) \in 2\mathbb{Z}.$$

证明。令 $N$ 表示 $\mathcal{R}$ 内部不变点的数量，并将这些点记为 $\{(s_i,t_i)\}_{i=1}^{N}$。利用同伦不变性，我们可以通过对各个超平面指标 $\mathrm{Ind}(\mathcal{g}, \mathcal{q}; \partial\mathcal{B}_i)$ 求和，来计算 $\mathrm{Ind}(\mathcal{g}, \mathcal{q}; \partial\mathcal{R})$，其中 $\mathcal{B}_i$ 表示以 $(s_i,t_i)$ 为中心、半径充分小的球，使得 $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{R}$，且三元组 $(\mathcal{g}\ \omega_1,\omega_2)$ 在 $\partial\mathcal{B}_i$ 上不变。根据引理 2.2，每个这样的指标都必须是偶数，因此其和也必为偶数。

□

注 2.2。为了理解我们为何预期不变性丧失点的数量是有限的，我们注意到，一般而言，集合

$$\mathcal{C}_i := \{(s,t) : \tilde{\omega}_i(s,t) = 0\}, \quad i = 1,2,$$

在 $[a,b]\times[c,d]$ 中构成一维曲线，而不变性丧失点恰好就是这些曲线的交点。原则上，这类交点当然不一定是孤立的，但实际上我们通常发现它们是孤立的。目前，理论上还缺少足够一般的相关结果，因此在应用中必须针对具体情形计算边界不变量（见第 6 节）。当然，$\mathfrak{m}$ 的精确值是最理想的，但我们强调，对于不稳定性论证而言，通常只需确定其奇偶性，因为这样便能判断不稳定特征值的数量是偶数还是奇数。

# 3 常微分方程预备知识

本节汇总了与方程 (1.1) 和 (1.20) 的解相关的若干直接结果。作为出发点，下面的命题改编自[33]中的命题 1.2。

命题 3.1. 假设 (A) 至 (D) 成立，则以下陈述成立。

(i) 存在一个唯一解 $\eta^-(x;\lambda)$，满足 (1.1)，且其极限

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda) = v^-(\lambda)$$

成立，其中 $v^-(\lambda)$ 是假设 (C) 中描述的 $A_-(\lambda)$ 的右特征向量。此外，该收敛在 $\Omega$ 的紧子集上一致。

*(ii)* 存在一个（非唯一的）解 $\zeta^+(x;\lambda)$，满足 (1.1)，且其极限

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\mu_+(\lambda)x}\zeta^+(x;\lambda) = v^+(\lambda)$$

成立，其中 $v^+(\lambda)$ 是假设 (C) 中描述的 $A_+(\lambda)$ 的右特征向量。此外，该收敛在 $\Omega$ 的紧子集上一致。

为便于标记，我们将 $\{y_j^-(x;\lambda)\}_{j=1}^n$ 记作 (1.1) 的一组线性无关解，其编号满足 $\eta^-(x;\lambda) = y_n^-(x;\lambda)$；并将 $\{y_j^+(x;\lambda)\}_{j=1}^n$ 记作 (1.1) 的一组线性无关解，其编号满足 $\zeta^+(x;\lambda) = y_n^+(x;\lambda)$。在某些地方，用下式表示 $\{y_j^\pm(x;\lambda)\}_{j=1}^n$ 中各元素的坐标会很有用：

$$y_j^\pm(x;\lambda) = \begin{pmatrix} y_{1j}^\pm(x;\lambda) & y_{2j}^\pm(x;\lambda) & \cdots & y_{nj}^\pm(x;\lambda)\end{pmatrix}^T, \quad j = 1,2,\dots,n,$$

并且我们还引入矩阵

$$Y^\pm(x;\lambda) := \begin{pmatrix} y_1^\pm(x;\lambda) & y_2^\pm(x;\lambda) & \cdots & y_{n-1}^\pm(x;\lambda)\end{pmatrix}.$$

回顾式 (1.14) 中 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$ 的规范，可以直接证明 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^+(x;\lambda) = {} & d_n^+(x;\lambda)e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1} + d_{n-1}^+(x;\lambda)e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-2}\wedge e_n \\ & + \cdots + d_1^+(x;\lambda)e_2\wedge\cdots\wedge e_n,\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，$d_i^+(x;\lambda)$ 表示通过消去 $Y^+$ 的第 $i^{th}$ 行而得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式。由此，我们将 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$ 与向量

$$\mathcal{Y}^+(x;\lambda) = \begin{pmatrix} d_n^+(x;\lambda) & d_{n-1}^+(x;\lambda) & \dots & d_1^+(x;\lambda)\end{pmatrix}^T,$$

按照注 1.3 中的约定。

命题 3.2。按式 (1.14) 指定 $\mathcal{Y}^+$ 后，式 (1.16) 成立。

证明。对 (1.14) 求微分后，我们得到关系式

$$\mathcal{Y}^{+\prime}(x;\lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} y_1^+\wedge\cdots\wedge A(x;\lambda)y_j^+\wedge\cdots\wedge y_{n-1}^+, \tag{3.2}$$

其中每个加数都可以像 (3.1) 中那样理解。聚焦于第一项

$$(A(x;\lambda)y_1^+)\wedge y_2^+\wedge\cdots\wedge y_{n-1}^+,$$

我们可以写成

$$A(x;\lambda)y_1^+=\begin{pmatrix}a_{1j}y_{j1}^+ & a_{2j}y_{j1}^+ & \dots & a_{nj}y_{j1}^+\end{pmatrix}^T,$$

其中，为了简化记号，约定对重复指标求和。此外，我们引入矩阵

$$Y_{A1}^+(x;\lambda):=\begin{pmatrix}A(x;\lambda)y_1^+(x;\lambda) & y_2^+(x;\lambda) & \cdots & y_{n-1}^+(x;\lambda)\end{pmatrix},$$

并且，对每个 $k\in\{1,2,\dots,n\}$，令 $d_{A1,k}^+$ 表示通过消去 $Y_{A1}^+$ 的第 $k^{th}$ 行所得到的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式。于是，如同 (3.1) 中那样，

$$\begin{aligned}(A(x;\lambda)y_1^+)\wedge\cdots\wedge y_j^+\wedge\cdots\wedge y_n^+ &= d_{A1,n}^+(x;\lambda)e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-1}\\ &+d_{A1,n-1}^+(x;\lambda)e_1\wedge\cdots\wedge e_{n-2}\wedge e_n+\cdots+d_{A1,1}^+(x;\lambda)e_2\wedge\cdots\wedge e_n.\end{aligned}\tag{3.3}$$

这样，我们将 $\mathcal{Y}^+$ 与向量 $(d_n^+\ d_{n-1}^+\ \dots,\ d_1^+)$ 以及 $(Ay_1^+)\wedge y_2^+\wedge\cdots\wedge y_{n-1}^+$ 与向量 $(d_{A1,n}^+\ d_{A1,n-1}^+\ \cdots,\ d_{A1,1}^+)$ 联系起来；同样，我们可以将 (3.2) 中的 $k^{th}$ 加数与向量 $(d_{Ak,n}^+\ d_{Ak,n-1}^+\ \cdots,\ d_{Ak,1}^+)$ 联系起来。利用这些对应关系，我们可以将 $\mathcal{Y}^+$ 的第 $j_{\text{th}}$ 分量的导数写成

$$\mathcal{Y}_j^{+\prime}=\sum_{k=1}^{n-1}d_{Ak,n-(j-1)}^+.$$

具体来说，聚焦于第一分量 $j=1$，我们看到 $\mathcal{Y}_1^{+\prime}$是由 $n$ 个行列式之和构成的。若进一步聚焦于该和式中与矩阵 $A$的某个特定元素相关的项，就能轻易辨认出该分量在最终关系式中的出现方式。以 $a_{11}$为例，我们可以示意性地将 $\mathcal{Y}_1^{+\prime}$中与 $a_{11}$ 相关的项视为以下求和所得:

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}y_{11}^+ & y_{12}^+ & \cdots & y_{1(n-1)}^+\\ * & y_{22}^+ & \cdots & y_{2(n-1)}^+\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ * & y_{(n-1)2}^+ & \cdots & y_{(n-1)(n-1)}^+\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}y_{11}^+ & a_{11}y_{12}^+ & \cdots & y_{1(n-1)}^+\\ y_{21}^+ & * & \cdots & y_{2(n-1)}^+\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{(n-1)1}^+ & * & \cdots & y_{(n-1)(n-1)}^+\end{pmatrix}+\dots$$
$$+\det\begin{pmatrix}y_{11}^+ & y_{12}^+ & \cdots & a_{11}y_{1(n-1)}^+\\ y_{21}^+ & y_{22}^+ & \cdots & *\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ y_{(n-1)1}^+ & y_{(n-1)2}^+ & \cdots & *\end{pmatrix},$$

其中星号表示与计算无关的项（因为它们不含$a_{11}$）。如果现在设想沿着含有 $a_{11}$的列展开每个行列式，那么包含 $a_{11}$ 的项的组合恰好与 $a_{11}$ 乘以一个行列式相同

沿矩阵第一行展开

$$\begin{pmatrix} y^+_{11} & y^+_{12} & \cdots & y^+_{1(n-1)} \\ y^+_{21} & y^+_{22} & \cdots & y^+_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y^+_{(n-1)1} & y^+_{(n-1)2} & \cdots & y^+_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

总之， $\mathcal{Y}_1^+$'的表达式中 $a_{11}$的唯一乘数，就是上文标记为 $d_n^+$的量，它恰好是 $\mathcal{Y}^+$ 的第一分量（即分量 $\mathcal{Y}_1^+$）。对 $A$ 的每个元素和 $\mathcal{Y}^+$的每个分量依此类推，即可得到所述结论。□

˜命题 3.3. 对于任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，令 $A$ 为由˜(1.17) 指定的相应矩阵。那么， $\mu \in \sigma($ $A$) 当且仅当 $-\mu \in \sigma(A)$。

证明. 若 $\mu \in \sigma(A)$，则 $A$存在一个左特征向量，记为 $w \in \mathbb{C}^n$，使得˜ $wA = \mu w A$。接着，若定义一个新的（列）向量 $\mathcal{V} \in \mathbb{C}^n$，其分量为

$$\tilde{\mathcal{V}}_j = (-1)^{n-j} w_{n+1-j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

˜ ˜ ˜通过直接计算可得 $A\mathcal{V} = -\mu\mathcal{V}$。反向推导即可得到逆向结论。

□

注 3.1. 从命题 3.3 的证明可知，若 $w^{\pm}(\lambda)$ 是 $A_{\pm}(\lambda)$ 对应于单特征值 $\mu_{\pm}(\lambda)$ 的左特征向量，且选取 $w^{\pm}(\lambda)$ 使其在 $\lambda$˜中解析，如假设 (C) 所要求的，那么通过 (3.4) 指定的相应 $A_{\pm}(\lambda)$ 的右特征向量也将是解析的。若 (3.4) 成立，则相应地有

$$w_k^+ = (-1)^{k-1} \tilde{\mathcal{V}}^+_{n+1-k}. \tag{3.5}$$

此外，若 $v^{\pm}(\lambda)$ 表示经过归一化的 $A_{\pm}(\lambda)$ 的解析右特征向量，使得$w^{\pm}(\lambda)v^{\pm}(\lambda) = 1$，那么我们可以结合 (1.15) 和 (3.5) 计算

$$\begin{aligned} v^{\pm}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{\pm}(\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_i^{\pm}(\lambda) \tilde{\mathcal{V}}^{\pm}_{n+1-i}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} v_i^{\pm}(\lambda)(-1)^{i-1} w_i^{\pm}(\lambda) \\ &= w^{\pm}(\lambda) v^{\pm}(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

˜命题 3.4. 对任意矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，设 $A$ 为 (1.17) 中指定的关联矩阵；对于 $u$,$\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$，按照注 1.3，将 $u$ 和 $Au$ 视为 $\bigwedge^1(\mathbb{R})$ 的元素，并将 $\mathcal{U}$ 和 $\tilde{A}\mathcal{U}$ 视为 $\bigwedge^{n-1}(\mathbb{R})$ 的元素。则

$$(Au) \wedge \mathcal{U} + u \wedge (\tilde{A}\mathcal{U}) = 0.$$

证明。首先，由于 $Au$ 被视为 1-形式，而 $\mathcal{U}$ 被视为一个 $(n-1)$-形式，因此楔积 $(Au) \wedge \mathcal{U}$ 是一个 $n$-形式，由 (1.15) 可知，

$$(Au) \wedge \mathcal{U} = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ij} u_j \mathcal{U}_{n+1-i}.$$

我们可以将其与下式进行比较

$$\begin{aligned} u \wedge (\tilde{A}\mathcal{U}) &= u_1 \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{nj}\mathcal{U}_j - u_2 \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{(n-1)j}\mathcal{U}_j + \cdots + (-1)^{n+1} u_n \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{1j}\mathcal{U}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{(n+1-i)j} u_i \mathcal{U}_j = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+1}(-1)^{n-i+j} a_{(n+1-j)i} u_i \mathcal{U}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{n+1+j} a_{(n+1-j)i} u_i \mathcal{U}_j = \sum_{i,k=1}^{n} (-1)^{k} a_{ki} u_i \mathcal{U}_{n+1-k}, \end{aligned}$$

其中，为得到最后一个等式，我们将指标从 $j$ 改为 $k = n+1-j$。比较~我们对 $(Au) \wedge \mathcal{U}$ 的表达式与对 $u \wedge (A\mathcal{U})$ 的表达式，可知命题得证。

□

~取 (1.12) 中指定的 $\eta^{-}(x;\lambda)$ 和 (1.19) 中指定的 $\mathcal{Y}^{+}(x;\lambda)$，我们考察张成空间 $\{\eta^{-}(x;\lambda)\}$ （ $\mathbb{R}^n$ 的一维子空间）与张成空间 $\{y_j^{+}(x;\lambda)\}_{j=1}^{n-1}$ （ $\mathbb{R}^n$ 的 $(n-1)$ 维子空间）之间的交集，并考虑楔积

$$\eta^{-}(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^{+}(x;\lambda).$$

以下命题将当前的分析与 [33] 的分析直接联系起来。

~ ~ ~ ~命题 3.5. 设 $\mathcal{Y}(x;\lambda)$ 是常微分方程组 $\mathcal{Y}' = A(x;\lambda)\mathcal{Y}$ 的解，并设行向量 $z = (z_1\ z_2\ \ldots\ z_n)$ 的各分量定义如下

$$z_j(x;\lambda) := (-1)^{j-1}\tilde{\mathcal{Y}}_{n+1-j}(x;\lambda), \quad j = 1,2,\ldots,n. \tag{3.6}$$

~于是， $z$满足常微分方程组 $z' = -zA(x;\lambda)$。此外，若将 $\mathcal{Y}$解释为注 1.3 中的一个（$n-1$）-形式，并引入一个列向量 $y$ ，将其解释为注 1.3 中的一个 1-形式，则

$$y \wedge \tilde{\mathcal{Y}}(x;\lambda) = z(x;\lambda)y.$$

证明。对于命题的第一部分，我们可以直接计算，写出 ng

$$\begin{aligned} z_j' &= (-1)^{j-1}\tilde{\mathcal{Y}}_n' = (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{(n+1-j)k}\tilde{\mathcal{Y}}_k \\ &= (-1)^{j-1}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k-j} a_{(n+1-k)j}(-1)^{n-k} z_{n+1-k} = -\sum_{k=1}^{n} a_{(n+1-k)j} z_{n+1-k}, \end{aligned}$$

对 $j = 1$、2、.....、 $n$，这恰好是 $z' = -zA(x;\lambda)$ 的分量形式。

对于第二个断言，我们计算

$$y \wedge \tilde{\mathcal{Y}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} y_i \tilde{\mathcal{Y}}_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} y_i (-1)^{i-1} z_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{-} z_i = zy.$$

□

注 3.2. 由命题 3.5 可见，正如在 *[33],* 中一样，我们完全可以使用适当的内积而非楔积来进行分析。我们采用楔积进行处理，是因为希望将分析扩展到更一般的情形，而在这些情形下，内积表述并不可行。

命题 3.5 使我们能够将 [33] 中的命题 1.2（其中讨论变量 $\tilde{}$，此处记为 $z$）推广为关于 $\mathcal{Y}^+(x;\ \lambda)$ 的表述。具体而言，有如下结论。

$\tilde{}$命题 3.6. 设假设 (A) 至 (D) 成立，并设 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 表示 $A_+(\lambda)$ 的右特征向量，它对应于特征值 $-\mu_+(\lambda)$，并按照假设 (C)，由 $\tilde{}w^+(\lambda)$ 经由 (3.5) 构造得到。那么，(1.20) 存在唯一解 $\mathcal{Y}^+(x;\ \lambda)$，使得极限

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\mu_+(\lambda)x}\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda) = \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)$$

成立，而且，该收敛在 Ω 的紧子集上一致。

# 4 定理 1.1 的证明

$\tilde{}$令 $\eta^-(x;\ \lambda)$ 和 $\mathcal{Y}^+(x;\ \lambda)$ 如命题 3.1 和 3.6 中所述，记具有标架 $\mathsf{G}(x;\ \lambda) = \eta^-(x;\ \lambda)$ 的格拉斯曼子空间路径为 $\mathcal{g}(x;\ \lambda) \in Gr_1(\mathbb{R}^n)$，并记具有标架

$$\mathbf{H}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} y_1^+(x;\lambda) & y_2^+(x;\lambda) & \dots & y_{n-1}^+(x;\lambda) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

我们通过固定 $\lambda_1$、$\lambda_2 \in I$、$\lambda_1 < \lambda_2$ 以及 $c_1 \ll 0$ 和 $c_2 \gg 0$ 的值，并按照以下一系列通常称为马斯洛夫盒的线段，计算 $\mathcal{g}(x;\ \lambda)$ 与 $\mathcal{h}(c_2;\ \lambda)$ 这一对的超平面指标，从而证明定理 1.1：(1) 固定 $x = c_1$，令 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增加到 $\lambda_2$（底部架）；(2) 固定 $\lambda = \lambda_2$，令 $x$ 从 $c_1$ 增加到 $c_2$（右侧平台）；(3) 固定 $x = c_2$，令 $\lambda$ 从 $\lambda_2$ 减少到 $\lambda_1$（上边）；(4) 固定 $\lambda = \lambda_1$，令 $x$ 从 $c_2$ 减少到 $c_1$（左侧平台）。参见图 4.1。

马斯洛夫盒概述。在马斯洛夫盒的上边，我们有 $x = c_2$，因此超平面指标

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2])$$

检测特征值，但计数时不考虑重数，也不保证单调性。若 $\mathcal{N}_\#([\lambda_1, \lambda_2])$ 表示方程 (1.1) 在区间 $[\lambda_1, \lambda_2]$ 上的特征值个数，且计数时不考虑重数，那么在单调的情况下，上边的超平面指标将等于 $\mathcal{N}_\#([\lambda_1, \lambda_2])$ 或 $-\mathcal{N}_\#([\lambda_1, \lambda_2])$，具体取决于穿越的方向。若不具备单调性，则无法实现这种相等关系，而是有如下不等式，

$$\mathcal{N}_\#([\lambda_1, \lambda_2]) \geq |\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2])|. \tag{4.2}$$

底部架上的超平面指标检测$\mathcal{g}(c_1;\ \lambda)$与$\mathcal{h}(c_2;\ \lambda)$之间的交点，可记为

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_1;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]).$$

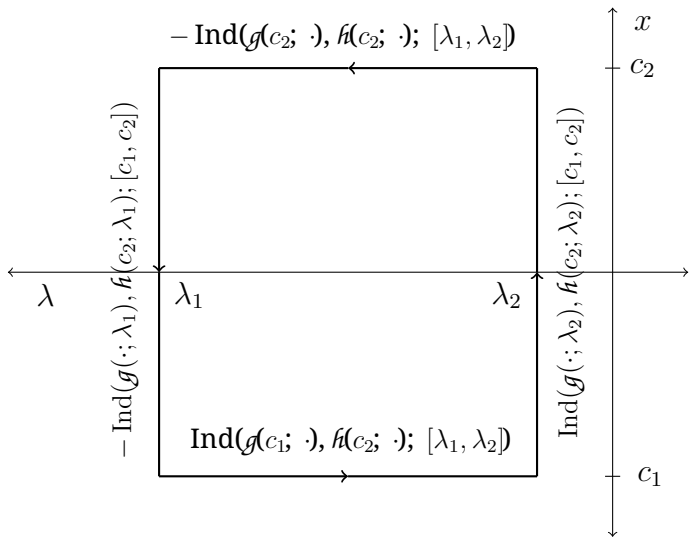



图 4.1：马斯洛夫盒。

类似地，左侧平台和右侧平台上的超平面指标分别检测$\mathcal{g}(x;\lambda_i)$与$\mathcal{h}(x;\lambda_i)$之间的交点，$i=1,2$，其中 $x$从 $c_2$递减至 $c_1$（左侧平台），并从 $c_1$ 递增至 $c_2$ （右侧平台）。我们分别将其记为

$$-\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}(c_2;\lambda_1);[c_1,c_2])$$

and

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}(c_2;\lambda_2);[c_1,c_2]).$$

根据假设 (E)，当 $c_1$ 充分负且 $c_2$ 充分正时，沿四条边均具有不变性。因此，我们可以计算马斯洛夫盒边界上的超平面指标，并将其记为 $\mathfrak{m}(c_1,c_2)$，写作

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(c_1,c_2) := {}& \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_1;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2]) + \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}(c_2;\lambda_2);[c_1,c_2])\\ & - \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2]) - \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}(c_2;\lambda_1);[c_1,c_2]).\end{aligned} \tag{4.3}$$

为了求出 (4.3) 中的四个超平面指标，我们遵循引言中概述的方法，首先规范一个第三个格拉斯曼子空间$f^{c_2}(x;\lambda) \in Gr_n(\mathbb{R}^{2n})$，其标架为

$$\mathbf{F}^{c_2}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}(x;\lambda) & 0_{n\times(n-1)} \\ 0_{n\times 1} & \mathbf{H}(c_2;\lambda) \end{pmatrix}.$$

