arXiv:2301.07148v1 [math.AT] 17 Jan 2023

n值曲面间映射的博苏克-乌拉姆定理

VINICIUS CASTELUBER LAASS 和 CAROLINA DE MIRANDA E PEREIRO

Abstract. 本文分析了曲面间多值映射的一类博苏克-乌拉姆定理是否成立。我们提出了一种涉及辫群的代数方法，用于研究 n 值映射的问题。作为首个应用，我们描述了博苏克-乌拉姆定理对可分裂和不可分裂多值映射 ϕ 在以下两种情形下成立的条件：(i) X 是配备对踵对合的二维球面，而 Y 是闭曲面或欧几里得平面；(ii) X 是不同于配备自由对合的二维球面的闭曲面，τ 且 Y 是欧几里得平面。这些结果是完备的；在情形 (ii) 下，相关条件可用涉及轨道空间 X/τ 的第一整同调群的代数条件来描述。

1. Introduction

著名的博苏克-乌拉姆定理指出，对于任意连续映射 $f\colon \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}^m$ 存在一点 $x \in \mathbb{S}^m$使得 $f(x) = f(-x)$ [5,SatzII]。关于这一结果的历史、若干推广及应用的更多信息，例如可见 Matoušek 的著作 [28]，以及 [34] Steinlein 于 1985 年发表的论文；该论文在当时是关于这一主题最全面的综述。

1983 年，H. Schirmer 证明了博苏克-乌拉姆定理的一个版本，适用于一族 n 值映射$\phi\colon X \multimap \mathbb{R}^m$，其中 X 是紧致、单连通且具有$\mathbb{S}^m$ 的同调的度量空间（见 [32, 定理 2 和推论]）。其他作者也对多值映射的对踵点问题感兴趣，并取得了一些相关结果，例如见 [22]和 [25] 。另一方面，D. L. Gonçalves 和 J. Guaschi 最近采用辫群方法研究了曲面之间多值映射的定点问题（见 [20]）。

受前人工作的启发，本文的主要目标是为某些曲面之间的 n 值映射建立一个版本的博苏克-乌拉姆定理，并以构形空间和辫群为工具，提出一种新的视角。在更精确地陈述结果之前，我们先回顾多值映射的一些定义和性质。

多值函数（或多值函数）$\phi\colon X \multimap Y$ 是一种对应，它为每个 $x \in X$ 关联一个非空子集 $\phi(x)$，该子集属于 Y。根据 [20]，多值函数 ϕ 若对所有 $x \in X$ 都有 $\phi(x)$ 为闭集，并且对于 Y 中的任意开集 V，集合 $\{x \in X\colon \phi(x) \subset V\}$ 在 X 中是开集，则称其为上半连续；若集合 $\{x \in X\colon \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ 在 X 中是开集，则称其为下半连续；若它既上半连续又下半连续，则称其为连续。n 值映射（或多值映射）$\phi : X \multimap Y$ 是一个连续多值函数，它为每个 $x \in X$ 指定 Y 的一个无序子集，且该子集的基数恰为 n。Schirmer [33] 定义，若存在单值映射 f_1、……、$f_n\colon X \to Y$，使得对于所有 $x \in X$，n 值映射 $\phi\colon X \multimap Y$ 满足 $\phi(x) = \{f_1(x) \ldots, f_n(x)\}$，则称其为可分裂的。特别地，若 Y 是豪斯多夫拓扑空间 [20, Propositon 42]，则所有可分裂的 n 值映射都是连续的。

处理 n 值函数的一种便捷方法是利用构形空间，R. F. Brown 和 D. L. Gonçalves [6] 以及后者与 J. Guaschi [20],曾对此进行探讨，我们将在下文加以说明。给定一个拓扑空间 Y，我们回顾一下

$$F_n(Y) = \{(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n \,:\, y_i \neq y_j \text{ if } i \neq j\}$$

日期：2023年1月19日。*2020*年数学主题分类。主要分类：55M20、57M07；次要分类：20F36。关键词和短语。博苏克-乌拉姆定理、曲面、多值函数、辫群1

n^{th} 有序构形空间 是 Y。对称群 S_n 作用于 n 个元素上的$F_n(Y)$，通过置换坐标自由作用。相应的商空间记作 $D_n(Y) = F_n(Y)/S_n$，称为 Y 的 n^{th} 无序构形空间 。

在考虑 n值映射 $\phi\colon X \multimap Y$与单个映射 $\Phi\colon X \to D_n(Y)$, 且 $\Phi(x) = \phi(x)$ 时，二者之间存在自然对应关系。在 X 和 Y 是度量空间的特殊情形下，使用这种对应关系很有帮助，因为根据 ϕ 定理 Φ，多值映射 [20,连续，当且仅当单值映射 8]也连续。

现在，我们可以定义多值映射的博苏克-乌拉姆性质。设 X 和 Y 是拓扑空间，且 X具有自由对合 τ。给定多值映射 $\phi\colon X \multimap Y$，我们将 ϕ关于 τ的博尔苏克–乌拉姆重合定义为 X中的一对点 $\{x, \tau(x)\}$，满足 $\phi(x) \cap \phi(\tau(x)) \neq \emptyset$。$n$值映射分为可分裂和不可分裂两个不同类别。由于我们关注的是根据博尔苏克–乌拉姆重合对这些映射进行分类，因此定义三元组 $(X, \tau; Y)$具有 n-可分裂博苏克-乌拉姆性质（分别地， n-不可分裂博苏克-乌拉姆性质），当且仅当从 X 到 Y 的每个可分裂（分别地，不可分裂） n值映射都关于 τ具有一个博尔苏克–乌拉姆重合点。最后，如果三元组 $(X, \tau; Y)$具有 n-可分裂和 n-不可分裂博苏克-乌拉姆性质，我们就称其具有 n-博苏克-乌拉姆性质。下文中，我们将博苏克-乌拉姆性质简称为 BUP。

注意，所有单值映射都是可分裂的，并且上述定义与单值映射的 BUP 一致，其含义与文献 [8, 29], 中的定义相同。例如，在特殊情形下，若 X 是闭曲面，而 Y是闭曲面或欧几里得平面，则具有 1-BUP 的三元组 $(X, \tau; Y)$ 的完整分类见 [15, 19]。

关于 n 值映射的博尔苏克–乌拉姆重合点的一些结果可直接由单值情形推出。例如，若三元组 $(X, \tau; Y)$ 具有 1-BUP，则对于所有 n，任意可分裂的 n 值映射 $\phi = \{f_1, \ldots, f_n\}\colon X \multimap Y$ 都有博尔苏克–乌拉姆重合点。这可由 H. Schirmer [32, 定理 2] 中给出的相同证明推出。然而，正如我们将在定理 2 中看到的，对于不可分裂的 n 值映射，我们不能得出同样的结论；例如，存在一个满足 1-BUP 但不满足 2-BUP 的三元组 $(X, \tau; Y)$。另一方面，若 τ 是二维球面上的对径映射，则三元组 $(\mathbb{S}^2, \tau; \mathbb{S}^2)$ 是一个不满足 1-BUP、却满足对所有 $n \geq 2$ 均成立的 n-BUP 的例子，而这正是以下主定理的推论之一。

THEOREM 1. 设 n 为正整数，设 $\tau\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ 为对径映射，且设 Y 为 $\mathbb{R}^2$ 或一个闭曲面。三元组 $(\mathbb{S}^2, \tau; Y)$ 具有1-*BUP*，当且仅当 $Y \neq \mathbb{S}^2$，并且对所有 $n \geq 2$，它都具有 n-*BUP*。

上述结果给出了完整的分类，这是因为对径映射本质上是 $\mathbb{S}^2$ 上唯一的自由对合（例如参见 [3,定理 1]）。

除了上述定理之外，我们还对所有与 BUP 相关的三元组 $(X, \tau, \mathbb{R}^2)$ 进行了完整分类，其中 X 是一个闭曲面。在陈述本文的另一项主要结果之前，我们先介绍一些事实和记号。设 X 是一个路径连通的 CW-复形，并配备有一个自由胞腔对合 τ。若 $y \in \{x, \tau(x)\}$，则称两点 x， $y \in X$等价。我们将相应的商空间记为 X_τ，也称其为轨道空间，并将自然投影记为 $p_\tau\colon X \longrightarrow X_\tau$。注意， X_τ也是一个路径连通的 CW-复形，且 p_τ是一个二重覆盖映射。因此，我们有以下短正合列：

$$1 \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{(p_\tau)_\#} \pi_1(X_\tau) \xrightarrow{\theta_\tau} \frac{\pi_1(X_\tau)}{(p_\tau)_\#(\pi_1(X))} \cong \mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\} \longrightarrow 1, \tag{1.1}$$

其中 θ_τ 是自然投影。同态 θ_τ 可分解为 $\pi_1(X_\tau)$ 的阿贝尔化 $\hat{}$，而它是 X_τ 的一阶同调群。我们将此分解记为 $\theta_\tau\colon H_1(X_\tau) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$。$\hat{}$ 若 X_τ 是闭不可定向曲面，我们用 δ 表示$H_1(X_\tau)$ 中唯一的非平凡二阶元素。我们得到以下结果，它推广了 D. L. Gonçalves [15]所给出的 1-BUP 情形。

THEOREM 2.设 $n \geq 1$ 和 X 是不同于 $\mathbb{S}^2$ 且具有自由对合τ: $X \to X$的闭曲面。以下条件成立:

(1) 若 X_τ 是闭可定向曲面，或 X_τ 是闭不可定向曲面，且 $\theta_\tau(\delta) = 0$，则三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-分裂 *BUP*，也不具有 n-不可分裂 *BUP*。*(2)* 若 X_τ 是闭不可定向曲面，$\hat{}\,\theta_\tau(\hat{}\delta) = 1$ 且 n 为偶数，则三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 n-分裂 *BUP*，但不具有 n-不可分裂 *BUP*。*(3)* 若 X_τ 是闭不可定向曲面，$\hat{}\,\theta_\tau(\hat{}\delta) = 1$ 且 n 为奇数，则三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 n-*BUP*。

我们要向读者强调，上述结果是完备的，也就是说，我们可以判断三元组（X， τ； $\mathbb{R}^2$）是否具有 n-BUP。此外，我们还分别分析了 n-可分裂和n-不可分裂多值映射与 BUP 的关系。

我们还获得了关于三元组（X， τ； Y）相对于n-BUP 的分类的部分结果，其中 X 和 Y 均为闭曲面， $X \neq \mathbb{S}^2$。这些结果相当直接，是定理2 以及文献 [19]中给出的关于三元组相对于 1-BUP 的分类的推论。我们在第6节陈述并证明这些例子。关于上述三元组相对于 n-可分裂 BUP 和 n-不可分裂 BUP 的完整分类研究仍在进行中。

除引言和第6节外，本文结构安排如下。第2节简要回顾曲面的编织群。我们定义若干重要子群，用以证明定理3。该结果给出了研究 n值映射的 BUP 所需的充要代数条件：其定义域是配备了自由胞腔对合的 CW复形，目标空间是闭曲面。第3 节中，我们推导了上述子群在曲面为欧几里得平面时的一些性质，这些性质有助于证明定理2。本文第4 节用于证明定理1 ，证明将由命题9–11推出。我们在第2 5 节证明定理，证明将由命题14–16完成。

2. PRELIMINARIES AND GENERALITIES

设 n 为正整数，且 Y 是闭曲面或 $\mathbb{R}^2$。平面的辫群和纯辫群由 Artin [1, 2] 定义，随后 Fox 和 Neuwirth [11] 利用构形空间将其推广到曲面上。基本群 $\pi_1(D_n(Y))$（分别为 $\pi_1(F_n(Y))$）是 Y 的 n股辫群（分别为 n股纯辫群），记作 $B_n(Y)$（分别记作 $P_n(Y)$）。由此得到以下短正合列，它由 $(n!)$ 重覆盖映射$F_n(Y) \longrightarrow D_n(Y)$ 所诱导:

$$1 \longrightarrow P_n(Y) \longrightarrow B_n(Y) \longrightarrow S_n \longrightarrow 1. \tag{2.1}$$

混合辫群的概念是在 [16, 18] 中定义的：通过对构形空间 $F_{m+n}(Y)$ 取子群 $S_m \times S_n \subset S_{m+n}$ 的自由作用所产生的中间商空间。轨道空间$F_{m+n}(Y)/S_m \times S_n$ 记作 $D_{m,\,n}(Y)$，混合辫群定义为 $B_{m,\,n}(Y) = \pi_1(D_{m,\,n}(Y))$。因此，我们得到以下短正合列，它由 $((m!) \times (n!))$ 重覆盖映射 $F_{m,\,n}(Y) \longrightarrow D_{m,\,n}(Y)$ 所诱导:

$$1 \longrightarrow P_{m,n}(Y) \longrightarrow B_{m,n}(Y) \longrightarrow S_m \times S_n \longrightarrow 1. \tag{2.2}$$

$D_{m,n}(Y)$ 的任意元素都可以视为一个有序对 $(\bar{x}, \bar{y})$，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 是 Y 的不相交子集，其基数分别为 m 和 n。若 $m = n$，令 $D^2_{n,n}(Y)$ 为自由对合 $\hat{}\tau\colon D_{n,n}(Y) \to D_{n,n}(Y)$ 所定义的轨道空间，其中 $\hat{}\tau(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$。因此，我们得到 $B_{2n}(Y)$ 的另一个重要子群，它由 $B^2_{n,n}(Y) = \pi_1(D^2_{n,n}(Y))$ 定义；它们通过由二重覆盖映射 $D_{n,n}(Y) \longrightarrow D^2_{n,n}(Y)$ 诱导的以下短正合列相关联:

$$1 \longrightarrow B_{n,n}(Y) \longrightarrow B^2_{n,n}(Y) \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1. \tag{2.3}$$

这些子群 $B_{2n}(Y)$ 对于本文十分重要，并将在下面的定理中出现。以下结果是 [19, 命题 13] 的推广，并将在本文余下部分发挥关键作用。

THEOREM 3. 设 n 为正整数， X 为路径连通且局部紧的 CW-复形，并赋有胞腔自由对合 τ，且 Y 为 $\mathbb{R}^2$ 或闭曲面。假设对于三元组 $(X,\tau;Y)$， n-分裂 ***BUP***（分别地，***n*-非分裂 *BUP***）不成立。那么存在一个同态 $\Psi\colon \pi_1(X_\tau)\to B^2_{n,n}(Y)$，使得 $\Psi(Ker(\theta_\tau))\subset P_{2n}(Y)$（分别地， $\Psi(Ker(\theta_\tau))\not\subset P_{2n}(Y)$），并且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_\tau) & \xrightarrow{\Psi} & B^2_{n,n}(Y) \\ & {\scriptstyle\theta_\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi} & \\ & \mathbb{Z}_2. & \end{array} \tag{2.4}$$