如第 2 节所述，我们令

$$\omega_1^{c_2}(f_1,f_2,\dots,f_n) := f_1(x;\lambda)\wedge\cdots\wedge f_n(x;\lambda)\wedge\tilde{\delta}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{\delta}_n, \tag{4.4}$$

其中，向量 $\{\delta_i\}_{i=1}^n$ 构成了 $\mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} -I_n \\ I_n \end{pmatrix}$的列。同样，我们固定一个可逆矩阵 $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$，并令

$$\omega_2^{c_2}(f_1,f_2,\dots,f_n) := f_1(x;\lambda)\wedge\cdots\wedge f_n(x;\lambda)\wedge\tilde{\sigma}_1\wedge\cdots\wedge\tilde{\sigma}_n, \tag{4.5}$$

˜其中，向量 $\{\tilde{\sigma}_i\}_{i=1}^n$ 构成了 $\mathbf{\Sigma} = \binom{-M}{I_n}$ 的列。

对于后续的计算，我们将在 $\mathbf{F}^{c_2}(x;\,\lambda)$ 的各列上计算 $\omega_1$ 和 $\omega_2$，得到

$$\tilde{\omega}_1^{c_2}(x;\lambda) := \eta^-(x;\lambda) \wedge \mathcal{Y}^+(c_2;\lambda) \tag{4.6}$$

and

$$\tilde{\omega}_2^{c_2}(x;\lambda) := \eta^-(x;\lambda) \wedge \mathcal{Y}_M^+(c_2;\lambda), \tag{4.7}$$

其中，$\mathcal{Y}^+$ 和 $\mathcal{Y}_M^+$ 分别定义于 (1.14) 和 (1.21) 中。（有关这些楔积的更多细节，请参见第 2.1 节。）这里，$\tilde{\omega}_1^{c_2}(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\omega}_2^{c_2}(x;\lambda)$ 与 (1.23) 和 (1.24) 中的定义相同，只是将 $c$ 替换为 $c_2$。类似地，我们将 $\tilde{\psi}_1^{c_2}(x;\lambda)$、$\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}^+{}_{,1}{}^-(\lambda)$ 分别取为 (1.26)、(1.27) 和 (1.31) 中定义的 ˜，并对 (1.25)、(1.29) 和 (1.32) 中的 $\psi_2^{c_2}(x;\lambda)$、$\tilde{\psi}_2^+(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}^+{}_{,2}{}^-(\lambda)$ 作类似定义。最后，我们令 $\tilde{\psi}^{c_2}{}_{,1}{}^-(\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}^{c_2}{}_{,2}{}^-(\lambda)$ 定义为

$$\tilde{\psi}_i^{c_2,-}(\lambda) := \lim_{x\to-\infty} \tilde{\psi}_i^{c_2}(x;\lambda), \quad i = 1, 2.$$

除上述规范外，我们还将 $p^{c_2}(x;\lambda)$ 记为式 (2.2) 中的跟踪点 $\tilde{p}$，其中将 $\tilde{\omega}_1$ 和 $\tilde{\omega}_2$ 分别替换为 $\psi_1^{c_2}(x;\lambda)$ 和 $\psi_2^{c_2}(x;\lambda)$；并类似地定义$p^+(x;\lambda)$、$p^{+,-}(\lambda)$ 和 $p^{c_2,-}(\lambda)$。

现在我们可以陈述以下有用的引理。

引理 4.1. 设定理 1.1 的假设成立。给定任意 $\epsilon > 0$，存在一个充分大的常数 $L$，使得对所有 $c_2 \geq L$，以下结论成立：

(1) 对于 $i = 1,\ 2,$

$$|p^{c_2}(x;\lambda_i) - p^+(x;\lambda_i)| < \epsilon$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$。

*(2)*

$$|p^{c_2,-}(\lambda) - p^{+,-}(\lambda)| < \epsilon$$

对所有 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$。

证明。从 (1) 开始，根据我们对 $\tilde{\psi}_1^{c_2}(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)$ 的定义，可得关系式

$$\tilde{\psi}_1^{c_2}(x;\lambda) - \tilde{\psi}_1^+(x;\lambda) = \Big(\frac{\eta^-(x;\lambda)}{|\eta^-(x;\lambda)|}\Big) \wedge \Big(\frac{e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)}{|e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)|} - \frac{\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}\Big).$$

由于 $\eta^-(x;\,\lambda)/|\eta^-(x;\lambda)|$ 有界，且

$$\lim_{c_2\to+\infty} \Big(\frac{e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)}{|e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)|} - \frac{\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}\Big) = 0,$$

通过取足够大的 $c_2$，我们可以使差值 $|\tilde{\psi}_1^{c_2}(x;\,\lambda) - \tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)|$ 任意小。对于 $\tilde{\psi}_2^{c_2}(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}_2^+(x;\lambda)$，也有类似结论；差值$|p^{c_2}(x;\,\lambda_i) - p^+(x;\lambda_i)|$ 的结论则由跟踪点对其两个输入的连续依赖性得出，同时要注意，对于 $p$，点 (0, 1) 和 (0, −1) 被视为相等。这里我们强调，数值 $\tilde{\psi}_1^{c_2}(x;\,\lambda)^2 + \tilde{\psi}_2^{c_2}(x;\,\lambda)^2$ 和 $\tilde{\psi}_1^+(x;\,\lambda)^2 + \tilde{\psi}_2^+(x;\,\lambda)^2$ 根据我们的不变性假设均与零保持正距离，因此

˜ ˜数对 $(\psi_1^{c_2}(x;\lambda)\ \psi_2^{c_2}(x;\lambda))$ 和 $(\tilde{\psi}_1^{+}(x;\lambda)\ \tilde{\psi}_2^{+}(x;\lambda))$ 被限制在 $\mathbb{R}^2$ 中不包含原点的紧子集内。在这些集合上，跟踪点 $p$关于其自变量一致连续。

对于断言 (2)，我们写作

$$\tilde{\psi}_1^{c_2,-}(\lambda)-\tilde{\psi}_1^{+,-}(\lambda)=\Big(\frac{v^-(\lambda)}{|v^-(\lambda)|}\Big)\wedge\Big(\frac{e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)}{|e^{\mu_+(\lambda)c_2}\tilde{\mathcal{Y}}^+(c_2;\lambda)|}-\frac{\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|}\Big),$$

结论可仿照 (1) 得出。 □

利用引理 4.1，我们现在可以证明下面的引理，其中用到了 (1.33) 和 (1.34) 中的记号。

引理 4.2. 在定理 1.1 的假设下，存在一个充分大的正实常数 $L$，使得对于任意满足 $c_1\le -L$ 和 $c_2\ge L$ 的常数 $c_1$ 和 $c_2$，有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_1;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2])+\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}(c_2;\lambda_2);[c_1,c_2])-\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}(c_2;\lambda_1);[c_1,c_2])\\&\quad=\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot),\mathcal{h}^+(\cdot);[\lambda_1,\lambda_2])+\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,+\infty])\\&\qquad-\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}^+(\lambda_1);[-\infty,+\infty]).\end{aligned}$$

证明. 首先注意，所求等式左边的每个超平面指标，都是通过跟踪点 $p^{c_2}(x;\lambda)$ 绕 $S^1$ 的运动计算得出的，其中点 $(x,\lambda)$ 沿着马斯洛夫盒移动（分别经过底部、右侧和左侧的架层）。同样，右边的第一个超平面指标是通过跟踪 $p^{+,-}(\lambda)$ 绕 $S^1$ 的运动计算得出的，其中 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增加到 $\lambda_2$；右边后两个超平面指标则是通过跟踪（对于 $i=1,2$） $p^{+}(x;\lambda_i)$ 绕 $S^1$ 的运动计算得出的，其中 $x$ 从 $-\infty$ 增加到 $+\infty$。证明引理 4.2 时，我们将利用引理 4.1，证明这些点可以始终保持足够接近，从而计算出的指标必定相同。

根据渐近极限，我们实际上需要考虑四种情形 s

$$p^{+,+}(\lambda_i)=\lim_{x\to+\infty}p^+(x;\lambda_i),\quad i=1,2,$$

根据定理 1.1 的假设，这些情形必然存在。具体而言，可能有 (1)$p^{+,+}(\lambda_i)\neq(-1,0)$，$i=1,2$；(2) $p^{+,+}(\lambda_1)\neq(-1,0)$，$p^{+,+}(\lambda_2)=(-1,0)$；(3) $p^{+,+}(\lambda_1)=(-1,0)$，$p^{+,+}(\lambda_2)\neq(-1,0)$；以及 (4) $p^{+,+}(\lambda_i)=(-1,0)$，$i=1,2$。

从情形 (1) 开始，我们首先注意到，可以取某个 $L$ 充分大，使得对于所有 $x\ge L$，都有 $p^{+}(x;\lambda_i)\neq(-1,0)$，$i=1,2$。我们可以得出，对于每个$i=1$、2，以及任意 $c_2\ge L$，

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_i),\mathcal{h}^+(\lambda_i);[c_2,+\infty])=0; \tag{4.8}$$

此外，对于情形（1），$\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 都不可能是特征值，因此必有 $p^{c_2}(c_2;\lambda_i)\neq(-1,0)$，$i=1,2$。

现在，我们考虑从点（$c_2,\lambda_1$）（马斯洛夫盒的左上角）开始演化 $p^{c_2}(x;\lambda)$ 和 $p^{+}(x;\lambda)$。根据引理 4.1，对于任意 $\epsilon>0$，我们都可以选择足够大的 $L$（可能比之前更大），使得对于所有 $c_2\ge L$

$$|p^{c_2}(x;\lambda_1)-p^+(x;\lambda_1)|<\epsilon \tag{4.9}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$。同样，根据引理 4.1，我们可以选择足够大的 $L$，使得对于所有 $c_2 \geq L$

$$|p^{c_2,-}(\lambda) - p^{+,-}(\lambda)| < \epsilon \tag{4.10}$$

对于所有 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$。最后，我们可以通过选取足够大的 $L$ 来补全一个 U 形轮廓，使得对于所有 $c_2 \geq L$

$$|p^{c_2}(x; \lambda_2) - p^{+}(x; \lambda_2)| < \epsilon \tag{4.11}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$。

此时，我们可以选取足够小的 $\epsilon$，使得点 $p^{c_2}(x; \lambda)$ 和 $p^{+}(x; \lambda)$ 所对应的绕数在以下 U 形轮廓上必定相同：(1) 固定 $\lambda = \lambda_1$，并令 $x$ 从 $c_2$ 减小到 $-\infty$ （渐近极限意义下）；(2) 对于渐近极限点 $p^{c_2,-}(\lambda)$ 和 $p^{+,-}(\lambda)$，令 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增大到 $\lambda_2$；(3) 固定 $\lambda = \lambda_2$，并令 $x$ 从 $-\infty$ 增大到 $c_2$。总之，我们得到指标关系

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^{-}(\cdot), \mathcal{h}(c_2; \cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_2), \mathcal{h}(c_2; \lambda_2); [-\infty, c_2]) \\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_1), \mathcal{h}(c_2; \lambda_1); [-\infty, c_2]) \\ &= \mathrm{Ind}(\mathcal{g}^{-}(\cdot), \mathcal{h}^{+}(\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_2), \mathcal{h}^{+}(\lambda_2); [-\infty, c_2]) \\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_1), \mathcal{h}^{+}(\lambda_1); [-\infty, c_2]). \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于该关系右侧的指标，我们可以利用 (4.8) 得到引理 4.2 右侧所述的表达式。对于该关系左侧的指标，我们注意到，依据底部架的不变性假设 (E)(3)，我们可以取足够大的 $L$，使得对于所有 $c_1 \leq -L$ 和 $c_2 \geq L$，$\tilde{\phantom{x}}$，缩放变量 $\psi_1^{c_2}(x; \lambda)$ 和 $\psi_2^{c_2}(x; \lambda)$ 在渐近矩形 $[-\infty, c_1] \times [\lambda_1, \lambda_2]$ 的任意点都不会同时为零。因此，我们可以利用马斯洛夫–阿诺德空间中的同伦不变性得到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^{-}(\cdot), \mathcal{h}(c_2; \cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_2), \mathcal{h}(c_2; \lambda_2); [-\infty, c_1)) \\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_1), \mathcal{h}(c_2; \lambda_1); [-\infty, c_1]) = \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_1; \cdot), \mathcal{h}(c_2; \cdot); [\lambda_1, \lambda_2]). \end{aligned}$$

如果我们考虑从这一最后关系中解出 $\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^{-}(\cdot), \mathcal{h}(c_2; \cdot); [\lambda_1, \lambda_2])$，并将所得结果代入（4.12）的左端，就会看到（4.12）的左端变为

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_1; \cdot), \mathcal{h}(c_2; ;); [\lambda_1, \lambda_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_2), \mathcal{h}(c_2; \lambda_2); [c_1, c_2]) - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot; \lambda_1), \mathcal{h}(c_2; \lambda_1); [c_1, c_2])$$

这正是引理 4.2 中所声称的左端。

转到情形 (2)，关键区别在于现在有 $p^{c_2}(c_2; \lambda_2) = (-1, 0)$，此外还有

$$p^{+,+}(\lambda_2) = \lim_{x \to +\infty} p^{+}(x; \lambda_2) = (-1, 0). \tag{4.13}$$

与情形 (1) 类似，我们希望在 $S^1$ 周围跟踪相关点，因为 $(x, \lambda)$ 沿着下方的 U 形轮廓移动；但对于情形 (2)，$p^{+}(c_2; \lambda_2)$ 的位置有三种子情形：(i) $p^{+}(c_2; \lambda_2)$ 沿顺时针方向从 $(-1, 0)$ 轻微旋转偏离；或 (ii) $p^{+}(c_2; \lambda_2) = (-1,0)$；或 $p^{+}(c_2; \lambda_2)$ 沿

逆时针方向从 $(-1,0)$ 轻微旋转偏离。根据 (4.13) 以及我们对在无界定义域上计算的超平面指标的规范，可以立即得到

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,+\infty]) = \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,c_2]) + \begin{cases} +1 & \text{case (i)} \\ 0 & \text{cases (ii) or (iii).} \end{cases} \tag{4.14}$$

对于所有情形，给定任意 $\epsilon > 0$，我们可以选取足够大的 $L$，使得对于所有 $c_2 \geq L$，(4.9)、(4.10) 和 (4.11) 均成立。因此，(4.12) 左右两边的量之差只能是 0 或 1。我们断言，差值恰好如下：用 (4.12) 右边减去左边所得的量，在情形 (i) 中必为 $+1$，在情形 (ii) 和 (iii) 中则为 0。为说明这一点，只需考虑以下可能情况：点 $p^{c_2}(c_2;\,\lambda_2)$ 和 $p^+(c_2;\,\lambda_2)$ 分别如何到达 $p^{c_2}(c_2;\,\lambda_2) = (-1,0)$ 以及情形 (i) 中 $p^+(c_2;\lambda_2)$ 所在的位置。忽略瞬时交叉（即交叉以及返回交叉）后，要么 $p^{c_2}(c_2;\lambda_2)$ 沿逆时针方向到达 $(-1,0)$ 的次数比 $p^+(c_2;\lambda_2)$ 多一次，要么 $p^+(c_2;\lambda_2)$ 沿顺时针方向穿越 $(-1,0)$ 的次数比 $p^+(c_2;\lambda_2)$ 多一次。无论哪种情况，差值都是 $+1$。情形 (ii) 和 (iii) 的推理类似，我们发现差值恰好为 (4.14) 右边的各个值。由此可见，(4.12) 左右两边之间可能出现的差值，在情形 (2) 中恰好通过在指标中纳入 $+\infty$ 得到了处理

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,+\infty]),$$

由此可见，引理 4.2 中的等式成立。

情形 (3) 和 (4) 可以用类似的方法处理。 □

从引理 4.2 可以清楚地看出，所述关系的左端对所有 $c_1 \leq -L$ 和 $c_2 \geq L$ 都取相同的值（因为右端与 $c_1$ 和 $c_2$ 无关）。为了根据 (4.3) 证明 $\mathfrak{m}(c_1,c_2)$ 实际上与 $c_1$ 和 $c_2$ 无关，我们最后还需要证明顶层指标

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_1,\lambda_2])$$

与 $c_2$ 无关（当 $c_2$ 充分大时）。为此，我们首先回顾一下：上边上的交叉点恰好对应于 (1.1) 的特征值，因此显然与 $c_2$ 无关。这意味着我们只需验证，与这些交叉点相关联的方向必定与 $c_2$ 无关。

如果 $[\lambda_1,\lambda_2]$ 中的特征值不是离散的，我们将 $\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1,\lambda_2])$ 设为 $=\infty$，在这种情况下，按照约定，定理 1.1 的断言成立，因此我们可以将分析限制在离散谱的情形。为此，我们假设 $\lambda_0 \in (\lambda_1,\lambda_2)$ 是一个孤立特征值，并取一个足够小的马斯洛夫盒，使得其中只有 $\lambda_0$ 这一个特征值。（见图 4.2。）特别地，当穿越这个小盒时，我们计算检测 $\mathcal{g}(x;\,\lambda)$ 与 $\mathcal{h}(x;\,\lambda)$ 之间交点的超平面指标。根据我们的假设 (E)(4)，沿着这个马斯洛夫盒及其内部具有不变性，因此我们可以在相应的马斯洛夫–阿诺德空间中使用同伦不变性，从而得出

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_0-h,\lambda_0+h]) \\ &\qquad - \operatorname{Ind}(\mathcal{g}(c_2+\Delta c_2;\cdot),\mathcal{h}(c_2+\Delta c_2;\cdot);[\lambda_0-h,\lambda_0+h]) = 0. \end{aligned}$$

由于对于这些超平面指标中的每一个，都只发生一次穿越，因此这些穿越必定方向相同。上述讨论针对的是内部值 $\lambda_0 \in (\lambda_1, \lambda_2)$，但如果 $\lambda_1$ 或 $\lambda_2$ 是特征值，则端点 $\lambda_0 = \lambda_1$ 和 $\lambda_0 = \lambda_2$ 也可以类似处理，此时盒子分别向 $\lambda_1$ 的右侧或 $\lambda_2$ 的左侧延伸。

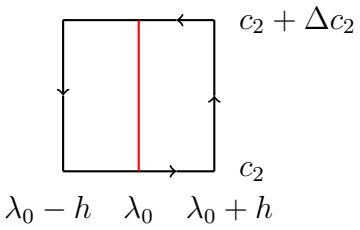



图 4.2： $\lambda_0$处的马斯洛夫盒。

这些考虑使我们能够为任意满足定理 1.1 假设的区间 $[\lambda_1, \lambda_2] \subset I$ 关联一个值 $\mathfrak{m}$ 。特别地，通过重新整理 (4.3)，我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) &= \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2), \mathcal{h}(c_2;\lambda_2); [c_1, c_2]) \\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}(c_2;\lambda_1); [c_1, c_2]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_1;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) - \mathfrak{m}.\end{aligned}$$

代入引理 4.2 中的关系后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot), \mathcal{h}(c_2;\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) &= \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2), \mathcal{h}^+(\lambda_2); [-\infty, +\infty]) \\ &\quad - \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [-\infty, +\infty]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot), \mathcal{h}^+(\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) - \mathfrak{m}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

最后，利用 (4.2)，我们得到所声称的不等式

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\#}([\lambda_1, \lambda_2]) \geq \Big| &\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2), \mathcal{h}^+(\lambda_2); [-\infty, +\infty]) \\ &- \mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [-\infty, +\infty]) + \mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot), \mathcal{h}^+(\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) - \mathfrak{m}\Big|.\end{aligned}$$

定理 1.1 的证明至此完成。

## 4.1 底部和左侧搁板

本节将补充介绍与底部和左侧搁板相关的计算，重点说明可以证明其中一个或两个值为 0 的情况。

### 4.1.1 底部搁板

在定理 1.1 中，与底部架相关联的超平面指标检测了空间 $\mathcal{g}^-(\lambda)$ 与 $\mathcal{h}^+(\lambda)$ 之间的交点，其中 $\lambda$ 从 $\lambda_1$ 增加到 $\lambda_2$。这些交点可以作为楔积的零点来检测

$$v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda),$$

其中，我们根据命题 3.1 回顾， $v^-(\lambda)$ 表示与特征值 $\mu_-(\lambda)$ 相关联的 $A_-(\lambda)$ 的右特征向量；根据命题 3.6 回顾， $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 表示与特征值 $-\mu_+(\lambda)$ 相关联的 $A_+(\lambda)$ 的右特征向量。一般而言，通过使用分别在 (1.31) 和 (1.32) 中定义的缩放变量 $\tilde{\psi}^+{}_{,1}{}^-(\lambda)$ 和 $\tilde{\psi}^+{}_{,2}{}^-(\lambda)$，可以显式计算沿底部架的超平面指标。在某些情况下，包括我们在第 6 节中考察的应用，我们可以证明，对于每个 $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$，都有 $v^-(\lambda) \wedge \mathcal{V}^+(\lambda) \neq 0$，由此可以得出沿底部架不存在交叉点。在这种情况下，我们自然地得到沿底部架的不变性，此外

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot), \mathcal{h}^+(\cdot); [\lambda_1, \lambda_2]) = 0.$$

### 4.1.2 左侧平台

在大多数应用中，我们希望取 $\lambda_1$ 足够小，使其不是 (1.1) 的特征值；在这种情况下，很容易验证该极限

$$\tilde{\psi}^{+,+}(\lambda_1) = \lim_{x \to +\infty} \tilde{\psi}^+(x; \lambda_1)$$

是良好定义的。具体而言，我们可以证明以下引理。

引理 4.3. 设假设 (A) 至 (D) 成立，并固定任意一个不是 (1.1) 特征值的 $\lambda_0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$。那么存在一个常数 $c_+(\lambda_0) \neq 0$，使得

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\mu_+(\lambda_0)x} \eta^-(x; \lambda_0) = c_+(\lambda_0) v^+(\lambda_0),$$

其中 $v^+(\lambda_0)$ 是与特征值 $\mu_+(\lambda_0)$ 对应的 $A_+(\lambda_0)$ 的特征向量。由此可得

$$\tilde{\psi}_1^{+,+}(\lambda_0) := \lim_{x \to +\infty} \tilde{\psi}_1^+(x; \lambda_0) = \frac{v^+(\lambda_0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda_0)}{|v^+(\lambda_0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda_0)|}$$
$$\tilde{\psi}_2^{+,+}(\lambda_0) := \lim_{x \to +\infty} \tilde{\psi}_2^+(x; \lambda_0) = \frac{v^+(\lambda_0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda_0)}{|v^+(\lambda_0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda_0)|}.$$

证明. 如同对 (1.13) 的讨论，我们令 $\{y_j^+(x; \lambda_0)\}_{j=1}^n$ 表示 (1.1) 的一组线性无关解，并按使 (1.13) 成立的方式为其编索引。于是存在常数 $\{c_j(\lambda_0)\}_{j=1}^n$，使得

$$\eta^-(x; \lambda_0) = \sum_{j=1}^n c_j(\lambda_0) y_j^+(x; \lambda_0), \quad i = 1, 2, \tag{4.16}$$

其中必须有 $c_n(\lambda_0) \neq 0$，否则 $\lambda_0$ 将是方程 (1.1) 的一个特征值（其含义见引言）。根据假设 (C) 以及我们的标记约定，解 $\{y_j^+(x; \lambda)\}_{j=1}^{n-1}$ 当 $x \to +\infty$ 时均为 $o(e^{\mu_+(\lambda_0)x})$，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} e^{-\mu_+(\lambda_0)x} \eta^-(x; \lambda_0) &= \sum_{j=1}^n c_j(\lambda_0) \lim_{x \to +\infty} e^{-\mu_+(\lambda_0)x} y_j^+(x; \lambda_0) \\ &= c_n(\lambda_0) \lim_{x \to +\infty} e^{-\mu_+(\lambda_0)x} y_n^+(x; \lambda_0) = c_n(\lambda_0) v^+(\lambda).\end{aligned}$$

将 $c_n(\lambda_0)$ 记为 $c_+(\lambda_0)$，即可得到引理的第一个结论。

对于第二个结论，我们可以写成

$$\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda_0) = \frac{(e^{-\mu_+(\lambda_0)x}\eta^-(x;\lambda_0)) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}{|e^{-\mu_+(\lambda_0)x}\eta^-(x;\lambda_0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)|},$$

由此可知，取 $x \to +\infty$ 后，关于 $\tilde{\psi}^{+,\ {}_1\ {}^+}(\lambda_0)$ 的结论显然成立。关于 $\tilde{\psi}^{+,\ {}_2\ {}^+}(\lambda_0)$ 的结论也可类似地得出。 □

在某些情况下，包括我们在第 6 节中考虑的应用，我们可以令 $\lambda_1$ 足够负，使得左侧平台上没有交叉。为了理解这一现象出现的条件，我们回顾一下，在左侧平台的计算中

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1); [-\infty, +\infty]),$$

我们检测演化子空间 $\mathcal{g}(x;\ \lambda_1)$ 与固定目标空间 $\mathcal{h}^+(\lambda_1)$ 之间的交点。如果我们能够证明

$$\eta^-(x;\lambda_1) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda_1) \neq 0$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立，并且当 $x \to \pm\infty$ 时极限处也不存在交点，那么我们就可以得出结论：左侧平台上没有交叉。在这部分讨论中，我们将大量借鉴 [33], 的论述，尤其是该文献中的命题 1.17 及其证明。

命题 4.1. 设假设 (A) 至 (D) 成立，且区间 $I$ 左侧无界。对于假设 (B) 中指定的矩阵 $A_\pm(\lambda)$，设 $A_-(\lambda) = A_+(\lambda)$，并假设存在对角化矩阵 $V_-(\lambda)$，使得对于每个 $\lambda \in I$，矩阵

$$D_-(\lambda) := V_-(\lambda)^{-1} A_-(\lambda) V_-(\lambda)$$

是对角矩阵，其对角线上是 $A_-(\lambda)$ 的特征值，特别是第一行第一列的元素为 $\mu_-(\lambda)$。此外，我们设

$$F(x;\lambda) := V_-(\lambda)^{-1}(A(x;\lambda) - A_-(\lambda))V_-(\lambda),$$

并假设以下三项：

(i) 存在一个正实常数 $\lambda_\infty$ 和相应的常数 $C_\infty$，使得对所有 $\lambda \leq -\lambda_\infty$，不等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x;\lambda)|dx \leq C_\infty.$$

(ii) 极限

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \int_{-\infty}^{x_0} |F(x;\lambda)|dx = 0$$

对所有 $\lambda \leq -\lambda_\infty$ 一致收敛。

(iii) 若 $e_1$ 表示通常的第一个欧几里得基向量，则

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(x;\lambda)e_1|dx=0.$$

在这些假设下，我们可以得出

$$V_-(\lambda)^{-1}(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda))=e_1+\mathbf{o}(1),\quad \lambda\to-\infty,$$

˜同样，如果 $z^+(x;\lambda)$ 是通过 (3.6) 与 $\mathcal{Y}^+(x;\lambda)$ 相关联的 $z^{+\prime}=-z^+A(x;\lambda)$ 的解，那么

$$e^{\mu_+(\lambda)x}z^+(x;\lambda)V_+(\lambda)e_1=1+\mathbf{o}(1),\quad \lambda\to-\infty,$$

在这两种情况下，阶项关于 $x\in\mathbb{R}$ 都是一致的。此外，当 $\lambda$ 趋近于 $-\infty$ 时，向量 $z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)$ 保持有界。

证明。我们先寻找具有以下形式的 (1.1) 的解

$$y(x;\lambda)=e^{\mu_-(\lambda)x}V_-(\lambda)(e_1+v(x;\lambda))$$

通过直接计算，我们得到

$$v'(x;\lambda)=V_-(\lambda)^{-1}(A_-(\lambda)-\mu_-(\lambda)I)V_-(\lambda)(e_1+v(x;\lambda))+F(x;\lambda)(e_1+v(x;\lambda)).$$

为方便记号，我们设

$$B_-(\lambda):=V_-(\lambda)^{-1}(A_-(\lambda)-\mu_-(\lambda)I)V_-(\lambda),$$

并且我们注意到，根据关于 $V_-(\lambda)$ 的约定，有 $B_-(\lambda)e_1=0$。因此，我们可以将 $v'(x;\lambda)$ 表示为更紧凑的形式

$$v'=B_-(\lambda)v+F(x;\lambda)(v+e_1).\tag{4.17}$$

我们的首要目标是利用最后这个关系，得到 $v(x;\lambda)$ 的一个便捷表达式；但首先，我们确定当 $x$ 趋于 $-\infty$ 时，$v(x;\lambda)$ 的渐近行为。我们尤其关注与 $\eta^-(x;\lambda)$ 相关联的函数 $v$，并将其定义为满足以下关系的函数

$$\eta^-(x;\lambda)=e^{\mu_-(\lambda)x}V_-(\lambda)(v(x;\lambda)+e_1).\tag{4.18}$$

解出 $v(x;\lambda)$，得到

$$v(x;\lambda)=-e_1+e^{-\mu_-(\lambda)x}V_-(\lambda)^{-1}\eta^-(x;\lambda).$$

根据命题 3.1，我们有如下收敛关系

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)=v^-(\lambda),$$

其中，$v^-(\lambda)$ 是 $V_-(\lambda)$ 的第一列（$A_-(\lambda)$ 对应于特征值 $\mu_-(\lambda)$ 的特征向量）。由此可得 $V_-(\lambda)^{-1}v^-(\lambda)=e_1$，因此 $v(x;\lambda)\to 0$ as$x\to-\infty$。

现在回到 (4.17)，注意我们可以将该方程表示为

$$(e^{-B_-(\lambda)x}v)' = e^{-B_-(\lambda)x}F(x;\lambda)(v+e_1).$$

由于 $\mu_-(\lambda)$ 是 $A_-(\lambda)$ 的最大特征值， $B_-(\lambda)$ 的特征值必定全部为非正值。注意到 $v$ 在任意区间 $[x_0, x]$, $x_0 < x$ 上都有界，我们可以在任意这样的区间上积分，从而得到关系式

$$e^{-B_-(\lambda)x}v(x;\lambda) - e^{-B_-(\lambda)x_0}v(x_0;\lambda) = \int_{x_0}^{x} e^{-B_-(\lambda)\xi}F(\xi;\lambda)(v(\xi;\lambda)+e_1)d\xi. \tag{4.19}$$

指数函数 $e^{-B_-(\lambda)^{x_0}}$ 保持有界，当 $x_0 \to -\infty$ 时， $v(x_0) \to 0$ ，当 $x_0 \to -\infty$ 时。此外，由于假设 $F(\xi;\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积（假设 (i)），我们可以令 $x_0 \to -\infty$ ，并对上述最后一个表达式两边取极限，从而得到

$$e^{-B_-(\lambda)x}v(x;\lambda) = \int_{-\infty}^{x} e^{-B_-(\lambda)\xi}F(\xi;\lambda)(v(\xi;\lambda)+e_1)d\xi,$$

或者等价地

$$v(x;\lambda) = \int_{-\infty}^{x} e^{B_-(\lambda)(x-\xi)}F(\xi;\lambda)(v(\xi;\lambda)+e_1)d\xi.$$

根据构造， $B_-(\lambda)$ 是一个对角矩阵，并且容易看出 $\exp(B_-(\lambda)(x-\xi))$ 的矩阵范数为 1。因此可以写成

$$\begin{aligned}
|v(x;\lambda)| &\le \int_{-\infty}^{x} |e^{B_-(\lambda)(x-\xi)}||F(\xi;\lambda)(v(\xi;\lambda)+e_1)|d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{x} |F(\xi;\lambda)(v(\xi;\lambda)+e_1)|d\xi \\
&\le \int_{-\infty}^{x} |F(\xi;\lambda)v(\xi;\lambda)|d\xi + \int_{-\infty}^{x} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi \\
&\le \sup_{\xi\le x}|v(\xi;\lambda)| \int_{-\infty}^{x} |F(\xi;\lambda)|d\xi + \int_{-\infty}^{x} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi.
\end{aligned}$$

利用假设 (ii)，我们可以令 $x_0$ 足够小（负），使得对所有 $x \le x_0$,

$$|v(x;\lambda)| \le \frac{1}{2}\sup_{\xi\le x_0}|v(\xi;\lambda)| + \int_{-\infty}^{x_0} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi.$$

现在，我们可以对等式两边取上确界，从而得到

$$\frac{1}{2}\sup_{\xi\le x_0}|v(\xi;\lambda)| \le \int_{-\infty}^{x_0} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi.$$

利用假设 (iii)，我们看到该最后表达式的右端在 $\lambda \to -\infty$ 时趋于 0，因此对于某个固定的 $x_0 \ll 0$，我们可以断言

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\sup_{\xi\le x_0}|v(\xi;\lambda)| = 0.$$

现在我们将 $x_0$ 固定为这样的一个值，并回到 (4.19)，可得

$$|v(x;\lambda)| \le \Big(|v(x_0;\lambda)| + \int_{x_0}^{x} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi\Big) + \int_{x_0}^{x} |F(\xi;\lambda)||v(\xi;\lambda)|d\xi.$$

若将 Gr¨onwall 不等式应用于这一积分关系，我们便得到不等式

$$\begin{aligned} |v(x;\lambda)| &\le \Big(|v(x_0;\lambda)| + \int_{x_0}^{x} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi\Big)e^{\int_{x_0}^{x}|F(\xi;\lambda)|d\xi} \\ &\le \Big(|v(x_0;\lambda)| + \int_{x_0}^{\infty} |F(\xi;\lambda)e_1|d\xi\Big)e^{\int_{x_0}^{\infty}|F(\xi;\lambda)|d\xi}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

这里，大括号内的量在 $\lambda \to -\infty$ 时趋于 0，因此我们可以选取足够大的 $\lambda_\infty \gg 0$，使得对于所有 $x \in \mathbb{R}, \lambda \le -\lambda_\infty$， $v(x;\lambda)$ 都很小。

最后，将 （4.18）左乘 $V_-(\lambda)^{-1}e^{-\mu_-(\lambda)x}$，便得到关系式

$$V_-(\lambda)^{-1}(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) = e_1 + v(x;\lambda).$$

我们已看 出，对于 $x \in \mathbb{R}$， $v(x;\lambda) = o(1)$，且是一致的，从而得到第一个结论 .

第二个断言的证明方法类似：将 [33] 中的命题 1.17 证明的第二部分与当前证明的第一部分结合起来。这里，我们主要说明如何得出关于 $z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)$有界性的最后一个观察。此处的证明从设定

$$w(x;\lambda) := -e_1^T + e^{\mu_+(\lambda)x}z^+(x;\lambda)V_+(\lambda).$$

接着，按照本证明第一部分的方法，我们可以证明存在一个足够大的常数 $C$，使得对所有足够小的 $\lambda$，都有以下界

$$|w(x;\lambda)| \le C, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

特别地， $w(0;\lambda)$满足这一估计，并且有如下关系

$$z^+(0;\lambda)V_+(\lambda) = e_1^T + w(0;\lambda),$$

这验证了当 $\lambda \to -\infty$时，左端有界。 □

注记 4.1. 在命题 4.1 的证明中，唯一绝对需要假设 $A_- = A_+$ 的地方，是推导不等式 (4.20) 中的第二个不等式。不过，这一假设在该处至关重要；对于一般情形的 $A_- \ne A_+$，要验证左侧平台上不存在交叉会更为棘手。（本文附录中给出了一个例子。）

现在我们可以利用命题 4.1，证明关于左侧平台上穿越的以下结论。

命题 4.2. 假设命题 4.1 的假设成立。那么存在一个充分大的值 $\lambda_\infty > 0$，使得对所有 $\lambda_1 \le -\lambda_\infty$，都有

$$\mathcal{g}(x;\lambda_1) \cap \mathcal{h}^+(\lambda_1) = \{0\}$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}$，尤其是，

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1), \mathcal{h}^+(\lambda_1), [-\infty, +\infty]) = 0.$$

$Pr$哎。首先，左侧平台上的交叉恰好对应于.....的零点

$$(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda),$$

根据命题 3.5，可将其表示为

$$w^+(\lambda)\cdot(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)),$$

˜其中 $w^+(\lambda)$ 与 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 的关系如 3.5 所示。

根据命题 4.2，我们有如下渐近关系

$$V_-(\lambda)^{-1}(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) = e_1 + \mathbf{o}(1), \quad \lambda \to -\infty,$$

对 $x \in \mathbb{R}$ 一致地成立；根据假设 (C) 中的归一化，以及我们的假设—— $A_+(\lambda)$ 可对角化——可写为

$$w^+(\lambda)V_+(\lambda) = e_1^T.$$

在命题 4.1 的假设下，我们有 $V_-(\lambda) = V_+(\lambda)$，因此可以计算

$$\begin{aligned} w^+(\lambda)\cdot(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) &= e_1^T V_-(\lambda)^{-1}(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) \\ &= e_1^T(e_1 + \mathbf{o}(1)) = 1 + \mathbf{o}(1). \end{aligned}$$

我们立即看出，当 $\lambda$ 足够负时，必有

$$(e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda) > 0,$$

对所有 $x \in \mathbb{R}$，这表明左侧平台上没有交叉。 □

# 5 埃文斯函数

我们的目标之一，是将从 Evans函数中获得的信息置于当前分析的更广泛几何框架中。在这一背景下，Evans函数已在 [33], 中得到优雅的发展，因此我们主要通过将其中的结果转化到当前背景下来继续讨论。

一般而言，Evans函数可作为特征值问题的特征函数，例如 (1.1)（标准参考文献包括 [1, 15, 16, 17, 18, 20], 以及 [33]）。对于满足假设 (A) 至 (D) 的 (1.1)，自然可以将 Evans函数规范为楔积

$$D(\lambda) := \eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda), \tag{5.1}$$

其中，命题 3.4 使我们能够验证右侧与 $x$ 无关（即它关于 $x$ 的导数为 0）。

注 5.1。根据命题 3.5，我们的规范 (5.1) 等价于 *[33],* 中的规范；其中，取 $z$ 如命题 3.5 所述，可将其在此处表示为

$$D_{PW}(\lambda) = z(0;\lambda)\cdot\eta^-(0;\lambda).$$

这种 $D(\lambda)$ 与 $D_{PW}(\lambda)$ 之间的对应关系，使我们能够将 *[33]* 中的结果直接应用于当前情形；不过，为了完整起见，我们仍给出部分证明细节。

命题 5.1. 设假设 (A) 至 (D) 成立，并令 Evans函数 $D(\lambda)$ 按照 (5.1) 定义。那么，对于任意 $\lambda \in I$,

$$\begin{aligned} D'(\lambda) = \Big(\frac{v^{-\prime}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{-}(\lambda)}{v^{-}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{-}(\lambda)} + \frac{v^{+}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{+\prime}(\lambda)}{v^{+}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{+}(\lambda)}\Big) D(\lambda) \\ + \int_{-\infty}^{0} \Big((A_\lambda(x;\lambda) - \mu_-'(\lambda) I)\eta^{-}(x;\lambda)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^{+}(x;\lambda) dx \\ + \int_{0}^{+\infty} \Big((A_\lambda(x;\lambda) - \mu_+'(\lambda) I)\eta^{-}(x;\lambda)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^{+}(x;\lambda) dx. \end{aligned}$$

这里，$v^{-}(\lambda)$ 是 $A_-(\lambda)$ 对应于特征值 $\mu_-(\lambda)$ 的特征向量；$\mathcal{V}^{-}(\lambda)$ 是 $A_-(\lambda)$ 对应于特征值 $-\mu_-(\lambda)$ 的特征向量；$v^{+}(\lambda)$ 是 $A_+(\lambda)$ 对应于特征值 $\mu_+(\lambda)$ 的特征向量；而 $\mathcal{V}^{+}(\lambda)$ 是 $A_+(\lambda)$ 对应于特征值 $-\mu_+(\lambda)$ 的特征向量。

证明。我们的命题 5.1 实际上是对当前情形下 [33] 中定理 1.11 的重述，因此我们只简要概述证明，并将其调整为适用于当前情形。首先，对于$x < 0$，写成如下形式会很有用：

$$D(\lambda) = u^{-}(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}(x;\lambda),$$

这里我们引入记号

$$\begin{aligned} u^{-}(x;\lambda) &:= e^{-\mu_-(\lambda)x}\eta^{-}(x;\lambda) \\ \tilde{\mathcal{U}}^{-}(x;\lambda) &= e^{+\mu_-(\lambda)x}\tilde{\mathcal{Y}}^{+}(x;\lambda). \end{aligned}$$

回忆起 $\eta^{-\prime} = A\eta^{-}$ 和 $\mathcal{Y}^{+\prime} = A\mathcal{Y}^{+}$，我们可以写成

$$\begin{aligned} u^{-\prime} &= -\mu_- u^{-} + Au \\ \tilde{\mathcal{U}}^{-\prime} &= \mu_- \tilde{\mathcal{U}}^{-} + \tilde{A}\tilde{\mathcal{U}}^{-}. \end{aligned}$$

对这些表达式关于 $\lambda$ 求导，我们得到

$$\begin{aligned} u_\lambda^{-\prime} &= -\mu_-' u^{-} - \mu_- u_\lambda^{-} + A_\lambda u^{-} + A u_\lambda^{-} \\ \tilde{\mathcal{U}}_\lambda^{-\prime} &= \mu_-' \tilde{\mathcal{U}}^{-} + \mu_- \tilde{\mathcal{U}}_\lambda^{-} + \tilde{A}_\lambda \tilde{\mathcal{U}}^{-} + \tilde{A}\tilde{\mathcal{U}}_\lambda^{-}. \end{aligned}$$

现在，我们对 $u_\lambda^{-} \wedge \mathcal{U}^{-}$ 关于 $x$ 求导，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(u_\lambda^{-} \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}) &= \Big((A_\lambda - \mu_-' I)u^{-}\Big) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-} + (Au_\lambda^{-}) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-} + u_\lambda^{-} \wedge (\tilde{A}\tilde{\mathcal{U}}^{-}) \\ &= \Big((A_\lambda - \mu_-' I)u^{-}\Big) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}, \end{aligned}$$

其中第二个等式由命题 3.4 得出。对于 $R > 0$，现在我们可以在 $(-R, 0)$ 上积分，从而得到关系式

$$\begin{aligned} u_\lambda^{-}(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}(0;\lambda) - u_\lambda^{-}(-R;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}(-R;\lambda) \\ = \int_{-R}^{0} \Big((A_\lambda(x;\lambda) - \mu_-'(\lambda) I)u^{-}(x;\lambda)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^{-}(x;\lambda) dx. \end{aligned} \tag{5.2}$$

接下来，我们的目标是求当 $R$ 趋于 $+\infty$ 时该表达式的极限。为此，我们首先需要仔细考察楔积 $u_\lambda^-(-R;\,\lambda)\wedge\mathcal{U}^-(-R;\,\lambda)$。从$u_\lambda^-(-R;\,\lambda)$ 开始，我们回顾命题 3.1（以及 $u^-(-R;\lambda)$ 的定义）可知

$$\lim_{R\to+\infty} u^-(-R;\lambda)=v^-(\lambda),$$

其中， $v^-(\lambda)$ 在 $\Omega$ 上解析，且该收敛在 $\Omega$ 的紧子集上一致。由此可知，关于 $\lambda$ 的导数的极限收敛到极限的导数，

$$\lim_{R\to+\infty} u_\lambda^-(-R;\lambda)=v^{-\prime}(\lambda).$$

接下来，对于 $\mathcal{U}^-(-R;\,\lambda)$，我们面临一个问题：当 $R$ 取较大值时，没有便于使用的 $\mathcal{Y}^+(-R;\,\lambda)$ 表达式。尽管如此，回想一下， $\mathcal{Y}^+(x;\,\lambda)$ 可视为常微分方程 $\mathcal{Y}^{+\prime}=A(x;\,\lambda)\mathcal{Y}^+$ 的一个解，因此，我们可以通过该常微分方程的一组解基来刻画 $\mathcal{Y}^+(-R;\,\lambda)$，这组解基是针对 $x\ll 0$ 构造的。具体而言，在命题 3.6 的假设下，我们可以为 $\mathcal{Y}'=A(x;\,\lambda)\mathcal{Y}$ 的解构造一组基 $\{\mathcal{Y}_j^-(x;\,\lambda)\}_{j=1}^n$，其编号方式使得