反过来，如果存在图表（的这样一个分解 Ψ 2.4），且满足 $\Psi(Ker(\theta_\tau))\subset P_{2n}(Y)$(分别地， $\Psi(Ker(\theta_\tau))\not\subset P_{2n}(Y)$），那么对于三元组 n-分裂 ***BUP***（分别地， n-非分裂 ***BUP***）在以下情形下不成立：$(X,\tau;Y)$：

(a) ***CW*复形** X 的维数小于或等于二，且 $Y=\mathbb{S}^2$。***(b)*** ***CW*复形** X 的维数小于或等于三，且 $Y=\mathbb{RP}^2$。***(c)*** Y 不同于 $\mathbb{S}^2$ 和 $\mathbb{RP}^2$。

REMARK 4. 定理 3 为我们提供了一个必要的代数条件，用以研究在 n值映射从 X 到 Y 的情况下，BUP 是否成立；其中 X 是闭曲面，而 Y是闭曲面或欧几里得平面。

定理 *3*的证明。 首先，关于 X 的假设意味着，根据 X 第四章命题 5.8 和定理 5， [24,是一个度量空间。14]。由于 Y 是欧几里得平面或闭曲面，因此 Y 也是一个度量空间。因此，我们可以将从 n到 X 的 Y 值映射视为从 X 到 $D_n(Y)$ 的单值映射，依据 [20, 定理 8]。

首先，假设三元组（$X,\tau;Y$）不具有 n-BUP，也就是说，存在一个映射 ˆ $\Phi\colon X\longrightarrow D_n(Y)$，且不存在博尔苏克–乌拉姆重合。于是，由 $\Phi(x)=(\Phi(x)\ \Phi(\tau(x)))$ 给出的映射 $\Phi\colon X\longrightarrow D_{n,n}(Y)$ ˆ ˆ 是良定义的。注意， Φ 是（τ, ˆτ） -_等变的, _其中 ˆτ 是 $D_{n,n}(Y)$ 上的自由对合，由 ˆ$\tau(x,y)=(y,x)$ 定义。利用覆盖空间的标准论证（类似于证明 [21, 引理 5] 第一部分中所用的论证），可得存在一个同态Ψ：$\pi_1(X_\tau)\to B^2_{n,n}(Y)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\hat\Psi} & B_{n,n}(Y) \\ {\scriptstyle(p_\tau)_\#}\downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_\tau) & \xrightarrow{\Psi} & B^2_{n,n}(Y) \\ & {\scriptstyle\theta_\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi} & \\ & \mathbb{Z}_2, & \end{array} \tag{2.5}$$

ˆ ˆ其中 $\Psi=\Phi_\#$。如果三元组 $(X,\tau;Y)$ 不具有 n-分裂 BUP，那么不失一般性，我们可以假设多值映射 Φ 是可分裂的。当且仅当存在映射 ˆ$f_1,\dots f_n\colon X\longrightarrow Y$，使得对所有 $x\in X$， $\Phi(x)=(\{f_1(x)\dots,f_n(x)\},\{f_1(\tau(x))\dots,f_n(\tau(x))\})$，此时上述情形成立。ˆ 上述等式等价于映射 Φ 可提升至覆盖 $F_{2n}(Y)\longrightarrow D_{n,n}(Y)$，而这在代数上等价于 $P_{2n}(Y)\supset \mathrm{Im}\left(\hat\Psi\right)=\Psi((\mathrm{Im}(p_\tau)_\#)=\Psi(\mathrm{Ker}(\theta_\tau))$。类似地，按照前面的论证可得，如果三元组 $(X,\tau;Y)$ 不具有 n-不可分裂 BUP，则 $\Psi(\mathrm{Ker}(\theta_\tau))\not\subset P_{2n}(Y)$。图表 (2.4) 是图表 (2.5) 的底部，因此我们证明了定理的第一部分。

现在，我们将证明定理的逆向部分。我们断言，存在一个映射 $\Phi\colon X_\tau \longrightarrow D^2_{n,n}(Y)$，它诱导出 Ψ。我们依次讨论陈述中的三种情形。在此之前，注意到 X_τ 作为 CW复形的维数与 X 相同，因为 τ 是自由且胞腔的。

（a）映射 Φ 的存在性可通过阻碍理论的经典论证得到，方法与以下论证相同：[19, 命题 13 的证明，第（a）项]。（b）$D^2_{n,n}(Y)$ 的万有覆盖与 $F_{2n}(\mathbb{RP}^2)$ 的万有覆盖相同，即 $\mathbb{S}^3$ 由 [17, 命题 6] 给出。由于 X_τ 的维数不超过三，再次运用阻碍理论的经典方法，我们可以构造映射 Φ。（c）若 $Y \neq \mathbb{S}^2$，$\mathbb{RP}^2$，则空间 $F_{2n}(Y)$ 是一个 K(π，1)，这是由 [9, 第 4 章定理 11] 和 [10, 推论 22], 得出的；因此 $D^2_{n,n}(Y)$ 也是一个 K(π，1)。由 [21,定理 4]可知映射 Φ 的存在性。

令 $\hat{\Phi}\colon X \longrightarrow D_{n,n}(Y)$ 为映射 $\Phi\circ p_\tau$ 关于覆盖 $D_{n,n}(\overline{Y}) \longrightarrow D^2_{n,n}(Y)$ 的提升。因此，我们得到如下交换图表：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & D_{n,n}(Y) \\ {\scriptstyle p_\tau}\downarrow & & \downarrow \\ X_\tau & \xrightarrow[\bar{\Phi}]{} & D^2_{n,n}(Y). \end{array} \tag{2.6}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 令 Ψ 为由 Φ 诱导的基本群层面的同态。因此，由图表 (2.4) 和 (2.6)，我们得到代数交换图表 (2.5)。使用证明引理 5 和定理 7], 时所用的类似论证，我们得出 Φ 是一个 (τ, $\hat{}\,\tau$)-等变映射，并且存在映射 $\Phi\colon X \longrightarrow D_n(Y)$，满足对所有 $x \in X$，$\Phi(x) = (\Phi(x)\ \Phi(\tau(x)))$。因此，映射 Φ 没有博尔苏克–乌拉姆重合。最后，使用证明第一部分时所用的类似论证，我们得出：若 Ψ(Ker (θ_τ)) $\subset P_{2n}(Y)$（分别为 Ψ(Ker (θ_τ)) $\not\subset P_{2n}(Y)$），则 Φ 可分裂（分别为不可分裂），于是定理第二部分的结论得证。□

下一个结果将用于证明第2 节中的定理 5。

THEOREM 5. 给定整数 $n, k \geq 1$，存在一个同态 $\tilde{\Psi}\colon B^2_{n,n}(\mathbb{R}^2) \to B^2_{nk,nk}(\mathbb{R}^2)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} B^2_{n,n}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & B^2_{nk,nk}(\mathbb{R}^2) \\ & {\scriptstyle \pi_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_2} & \\ & \mathbb{Z}_2, & \end{array} \tag{2.7}$$

其中 π_1 和 π_2 定义如（2.3）所示。

证明。给定一个 点 $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in F_{2n}(\mathbb{R}^2)$，考虑实数 er

$$\delta(z) = \frac{1}{2k} \cdot \min_{1\leq i<j\leq n}\{||x_i - x_j||, ||y_i - y_j||, ||x_i - y_i||, ||x_i - y_j||, ||x_j - y_i||\}.$$