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-\mu_-(\lambda)R}\tilde{\mathcal{Y}}_1^-(-R;\lambda)=\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda),$$

其中， $\mathcal{V}^-(\lambda)$是 $A_-(\lambda)$的一个特征向量，对应于特征值 $-\mu_-(\lambda)$（它是 $A_-(\lambda)$最负的特征值），此外

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-\mu_-(\lambda)R}\tilde{\mathcal{Y}}_j^-(-R;\lambda)=0,\quad j=2,3,\dots,n.$$

现在，如果我们写成

$$\tilde{\mathcal{Y}}^+(-R;\lambda)=\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j(\lambda)\tilde{\mathcal{Y}}_j^-(-R;\lambda),$$

对于某些展开系数 $\{\tilde{c}_j(\lambda)\}_{j=1}^n$，则

$$\tilde{\mathcal{U}}^-(-R;\lambda)=\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j(\lambda)e^{-\mu_-(\lambda)R}\tilde{\mathcal{Y}}_j^-(-R;\lambda),$$

and

$$\lim_{R\to+\infty}\tilde{\mathcal{U}}^-(-R;\lambda)=\tilde{c}_1(\lambda)\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda).$$

为了更好地理解展开系数 $\tilde{c}_1(\lambda)$的性质，我们回想一下，$D(\lambda)$与 $x$无关，因此可以写成

$$D(\lambda)=\lim_{R\to+\infty} u^-(-R;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^-(-R;\lambda)=\tilde{c}_1(\lambda)v^-(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda).$$

我们可以看到

$$\tilde{c}_1(\lambda)=\frac{D(\lambda)}{v^-(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)},$$

因此

$$\lim_{R\to+\infty} u_\lambda^-(-R;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^-(-R;\lambda)=\frac{v^{-\prime}(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)}{v^-(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)}D(\lambda).$$

将这一最后的关系与 (5.2) 结合，并令 $R\to-\infty$ 趋于极限，我们得到关系式

$$\begin{aligned}u_\lambda^-(0;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^-(0;\lambda)&=\frac{v^{-\prime}(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)}{v^-(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)}D(\lambda)\\&+\int_{-\infty}^0\Big((A_\lambda(x;\lambda)-\mu'_-(\lambda)I)u^-(x;\lambda)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^-(x;\lambda)dx.\end{aligned}\tag{5.3}$$

通过类似的计算，若从

$$D(\lambda)=u^+(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(x;\lambda),$$

其中

$$\begin{aligned}u^+(x;\lambda)&:=e^{-\mu_+(\lambda)x}\eta^-(x;\lambda)\\\tilde{\mathcal{U}}^+(x;\lambda)&=e^{+\mu_+(\lambda)x}\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda).\end{aligned}$$

我们得到关系式

$$\frac{d}{dx}(u^+(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}_\lambda^+(x;\lambda))=u^+(x;\lambda)\wedge((\tilde{A}_\lambda(x;\lambda)+\mu'_+(\lambda)I)\tilde{\mathcal{U}}^+(x;\lambda)).$$

Up在 (0, $R$) 上积分并利用命题 3.4，我们得到关系式

$$\begin{aligned}&u_\lambda^+(R;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(R;\lambda)-u_\lambda^+(0;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(0;\lambda)\\&=\int_0^R\Big((-A_\lambda(x;\lambda)+\mu'_+(\lambda)I)u^+(x;\lambda)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(x;\lambda)dx.\end{aligned}\tag{5.4}$$

按照前面类似的方法进行，我们得到关系式

$$\lim_{R\to+\infty} u_\lambda^+(R;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(R;\lambda)=\frac{v^+(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^{+\prime}(\lambda)}{v^+(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}D(\lambda),$$

并由 (5.4)（通过令 $R$ 趋于 $+\infty$取极限）

$$\begin{aligned}u_\lambda^+(0;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(0;\lambda)&=\frac{v^+(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^{+\prime}(\lambda)}{v^+(\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}D(\lambda)\\&+\int_0^{+\infty}\Big((A_\lambda(x;\lambda)-\mu'_+(\lambda)I)u^+(x;\lambda)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{U}}^+(x;\lambda)dx.\end{aligned}\tag{5.5}$$

在这一点上，我们来注意这个关系

$$\begin{aligned}u^-(0;\lambda)&=u^+(0;\lambda)=\eta^-(0;\lambda)\\\tilde{\mathcal{U}}^-(0;\lambda)&=\tilde{\mathcal{U}}^+(0;\lambda)=\tilde{\mathcal{Y}}^+(0;\lambda).\end{aligned}$$

从.....开始

$$D(\lambda) = u^-(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^-(0;\lambda),$$

这些关系使我们可以写成

$$\begin{aligned} D'(\lambda) &= u^-_\lambda(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^-(0;\lambda) + u^-(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^-_\lambda(0;\lambda) \\ &= u^-_\lambda(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^-(0;\lambda) + u^+(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{U}}^+_\lambda(0;\lambda). \end{aligned}$$

将这一最后的关系与 (5.3) 和 (5.5) 结合起来，我们得到命题 5.1 的结论。

□

在下面的命题中，我们讨论一个对应用很重要的特殊情形。

命题 5.2. 设假设 (A) 至 (D) 成立，且另有 $A_{\lambda\lambda}(x;0) = 0$（若 $A(x;\lambda)$ 关于 $\lambda$ 呈线性，则此条件显然成立），并令 Evans函数 $D(\lambda)$ 如 (5.1) 所定义。若 $D(0) = 0$，则

$$D'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx.$$

此外，若还满足 $D'(0) = 0$，则

$$D''(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(A_\lambda(x;0)\eta^-_\lambda(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+_\lambda(x;0)dx.$$

证明。首先，根据命题 5.1，我们有如下关系

$$\begin{aligned} D'(0) = &\int_{-\infty}^{0} \Big((A_\lambda(x;0) - \mu'_-(0)I)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx \\ &+ \int_{0}^{+\infty} \Big((A_\lambda(x;0) - \mu'_+(0)I)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx. \end{aligned}$$

˜楔积 $\eta^-(x;0) \wedge \mathcal{Y}^+(x;0)$ 就是 $D(0)$，因此恒等于 0，从而可将其化简为

$$D'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx,$$

正如所述。

接下来，我们假设 $D(0) = 0$ 且 $D'(0) = 0$，并计算 $D''(0)$。我们通过对命题 5.1 中 $D'(\lambda)$ 的表达式求导来进行计算。首先，由于 $D(0) = 0$ 且 $D'(0) =$0，我们看到，关于 $\lambda$ 的导数

$$\Big(\frac{v^{-\prime}(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)}{v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^-(\lambda)} + \frac{v^+(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^{+\prime}(\lambda)}{v^+(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)}\Big) D(\lambda),$$

在 $\lambda = 0$ 处求值必须为 0。 $D'(\lambda)$ 中的其余项可表示为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} \Big(A_\lambda(x;\lambda)\eta^-(x;\lambda)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda) - \mu'_-(\lambda)D(\lambda)dx \\ &\qquad + \int_{0}^{+\infty} \Big(A_\lambda(x;\lambda)\eta^-(x;\lambda)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) - \mu'_+(\lambda)D(\lambda)dx. \end{aligned}$$

在 $\lambda$ 处进行微分并在 $\lambda=0$ 处求值（并使用假设 $A_{\lambda\lambda}(x;0)=0$、$D(0)=0$ 和 $D'(0)=0$）后，剩下

$$D''(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(A_\lambda(x;0)\eta_\lambda^-(x;0)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{Y}}_\lambda^+(x;0)dx,$$

正如所声称的。 □

为了充分利用命题 5.2 中关于 $D'(0)$ 和 $D''(0)$ 的关系，弄清 $\tilde{\omega}_1(x;\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 之间的联系很有帮助。为此，根据命题 3.1 和 3.6 以及规范

$$D(\lambda)=\eta^-(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;\lambda)$$

and

$$\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)=\eta^-(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda),$$

可知，对于任意闭区间 $K\subset I$ 和任意 $\epsilon>0$，我们可以取充分大的 $x>0$，使得

$$|D(\lambda)-e^{-\mu_+(\lambda)x}\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)|<\epsilon \tag{5.6}$$

对所有 $\lambda\in K$ 均成立。由于 $D(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 处解析，因此当 $\lambda$ 充分接近 0 时，其符号由第一个非零值 $D(0)$、$D'(0)$、$D''(0)$ 等通过关系

$$D(\lambda)=D(0)+D'(0)\lambda+\frac{1}{2}D''(0)\lambda^2+\dots.$$

为了清楚说明这一过程，我们来看具体情形：$D(0)=0$，且 $D'(0)>0$；并假设（正如在我们的应用中那样），通过取充分大的 $x$，我们可以确定 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$ 的符号，例如 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)>0$。在这些条件下，存在一个充分小的值 $\delta>0$，使得对所有 $\lambda\in(-\delta,0)$，$D(\lambda)<0$，特别是 $D(-\delta/2)<0$。˜由此可知，我们可以取充分大的 $x$，使得 $\psi_1(x;-\delta/2)<0$（因为根据 (5.6)，必有 $\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)<0$）。由于 $\tilde{\psi}_2(x;\lambda)$ 关于 $\lambda$ 光滑依赖，我们还可以选择足够小的 $\delta$，使得 $\psi_2(x;-\delta/2)>0$，从而使 $p^+(x;-\delta/2)$ 位于第二象限。我们可以得出

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(x;\cdot),\mathcal{h}(x;\cdot);[-\delta/2,0])=+1.$$

回到定理 1.1 的证明中的 (4.15)，我们可以写成（其中 $\lambda_2=0$）

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(c_2;\cdot),\mathcal{h}(c_2;\cdot);[\lambda_1,-\delta/2])+\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(x;\cdot),\mathcal{h}(x;\cdot);[-\delta/2,0])\\&\quad=\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,+\infty])-\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}^+(\lambda_1);[-\infty,+\infty])\\&\quad+\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot),\mathcal{h}^+(\cdot);[\lambda_1,\lambda_2])-\mathfrak{m},\end{aligned} \tag{5.7}$$

由此，我们现在得到 $\mathcal{N}_\#([\lambda_1,\lambda_2))$ 的下界，而不是 $\mathcal{N}_\#([\lambda_1,\lambda_2])$ 的下界。特别是，在这种情况下，我们得到如下关系

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_\#([\lambda_1,\lambda_2))+1\geq\Big|&\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_2),\mathcal{h}^+(\lambda_2);[-\infty,+\infty])-\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;\lambda_1),\mathcal{h}^+(\lambda_1);[-\infty,+\infty])\\&+\mathrm{Ind}(\mathcal{g}^-(\cdot),\mathcal{h}^+(\cdot);[\lambda_1,\lambda_2])-\mathfrak{m}\Big|.\end{aligned} \tag{5.8}$$

通过计算 $D(\lambda)$ 在 $\lambda$趋于 $-\infty$ 时的极限，还可以进一步了解 (1.1) 的谱。为此，我们将利用命题 4.1，因此采用其中所述的相同假设。

命题 5.3. 设命题 4.1 的假设成立，并设 $D(\lambda)$ 如 (5.1) 中所述。则

$$\lim_{\lambda\to-\infty} D(\lambda) = 1.$$

证明. 首先，回顾一下，$v^-(\lambda)$ 表示与特征-˜值 $\mu_-(\lambda)$ 对应的 $A_-(\lambda)$ 的特征向量，而 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 表示与特征值˜$-\mu_+(\lambda)$ 对应的 $A_+(\lambda)$ 的特征向量。由假设 (C) 实施的归一化以及 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 与 $w^+(\lambda)$ 之间的关系（见注 3.1）为

$$v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda) = 1. \tag{5.9}$$

根据命题 4.1，我们有以下关系

$$V_-(\lambda)^{-1}\eta^-(0;\lambda) = e_1 + \mathbf{o}(1), \quad \lambda \to -\infty,$$

and

$$z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)e_1 = 1 + \mathbf{o}(1), \quad \lambda \to -\infty,$$

其中，根据命题 4.1 的假设，我们有 $V_-(\lambda) = V_+(\lambda)$。利用注 5.1，现在可以计算

$$\begin{aligned} D(\lambda) = \eta^-(0;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(0;\lambda) &= z^+(0;\lambda)\cdot\eta^-(0;\lambda) = z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)V_-(\lambda)^{-1}\eta^-(0;\lambda) \\ &= z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)(e_1+\mathbf{o}(1)) = z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)e_1 + z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)\mathbf{o}(1) = 1+\mathbf{o}(1), \end{aligned}$$

其中用到了 $z^+(0;\lambda)V_+(\lambda)$ 的有界性（来自命题 4.1 的最后一项断言）。

□

# 6 应用

本节通过两个应用来说明定理 1.1 的实施。

## 6.1 广义 KdV 方程

作为第一个应用，我们考虑作为广义 Korteweg–De Vries 方程的解出现的行波 $\bar{u}(x-st)$

$$u_t + f(u)_x = -u_{xxx}, \quad f(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}, \quad p \geq 1. \tag{6.1}$$

对于这些计算，转到一个移动坐标系会更方便，在该坐标系中，$\bar{u}(x)$ 是以下方程的定常解

$$u_t + (f(u) - su)_x = -u_{xxx}. \tag{6.2}$$

由此可得， $\bar{u}(x)$ 是常微分方程的一个解

$$\bar{u}^p\bar{u}' - s\bar{u}' = -\bar{u}''', \tag{6.3}$$

对于这些情况，我们可以很容易地检验出，对于 $s > 0$

$$\bar{u}(x) = \alpha\,\mathrm{sech}^{2/p}(\gamma x), \quad \alpha = (\frac{1}{2}s(p+1)(p+2))^{1/p}, \quad \gamma = \frac{p\sqrt{s}}{2} \tag{6.4}$$

是一个精确解。（这些解取自 [33]。）我们的目标是利用前面的分析，分析波 (6.4) 作为 (6.2) 的解时的谱稳定性／不稳定性。

如果我们将 (6.2) 在波 $\bar{u}(x)$ 附近线性化，就得到相应的特征值问题

$$L\phi = -\phi''' - (a(x)\phi)' = \lambda\phi, \quad a(x) = \bar{u}(x)^p - s. \tag{6.5}$$

作为分析的起点，我们回顾 [21, 30] 中的结果： $L$ 的本质谱可以由渐近方程确定

$$-\phi''' - a_\pm\phi' = \lambda\phi, \tag{6.6}$$

其中

$$a_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} a(x) = -s = -4\frac{\gamma^2}{p^2}.$$

（对于这一应用， $a_- = a_+$，因此下标 $\pm$ 意在表示两侧同时进行分析。）确切地说， $L$ 的本质谱由满足以下条件的值 $\lambda$ 构成：对于某个 $k \in \mathbb{R}$， $\phi(x;k) = e^{ikx}$ 是 (6.6) 的解，即

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = ik^3 - ia_\pm k,\ k \in \mathbb{R}\},$$

即虚轴。

按照通常的做法，我们通过引入向量函数$y = (y_1\ y_2\ y_3)^T$，并令 $y_1 = \phi$、 $y_2 = \phi'$和 $y_3 = \phi''$，将 (6.5) 表示为一阶系统，从而得到 (1.1)，其中

$$A(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda - a'(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.7}$$

相应地

$$A_\pm(\lambda) := \lim_{x\to\pm\infty} A(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda & -a_\pm & 0 \end{pmatrix}.$$

对于每个固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$， $A_\pm(\lambda)$的特征值是三次多项式 $\mu$ 的根

$$h(\mu;\lambda) = \mu^3 + a_\pm\mu + \lambda. \tag{6.8}$$

对于 $\lambda = 0$，很容易求得根为

$$\mu_1(0) = -2\frac{\gamma}{p}, \quad \mu_2(0) = 0, \quad \mu_3(0) = 2\frac{\gamma}{p},$$

这里我们回想起 $a_\pm = -4\frac{\gamma^2}{p^2}$。随着 $\lambda$ 从 0 开始减小， $h(\mu;\lambda)$ 的图像将保持相同的形状，但整体下移，因此根 $\mu_1(\lambda)$ 和 $\mu_2(\lambda)$ 起初会相互靠近，而根 $\mu_3(\lambda)$ 则会增大。随着 $\lambda$ 继续减小，根 $\mu_1(\lambda)$ 和$\mu_2(\lambda)$ 将在某个值 $\lambda = \lambda_c$ 处合并为一对共轭复数。$\lambda_c$ 的精确值对我们的分析并不重要，但很容易求得其值为

$$\lambda_c = -2(s/3)^{3/2}. \tag{6.9}$$

对于高于 $\lambda$ 该并合值的情况（即对于 $\lambda \in (\lambda_c, 0]$），我们可以将一个特征向量 $v_j(\lambda)$ 与每个 $\mu_j(\lambda)$、$j \in \{1,2,3\}$ 相关联，

$$v_j(\lambda) = (1\ \mu_j(\lambda)\ \mu_j(\lambda)^2)^T, \quad j = 1,2,3. \tag{6.10}$$

相应地，可以直接将（1.1）的三个线性无关解与 $A(x;\lambda)$ 对应起来，其中 $A(x;\lambda)$ 如（6.7）所示，

$$y_j^\pm(x;\lambda) = e^{\mu_j(\lambda)x}(v_j(\lambda) + E_j^\pm(x;\lambda)),$$

其中，对于某个固定常数$\alpha > 0$，$E_j^\pm(x;\lambda) = O(e^{-\alpha|x|})$ 在 $\lambda$ 上的一致性成立，并且在 $I$ 的紧子集上一致。（例如参见 [35]。）特征向量 $v_3(\lambda)$ 对所有 $\lambda \le 0$ 都具有相同的形式，并且除缩放选择外，等于命题 3.1 中的 $v^-(\lambda)$。同样，除缩放选择外，$\eta^-(x;\lambda)$ 等于 $y_3^-(x;\lambda)$。另一方面，一旦 $\lambda$ 降至并合阈值，就很难将与 $\mu_1(\lambda)$ 和 $\mu_2(\lambda)$ 相关联的解区分开来，而楔积表述的优势之一就在于无需进行这种区分。

转而考虑 $\tilde{A}(x;\lambda)$，由 (1.17) 可知，对于此应用

$$\tilde{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a(x) & 0 & 1 \\ \lambda + a'(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

相应地

$$\tilde{A}_\pm(\lambda) = \lim_{x\to\pm\infty} \tilde{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_\pm & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.11}$$

根据命题 3.3，$A_\pm(\lambda)$ 的特征值为 $\tilde{\mu}_j(\lambda) = -\mu_{3-j+1}(\lambda)$、$j = 1$、2、3，我们很容易得出相应的特征向量具有形式 $\tilde{\mathcal{V}}_j = (1\ \tilde{\mu}_j\ \lambda/\tilde{\mu}_j)^T$。特别地，$\tilde{\mu}_1(\lambda) = -\mu_3(\lambda)$，并且在缩放的选择上，$\mathcal{V}_1(\lambda)$ 与命题 3.6 中的 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 相同。

由于这一应用处于命题 4.2 的情形中，我们可以立即得出结论：只需令 $\lambda_1$ 足够负，使得与左侧平台相关的超平面指标不产生贡献。此外，从命题 5.3 的证明中的 (5.9) 可知，$\tilde{v}^-(\lambda) \wedge \mathcal{V}^+(\lambda) = 1$ 对所有 $\lambda \le 0$ 都成立，从而确保底部架上没有交叉点（如第 4.1.1 节所述）。我们注意到，为了得到这一归一化，我们可以使用 $v^-(\lambda) = \kappa(\lambda)v_3(\lambda)$ 和 $\mathcal{V}^+(\lambda) = \kappa(\lambda)\mathcal{V}_1(\lambda)$，其中

$$\kappa(\lambda) = 1/\sqrt{-\lambda/\mu_3(\lambda) + 2\mu_3(\lambda)^2}. \tag{6.12}$$

接下来，我们来计算 $D(0)$、 $D'(0)$ 和 $D''(0)$，这一计算改编自 [33]，只需针对当前的楔积型表述做少量修改。首先注意到，由于 $y_3^-(x;0)$ 是我们的基 $\{y_j^-(x;0)\}_{j=1}^3$ 中唯一一个在 $x$ 趋于 $-\infty$时衰减的解，因此必定存在某个常数 $k_-$，使得（请记住，$\eta^-(x;\lambda)$ 只是对 $y_3^-(x;\lambda)$ 的缩放）

$$\eta^-(x;0) = k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

根据命题 3.1，我们可以写成

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\mu_3(0)x} k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix} = v^-(0).$$

回想一下，按照约定，$v^-(\lambda)$ 的第一分量为正，且对所有 $x<0$，$\bar{u}'(x)>0$，由此可得 $k_->0$。

此外，我们需要了解 $\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)$，它满足常微分方程

$$\tilde{\mathcal{Y}}^{+\prime} = \tilde{A}(x;0)\tilde{\mathcal{Y}}^+.$$

特别地，我们看到，若写作 $\tilde{\mathcal{Y}}^+ = (\,\tilde{\mathcal{Y}}_1^+\ \tilde{\mathcal{Y}}_2^+\ \tilde{\mathcal{Y}}_3^+)^T$，则 $\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime} = \tilde{\mathcal{Y}}_2^+$，因此

$$\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime} = \tilde{\mathcal{Y}}_2^{+\prime} = -a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^+ + \tilde{\mathcal{Y}}_3^+. \tag{6.14}$$