注意，$\delta(z) \neq 0$。现在，考虑 $\varepsilon(z) = (\delta(z),\ 0) \in \mathbb{R}^2$。我们定义

$$\begin{aligned} G(z) = (&x_1 + 0\cdot\varepsilon(z), x_1 + 1\cdot\varepsilon(z), \ldots, x_1 + (k-1)\cdot\varepsilon(z), \\ &x_2 + 0\cdot\varepsilon(z), x_2 + 1\cdot\varepsilon(z), \ldots, x_2 + (k-1)\cdot\varepsilon(z), \\ &\vdots \\ &x_n + 0\cdot\varepsilon(z), x_n + 1\cdot\varepsilon(z), \ldots, x_n + (k-1)\cdot\varepsilon(z), \\ &y_1 + 0\cdot\varepsilon(z), y_1 + 1\cdot\varepsilon(z), \ldots, y_1 + (k-1)\cdot\varepsilon(z), \\ &y_2 + 0\cdot\varepsilon(z), y_2 + 1\cdot\varepsilon(z), \ldots, y_2 + (k-1)\cdot\varepsilon(z), \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y_n + 0 \cdot \varepsilon(z), y_n + 1 \cdot \varepsilon(z), \ldots, y_n + (k-1) \cdot \varepsilon(z)).$$

注意， $G\colon F_{2n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow F_{2nk}(\mathbb{R}^2)$ 是一个定义良好的连续映射。利用商拓扑的标准论证，存在映射 $G\colon D_{n,\ n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow D_{nk,\ nk}(\mathbb{R}^2)$ 和 $\tilde{G}\colon \overline{D}^2_{n,\ n}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow D^2_{nk,\ nk}(\mathbb{R}^2)$，使得下图可交换：

$$\begin{array}{ccc} F_{2n}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{G} & F_{2nk}(\mathbb{R}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n,n}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\overline{G}} & D_{nk,nk}(\mathbb{R}^2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2_{n,n}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\tilde{G}} & D^2_{nk,nk}(\mathbb{R}^2). \end{array} \tag{2.8}$$

利用覆盖空间的性质（与 [21, 引理的证明 5], 中所用的类似），我们可以取$\tilde{\Psi} = \tilde{G}_{\#}\colon\ B^2_{n,\ n}(\mathbb{R}^2)$ $= \pi_1(D^2_{n,\ n}(\mathbb{R}^2)) \longrightarrow B^2_{nk,\ nk}(\mathbb{R}^2)\ = \pi_1(D^2_{nk,\ nk}(\mathbb{R}^2))$，从而得到图表（2.7）。□

3. Presentations

本节介绍曲面的辫群的一些一般性质和结果，尤其是平面辫群，这些内容将在本文中发挥作用。如上一节所定义， $B_n(\mathbb{R}^2)$是 n^{th} 无序构形空间 $D_n(\mathbb{R}^2)$的基本群，通常记作 B_n ，并称为 n^{th} ***Artin*** 辫群。从现在起，我们将用 B_n 表示其所有子群；若 $Y = \mathbb{R}^2$，则不特别注明曲面 Y。

对于 $n \geq 2$，群 B_n由以下元素生成： σ_1，...， σ_{n-1}，并满足下列关系，这些关系称为 ***Artin*** 关系 [1]:

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{for all } 1 \leq i \leq n-2; \\ \sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_j & \text{if } |i-j| \geq 2 \text{ and } 1 \leq i, j \leq n-1. \end{cases}$$

称为辫子的 B_n中的元素，可视为弦和发辫的几何表示。Artin 辫群的生成元（也称为***Artin***生成元）可见图（1），其中每条路径称为一根弦。此外，由于每个辫子都定义在圆盘的内部，包含映射 $j\colon \mathbb{D}^2 \to int(Y)$ 使我们能够将 B_n 中的每个辫子视为 $B_n(Y)$ 中的一个辫子，其中 Y 是任意曲面。

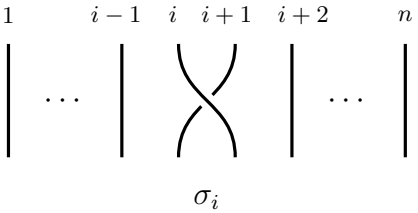


Figure 1. 辫子 σ_i

存在一种自然对应关系，将每个辫子与 S_n的一个置换相关联，考虑投影 $\pi\colon\ B_n \to S_n$, $\sigma_i \longmapsto (i,\ \ i+1)$。 n^{th} ***Artin*** 纯辫群 $P_n = \pi_1(F_n(\mathbb{R}^2))$ 与 π的核同构。因此，纯辫是具有平凡置换的元素。子群 P_n 由集合 $\{A_{i,j}$ 生成： $1 \leq i < j \leq n\}$ [23, 第 **1** 章，引理 **4**。2], 其中

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \cdots \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}. \tag{3.1}$$

Garside 元素 （或“半扭转”） Δ_n 的 B_n 定义为

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1), \tag{3.2}$$

并可在图 2 中看到 $n = 6$。该元素在辫理论中发挥着重要作用

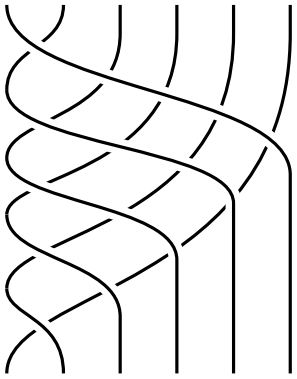


FIGURE 2. B_6 的 Garside 元素 Δ_6

群，尤其是在解决 B_n [4, 12]中的共轭问题时。利用 Artin 关系，很容易证明

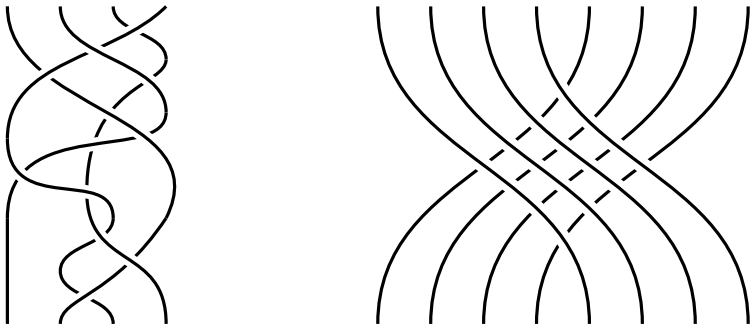
$$\Delta_n \sigma_i \Delta_n^{-1} = \sigma_{n-i} \text{ for all } 1 \leq i \leq n-1. \tag{3.3}$$

“全扭转”是由半扭转的平方定义的辫子，可以用 P_n 的生成元表示为

$$\Delta_n^2 = A_{1,2}(A_{1,3}A_{2,3}) \cdots (A_{1,n}A_{2,n} \cdots A_{n-1,n}), \tag{3.4}$$

这个纯辫生成 $B_n(Y)$ 的中心，其中 $Y = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}P^2$ [7, 13, 31]。正如我们将在下一节看到的，这些元素在本文中十分重要。

Artin 辫群的其他中间子群 $B_{n,n}$ 和 $B^2_{n,n}$ 也有实用的几何表示。我们可以将 $B_{n,n}$ 中的辫子看作有 $2n$ 根弦的辫子，其中前 n 根弦的终点是前 n 个点，最后 n 根弦的终点是最后 n 个点，如图 3(a) 所示。群 $B^2_{n,n}$ 包含 B_n、n，还包含所有前 n 根弦的终点是最后 n 个点、最后 n 根弦的终点是前 n 个点的辫子，如图 3(b) 所示。



(a) 中的辫，2　　(b) B_4^2中的辫 ,4

FIGURE 3. 在 $B_{n,n}$ 和 B^2_n中的例子，n

REMARK 6. 容易看出，Δ_{2n} 的置换是 $\prod_{i=1}^{n}(i, \ 2n+1-i)$，于是，元素$\Delta_{2n} \in B^2_{n,n} \setminus B_{n,n}$。根据（2.3），我们知道 $B_{n,n}$ 是 B^2_n的一个指数为 2 的子群，因此 $B^2_{n,n} \setminus B_{n,n}$ 中的所有元素都可以表示为 Δ_{2n} 与 B_n中的一个辫的乘积。

如果 $n = 1$，我们有 $B_{1,1} = P_2$。对于 $n \geq 2$，以下命题给出了 $B_{n,n}$ 本文将使用的表示，该表示基于 $B_{n,n}(\mathbb{S}^2)$ 中由 [18, 命题10]给出的表示。

PROPOSITION 7. 设 $n \geq 2$，群 $B_{n,\ n}$ 有如下表示 :

生成元: $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_{n+1}, \ldots, \sigma_{2n-1}, A_{i,j}: \quad 1 \leq i < j \leq 2n\}$。

关系:

(1) Pure Braid relations: $A_{r,s}^{-1} A_{i,j} A_{r,s} = \begin{cases} A_{i,j} & i < r < s < j \quad or \quad r < s < i < j; \\ A_{r,j} A_{i,j} A_{r,j}^{-1} & r < i = s < j; \\ A_{r,j} A_{s,j} A_{i,j} A_{s,j}^{-1} A_{r,j}^{-1} & i = r < s < j; \\ A_{r,j} A_{s,j} A_{r,j}^{-1} A_{s,j}^{-1} A_{i,j} A_{s,j} A_{r,j} A_{s,j}^{-1} A_{r,j}^{-1} & r < i < s < j. \end{cases}$

(2) Artin relations: $\begin{cases} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-2 \quad or \quad n+1 \leq i \leq 2n-2; \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & |i-j| \geq 2. \end{cases}$

(3) $\sigma_i^2 = A_{i,\ i+1}$、 $1 \leq i \leq n-1$ 或 $n+1 \leq i \leq 2n-1$。

(4) Conjugates: $\sigma_k A_{i,j} \sigma_k^{-1} = \begin{cases} A_{i,j}, & k \neq i-1, i, j-1, j; \\ A_{i,j}, & k = i, j = k+1; \\ A_{i,k+1}, & k = j; \\ A_{i,k+1}^{-1} A_{i,k} A_{i,k+1}, & j = k+1, i < k; \\ A_{i+1,j}, & i = k < j-1; \\ A_{k+1,j}^{-1} A_{k,j} A_{k+1,j}, & i = k+1. \end{cases}$

证明。我们采用 [26, 第 10 章，命题 1] 中所述的扩张方法，并将其应用于 $m = n$ 和 $Y = \mathbb{R}^2$的短正合列 (2.2)。根据这种方法，$B_{n、\ n}$ 的一组生成元由 P_{2n} 的所有生成元与 $S_n \times S_n$生成元的一组陪集代表元的并集给出。根据 [23,第 1 章引理 4，2], 我们可以选取 $\{A_{i,j}: \quad 1 \leq i < j \leq 2n\}$ 作为 P_{2n} 的生成元集。由于对换生成对称群，我们可以选取 σ_i、 $i = 1$、……、 $n-1$、 $n+1$、……、 $2n-1$ 作为$B_{n、\ n}$其余的生成元。关系分为三种类型。第一种是取 P_{2n} 生成元的所有关系得到的，我们再次使用 [23, 第 1 章引理 4，2] 得到关系 (1)。第二种是用选定的陪集代表元重写 $S_n \times S_n$ 的关系，并将相应元素表示为由 P_{2n}生成元组成的字。这一步可以用简单的几何方式来理解，由此得到关系 (2) 和 (3)。最后，第三种是将核的生成元在陪集代表元作用下的共轭元写成完全由核的生成元构成的字。这一重写过程在 [27, 引理 31], 中有详细描述，由此得到关系 (4)。□

REMARK 8. 根据（3.1），元素 $A_{i,\ j} \in B_{n,\ n}$、 $1 \leq i < j \leq n$ 或 $n+1 \leq i < j \leq 2n$，可以写成 σ_k、 $k = 1$，……，$n-1$，$n+1$，……，$2n-1$的乘积。若 $1 \leq i \leq n$ 且 $n+1 \leq j \leq 2n$，则辫 $A_{i,\ j} \in B_{n,\ n}$ 可以写成

$$A_{i,j} = (\sigma_{j-1} \cdots \sigma_{n+1})(\sigma_i^{-1} \cdots \sigma_{n-1}^{-1}) A_{n,n+1} (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_{n+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1}). \tag{3.5}$$

4. PROOF OF THEOREM 1

本节将通过一系列命题证明定理 1 。回顾一下， τ 表示 $\mathbb{S}^2$上的对径映射。首先，注意三元组（$\mathbb{S}^2$， τ；$\mathbb{S}^2$）不具有 1-BUP，因为 $\mathbb{S}^2$ 的恒等映射不会将对跖点合并。结合经典的博苏克-乌拉姆定理以及 [19, 定理 2 和命题 4] ，这一事实可归纳为以下命题:

PROPOSITION 9. 设 Y是 $\mathbb{R}^2$ 或一个闭曲面。那么三元组 $(\mathbb{S}^2, \tau;\ Y)$ 具有1-*BUP*，当且仅当 $Y \neq \mathbb{S}^2$。

除 $Y = \mathbb{S}^2$ 的情形外，下一个结果推广了前一个结果，其证明采用了与定理 2] 的 [32,证明相同的思路。

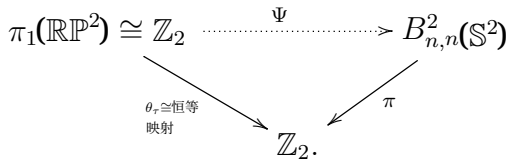
PROPOSITION 10. 设 Y是 $\mathbb{R}^2$ 或一个不同于 $\mathbb{S}^2$的闭曲面。那么三元组 $(\mathbb{S}^2, \tau;\ Y)$ 具有n-*BUP*，当且仅当 $n \geq 2$。

证明。设 $\phi\colon \mathbb{S}^2 \multimap Y$ 是一个 n值映射。那么根据引理 13] ， ϕ 可由 [20, 分裂，这意味着存在映射 $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{S}^2 \longrightarrow Y$，使得对所有 $x \in \mathbb{S}^2$， $\phi(x) = \{f_1(x)\ f_2(x) \ldots, f_n(x)\}$。由命题 9，存在一点 $x \in \mathbb{S}^2$，使得 $f_1(x) = f_1(-x)$，因此 $\phi(x) \cap \phi(-x) \neq \emptyset$，证毕。□

注意，定理1 是命题9 、10 以及下一个结果的总结。

PROPOSITION 11. 三元组$(\mathbb{S}^2, \tau;\ \mathbb{S}^2)$ 对所有 $n \geq 2$ 都具有 n-*BUP*。