再求一次导数，我们得到

$$\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime\prime} = -(a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^+)' + \tilde{\mathcal{Y}}_3^{+\prime} = -(a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^+)' + a'(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^+ = -a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime}. \tag{6.15}$$

将该方程与 (6.3) 比较，并回想 (6.5) 中 $a(x)$ 的定义，可知 $\tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;0)$ 满足与 $\bar{u}(x)$ 相同的方程，而后者是该方程唯一一个在 $\mathbb{R}$ 中向左延伸的解。因此，存在一个常数 $k_+$，使得

$$\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;0) \\ \tilde{\mathcal{Y}}_2^+(x;0) \\ \tilde{\mathcal{Y}}_3^+(x;0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;0) \\ \tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime}(x;0) \\ \tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime}(x;0) + a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;0) \end{pmatrix} = k_+ \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) + a(x)\bar{u}(x) \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

回想渐近关系

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\mu_+(0)x}\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = \tilde{\mathcal{V}}^+(0),$$

并注意到对所有 $x>0$，$\bar{u}(x)>0$，可知 $k_+>0$。

现在我们可以直接计算

$$\begin{aligned} D(0) &= \eta^-(x;0)\wedge\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = k_-k_+ \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \bar{u}(x) \\ \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) + a(x)\bar{u}(x) \end{pmatrix} \\ &= k_-k_+\bar{u}(x)(\bar{u}'''(x) + a(x)\bar{u}'(x)) = 0. \end{aligned}$$

利用

$$A_\lambda(x;0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

结合上述关于 $\eta^-(x;0)$ 和 $\mathcal{Y}^+(x;0)$ 的关系，我们得到

$$\Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big)\wedge\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0)=-k_-k_+\bar{u}'(x)\bar{u}(x),$$

由此可见（使用命题 5.2 中 $D'(0)$ 的表达式）

$$D'(0)=-k_-k_+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\frac{\bar{u}(x)^2}{2}dx=0.$$

为了计算命题 5.2 中 $D''(0)$ 的表达式里的积分，我们需要了解函数 $\eta_\lambda^-(x;0)$ 和 $\tilde{\mathcal{Y}}_\lambda^+(x;0)$。从 $\eta_\lambda^-(x;0)$ 开始，我们回顾一下，$\eta^-(x;\lambda)$、$\phi(x;\lambda)$ 的第一分量 $=\eta_1^-(x;\lambda)$ 满足特征值问题

$$-\phi'''-(a(x)\phi)'=\lambda\phi.$$

对 $\lambda$ 求微分后，我们看到 $\phi_\lambda$ 满足方程

$$-\phi_\lambda'''-(a(x)\phi_\lambda)'=\phi+\lambda\phi_\lambda.$$

由 (6.13)　我们可以写成 $\phi(x;0)=k_-\bar{u}'(x)$，于是结合 $\lambda=0$，得到方程

$$-\phi_\lambda'''(x;0)-(a(x)\phi_\lambda(x;0))'=k_-\bar{u}'(x).\tag{6.17}$$

作　比较可知，对 (6.3) 关于 $s$ 求导后，我们得到关系 n

$$p\bar{u}^{p-1}\bar{u}_s+\bar{u}^p\bar{u}_s'-\bar{u}'-s\bar{u}_s'=-\bar{u}_s''',\tag{6.18}$$

可将其改写为

$$-\bar{u}_s'''-(a(x)\bar{u}_s)'=-\bar{u}'.\tag{6.19}$$

我们看到，函数 $-k_-\bar{u}_s(x;s)$ 是非齐次常微分方程 (6.17) 的解。我们已经注意到，相应齐次方程唯一的左侧衰减解是$\bar{u}'(x)$，因此必有

$$\phi_\lambda(x;0)=\beta_-\bar{u}'(x;s)-k_-\bar{u}_s(x;s)$$

其中 $\beta_-\in\mathbb{R}$ 为某个常数。

接下来，如果我们 使用 $\lambda\neq0$ 重复推导（6.15）的计算，我们得到关系 n

$$\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime\prime}+a(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime}=\lambda\tilde{\mathcal{Y}}_1^+.$$

在 d　对 $\lambda$ 求导，我们发现 $\varphi(x;\lambda):=\partial_\lambda\tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;\lambda)$ 满足方程 n

$$\varphi'''+a(x)\varphi'=\lambda\varphi+\tilde{\mathcal{Y}}_1^+.$$

现在在 $\lambda = 0$ 处求值，并回忆式 (6.16)，可知

$$\varphi'''(x;0) + a(x)\varphi'(x;0) = k_+\bar{u}(x;s). \tag{6.20}$$

作为比较，我们对 (6.19) 积分（并改变符号），得到

$$\bar{u}_s'' + a(x)\bar{u}_s = \bar{u}, \tag{6.21}$$

其中，积分常数显然为 0，因为当 $x$ 趋于 $\pm\infty$ 时， $\bar{u}(x;s)$ 及其导数都趋于 0。如果现在引入一个积分变量

$$\mathcal{U}(x;s) := \int_{-\infty}^{x} \bar{u}_s(\xi;s)d\xi,$$

我们可以将 (6.21) 表示为

$$\mathcal{U}''' + a(x)\mathcal{U}' = \bar{u}.$$

由此可见，(6.20) 的一个特解是 $k_+\mathcal{U}(x;\ s)$。又由于 $\bar{u}(x;\ s)$ 是相应齐次方程的唯一解（相差一个常数倍），因此我们可以写成

$$(\partial_\lambda\tilde{\mathcal{Y}}_1^+)(x;0) = \varphi(x;0) = \beta_+\bar{u}(x;s) + k_+\mathcal{U}(x;s)$$

其中 $\beta_+$ 为某个常数。

现在我们可以方便地求出命题 5.2 中 $D''(0)$ 的表达式。对于第一项，我们计算

$$\begin{aligned}
&-k_+\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}0\\0\\\beta_-\bar{u}'(x;s) - k_-\bar{u}_s(x;s)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\bar{u}(x;s)\\\bar{u}'(x;s)\\\bar{u}''(x;s) + a(x)\bar{u}(x;s)\end{pmatrix}dx\\
&\quad= -k_+\int_{-\infty}^{+\infty}(\beta_-\bar{u}'(x;s) - k_-\bar{u}_s(x;s))\bar{u}(x;s)dx = k_-k_+\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(x;s)\bar{u}_s(x;s)dx,
\end{aligned}$$

其中我们注意到， $\bar{u}(x;s)\bar{u}'(x;s)$的积分为 0。转向命题 5.2 中 $D''(0)$的表达式里的第二项，我们计算得

$$\begin{aligned}
&-k_-\int_{-\infty}^{+\infty}\begin{pmatrix}0\\0\\\bar{u}'(x;s)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\beta_+\bar{u}(x;s) + k_+\mathcal{U}(x;s)**\end{pmatrix}dx\\
&\quad= -k_-\int_{-\infty}^{+\infty}(\beta_+\bar{u}(x;s) + k_+\mathcal{U}(x;s))\bar{u}'(x;s)dx = -k_-k_+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{U}(x;s)\bar{u}'(x;s)dx,
\end{aligned}$$

其中，星号表示这些项在计算中不起作用。如果我们对最后一个积分进行分部积分，并注意到边界处没有贡献，就会发现它恰好变成了上述表达式

$$+k_-k_+\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{u}(x)\bar{u}_s(x)dx.$$

综上，我们可以写成

$$D''(0) = k_- k_+ \frac{d}{ds} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(x;s)^2 dx.$$

根据 (6.4) 中的规范，我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(x;s)^2 dx = \alpha(s)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^{4/p}(\gamma(s)x) dx = c_p \frac{\alpha(s)^2}{\gamma(s)},$$

其中 $c_p := \int_{-\infty}^{+\infty} \text{双曲正割}^{4/p}\, x dx$，在推导这个表达式时，我们使用了变量替换 $y = \gamma(s)x$。我们在上文已经看到 $k_- > 0$ 和 $k_+ > 0$，并且显然 $c_p > 0$，因此

$$\operatorname{sgn} D''(0) = \operatorname{sgn} \frac{d}{ds} \frac{\alpha(s)^2}{\gamma(s)}.$$

为了确定右端的符号，方便起见，我们将其写成

$$\ln \frac{\alpha(s)^2}{\gamma(s)} = \frac{2}{p} \ln(\frac{1}{2} s(p+1)(p+2)) - \ln(\frac{1}{2} p\sqrt{s}) = \frac{2}{p} \ln s - \ln \sqrt{s} + C,$$

其中 $C$ 仅表示关于 $s$ 的其他常数项。对 $s$ 求导后，我们现在得到

$$(\frac{\alpha(s)^2}{\gamma(s)})^{-1} \frac{d}{ds} \frac{\alpha(s)^2}{\gamma(s)} = \frac{4-p}{2ps}.$$

由此可得

$$\operatorname{sgn} D''(0) = \begin{cases} +1 & 1 \le p < 4 \\ -1 & 4 < p. \end{cases} \tag{6.22}$$

现在我们可以计算沿右侧平台的超平面指标了。计算从映射开始

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^+(x;0) = \eta^-(x;0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(0) &= k_- \kappa(0) \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu_3(0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k_- p}{2\sqrt{2}\gamma} \Big\{ 2\frac{\gamma}{p} \bar{u}''(x) + \bar{u}'''(x) \Big\}, \end{aligned}$$

其中我们使用了关系 $\mu_3(0) = 2\gamma/p$ 和 $\kappa(0) = p/(2\sqrt{2}\gamma)$。

由此可见，为了确定右侧平台上的交叉点，我们需要寻找关系 $\frac{2\gamma}{p}\bar{u}''(x) + \bar{u}'''(x)$ 的根。利用 (6.4)，我们可以计算

$$\bar{u}'(x) = \frac{2\alpha\gamma}{p} \operatorname{sech}^{\frac{2}{p}-1}(\gamma x)(-\operatorname{sech}(\gamma x) \tanh(\gamma x)) = -\frac{2\gamma}{p} \bar{u}(x) \tanh(\gamma x) \tag{6.23}$$

此外，通过对 (6.3) 积分，我们得到关系式

$$\bar{u}'' = s\bar{u} - \frac{\bar{u}^{p+1}}{p+1},$$

而由 (6.3) 本身可写出

$$\bar{u}''' = (s - \bar{u}^p)\bar{u}' = -\frac{2\gamma}{p}\bar{u}(s - \bar{u}^p)\tanh(\gamma x).$$

结合这些关系，我们可以看到

$$\frac{2\gamma}{p}\bar{u}''(x) + \bar{u}'''(x) = \frac{2\gamma}{p}\bar{u}(x)\Big(s - s\tanh(\gamma x) + \bar{u}^p\tanh(\gamma x) - \frac{\bar{u}^p}{p+1}\Big). \tag{6.24}$$

现在利用恒等式

$$\bar{u}(x)^p = \alpha^p\,\mathrm{sech}^2(\gamma x) = \alpha^p(1 - \tanh^2(\gamma x)),$$

我们可以用变量 $z = \tanh(\gamma x) \in (-1, 1)$ 来表示 (6.24) 右侧大括号中的量。具体而言，可以将此表达式写成

$$\Psi(z) = (1 - z)\Big\{s + \alpha^p z(1 + z) - \frac{\alpha^p(1 + z)}{p + 1}\Big\}.$$

正如预期，由于 $\lambda = 0$ 是一个特征值，当 $x \to +\infty$ 趋于极限（对应于 $z \to 1$）时，我们有一个交叉点；除此之外，多项式 $\Psi(z)$ 的零点与 $\tilde{\omega}_1^+(x; 0)$ 在 $x \in \mathbb{R}$ 上的交叉点之间存在一一对应关系。(6.1) 中圆括号内的量是关于 $z$ 的二次式，可表示为

$$\Psi_2(z) = \alpha^p z^2 + \frac{1}{2}ps(p + 2)z - \frac{ps}{2}. \tag{6.25}$$

展开 $\alpha^p$ 后可知，我们要寻找二次表达式的根

$$\frac{1}{2}s(p + 1)(p + 2)z^2 + \frac{1}{2}ps(p + 2)z - \frac{ps}{2} = 0 \implies (p + 1)(p + 2)z^2 + p(p + 2)z - p = 0.$$

将右侧分别代入 $z = -1$、0、1，得到的值依次为 2、$-p$ 和 $2(p + 1)^2$,。由此可知，$\Psi_2(z)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上有两个实根 $z_1$ 和 $z_2$，并且 $z_1 < 0 < z_2$。相应地，$\tilde{\omega}_1^+(x; 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有两个实根 $x_1$ 和 $x_2$，且 $x_1 < 0 < x_2$。

为了理解极限$x \to \pm\infty$可能对超平面指标产生的贡献，我们使用缩放映射

$$\tilde{\psi}_1^+(x; 0) = \frac{\tilde{\omega}_1^+(x; 0)}{|\eta^-(x; 0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|},$$

我们已在（1.31）中看到，该映射具有定义良好的渐近极限

$$\tilde{\psi}_1^{+,-}(0) = \lim_{x\to-\infty}\tilde{\psi}_1^+(x; 0) = \frac{v^-(0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(0)}{|v^-(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|} =: c_0,$$

其中，根据我们的缩放约定，$c_0$ 是正实常数

$$c_0 = \frac{1}{|v^-(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|}.$$

在这种情况下，波 $\bar{u}(x)$ 关于 $x=0$ 对称，因此我们可以看到（由于（6.13）　　）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta^-(x;0)}{|\eta^-(x;0)|}=-\frac{v^+(0)}{|v^+(0)|},$$

其中

$$v^+(0)=\kappa(0)\begin{pmatrix}1\\-\mu_3(0)\\\mu_3(0)^2\end{pmatrix}=\frac{p}{2\sqrt{2}\gamma}\begin{pmatrix}1\\-2\gamma/p\\4\gamma^2/p^2\end{pmatrix}.$$

我们看到

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1^{+,+}(0)=\lim_{x\to+\infty}\tilde{\psi}_1^+(x;0)&=-\frac{v^+(0)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^+(0)}{|v^+(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|}\\&=-\frac{\kappa(0)^2}{|v^+(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|}\begin{pmatrix}1\\-2\gamma/p\\4\gamma^2/p^2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-2\gamma/p\\0\end{pmatrix}=0.\end{aligned}$$

函数 $\tilde{\psi}_1^+(x;0)$ 的图像如图 6.1 所示。

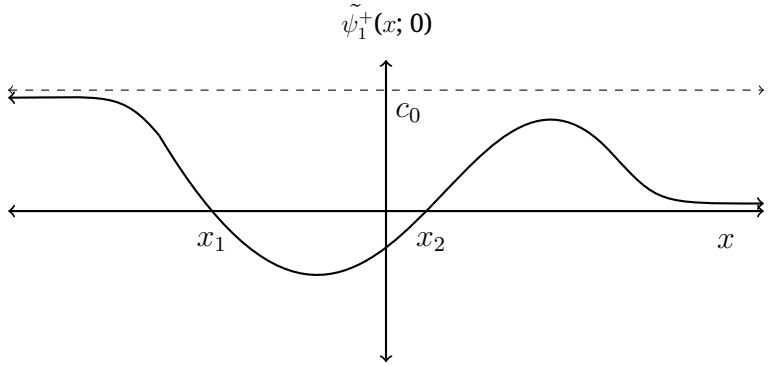



图 6.1：广义 KdV 方程情况下的函数 $\tilde{\psi}_1^+(x;0)$。

为了计算沿右侧平台的超平面指标，我们还需要指定$\tilde{\omega}_2^+(x;0)$，对此我们有相当大的灵活性，尤其是在选择常数矩阵 $M$ 时。出于下文即将明了的原因，我们发现采用以下形式较为方便：

$$M=\begin{pmatrix}0&1&1/\sqrt{s}\\1&0&0\\1&0&-1/s\end{pmatrix}. \tag{6.26}$$

现在我们令

$$\tilde{\omega}_2^+(x;0)=\eta_-(x;0)\wedge\tilde{\mathcal{V}}_M(0),$$

~ ~其中，$\mathcal{V}_M(0)$ 是渐近矩阵 $\mathcal{A}^+(0)$（由 (1.22) 得到）对应于特征值 $-\mu_3(0)$ 的特征向量，即

$$\tilde{\mathcal{V}}_M^+(0)=\begin{pmatrix}-s/\mu_3(0)+\sqrt{s}\\-\mu_3(0)+\sqrt{s}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\tilde{\omega}_2^+(x;0) = k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k_- \bar{u}'(x) = -\frac{2k_-\gamma}{p} \bar{u}(x) \tanh(\gamma x).$$

与 $\tilde{\omega}_1^+(x;0)$ 一样，为了满足极限 $x \to \pm\infty$，我们将使用缩放映射

$$\tilde{\psi}_2^+(x;0) = \frac{\tilde{\omega}_2^+(x;0)}{|\eta^-(x;0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|}, \tag{6.27}$$

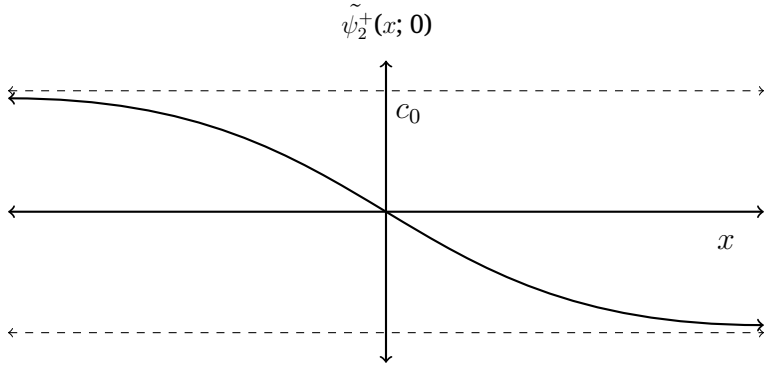
对于该映射，我们有如下极限

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2^{+,-}(0) = \lim_{x\to-\infty} \tilde{\psi}_2^+(x;0) &= \frac{v^-(0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(0)}{|v^-(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|} \\ &= \frac{p}{2\sqrt{2}\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\gamma/p \\ 4\gamma^2/p^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{p}{2\sqrt{2}\gamma} > 0, \end{aligned}$$

同样

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2^{+,+}(0) = \lim_{x\to+\infty} \tilde{\psi}_2^+(x;0) &= -\frac{v^+(0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(0)}{|v^+(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|} \\ &= -\frac{p}{2\sqrt{2}\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ -2\gamma/p \\ 4\gamma^2/p^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{p}{2\sqrt{2}\gamma} < 0. \end{aligned}$$

总之，我们看到 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$ 如图 6.2 所示。




Fig图 6.2：广义 KdV 方程情形下的函数 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$ n.

在计算右侧平台上的超平面指标之前，我们先验证不变性成立。首先，$\tilde{\psi}_1^+(x;0)$的根只有上文标记为 $x_1$ 和 $x_2$ 的值，且它们满足 $x_1 < 0 < x_2$。相比之下，$\tilde{\psi}_2^+(x;0)$的实根只有 $x = 0$，因此不存在某个值 $x \in \mathbb{R}$，使得 $\tilde{\psi}_1^+(x;0)$和 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$同时为零。此外，由于 $\tilde{\psi}^{+,}{}_2{}^{\pm}(0) \neq 0$，渐近端态处的不变性不会丧失。

为了计算沿右侧平台的超平面指标，我们只需确定区间 $[-\infty,+\infty]$ 上的所有共轭点（允许 $\pm\infty$ 在渐近意义上充当交叉点，不过根据我们对底部架的分析， $-\infty$ 已被排除），并为每个点指定一个方向。对于任意有限交叉点 $x_*$，该方向由以下比值决定

$$\frac{\tilde{\psi}_1^{+\prime}(x_*;0)}{\tilde{\psi}_2^{+}(x_*;0)},$$

而对于 $+\infty$ 处的交叉点，我们将直接考察当 $x$ 趋近于 $+\infty$ 时，由 $p^+(x;0)$ 所描述的旋转。对于前者，从图 6.1 中可以立即看出，$\tilde{\psi}_1^{+\prime}(x_1;0) < 0$，而 $\tilde{\psi}_1^{+\prime}(x_2;0) > 0$；从图 6.2 中则可以看出，$\tilde{\psi}_2^{+}(x_1;0) > 0$，且 $\tilde{\psi}_2^{+}(x_2;0) < 0$。由此可以得出结论：应为这些交叉分别指定一个旋转方向。

对于 $x \to +\infty$ 时的渐近交叉，从图 6.1 中可以看到，对于所有充分大的 $x > 0$，都有 $\tilde{\psi}_1^{+}(x;0) > 0$；而从图 6.2 中可以看到，对于所有 $x > 0$，

$\tilde{\psi}_2^{+}\ x\ 0\ < 0$ $p^+\ x\ 0$ ( ; )。

这种配对使得点 ( ; ) 位于第二象限，由此可知，$p^+(x;0)$ 趋近于点 $(-1,0)$ 时将沿正方向（即逆时针方向）移动，对超平面指标的贡献为 $+1$。结合 $x_1$ 和 $x_2$ 处的负交叉，我们得出，在此情形下，沿右侧平台的超平面指标满足关系

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;0), \mathcal{h}^+(0); [-\infty,+\infty]) = -1.$$

根据定理 1.1，我们可以得出结论：如果沿上边保持不变性，那么 (6.5) 的非正特征值数目 $\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0])$ 满足关系

$$\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0]) \geq \left|\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;0), \mathcal{h}^+(0); [-\infty,+\infty]) - \mathfrak{m}\right| = |-1-\mathfrak{m}|. \tag{6.28}$$