证明。我们用反证法。假设 $(\mathbb{S}^2,\ \tau;\ \mathbb{S}^2)$ 不具有 n-BUP，且 $n \geq 2$。由定理3 以及 $\mathbb{S}^2$ 对踵 involution 的商为 $\mathbb{RP}^2$这一事实，我们得到以下交换图：



因此， Ψ 将 $\pi_1(\mathbb{RP}^2$中的生成元映射为辫 $b \in B_{2n}(\mathbb{S}^2$中的一个二阶元素，且它属于$B^2_{n,\ n}(\mathbb{S}^2) \setminus B_{n,\ n}(\mathbb{S}^2)$。然而，这显然不成立，因为根据 Δ^2_{2n}，全扭转 $B_{2n}(\mathbb{S}^2$中唯一的二阶元素是 [13, 定理 3.5] and $\Delta^2_{2n} \in P_{2n}(\mathbb{S}^2) \subset B_{n,\ n}(\mathbb{S}^2)$。□

REMARK 12. 我们也可以用与命题10 类似的方式证明命题11，因为 $B_m(Y)$是无挠的，只要 Y 是 $\mathbb{R}^2$ 或是不同于 $\mathbb{S}^2$ 的闭曲面；而对于 $\mathbb{RP}^2$ ，根据 [10, 定理 8], ，若$Y = \mathbb{R}P^2$，则全扭转 Δ^2_{2n} 也是 $B_{2n}(\mathbb{RP}^2$中唯一的二阶元素，这由 [17, 命题23]可知。

5. PROOF OF THEOREM 2

本节的主要目标是证明定理2。其证明将由命题14-16。在所有表述中， X 表示一个不同于 $\mathbb{S}^2$ 且允许自由对合 τ的闭曲面， X_τ 和 θ_τ 表示： $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 是式（1.1）中定义的同态。回顾一下， X_τ 也是一个闭曲面。接下来，我们将区分以下三种情况，并在每种情况下定义一个元素 $\delta \in \pi_1(X_\tau)$:

(I) X_τ 是亏格为 $m \geq 1$的闭可定向曲面，

$$\pi_1(X_\tau) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}\ :\ [a_1, a_2] \ldots [a_{2m-1}, a_{2m}] = 1\rangle \text{ and } \delta = 1.$$

(II) X_τ 是亏格为 $2m+2$, $m \geq 0$的闭不可定向曲面，

$$\pi_1(X_\tau) = \langle u, v, a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}\ :\ uvuv^{-1}[a_1, a_2] \ldots [a_{2m-1}, a_{2m}] = 1\rangle \text{ and } \delta = u.$$

(III) X_τ 是亏格为 $2m+1$, $m \geq 1$的闭不可定向曲面，

$$\pi_1(X_\tau) = \langle c, a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}\ :\ c^2[a_1, a_2] \ldots [a_{2m-1}, a_{2m}] = 1\rangle \text{ and } \delta = c.$$

ˆREMARK 13. 回顾一下， $\theta_\tau\colon H_1(X_\tau) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 是同态 θ_τ 到 $\pi_1(X_\tau)$ 的阿贝尔化的分解，而 δ是 $H_1(X_\tau)$ 中唯一非平凡的二阶元素（若 X_τ是不可定向的）。因此，采用上文（II）和（III）中的记号，我们有 $\theta_\tau(\delta) = \theta_\tau(\delta)$。

设 n 为一个正整数。采用（I）-（III）中的记号，为了证明定理2，根据注13，只需证明以下命题：

PROPOSITION 14. 若 $\theta_\tau(\delta) = \bar{0}$，则三元组 $(X, \tau;\ \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-分裂 *BUP* 和 n-不可分裂 *BUP*。

PROPOSITION 15. 若 $\theta_\tau(\delta) = 1$ 且 n 为偶数，则三元组 $(X, \tau;\ \mathbb{R}^2)$ 具有 n-分裂 *BUP*，但不具有 n-不可分裂 *BUP*。

PROPOSITION 16. 若若 $\theta_\tau(\delta) = \bar{1}$ 且 n 为奇数，则三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 n-*BUP*。

本文其余部分将用于证明命题 14-16。我们将不加说明地使用第 3 节中确立的记号。

命题 14 的证明。$n=1$ 的情形直接由 [15, 定理 2.5]得出。因此，假设$n \geq 2$。对于每个生成元 $g \in \pi_1(X_\tau)$，取 $i(g) \in \{0,1\}$，使得 $\theta_\tau(g) = i(g)$。考虑 $2n$-辫$\omega_n = \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=n-j}^{2n-1-j} \sigma_i$ （ω_4 在几何上由图 3(b)表示）。注意到 $w_n \in B^2_{n,n} \backslash B_{n,n}$，因此 $\pi(w_n) = 1$。我们定义 Ψ: $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow B^2_{n,n}$，令 $\Psi(g) = \omega_n^{i(g)}$。利用假设 $\theta_\tau(\delta) = 0$，对于本节开头列出的每种情形 (I)-(III)，我们都可以验证 Ψ 是良定义的同态，且图表 (2.4) 可交换。若 $a \in \text{Ker}\,(\theta_\tau)$，则 $\Psi(a)$是 ω_n 的偶次幂，而 ω_n 是 P_{2n}的一个元素。因此，$\Psi(\text{Ker}\,(\theta_\tau)) \subset P_{2n}$。由定理 3 的 (c) 项可知，$(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-可分裂 BUP。现在，我们来证明 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-不可分裂 BUP。再一次，我们可以验证，由 $\Psi'(g) = (\sigma_1\omega_n)^{i(g)}$ 定义的 Ψ': $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow B^2_{n,n}$ 可延拓为一个同态，且图表 (2.4) 可交换。由于 θ_τ 是满同态，存在 $\pi_1(X_\tau)$的一个生成元 g_1，使得 $\theta_\tau(g_1) = 1$。于是$g_1^2 \in \text{Ker}\,(\theta_\tau)$，且 $\Psi'(g_1^2) = (\sigma_1\omega_n)^2 \notin P_{2n}$。因此 $\Psi'(\text{Ker}\,(\theta_\tau)) \not\subset P_{2n}$，由此根据定理 3 的 (c) 项即可完成证明。□

命题 15 的证明。假设 $\theta_\tau(\delta) = 1$，则由定理 2.5], $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 1-BUP。由此，并运用我们在命题 10 的证明中使用的类似论证，可以得出，对于所有 n（尤其是 n 为偶数时），$(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 n-分裂 BUP。现在，我们来证明 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-不可分裂 BUP。我们断言，对于 $n=2$，存在一个同态Ψ_1: $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow B^2_{2,}2$，使图表 (2.4) 可交换。暂且假设该断言成立。设 $\tilde{\Psi}$: $B^2_{2,2} \longrightarrow B^2_{2k,2k}$ 是由定理 5 得到的同态，其中 $k = n/2$。那么，由复合 $\Psi = \tilde{\Psi} \circ \Psi_1$给出的同态 Ψ: $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow B^2_{2k,2k}$ 使图表 (2.4) 可交换。根据定理 3 的 (c) 项，三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n- 分裂 BUP（若 $\Psi(\text{Ker}\,(\theta_\tau)) \subset P_{2n}$），或者该三元组不具有 n-不可分裂 BUP（若 $\Psi(\text{Ker}\,(\theta_\tau)) \not\subset P_{2n}$）。然而，我们已在证明的第一部分表明，$(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 具有 n-分裂 BUP，因此得出该三元组不具有 n-不可分裂 BUP。

为了完成证明，我们现在证明这一断言，也就是说，定义一个同态Ψ_1: $\pi_1(X_\tau) \longrightarrow B^2_{2,\ 2}$使图表（2.4）可交换。我们将把证明分为以下两两不相交的情形（i）-（iii）。我们将用到$B^2_{2,\ 2} \setminus B_{2,\ 2}$中的以下元素：$\Delta_4$（半扭转，如（3.2）中所定义）以及 $\Omega = \sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$。利用（3.3），可得

$$\Delta_4\Omega\Delta_4^{-1} = \Delta_4(\sigma_2\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1})\Delta_4^{-1} = \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1} = \Omega^{-1}. \tag{5.1}$$

对于每个 $g \in \pi_1(X_\tau)$，令 $i(g) \in \{0,1\}$ 使得 $\theta_\tau(g) = i(g)$。

(i) $\pi_1(X_\tau)$ 如（II）所示。我们定义

$$\Psi_1 : \begin{cases} u \longmapsto \Omega; \\ v \longmapsto \Delta_4\Omega^{1-i(v)}; \\ a_k \longmapsto \Omega^{i(k)} \text{ for all } k. \end{cases}$$

由（5.1），可得

$$\begin{aligned}\Psi_1\left(uvuv^{-1}[a_1,a_2]\dots[a_{2m-1},a_{2m}]\right) &= \Omega\Delta_4\Omega^{1-i(v)}\Omega(\Delta_4\Omega^{1-i(v)})^{-1}[\Omega^{i(a_1)},\Omega^{i(a_2)}]\dots[\Omega^{i(a_{2m-1})},\Omega^{i(a_{2m})}] \\ &= \Omega\Delta_4\Omega\Delta_4^{-1} = 1.\end{aligned}$$

因此 Ψ_1 可延拓为一个从 $\pi_1(X_\tau)$ 到 $B^2_{2\text{的同态},\ 2}$。根据假设，我们有$\theta_\tau(u) = 1$，由此可以得出图表（2.4）是可交换的。(ii) $\pi_1(X_\tau)$ 如（III）所示，且 $\theta_\tau(a_1) = 1$或 $\theta_\tau(a_2) = 1$。我们定义

$$\Psi_1 : \begin{cases} c \longmapsto \Omega; \\ a_1 \longmapsto \Delta_4^{i(a_2)}\Omega^{i(a_1)+i(a_2)-2}; \\ a_2 \longmapsto \Delta_4^{1-i(a_2)}\Omega; \\ a_k \longmapsto \Omega^{i(k)} \text{ for } k \neq 1,2. \end{cases}$$

首先，假设 $\theta_\tau(a_1)=1$ 且 $\theta_\tau(a_2)=0$。由 (5.1) 可得

$$\begin{aligned}\Psi_1(c^2[a_1,a_2][a_3,a_4]\dots[a_{2m-1},a_{2m}]) &= \Omega^2[\Omega^{-1},\Delta_4\Omega][\Omega^{i(a_3)},\Omega^{i(a_4)}]\dots[\Omega^{i(a_{2m-1})},\Omega^{i(a_{2m})}]\\ &= \Omega\Delta_4\Omega\Delta_4^{-1}=1.\end{aligned}$$

再次，Ψ_1 可延拓为从 $\pi_1(X_\tau)$ 到 B_2^2 的同态，2；由于根据假设 $\theta_\tau(c)=1$，图表 (2.4) 是交换的。情形 ($\theta_\tau(a_1)=0$ 和 $\theta_\tau(a_2)=1$) 以及 ($\theta_\tau(a_1)=1$ 和 $\theta_\tau(a_2)=1$) 的证明完全类似，因此省略细节。

(iii) $\pi_1(X_\tau)$ 与 (III) 中相同，且 $\theta_\tau(a_1)=\theta_\tau(a_2)=0$。留给读者验证辫子 $\sigma_2\Omega^{-1}\sigma_2^{-1}$ 和 $\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1}$ 属于 $B_{2,\,2}$。定义

$$\Psi_1\colon\begin{cases} c\longmapsto\Omega;\\ a_1\longmapsto\sigma_2\Omega^{-1}\sigma_2^{-1};\\ a_2\longmapsto\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1};\\ a_k\longmapsto\Omega^{i(k)}\ \text{for}\ k\neq 1,2.\end{cases}$$

由 B_4 中的 Artin 关系可推出 $\sigma_i^{\varepsilon}\sigma_{i+1}\sigma_i^{-\varepsilon}=\sigma_{i+1}^{-\varepsilon}\sigma_i\sigma_{i+1}^{\varepsilon}$，其中 $i=1$，2 且 $\varepsilon=-1$，1。利用这一点以及 $\sigma_1\sigma_3=\sigma_3\sigma_1$，得到

$$\begin{aligned}\Psi_1(c^2[a_1,a_2][a_3,a_4]\dots[a_{2m-1},a_{2m}]) &= \Omega^2[\sigma_2\Omega^{-1}\sigma_2^{-1},\sigma_2\sigma_3^2\sigma_2^{-1}][\Omega^{i(a_3)},\Omega^{i(a_4)}]\dots[\Omega^{i(a_{2m-1})},\Omega^{i(a_{2m})}]\\ &= \Omega^2\sigma_2^2\sigma_1\sigma_3^{-1}(\sigma_2^{-1}\sigma_3^2\sigma_2)\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}\\ &= \Omega^2\sigma_2^2\sigma_1\sigma_3^{-1}(\sigma_3\sigma_2^2\sigma_3^{-1})\sigma_3\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}\\ &= \Omega^2\sigma_2^2(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^{-1})\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}\\ &= \Omega^2\sigma_2^2(\sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2)\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}\\ &= \Omega^2\sigma_2\sigma_1^2\sigma_3^{-2}\sigma_2^{-1}=\Omega^2\Omega^{-2}=1.\end{aligned}$$

与前面的情形一样，图表 (2.4) 是交换的。

□

命题 *16* 的证明。若 $n=1$，则结论可直接由 [15, 定理 2 得出。5]因此，设 n 为一个不等于 1 的奇正整数。为简化证明，我们记

$$\pi_1(X_\tau)=\langle\alpha,\beta,a_1,a_2,\dots,a_{2m-1},a_{2m}\,:\,\alpha\beta\alpha\beta^{-1}[a_1,a_2]\dots[a_{2m-1},a_{2m}]\rangle$$

其中，若 $\pi_1(X_\tau)$ 如 (II) 中所述，则 $\begin{cases}\alpha=u\\ \beta=v\end{cases}$；若 $\pi_1(X_\tau)$ 如 (III) 中所述，则 $\begin{cases}\alpha=c\\ \beta=1\end{cases}$。对于每个生成元 $g\in\pi_1(X_\tau)$，令 $i(g)\in\{0,1\}$，使得 $\theta_\tau(g)=i(g)$。根据假设，我们有 $i(\alpha)=1$。我们用反证法。假设三元组 $(X,\tau,\mathbb{R}^2)$ 不具有 n-BUP。由定理 3，存在同态 $\Psi\colon\ \pi_1(X_\tau)\longrightarrow B_{n,n}^2$，使得图表 (2.4) 交换。由此以及注记6，存在辫子 $b_\alpha,b_\beta,b_1,b_2,\dots,b_{2m-1},b_{2m}\in B_{n,n}$，使得

$$\Psi\colon\begin{cases}\alpha\longmapsto b_\alpha\Delta\\ \beta\longmapsto b_\beta\Delta^{i(\beta)}\\ a_k\longmapsto b_k\Delta^{i(a_k)},\end{cases}$$