为了计算严格负特征值的数目，我们希望用 $\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0))$ 替换 $\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0])$，并且我们在第 5 节中已经看到，可以通过 Evans 函数实现这一点。对于当前例子，我们有 (6.22) 中给出的两种情形。首先，对于 $1 \leq p < 4$，有 $D''(0) > 0$，由此可知，对于充分接近 0 的 $\lambda < 0$，必有 $D(\lambda) > 0$，因此（由 (5.6)）当 $x$ 足够大时，$\tilde{\psi}_1^{+}(x;\lambda) > 0$。此外，我们已经看到，对于当前应用，$\tilde{\psi}_2^{+}(x;0) < 0$，其中 $x > 0$。这一对关系 $\tilde{\psi}_1^{+}(x;\lambda) > 0$ 和 $\tilde{\psi}_2^{+}(x;0) < 0$ 将 $p^+(x;\lambda)$ 置于第二象限，这表明随着 $\lambda$ 增大到 $0\ p,\ x;\lambda)$ 沿正方向（即逆时针方向）旋转进入 $(-1,0)$，从而使超平面指标增加 $+1$。正如在对 (5.8) 的讨论中所述，这使我们能够将 (6.28) 精化为以下陈述

$$\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0)) + 1 \geq |1+\mathfrak{m}|.$$

由于我们可能有 $\mathfrak{m} = 0$，这一关系与谱稳定性一致（即与计数 $\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0)) = 0$ 一致）。尽管无法从这一计算得出谱稳定性的结论，但我们注意到，已知此情形下谱稳定性成立。（讨论和参考文献见 [33]第 50 页。）

另一方面，对于 $p>4$，我们有 $D''(0)<0$，其他条件均同前。根据刚才所述的相同考量，可以确定在此情形下，关系式 (6.28) 可进一步精化为

$$\mathcal{N}_{\#}((-\infty,0))\geq|1+\mathfrak{m}|. \tag{6.29}$$

如果边界不变量 $\mathfrak{m}$ 是偶数，正如引理 2.2所示（另见下文紧接着的注 6.1），那么我们可以断定在这种情况下存在一个不稳定特征值，因此 $\bar{u}(x)$ 必然具有谱不稳定性。

总之，我们预计 $\bar{u}(x)$ 在 $1\leq p<4$ 时具有稳定性，而在 $p>4$时不稳定。这正是 [33], 在那里通过以下方式得出的结论。对于 $1\leq p<4$，我们已经看到，当 $\lambda<0$ 充分接近 0 时，$D(\lambda)>0$，并且根据命题 5.3，我们还知道，当 $\lambda\to-\infty$时，$D(\lambda)\to+1$。这种排列与 $D(\lambda)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有实根相一致，因此也与谱稳定性的情形相一致。（当然，特征值的数量也可能是偶数，所以根据这一计算无法得出肯定的结论。）同样地，如果 $p>4$，那么 $D''(0)<0$，因此当 $\lambda<0$ 充分接近 0 时，$D(\lambda)<0$。由于我们仍有当 $\lambda\to\infty$时的极限 $D(\lambda)\to1$，这种排列保证了 $D(\lambda)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上至少有一个实根，因此我们当然可以断定存在谱不稳定性。

注 6.1. 正如引理 2.2 中所述，在相当一般的条件下，我们有 $\mathfrak{m}$ 是偶数。对于当前的应用，我们可以通过结合上文所述的对 *[33]* 的分析以及对马斯洛夫盒其余各边的分析，严格验证这一点。

此时，我们已经完成了得出结论所需的全部分析；不过，为了说明该方法的运作方式，我们给出马斯洛夫盒在两种情形下的数值生成图示，一种稳定，另一种不稳定。对于这些计算，我们将采用

$$\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)=\eta^-(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda),$$

这里回顾一下，

$$\tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda)=\kappa(\lambda)\begin{pmatrix}1\\-\mu_3(\lambda)\\-\lambda/\mu_3(\lambda)\end{pmatrix},$$

其中 $\kappa(\lambda)$ 是式 (6.12) 中指定的缩放常数。因此，我们有，

$$\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)=\kappa(\lambda)\Big\{-\frac{\lambda}{\mu_3(\lambda)}\eta_1^-(x;\lambda)+\mu_3(\lambda)\eta_2^-(x;\lambda)+\eta_3^-(x;\lambda)\Big\}. \tag{6.30}$$

同样，我们设

$$\tilde{\omega}_2^+(x;0)=\eta^-(x;\lambda)\wedge\tilde{\mathcal{V}}_M(\lambda),$$

~ ~其中，$\mathcal{V}_M(\lambda)$ 是渐近矩阵 $\mathcal{A}_+(\lambda)$（见 (1.22)）对应于特征值 $-\mu_3(\lambda)$ 的特征向量，即

$$\tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda)=\begin{pmatrix}-s/\mu_3(\lambda)+\sqrt{s}\\-\mu_3(\lambda)+\sqrt{s}\\1\end{pmatrix},$$

其中不需要特定的归一化。因此

$$\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda) = k_-\Big\{\eta_1^-(x;\lambda) - \eta_2^-(x;\lambda)(-\mu_3(\lambda)+\sqrt{s}) + \eta_3^-(x;\lambda)(-s/\mu_3(\lambda)+\sqrt{s})\Big\}. \quad (6.31)$$

利用 (6.30) 和 (6.31)，现在我们可以通过在整个马斯洛夫盒内数值生成 $\eta^-(x;\lambda)$，从而在固定的马斯洛夫盒内生成谱曲线。作为稳定情形的一个例子，我们将对 $p = 7/2$ 和 $s = 1/2$ 进行这一操作，并使用 $[-7,0]\times[-5,5]$ 作为（截断的）马斯洛夫盒。（见图 6.3。）我们在解析计算中已经看到，右侧平台上的每次穿越都会对超平面指标产生 $-1$ 的贡献。此外，我们还看到，当 $x \to +\infty$ 时取极限会得到额外的 $+1$ 贡献，但在任何沿 $x$ 方向截断的盒中都不会捕捉到这一贡献。最后，利用埃文斯函数，我们证明了当 $c$ 足够大时，跟踪点 $p^+(c;\lambda)$ 会随着 $\lambda$ 从 0 减小而沿顺时针方向旋转。我们看到，当 $x$ 增大并趋近于 $c$ 时，$p^+(x;0)$ 沿逆时针方向转向 $(-1,0)$，但始终不会到达 $(-1,0)$；随后，当 $x = c$ 且 $\lambda$ 从 0 减小时，点 $p^+(c;\lambda)$ 沿顺时针方向转回，因此位于 $x = c$ 和 $\lambda = 0$ 处的角点不会使超平面指标增加。总之，我们可以得出结论，在这种情况下 $\mathfrak{m} = -2$。要使 $\mathfrak{m}$ 取这样的值，在开盒 $(-7,0)\times(-5,5)$ 中必定至少有一点发生不变性丧失；由于不变性丧失的一个条件是 $\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda) = 0$，该点必定落在谱曲线上（图 6.3 中以红色标出）。沿着这条曲线数值搜索 $\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda)$ 的零点，我们发现不变性似乎在约 $x = .348$ 和 $\lambda = -1.706$ 处丧失（在 $x$ 和 $\lambda$ 两个方向上均采用 .001 的步长）。乍看之下，谱曲线在 $(\lambda, x) \cong (-3.4, 0)$ 处的转折点似乎很可能就是不变性丧失点，但这完全取决于 $\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda)$ 的选择。具体而言，正如我们在引理 2.2 的证明中所见，只要改变 $\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda)$ 的选择，就总能改变不变性丧失点。

对于不稳定情形，我们再次取 $s = 1/2$，这次取 $p = 9/2$。按照前一情形中的类似步骤，我们数值生成马斯洛夫盒 $[-7,0]\times[-5,5]$ 的谱曲线。（见图 6.4。）在此情形中，我们看到马斯洛夫盒右上角有一条压缩的谱曲线。为阐明该处的行为，我们在 $[-1,0]\times[-5,5]$ 上加入第二个马斯洛夫盒。（见图 6.5。）与前一情形中 $p = 7/2$ 的情况一样，右侧平台上的每次穿越都会使超平面指标增加 $-1$。随着 $x$ 增大到足够大的值，跟踪点 $p^+(x;0)$ 沿逆时针方向移向 $(-1,0)$。此外，从对埃文斯函数的分析中我们已知，当 $c$ 足够大时，$p^+(c;\lambda)$ 会随着 $\lambda$ 从 0 减小，沿逆时针方向远离 $(-1,0)$ 旋转。由此可见，当 $c$ 足够大时，$p^+(x;\lambda)$ 穿过 $x = c$ 和 $\lambda = 0$ 处的角点时，超平面指标增加 $+1$。最后，$\lambda = -.0959$ 处的特征值贡献 $-1$（计算时步长增加 .0001）。与 $p = 7/2$ 的情形一样，我们可以得出结论：$\mathfrak{m} = -2$。我们再次看到，至少有一个点处的不变性不再成立；通过数值计算，我们将该点近似为 $x = -.286$ 和 $\lambda = -4.563$（$x$ 和 $\lambda$ 的步长均为 .001）。

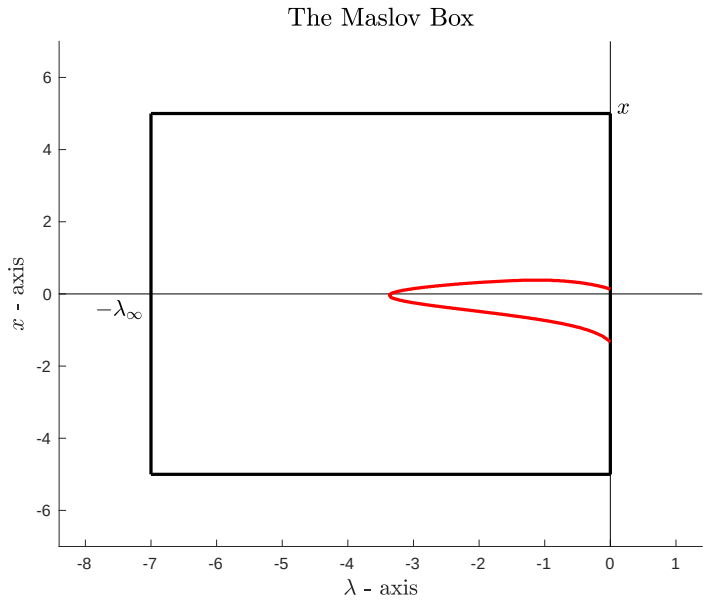



图 6.3：与 (6.3) 相关的 $s = 1/2$ 和 $p = 7/2$ 的马斯洛夫盒。

## 6.2 Korteweg-de Vries-Burgers 方程

作为第二个应用，我们考虑 KdV-Burgers 方程

$$u_t + uu_x = u_{xx} + \nu u_{xxx}, \tag{6.32}$$

其中 $\nu \in \mathbb{R}$ 固定。众所周知（例如参见 [32]），方程 (6.32) 存在定常解 $\bar{u}(x)$，满足渐近条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} \bar{u}(x) = \mp 1. \tag{6.33}$$

此类解满足常微分方程

$$\nu\bar{u}''' + \bar{u}'' - \bar{u}\bar{u}' = 0, \tag{6.34}$$

我们可以对其积分得到

$$\nu\bar{u}'' + \bar{u}' - \frac{1}{2}(\bar{u}^2 - 1) = 0. \tag{6.35}$$

对于 $|\nu| \le 1/4$，这些解已知是单调的；而对于 $|\nu| > 1/4$，当 $x$ 趋近于 $+\infty$ 时，这些解已知会发生振荡。图 6.6 展示了通过数值方法生成的这类波，其中 $\nu = 10$。为明确起见，在以下计算中我们始终取 $\nu > 0$，并指出 $\nu < 0$ 的情形也可用类似方法处理。

注记 6.2. 在 *[32],* 的定理 1.1 中，作者研究了比 (6.35) 更一般的方程，并采用了不同的缩放，即

$$-c\phi + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} + \phi'' = \alpha\phi', \tag{6.36}$$

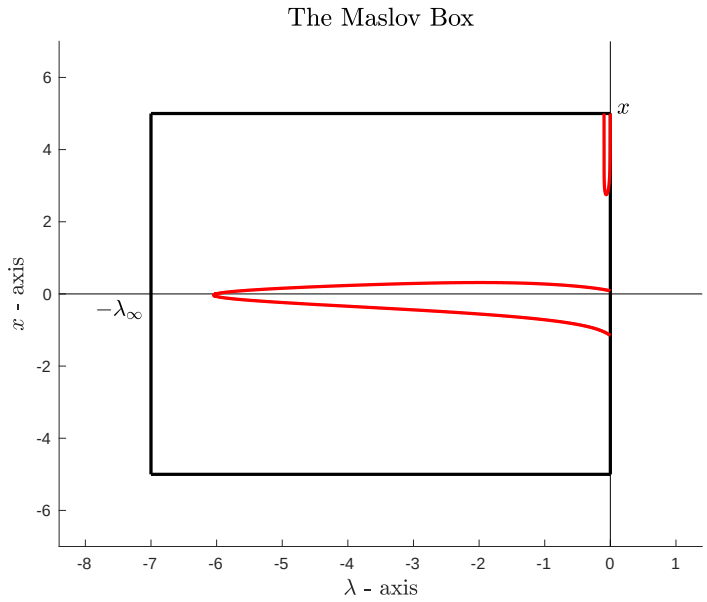



图 6.4：与 $s = 1/2$ 和 $p = 9/2$ 相关的马斯洛夫盒（6.3）。

其中 $p \geq 1$ 、 $c$ 和 $\alpha$ 均取为正常数。我们的方程 (6.35) 可在 $\nu > 0$ 的情形下，通过令 $c = 1$、 $\alpha = 1/\sqrt{\nu}$ 以及

$$\bar{u}(x) = -\phi(-x/\sqrt{\nu}) + 1,$$

对于 $\nu < 0$ ，令 $c = 1$、 $\alpha = 1/\sqrt{-\nu}$，以及

$$\bar{u}(x) = \phi(x/\sqrt{-\nu}) - 1.$$

如果我们将（6.32）在波 $\bar{u}(x)$ 附近线性化，就得到特征值问题

$$L\phi = -\nu\phi''' - \phi'' + (\bar{u}(x)\phi)' = \lambda\phi, \tag{6.37}$$

其中，再次选择符号，使得实部为负的特征值表示谱不稳定性。根据（6.33），相关的渐近问题为

$$-\nu\phi''' - \phi'' \pm \phi' = \lambda\phi. \tag{6.38}$$

根据 [21, 30], ，我们可以通过寻找形如 $\phi(x; k) = e^{ikx}$ 的（6.38）的解来理解 $L$ 的本质谱。我们得到

$$\sigma_{\text{ess}}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = i\nu k^3 + k^2 \pm ik,\ k \in \mathbb{R}\},$$

由此显然可知， $L$ 的本质谱被限制在复平面的右半平面内，并且还包括 $\lambda = 0$。

为了将 (6.37) 表示为我们的标准形式 (1.1)，我们令 $y_1 = \phi$、 $y_2 = \phi'$ 和 $y_3 = \nu\phi''$，使得

$$y' = A(x; \lambda)y, \quad A(x; \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\nu \\ \bar{u}'(x) - \lambda & \bar{u}(x) & -1/\nu \end{pmatrix}, \tag{6.39}$$

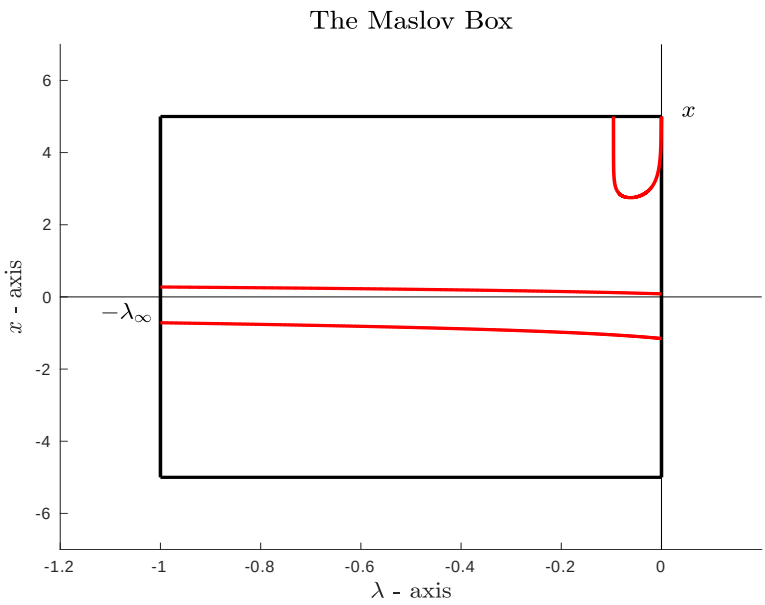



图 6.5：与 (6.3) 中 $s = 1/2$ 和 $p = 9/2$ 相关的马斯洛夫盒的补充细节。

及其对应的渐近矩阵

$$A_\pm(\lambda) := \lim_{x\to\pm\infty} A(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\nu \\ -\lambda & \mp 1 & -1/\nu \end{pmatrix}.$$

$A_\pm(\lambda)$ 的特征值很容易看出是函数的根 $\mu$

$$h_\pm(\mu;\lambda) = \mu^3 + \frac{1}{\nu}\mu^2 \pm \frac{1}{\nu}\mu + \frac{\lambda}{\nu}. \tag{6.40}$$

对于 $\lambda = 0$， $h_\pm(\mu; 0)$ 的根很容易求得，

$$\mu = 0, \quad \frac{1}{2\nu}(-1 - \sqrt{1 \mp 4\nu}), \quad \frac{1}{2\nu}(-1 + \sqrt{1 \mp 4\nu}).$$

回想一下，我们取的是 $\nu > 0$，可知对于 $h_-(\mu; 0)$，这些根的自然排序为

$$\mu_1^-(0) = \frac{1}{2\nu}(-1 - \sqrt{1 + 4\nu}) < 0, \quad \mu_2^-(0) = 0, \quad \mu_3^-(0) = \frac{1}{2\nu}(-1 + \sqrt{1 + 4\nu}) > 0.$$

当 $\lambda$ 从 0 开始减小时，三次函数 $h_-(\mu; 0)$ 的图像会下移，使得数值$\mu_1^-(\lambda)$和 $\mu_2^-(\lambda)$逐渐接近，而 $\mu_3^-(\lambda)$则会增大。随着 $\lambda$ 继续减小，根 $\mu_1^-(\lambda)$和$\mu_2^-(\lambda)$会在某个值 $\lambda = \lambda_c$ 处合并为一对共轭复数。对于高于该合并值的 $\lambda$ （即对于 $\lambda \in (\lambda_c, 0]$），我们可以为每个 $\mu_j^-(\lambda)$、$j \in \{1, 2, 3\}$关联一个特征向量 $v_j^-(\lambda)$，

$$v_j^-(\lambda) = (1 \ \mu_j^-(\lambda) \ \nu\mu_j^-(\lambda)^2)^T, \quad j = 1, 2, 3. \tag{6.41}$$

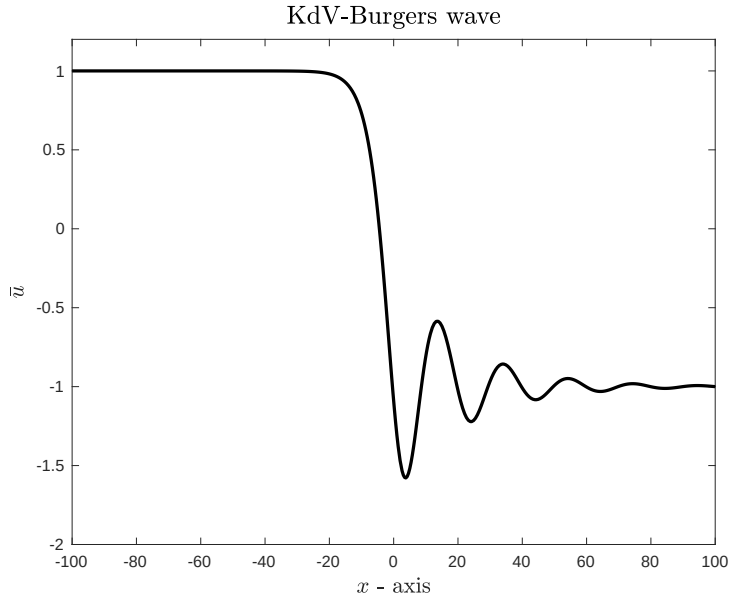



图 6.6：当 $\nu = 10$ 时，方程 (6.32) 的定常解 $\bar{u}(x)$。

对于所有 $\lambda \leq 0$，特征向量 $v_3^-(\lambda)$的形式都相同；经过缩放因子调整后，它就是命题 3.1 中的特征向量 $v^-(\lambda)$。

对 $h_+(\mu;\lambda)$ 作类似处理，首先注意到在这种情况下 $\mathrm{Re}\sqrt{1-4\nu} < 1$，因此有如下排序

$$\mu_1^+(0) = \frac{1}{2\nu}(-1-\sqrt{1-4\nu}), \quad \mu_2^+(0) = \frac{1}{2\nu}(-1+\sqrt{1-4\nu}), \quad \mu_3^+(0) = 0, \tag{6.42}$$

其中 $\mu_1^+(0)$ 和 $\mu_2^+(0)$ 的实部均为负。如果 $\nu > 1/4$，那么 $\mu_1^+(0)$ 和 $\mu_2^+(0)$ 将构成一对共轭复数；而如果 $0 < \nu < 1/4$，那么随着 $\lambda$ 减小，$\mu_1^+(\lambda)$ 和 $\mu_2^+(\lambda)$ 将合并成这样一对复数。无论哪种情况，当 $\lambda$ 从 0 减小时，$\mu_3^+(\lambda)$ 的值都将保持为实数并递增。（临界情形 $\nu = 1/4$ 需要进一步处理，这里不作分析。）

接下来考虑 $\tilde{A}(x;\lambda)$（见 (1.17)），在这种情况下它为

$$\tilde{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 1/\nu & 1/\nu & 0 \\ \bar{u}(x) & 0 & 1 \\ \lambda - \bar{u}'(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.43}$$

以及相应的渐近矩阵

$$\tilde{A}_+(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} \tilde{A}(x;\lambda) = \begin{pmatrix} 1/\nu & 1/\nu & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

$\tilde{A}_+(\lambda)$ 的唯一最左特征值为 $\tilde{\mu}_1^+(\lambda) = -\mu_3^+(\lambda)$，其对应的特征向量为

$$\tilde{\mathcal{V}}_1^+(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\mu_3^+(\lambda) - 1 \\ \nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1 \end{pmatrix}, \tag{6.45}$$

~它与注 3.1 中的 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 只相差一个缩放因子。

现在，我们已经具备了必要条件，可以验证：对于 $\lambda_\infty > 0$ 底部架上沿区间 $[-\lambda_\infty, 0]$ 的任意选择，超平面指标均不产生贡献。具体而言，利用第 4.1 节中的推导，只要能够证明对所有 $\lambda \leq 0$均成立，我们就可以验证这一断言。

$$v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda) \neq 0. \tag{6.46}$$

（与前一种情况不同，由于此处 $A_-(\lambda) \neq A_+(\lambda)$，关系式 (6.46) 并非显然成立。）利用上面对 $v^-(\lambda)$ 和 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 的表达式，并分别以 $\kappa(\lambda)$ 和 $\tilde{\kappa}(\lambda)$ 作为 $v^-(\lambda)$ 和 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 的缩放因子，我们可以将这个楔积计算为

$$\begin{aligned} v^-(\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda) &= \kappa(\lambda)\tilde{\kappa}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_3^-(\lambda) \\ \nu\mu_3^-(\lambda)^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\mu_3^+(\lambda) - 1 \\ \nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \kappa(\lambda)\tilde{\kappa}(\lambda)\Big\{\nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1 - \mu_3^-(\lambda)(-\nu\mu_3^+(\lambda) - 1) + \nu\mu_3^-(\lambda)^2\Big\} \\ &= \kappa(\lambda)\tilde{\kappa}(\lambda)\Big\{\nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1 + \nu\mu_3^-(\lambda)\mu_3^+(\lambda) + \mu_3^-(\lambda) + \nu\mu_3^-(\lambda)^2\Big\}. \end{aligned}$$

回顾 $\mu_3^-\ \lambda\ > 0$ $\lambda \leq 0$ $\mu_3^+\ \lambda\ \geq 0$ $\lambda \leq 0$ $v^-\ \lambda\ \wedge$ 对所有均成立，且 ( ) 对所有均成立，我们看到，对于所有 $\lambda \leq 0$，( ) $\mathcal{V}^+(\lambda) > 0$，从而验证了 (6.46)。

继续之前，我们注意到，由于此处 $A_-(\lambda) \neq A_+(\lambda)$，因此无法立即根据命题 4.2 得出左侧平台上没有交叉。不过，通过一种基于能量方法的论证可以得出这一结论。由于该论证的思路与当前讨论不同，因此将其放在附录中。

接下来，我们来计算 $D(0)$ 和 $D'(0)$（结果表明并不需要 $D''(0)$）。为此，我们首先注意到，由于 $A_-(\lambda)$ 只有一个正特征值，因此命题 3.1 中描述的解 $\eta^-(x;\lambda)$（相差一个乘法常数）是方程 (6.39) 中唯一一个当 $x$趋于 $-\infty$时衰减的解。由此可知，存在某个常数 $k_-$，使得

$$\eta^-(x;0) = k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}'''(x) \end{pmatrix}. \tag{6.47}$$

根据命题 3.1，我们可以写出

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-\mu_3^-(0)x} k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}'''(x) \end{pmatrix} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\mu_3^-(0)x}\eta^-(x;0) = v^-(\lambda).$$

回想一下， $v^-(\lambda)$ 的第一分量为正，且对 $x \ll 0$， $\bar{u}'(x) < 0$ ，由此可得 $k_- < 0$。

此外 ˜，我们需要理解 $\mathcal{Y}^+(x;0)$ 的性质，它满足常微分方程 E

$$\tilde{\mathcal{Y}}^{+\prime} = \tilde{A}(x;0)\tilde{\mathcal{Y}}^+, \tag{6.48}$$

˜其中 $A(x;\lambda)$ 与 (6.44) 中相同。按照 (6.14) 和 (6.15) 中类似的步骤，我们发现 $\mathcal{Y}^+(x;0)$ 的第一分量满足方程

$$\nu\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime\prime} - \tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime\prime} - \bar{u}(x)\tilde{\mathcal{Y}}_1^{+\prime} = 0. \tag{6.49}$$

显然，该方程的一个解是 $\tilde{\mathcal{Y}}_1^+(x;0) \equiv 1$，将此分量代入完整系统 (6.48) 后，我们看到一族解为

$$\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = k_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\bar{u}(x) \end{pmatrix},$$

其中 $k_+$ 为某个常数。此外，由于 (6.48) 的所有其他（线性无关）解都会以指数速率随着 $x \to +\infty$ 增长，这必定就是我们要找的解 $\mathcal{Y}^+(x;0)$。回想命题 3.6,

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\mu_3^+(0)x}\tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = \tilde{\mathcal{V}}^+(0),$$

由此可知，我们必有 $k_+ > 0$。现在可以直接计算

$$\begin{aligned} D(0) = \eta^-(x;0) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) &= k_-k_+ \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\bar{u}(x) \end{pmatrix} \\ &= k_-k_+\Big\{\nu\bar{u}'''(x) + \bar{u}''(x) - \bar{u}(x)\bar{u}'(x)\Big\} = 0, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式根据将 $\bar{u}(x)$ 规范为方程 (6.32) 的定常解（即由 (6.35) 得出）而成立。

利用

$$A_\lambda(x;0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

结合 ˜ 以及上述关于 $\eta^-(x;0)$ 和 $\mathcal{Y}^+(x;0)$ 的关系，我们得到

$$\Big(A_\lambda(x;0)\eta^-(x;0)\Big) \wedge \tilde{\mathcal{Y}}^+(x;0) = -k_-k_+\bar{u}'(x),$$

由此我们得出结论（使用命题 5.2 中关于 $D'(0)$ 的表达式）

$$D'(0) = -k_-k_+ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}'(x)dx = -k_-k_+(u_+ - u_-) = 2k_-k_+ < 0.$$

现在我们计算沿右侧平台的超平面指标。首先，我们将使用函数检测交叉点

$$\tilde{\omega}_1^+(x;0) = \eta^-(x;0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(0) = k_-\tilde{\kappa}(0) \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\mu_3^+(0) - 1 \\ \nu\mu_3^+(0)^2 + \mu_3^+(0) + 1 \end{pmatrix}$$
$$= k_-\tilde{\kappa}(0) \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = k_-\tilde{\kappa}(0)\Big(\nu\bar{u}'''(x) + \bar{u}''(x) + \bar{u}'(x)\Big).$$

我们回顾一下，$\nu\bar{u}'''(x) + \bar{u}''(x) = \bar{u}(x)\bar{u}'(x)$，因此

$$\tilde{\omega}_1^+(x;0) = k_-\tilde{\kappa}(0)\bar{u}'(x)(\bar{u}(x) + 1). \tag{6.50}$$

对于 $0 < \nu < 1/4$，此时 $\bar{u}(x)$ 从 1 单调递减至 $-1$，不存在交叉点 $x_* \in \mathbb{R}$（尽管在 $+\infty$ 处存在一个渐近交叉点）。更有意思的是，对于 $\nu > 1/4$，振荡会导致在 $\bar{u}(x)$ 的每个临界点处发生穿越，并且在每个满足 $\bar{u}(x_*) = -1$ 的值 $x_* \in \mathbb{R}$ 处也会发生穿越。

为了计算沿右侧平台的超平面指标，我们还需要指定$\tilde{\omega}_2^+(x;0)$，对此我们有相当大的灵活性，尤其是在选择常数矩阵 $M$ 方面。出于下文即将明了的原因，我们发现采用以下取值较为方便

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.51}$$

现在我们令

$$\tilde{\omega}_2^+(x;0) = \eta_-(x;0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M(0),$$

其中，$\tilde{\mathcal{V}}_M(0)$ 是渐近矩阵 $\mathcal{A}_+(0)$ 的一个特征向量，对应于特征值$-\mu_3(0)$；其中 $\mathcal{A}_+(0)$ 由矩阵通过式 (1.22) 计算得出

$$\mathcal{A}_+(0) = MA_+(0)M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 - 1/\nu \end{pmatrix}.$$

我们得到

$$\tilde{\mathcal{V}}_M^+(0) = -\begin{pmatrix} -\mu_3^+(0) \\ -\mu_3^+(0) - 1/\nu \\ \mu_3^+(0)^2 - (1 - 1/\nu)\mu_3^+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\nu \\ 0 \end{pmatrix},$$

由此可得

$$\tilde{\omega}_2^+(x;0) = k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \bar{u}'''(x) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\nu \\ 0 \end{pmatrix} = -(k_-/\nu)\bar{u}''(x). \tag{6.52}$$

为了进行接下来的讨论，有必要了解当 $x$ 取任意大的值时的 $\bar{u}''(x)$。为此，我们首先注意到，对于式 (6.42) 中的特征值 $\mu_1^+(0)$ 和 $\mu_2^+(0)$

相应的特征向量可以选为

$$v_i^+(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_i^+(0) \\ \nu\mu_i^+(0)^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2. \tag{6.53}$$

对于 $0 < \nu < 1/4$，特征值 $\mu_1^+(0)$ 和 $\mu_2^+(0)$ 为实数且互不相同，满足 $\mu_1^+(0) < \mu_2^+(0) < 0$，因此我们可以很容易地构造出各个解

$$y_i^+(x;0) = e^{\mu_i^+(0)x}(v_i^+(0) + E_i^+(x;0)), \quad i = 1, 2,$$

其中 $E_i^+(x;0)$ 在 $x$ 中以指数速率衰减，当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时如此。由于 $\eta^-(x;0)$ 是 (6.39) 的解，并且当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时以指数速率衰减；又由于 $\mu_3^+(0) = 0$，因此必定存在常数 $C_1$ 和 $C_2$，使得

$$\eta^-(x;0) = k_- \begin{pmatrix} \bar{u}'(x) \\ \bar{u}''(x) \\ \nu\bar{u}''(x) \end{pmatrix} = C_1 e^{\mu_1^+(0)x}(v_1^+(0)+E_1^+(x;0))+C_2 e^{\mu_2^+(0)x}(v_2^+(0)+E_2^+(x;0)). \tag{6.54}$$

此外，对第一分量在 $(x, \infty)$ 上积分后，我们得到关系式

$$k_-(\bar{u}(x) + 1) = C_1 e^{\mu_1^+(0)x}(\frac{1}{\mu_1^+(0)} + \mathbf{O}(e^{-\alpha|x|})) + C_2 e^{\mu_2^+(0)x}(\frac{1}{\mu_2^+(0)} + \mathbf{O}(e^{-\alpha|x|})), \tag{6.55}$$

对于某个固定的 $\alpha > 0$。综合这些观察可得，对于 $C_2 = 0$，我们有以下极限

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\bar{u}''(x)}{\bar{u}'(x)} = \mu_1^+(0); \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\bar{u}'(x)}{\bar{u}(x)+1} = \mu_1^+(0), \tag{6.56}$$

而对于 $C_2 \neq 0$，同样的关系成立，只需将 $\mu_1^+(0)$ 替换为 $\mu_2^+(0)$。

现在我们可以计算 $0 < \nu < 1/4$ 处右侧平台上的超平面指标了。我们已经看到，不存在交叉点 $x_* \in \mathbb{R}$，因此只需了解当 $x$趋于 $+\infty$ 时渐近交叉点的性质。为此，我们使用缩放映射

$$\tilde{\psi}_1^+(x;0) = \frac{\tilde{\omega}_1^+(x;0)}{|\eta^-(x;0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|},$$

根据 (1.31)，它具有定义良好的渐近极限

$$\tilde{\psi}_1^{+,-}(0) = \lim_{x\to-\infty} \tilde{\psi}_1^+(x;0) = \frac{v^-(0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(0)}{|v^-(0)||\tilde{\mathcal{V}}^+(0)|} > 0,$$

其中最后一个 不等式由我们对 (6.46) 的验证得出。由 (6.54) 可知 t

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta^-(x;\lambda)}{|\eta^-(x;\lambda)|} = \begin{cases} v_2^+(0)/|v_2^+(0)| & C_2 \neq 0 \\ v_1^+(0)/|v_1^+(0)| & C_2 = 0. \end{cases}$$

无论哪种情况,

$$v_i^+(0) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(0) = \tilde{\kappa}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_i^+(0) \\ \nu\mu_i^+(0)^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tilde{\kappa}(0)(\mu\mu_i^+(0)^2 + \mu_i^+(0) + 1) = 0,$$

其中，最后一个等式成立，是因为 $\mu_1^+(0)$ 和 $\mu_2^+(0)$ 是 $h_+(\mu;0)$ 的非零根。由此可见，当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时，穿越必定与渐近极限相关。为理解与这次穿越相关的符号，我们直接考察当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时 $\tilde{\psi}_1^+(x;0)$ 和 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$ 的符号。

首先，由于对于所有 $x\in\mathbb{R}$， $k_-<0$ 和 $\bar{u}'(x)<0$，由 (6.50) 可知，在这种情况下，对于所有 $x\in\mathbb{R}$，$\tilde{\psi}_1^+(x;0)>0$。此外，由 (6.55) 和 (6.56) 可知，当 $x$充分大时， $\bar{u}''(x)>0$，因此由 (6.52) 可知，当 $x$ 充分大时， $\tilde{\psi}_2^+(x;0)>0$。由于 $\tilde{\psi}_1^+(x;0)$ 和 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)$ 均为正， $p^+(x;0)$ 位于第三象限，因此随着 $x$ 趋于 $+\infty$，它沿顺时针方向趋近于 $(-1,0)$。按照我们的约定，这种情况下超平面指标不增加，因此可以得出，对于 $0<\nu<1/4$，有

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;0),\mathcal{h}^+(0);[-\infty,+\infty])=0.$$

根据定理 1.1，我们可以得出结论：在此情形下，若沿上边具有不变性，则 (6.37) 的非正特征值计数 $\mathcal{N}_\#((-\infty,0])$ 满足不等式

$$\mathcal{N}_\#((-\infty,0])\geq|\mathfrak{m}|.$$

与第6.1节一样，我们可以利用有关 Evans函数的信息来估计 $\mathcal{N}_\#((-\infty,0))$，而不是 $\mathcal{N}_\#((-\infty,0])$。我们已经看到，对于 (6.37)， $D(0)=0$ 且 $D'(0)<0$，由此可得，当 $x$ 充分大时，对于所有充分接近 0 的 $\lambda<0$，必有 $\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)>0$。此外，我们已经看到，在当前应用中，$\tilde{\psi}_2^+(x;0)>0$，当 $x\gg0$时成立。配对 $\tilde{\psi}_1^+(x;\lambda)>0$和 $\tilde{\psi}_2^+(x;0)>0$使 $p^+(x;\lambda)$ 位于第三象限，这表明随着 $\lambda$ 增大到 $0$ $p^+(x;\lambda)$，它会顺时针方向旋转至 $(-1,0)$，且超平面指标不会增加。这使我们能够将 (6.28) 修正为以下表述

$$\mathcal{N}_\#((-\infty,0))\geq|\mathfrak{m}|.$$

由于我们可能有 $\mathfrak{m}=0$，这一关系与稳定性相容（尽管不能据此推出稳定性）。

现在我们转向有趣的情形 $\eta>1/4$，此时波 $\bar{u}(x)$ 中的振荡表明可能出现不稳定性。这个例子中我们主要关注的是，从当前的几何视角来看，为什么这种不稳定性并不会发生。和往常一样，我们先确定 $\mathbb{R}$ 上所有的共轭点。从 (6.50) 可知，这些点对应于满足以下条件的值：$x_*\in\mathbb{R}$ 要么 $\bar{u}'(x_*)=0$，要么 $\bar{u}(x_*)=-1$。第一个这样的点记作$x_1$，它出现在 $\bar{u}(x)$ 首次穿越位于 $-1$的水平线时。若将后续的交叉依次记为序列 $x_1<x_2<x_3<\ldots$，则从图 6.1 可知， $\bar{u}'(x_2)=0$、 $\bar{u}(x_3)=-1$、$\bar{u}'(x_4)=0$，依此类推，总共有无穷多个交叉。

注记 6.3. 对于 $\nu>1/4$，波 $\bar{u}(x)$ 对应于 $(\bar{u},\bar{u}')$ 相平面中的一条连接轨道，从 (1, 0) 处的鞍点连接到 $(-1,0)$ 处的稳定螺旋点，从而确保了此处所述的定性性质。详情请参见 *[32]* 中的定理 1.1。

为了确定这些交叉点的方向，我们将 (6.35) 表示为

$$\nu\bar{u}''(x)+\bar{u}'(x)=\frac{1}{2}(\bar{u}(x)^2-1). \tag{6.57}$$

对于 $x_1$，我们看到

$$\nu\bar{u}''(x_1) = -\bar{u}'(x_1) < 0,$$

随后，对于 $x_3$、$x_5$ 等，符号交替变化（即 $\nu\bar{u}''(x_3) = -\bar{u}'(x_3) > 0$、$\nu\bar{u}''(x_5) = -\bar{u}'(x_5) < 0$，依此类推）。同样，对于 $x_2$，我们看到

$$\nu\bar{u}''(x_2) = \frac{1}{2}(\bar{u}(x_2)^2 - 1) > 0,$$

对于 $x_2$、$x_4$ 等，符号再次交替变化。结合这些观察，我们得出

$$\operatorname{sgn}\tilde{\omega}_2^+(x_i;0) = \operatorname{sgn}\bar{u}''(x) = \begin{cases} +1 & i = 2,3,6,7,\ldots \\ -1 & i = 1,4,5,8,9,\ldots. \end{cases}$$

同样，

$$\tilde{\omega}_1^{+\prime}(x;0) = \frac{k_-}{\sqrt{3}}\Big(\bar{u}''(x)(1+\bar{u}(x)) + \bar{u}'(x)^2\Big),$$

因此

$$\tilde{\omega}_1^{+\prime}(x_i;0) = \frac{k_-}{\sqrt{3}}\bar{u}'(x_i)^2 < 0, \quad i = 1,3,5,\ldots,$$

同时还有

$$\tilde{\omega}_1^{+\prime}(x_i;0) = \frac{k_-}{\sqrt{3}}\bar{u}''(x_i)(1+\bar{u}(x_i)) > 0, \quad i = 2,4,6,\ldots,$$

综合这些观察，我们看到

$$\operatorname{sgn}\frac{\tilde{\omega}_1^{+\prime}(x_i;0)}{\tilde{\omega}_2^{+}(x_i;0)} = \begin{cases} +1 & i = 1,2,5,6,\ldots \\ -1 & i = 3,4,7,8,\ldots. \end{cases}$$

我们可以得出结论，随着 $x$ 的增加，

$$\operatorname{Ind}(\mathcal{g}(\cdot;0), \mathcal{h}^+(0); (-\infty, x])$$

会在各个值 $\{0,1,2\}$ 之间循环，起始值为 0（对应 $x < x_1$）。完整的超平面指标并不存在，但这次计算中的抵消表明，每条通过右侧平台进入马斯洛夫盒的谱曲线也会通过右侧平台离开。由此可见，即使对于 $\nu > 1/4$，波 $\bar{u}(x)$ 也可能在谱意义上稳定；事实上，下面进行的额外数值计算证实了这一点。

与第6.1节中讨论的应用类似，我们以数值计算与 (6.37) 相关的谱曲线作为本节的结尾。进行这项计算时，我们将使用以下函数

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda) &= \eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda) \\ &= \tilde{\kappa}(\lambda)\Big\{(\nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1)\eta_1^-(x;\lambda) + (\nu\mu_3^+(\lambda) + 1)\eta_2^-(x;\lambda) + \eta_3^-(x;\lambda)\Big\}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda) = \eta^-(x;\lambda) \wedge \tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda) = -\Big\{&(\mu_3^+(\lambda)^2 - (1-1/\nu)\mu_3^+(\lambda))\eta_1^-(x;\lambda) \\ &+ (\mu_3^+(\lambda) + 1/\nu)\eta_2^-(x;\lambda) - \mu_3^+(\lambda)\eta_3^-(x;\lambda)\Big\},\end{aligned}$$

˜其中 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 与上文相同，并且

$$\tilde{\mathcal{V}}_M^+(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_3^+(\lambda) \\ \mu_3^+(\lambda) + 1/\nu \\ -\mu_3^+(\lambda)^2 + (1 - 1/\nu)\mu_3^+(\lambda) \end{pmatrix},$$

是与矩阵 $\tilde{\mathcal{A}}_+(\lambda)$ 的特征值 $-\mu_3^+$({v2) 对应的特征向量，该矩阵由 (1.17) 从

$$\mathcal{A}_+(\lambda) = MA_+(\lambda)M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 1-\lambda & -1 & 1-1/\nu \end{pmatrix}.$$

利用 $\tilde{\omega}_1^+(x;\lambda)$ 和 $\tilde{\omega}_2^+(x;\lambda)$，现在可以通过数值计算 $\eta^-(x;\lambda)$，生成任意截断的马斯洛盒上的谱曲线。正如预期，对于任意 $\nu \in (0, 1/4)$ 进行计算时，都没有谱曲线进入马斯洛盒，因此没有谱曲线可供描绘。此外，随着 $x$ 增大至某个足够大的值 $c$，跟踪点 $p^+(x;0)$ 会沿顺时针方向转向 $(-1,0)$（但不会到达该点）；而当 $\lambda$ 从 0 $p^+(c;\lambda)$ 减小时，跟踪点会沿逆时针方向转离 $(-1,0)$。由此可见，当 $c$ 足够大时，对于任意 $\nu \in (0, 1/4)$，马斯洛盒都没有贡献。作为一个具体例子，我们对 $\nu = 1/8$ 进行了计算，并确认对于马斯洛盒 $[-5,0]\times[-20,20]$，其边界上没有交叉，因此 $\mathfrak{m} = 0$。这也包括上边没有交叉，表明不存在不稳定特征值。

情形 $\nu > 1/4$ 更有趣。我们在解析计算中已经看到，对于所有 $\nu > 1/4$，右侧平台上实际上存在无穷多个穿越点，它们对应一列数值 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$，满足 $\lim_{i\to\infty} x_i = \infty$。相应地，我们预计会有无穷多条谱曲线沿右侧平台进入和离开马斯洛夫盒。由于数值计算会被截断，因此无法证实这一预期，但它们表明，在考察窗口内，谱曲线的分布确实与预期一致。我们将针对两个特定情形进行计算： $\nu = 2$ 和 $\nu = 5$。这似乎可以说明，当 $\nu$ 减小到 2 以下以及增大到 5 以上时，图像会如何变化。

首先，对于 $\nu = 2$，数值结果显示，经由右侧平台进入的谱曲线包含在与 $\lambda$ 区间 $[-.02, 0]$相关联的竖直条带内。图 6.7 展示了马斯洛夫盒 $[-.02,0]\times[-22,22]$ 中的谱曲线。为了观察穿越是否持续出现，我们还给出第二幅图，展示马斯洛夫盒 $[-.0002,0]\times[-22,22]$，其中图 6.7 中上方的谱曲线得到了更清晰的解析，并显现出另外两条谱曲线。参见图 6.8。

作为比较，我们也对 $\nu = 5$ 的情形进行了数值计算，生成了谱曲线。随着 $\nu$ 增大，定常解 $\bar{u}(x;\nu)$ 的振荡逐渐分散，因此我们预期谱曲线之间的距离会变大。正如图 6.9 所示，事实确实如此。随着 $\nu$ 继续增大，我们预期谱曲线之间的距离会进一步变大，并延伸到马斯洛夫盒更深处。

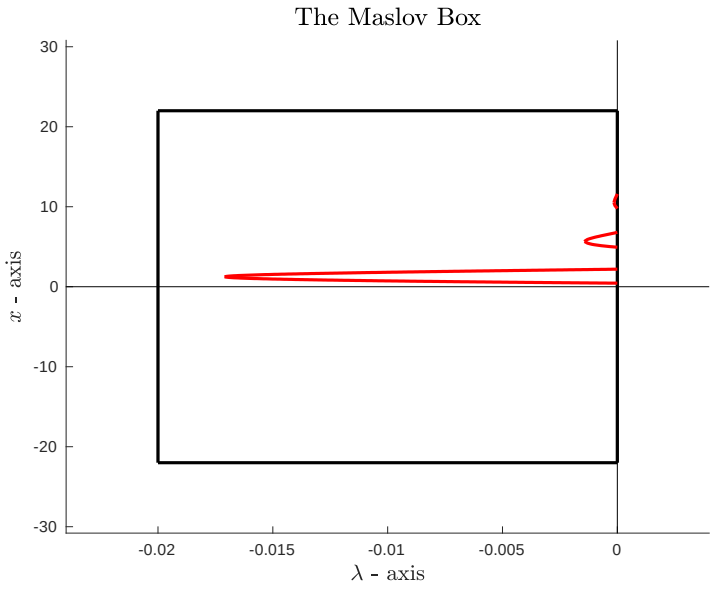



图 6.7： $\nu = 2$对应的马斯洛夫盒（6.32）。

# A 附录

在本附录中，我们将验证第 6.2 节中的一项论断：在我们对 KdV-Burgers 方程的分析中，左侧平台上不存在交点。首先，要使左侧平台上存在交点，必须有某个值 $s \in \mathbb{R}$，使得

$$\eta^-(s;\lambda_1) \wedge \tilde{\mathcal{V}}^+(\lambda_1) = 0.$$

也就是说， $\lambda_1$ 必须是该半直线问题的一个特征值

$$\begin{aligned} -\nu\phi''' - \phi'' + (\bar{u}(x)\phi)' &= \lambda\phi, \quad x \in (-\infty, s) \\ -\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)}\phi(s) - (\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)})\phi'(s) + \nu\phi''(s) &= 0, \end{aligned} \tag{A.1}$$

˜在构造这个边界条件时，我们使用了（6.45）中的 $\mathcal{V}^+(\lambda)$ 来写出

$$\begin{pmatrix} \phi(s) \\ \phi'(s) \\ \nu\phi''(s) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -\nu\mu_3^+(\lambda) - 1 \\ \nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1 \end{pmatrix}$$
$$= (\nu\mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) + 1)\phi(s) + (\nu\mu_3^+(\lambda) + 1)\phi'(s) + \nu\phi''(s) = 0,$$

然后利用特征值关系重新整理各项

$$\nu\mu_3^+(\lambda)^3 + \mu_3^+(\lambda)^2 + \mu_3^+(\lambda) = -\lambda$$

（即， $h_+(\mu_3^+;\lambda) = 0$），其中 $h_+$ 如（6.40）所示。

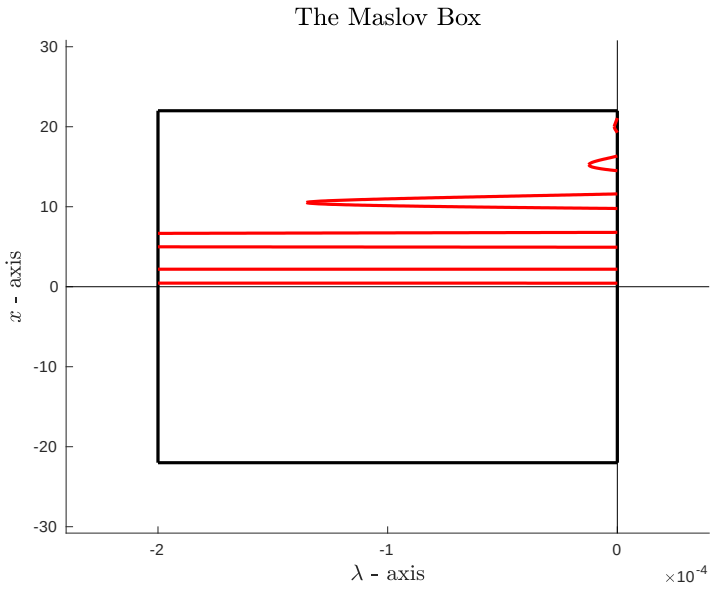



图 6.8：Maslo　v 与 $\nu = 2$ 相关的 (6.32) 方框，包含额外的谱曲线　.

我们采用标准的能量论证，首先假设对于某个 $\lambda \leq 0$，存在方程（A.1）的一个解 $\phi(x)$，使得 $\phi(x) \to 0$ 当 $x \to -\infty$ 时成立；根据我们的假设，其衰减必然以指数速率进行。将（A.1）乘以 $\phi$，并在 $(-\infty, s)$ 上积分，得到关系式

$$-\nu \int_{-\infty}^{s} \phi''' \phi dx - \int_{-\infty}^{s} \phi'' \phi dx + \int_{-\infty}^{s} (\bar{u}(x)\phi)' \phi dx = \lambda \int_{-\infty}^{s} \phi^2 dx. \tag{A.2}$$

对于 (A.2) 左边的第一项，我们可以通过分部积分写成

$$\begin{aligned} -\nu \int_{-\infty}^{s} \phi''' \phi dx &= -\nu \phi''(s)\phi(s) + \nu \int_{-\infty}^{s} \phi'' \phi' dx \\ &= -\nu \phi''(s)\phi(s) + \frac{\nu}{2} \phi'(s)^2. \end{aligned} \tag{A.3}$$

同样，对于 (A.2) 左边的第二项，我们可以通过分部积分写成

$$-\int_{-\infty}^{s} \phi'' \phi dx = -\phi'(s)\phi(s) + \int_{-\infty}^{s} \phi'^2 dx, \tag{A.4}$$

对于第三项，我们类似地得到关系式

$$\int_{-\infty}^{s} (\bar{u}(x)\phi)' \phi dx = \bar{u}(s)\phi(s)^2 - \int_{-\infty}^{s} \bar{u}(x)\phi\phi' dx. \tag{A.5}$$

接下来，我们为表达式 (A.3)、(A.4) 和 (A.5) 右侧的项求下界。从 (A.5) 开始，我们令

$$C := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar{u}(x)|,$$

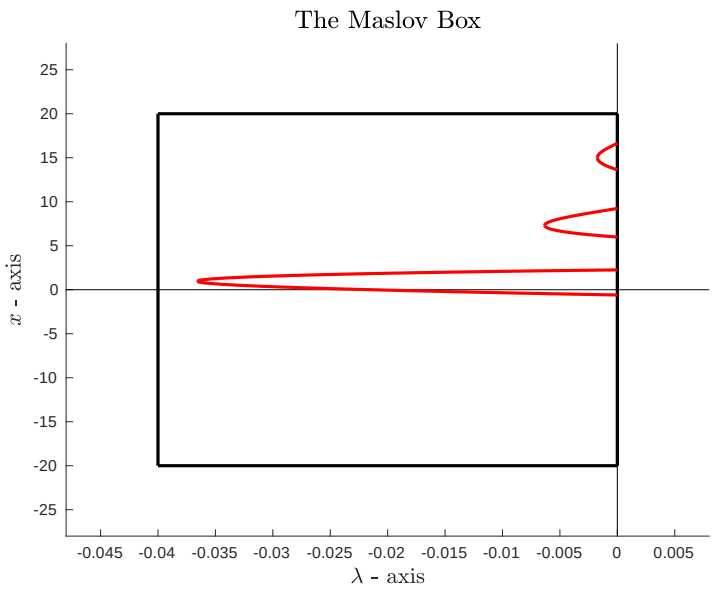



图 6.9：与 $\nu = 5$ 相关的 (6.32) 的马斯洛夫盒。

由于 $\bar{u}(x)$ 的连续性和端态条件，该项有界。此外，对于下面将选取为足够小的值 $\epsilon > 0$，我们注意到标准不等式

$$|\phi||\phi'| \leq \frac{1}{2\epsilon}|\phi|^2 + \frac{\epsilon}{2}|\phi'|^2. \tag{A.6}$$

这使我们能够表示下界

$$-\int_{-\infty}^{s} \bar{u}(x)\phi\phi' dx \geq -\frac{C}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx - \frac{C\epsilon}{2}\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx.$$

接下来，为了估计 $\bar{u}(s)\phi(s)^2$, ，我们观察到 $\phi(s)^2$ 可以表示为

$$\phi(s)^2 = \int_{-\infty}^{s}\frac{d}{dx}\phi^2 dx = \int_{-\infty}^{s} 2\phi\phi' dx,$$

将其与 (A.6) 结合，可得

$$\phi(s)^2 \leq \frac{1}{\epsilon}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx + \epsilon\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx. \tag{A.7}$$

综合这些观察，我们得到不等式

$$\int_{-\infty}^{s}(\bar{u}(x)\phi)'\phi dx \geq -\frac{3C}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx - \frac{3C\epsilon}{2}\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx.$$

接下来，对于 (A.4) 的右端，我们可以再次使用 (A.6)（用新的常数$\delta$ 替换 $\epsilon$），得到

$$-\phi'(s)\phi(s) + \int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx \geq -\frac{1}{2\delta}|\phi|^2 - \frac{\delta}{2}|\phi'|^2 + \int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx,$$

随后，我们可以使用 (A.7) 得到不等式

$$-\int_{-\infty}^{s}\phi''\phi dx \geq -\frac{1}{2\epsilon\delta}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx - \frac{\epsilon}{2\delta}\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx - \frac{\delta}{2}|\phi'|^2 + \int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx.$$

最后，对于 (A.3)，我们利用 (A.1) 中的边界条件，写得

$$\nu\phi''(s) = \frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)}\phi(s) + (\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)})\phi'(s),$$

由此可见

$$-\nu\phi''(s)\phi(s) = -\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)}\phi(s)^2 - (\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)})\phi'(s)\phi(s).$$

右侧第一项的符号有利，但要控制右侧第二项还需要一些工作。首先，与 (A.6) 类似，对于任意 $\eta > 0$，有如下不等式

$$|(\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)})\phi'(s)\phi(s)| \leq \frac{1}{2\eta}|(\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)})|^2\phi(s)^2 + \frac{\eta}{2}\phi'(s)^2.$$

回忆一下，$\mu_3^+(\lambda)$ 满足多项式方程

$$\nu\mu^3 + \mu^2 + \mu + \lambda = 0,$$

我们看到，当 $\lambda \ll 0$ 时，$\mu_3^+(\lambda)$ 的行为可由极限刻画

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\nu\mu_3^+(\lambda)^3}{\lambda} = -1.$$

特别地，

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{|\lambda|^2/|\mu_3^+(\lambda)|^4}{|\lambda|/|\mu_3^+(\lambda)|} = \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{|\lambda|}{|\mu_3^+(\lambda)|^3} = \nu.$$

给定任意 $\kappa > 0$，我们可以找到足够大的 $\Lambda \gg 0$，使得

$$\frac{|\lambda|^2}{|\mu_3^+(\lambda)|^4} \leq (\nu+\kappa)\frac{|\lambda|}{|\mu_3^+(\lambda)|}, \quad \forall\,\lambda < -\Lambda.$$

I此外，由于 $\lambda/\mu_3^+(\lambda)^2 < -1/\mu_3^+(\lambda) < 0$，我们有以下简单的不等式 y

$$|\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)}| \leq |\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2}|,$$

因此，我们可以将估计式表示为

$$\frac{1}{2\eta}|\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2} + \frac{1}{\mu_3^+(\lambda)}|^2 \leq \frac{1}{2\eta}|\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)^2}|^2 \leq \frac{1}{2\eta}(\nu+\kappa)\frac{|\lambda|}{|\mu_3^+(\lambda)|}.$$

现在我们可以看到

$$-\nu\phi''(s)\phi(s) \geq -\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)}\phi(s)^2 - \frac{1}{2\eta}(\nu+\kappa)\frac{|\lambda|}{|\mu_3^+(\lambda)|}\phi(s)^2 - \frac{\eta}{2}\phi'(s)^2.$$

此时，我们选择 $\eta = \frac{3}{4}\nu$ 和 $\kappa = \frac{1}{4}\nu$，此时不等式变为

$$-\nu\phi''(s)\phi(s) \geq -\frac{\lambda}{\mu_3^+(\lambda)}\phi(s)^2 - \frac{5}{6}\frac{|\lambda|}{|\mu_3^+(\lambda)|}\phi(s)^2 - \frac{3}{8}\nu\phi'(s)^2 \geq -\frac{3}{8}\nu\phi'(s)^2.$$

If 现在将所有这些不等式合并起来，我们得到下界

$$\begin{aligned}\lambda\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx \geq -\frac{3}{8}\nu\phi'(s)^2 + \frac{\nu}{2}\phi'(s)^2 - \frac{1}{2\epsilon\delta}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx - \frac{\epsilon}{2\delta}\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx \\ - \frac{\delta}{2}\phi'(s)^2 + \int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx - \frac{3C}{2\epsilon}\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx - \frac{3C\epsilon}{2}\int_{-\infty}^{s}\phi'^2 dx.\end{aligned}$$

最后，我们将根据 $\nu$ 和 $C$的取值，为 $\epsilon$ 和 $\delta$ 作出恰当选择，从而完成计算。为此，我们需要

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}\nu + \frac{\epsilon}{2} &\leq \frac{\nu}{2} \\ \frac{\epsilon}{2\delta} + \frac{3C\epsilon}{2} &\leq 1.\end{aligned}$$

具体来说，我们取以下特定值

$$\epsilon = \min\{\frac{1}{4}\nu, \frac{1}{3C}\} \quad \text{and} \quad \delta = \epsilon.$$

由此可得

$$\lambda\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx \geq -\Big(\frac{1}{2\epsilon\delta} + \frac{3C}{2\epsilon}\Big)\int_{-\infty}^{s}\phi^2 dx,$$

由此可见，**(A.1)** 的任意特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都必须满足不等式

$$\lambda \geq -\Big(\frac{1}{2\epsilon\delta} + \frac{3C}{2\epsilon}\Big),$$

其中 $\epsilon$ 和 $\delta$ 是上文选定的固定常数。通过选择低于此阈值的 $\lambda_1$，我们可以确保左侧平台上没有交叉。

# 参考文献

[1] J. Alexander、R. Gardner 和 C. K. R. T. Jones，《行波稳定性分析中产生的一个拓扑不变量》，J. Reine Angew. Math. 410 (1990) 167-212。

[2] T. J. Baird、P. Cornwell、G. Cox、C. Jones 和 R. Marangell，《非哈密顿系统的广义马斯洛夫指标》，SIAM J. Math. Anal. 54（2022）1623-1668。

[3] M. Beck, G. Cox, C. K. R. T. Jones, Y. Latushkin, K. McQuighan, 和 A. Sukhtayev，梯度反应扩散系统中脉冲的不稳定性：一种辛方法，《皇家学会哲学汇刊A辑》376 (2018)，第2117期，20170187，20页。[4] A. Bose 和 C. K. R. T. Jones，耦合神经纤维对中同相行波解的稳定性，《印第安纳大学数学杂志》44 (1995) 189–220。[5] M. Beck 和 S. Malham，大型系统的 Maslov 指标计算，《美国数学会会刊》143 (2015)，第5期，2159–2173。[6] M. Beck 和 J. Jaquette，通过共轭点验证谱稳定性，《SIAM应用动力系统杂志》21 (2022) 366–404。[7] F. Chardard 和 T. J. Bridges，同宿轨道的横截性、Maslov 指标与辛 Evans 函数，《非线性》28 (2015) 77–102。[8] F. Chardard、F. Dias 和 T. J. Bridges，孤立波 Maslov 指标的计算，第一部分：四维相空间上的哈密顿系统，《物理学D》238 (2009) 1841–1867。[9] F. Chardard、F. Dias 和 T. J. Bridges，孤立波 Maslov 指标的计算，第二部分：维数大于四的相空间，《物理学D》240 (2011) 1334–1344。[10] C–N. Chen 和 Xijun Hu，哈密顿系统同宿轨道的 Maslov 指标，《亨利·庞加莱研究所分析与非线性年刊》24 (2007) 589–603。[11] C–N. Chen 和 Xijun Hu，FitzHugh–Nagumo 方程驻脉冲解的稳定性分析，《变分法与偏微分方程》49 (2014) 827–845。[12] F. Chardard，《孤立波的稳定性》，博士论文，数学及其应用中心，2009。导师：T. J. Bridges 和 F. Dias。[13] P. Cornwell 和 C. K. R. T. Jones，双扩散 FitzHugh–Nagumo 系统中快速行波的存在性与稳定性，《SIAM应用动力系统杂志》17 (2018) 754–787。[14] P. Cornwell 和 C. K. R. T. Jones，激活剂-抑制剂系统中行波的稳定性指标，《爱丁堡皇家学会学报A辑：数学》150 (2020) 517–548。[15] J. W. Evans，神经轴突方程I：线性近似，《印第安纳大学数学杂志》21 (1972) 877–955。[16] J. W. Evans，神经轴突方程II：静息状态下的稳定性，《印第安纳大学数学杂志》22 (1972) 75–90。[17] J. W. Evans，神经轴突方程III：神经冲动的稳定性，《印第安纳大学数学杂志》22 (1972) 577–594。

[18] J. W. Evans，神经轴突方程IV：稳定与不稳定冲动，《印第安纳大学数学杂志》24 (1975) 1169–1190。[19] K. Furutani，弗雷德霍姆-拉格朗日-格拉斯曼流形与 Maslov 指标，《几何与物理杂志》51 (2004) 269–331。[20] R. Gardner 和 K. Zumbrum，黏性激波剖面不稳定性的间隙引理与几何判据，《纯粹与应用数学通讯》51 (1998) 789–847。[21] D. Henry，半线性抛物型方程的几何理论，数学讲义840，施普林格出版社，柏林-纽约，1981。[22]P. Howard、Y. Latushkin 和 A. Sukhtayev，¨上的薛定谔算子的 Maslov 指标与 Morse 指标，《印第安纳大学数学杂志》67 (2018) 1765–1815。[23] P. Howard，正则线性非哈密顿系统的重整化振荡理论，《纯粹与应用分析通讯》21 (2022) 4311–4345。[24] P. Howard，$\mathbb{R}$上线性哈密顿系统的 Maslov 指标与谱计数，即将发表于《动力系统与微分方程杂志》。[25] P. Howard 和 A. Sukhtayev，通过 Maslov 指标研究 $[0,1]$ 上线性哈密顿系统的重整化振荡理论，《动力系统与微分方程杂志》，DOI：10.1007/s10884-021-10121-2。[26] P. Howard 和 A. Sukhtayev，奇异线性哈密顿系统的重整化振荡理论，《泛函分析杂志》283 (2022)。[27] C. K. R. T. Jones，非线性薛定谔型方程驻波的不稳定性，《遍历理论与动力系统》8 (1988) 119–138。[28] C. K. R. T. Jones，非线性薛定谔方程径向对称驻波的一种不稳定机制，《微分方程杂志》71 (1988) 34–62。[29] C. K. R. T. Jones 和 R. Marangell，正弦-戈登方程行波解的谱，《离散与连续动力系统》5 (2012) 925–937。[30] T. Kapitula 和 K. Promislow，《非线性波的谱稳定性与动力稳定性》，施普林格出版社，纽约，2013。[31] H. C. M. Morse，《大范围变分法》，美国数学会丛书18 (1934)。[32] R. L. Pego、P. Smereka 和 M. I. Weinstein，KdV-Burgers 方程行波的振荡不稳定性，《物理学D》67 (1993) 45–65。[33] R. L. Pego 和 M. I. Weinstein，孤立波的特征值与不稳定性，《伦敦皇家学会哲学汇刊A辑》340 (1992) 47–94。[34] C. Sturm，关于二阶线性微分方程的回忆录，《纯粹与应用数学杂志》1 (1836) 106–186。

[35] K. Zumbrun 和 P. Howard，《逐点半群方法》与黏性激波稳定性，《印第安纳大学数学杂志》47（1998年）741-871。另请参阅本文的勘误：《印第安纳大学数学杂志》51（2002年）1017–1021。

作者邮箱：phoward@tamu.edu