其中，$\Delta=\Delta_{2n}$ 是半扭转。在 $\pi_1(X_\tau)$的表示关系中应用 Ψ，并利用$B_{n,\,n}$ 是$B_{n,\,n}^2$的正规子群这一事实，我们得到$B_{n,\,n}$中的下列方程：

$$\begin{aligned}b_\alpha\left(\Delta b_\beta\Delta^{-1}\right)\Delta^2\left(\Delta^{i(\beta)-1}b_\alpha\Delta^{-i(\beta)+1}\right)b_\beta^{-1}\cdot\left(b_1\left(\Delta^{i(a_1)}b_2\Delta^{-i(a_1)}\right)\left(\Delta^{i(a_2)}b_1\Delta^{-i(a_2)}\right)^{-1}b_2^{-1}\right)\dots\\ \cdot\left(b_{2m-1}\left(\Delta^{i(a_{2m-1})}b_{2m}\Delta^{-i(a_{2m-1})}\right)\left(\Delta^{i(a_{2m})}b_{2m-1}\Delta^{-i(a_{2m})}\right)^{-1}b_{2m}^{-1}\right)=1,\quad(5.2)\end{aligned}$$

其中， $\Delta^2 = \Delta_{2n}^2$ 是全扭转。由命题 7 可知，以下述生成元给出的同态ε: $B_{n,\ n} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ 是良定义的:

$$\varepsilon\colon \begin{cases} \sigma_k \longmapsto \overline{0}, \text{ if } 1 \leq k \leq n-1 \text{ or } n+1 \leq k \leq 2n-1, \\ A_{i,j} \longmapsto \overline{0}, \text{ if } 1 \leq i < j \leq n \text{ or } n+1 \leq i < j \leq 2n, \\ A_{i,j} \longmapsto \overline{1}, \text{ if } 1 \leq i \leq n \text{ and } n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases}$$

由（3.3）可知

$$\varepsilon(\Delta\sigma_k\Delta^{-1}) = \varepsilon(\sigma_{2n-k}) = \overline{0} = \varepsilon(\sigma_k)$$

对所有 k。利用上述等式和注记 8，我们得出

$$\varepsilon(\Delta A_{i,j}\Delta^{-1}) = \varepsilon(A_{i,j})$$

对所有 i 和 j。由于 ε 的目标空间是 $\mathbb{Z}_2$，我们得出

$$\varepsilon(b) + \varepsilon(\Delta b\Delta^{-1}) = \overline{0} \text{ for all } b \in B_{n,n}.$$

在方程（ε 两边应用 5.2），利用上述性质和（3.4），我们得到:

$$\overline{0} = \varepsilon(\Delta^2) = \sum_{1\leq i<j\leq 2n} \varepsilon(A_{i,j}) = \sum_{j=n+1}^{2n}\sum_{i=1}^{n} \overline{1} = \overline{n^2}.$$

l 最后的等式不成立，因为 n 是奇数。因此，$(X,\ \tau;\ \mathbb{R}^2)$ 具有 n-BUP . □

6. Some additional results about the triples $(X,\ \tau;\ Y)$

本节中，我们将针对 n-BUP，给出关于三元组 $(X,\ \tau;\ Y)$ 分类的一些部分结果，其中 X 和 Y 是闭曲面， $X \neq \mathbb{S}^2$。我们在下面两个命题中陈述这些结果。第一个命题表明，存在不具有 n-BUP 的三元组；第二个命题则证明相反的情形也成立。我们从以下引理开始:

Lemma 17. 设 X和 Y为闭曲面。若三元组 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 不具有 n-可分裂-*BUP*（分别为 n-不可分裂 *BUP*），则 $(X, \tau; Y)$ 也不具有 n-可分裂-*BUP*（分别为 n-不可分裂 *BUP*）。

证明。设 $(X, \tau; \mathbb{R}^2)$ 是一个不具有 n-分裂 BUP（分别地， n-不可分裂 BUP）的三元组。与定理 3 的证明中一样，存在连续映射 $\Phi_1\colon\ X \longrightarrow F_n(Y)$（分别地， $\Phi_2\colon\ X \longrightarrow D_n(Y)$），使得对所有 $x \in X$ 和 $i \in \{1, 2\}$，都有 $\Phi_i(\tau(x)) \neq \Phi_i(x)$。由于 Y 是一个闭曲面，存在嵌入 $\iota\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$，它诱导出嵌入 $\iota_1\colon\ F_n(\mathbb{R}^2) \longrightarrow F_n(Y)$ 和 $\iota_2\colon\ D_n(\mathbb{R}^2) \longrightarrow D_n(Y)$。于是映射 $\Phi_i' = \iota_i \circ \Phi_i$ 满足：对所有 $x \in X$ 和 $i \in \{1, 2\}$，都有 $\Phi_i'(\tau(x)) \neq \Phi_i'(x)$。因此，三元组 $(X, \tau; Y)$ 不具有 n-分裂 BUP（分别地， n-不可分裂 BUP）。□

ˆ 请回忆， X_τ 表示 X 关于对合 τ 的轨道空间，且 δ 是在序列（1.1）之后定义的。以下命题可由定理2 和引理17立即推出

Proposition 18. 设 $n \geq 1$ 、 $X \neq \mathbb{S}^2$ 和 Y 为闭曲面，其中 X 配备了一个自由对合 τ。以下条件成立:

ˆ ˆ*(1)* 若 X_τ 是闭可定向曲面，或 X_τ 是闭不可定向曲面，且 $\theta_\tau(\delta) = 0$，则三元组$(X, \tau; Y)$ 不具有 n-分裂 *BUP*，也不具有 n-不可分裂 *BUP*。ˆ ˆ*(2)* 若 X_τ是闭不可定向曲面， $\theta_\tau(\delta) = 1$且 n为偶数，则三元组$(X, \tau;\ Y)$不具有 n-不可分裂 *BUP*。

最后，沿用命题 10 的证明思路，我们可以得出：若三元组 $(X,\ \tau;\ Y)$ 具有 1-BUP，则对所有正整数 n，同一三元组都具有 n-可分裂 BUP。这一结论可直接由此事实、 [19, 定理 12 和命题 32] 得出以下结果。回顾一下，同态 θ_τ 是在序列 (1.1) 之后定义的。

PROPOSITION 19.设 X 和 Y 是不同于 $\mathbb{S}^2$ 的闭曲面，其中 X 配备了一个自由对合 τ，且 Y 是可定向的。关于第 $\pi_1(X_\tau)$ 节中给出的 第 5 节中给出的表示（*II*）和（*III*）项，假设下列条件之一成立：

(1) X_τ 是克莱因瓶，且 $\theta_\tau(u) = 1$。*(2)* $\overline{X}_\tau$是亏格为3的闭不可定向曲面，且对于某个 $i \in \{1, 2\}$，有 $\theta_\tau(c) = \theta_\tau(a_i) = 1$。

T那么，对于所有 $n \geq 1$，三元组$(X, \tau;\ Y)$ 都具有 n-可分裂 *BUP*。

我们希望扩展命题 18 和 19，并获得关于 n-BUP 的三元组 $(X,\ \tau;\ Y)$ 的完整分类，并打算很快发表这些结果。为此，我们正在使用本文中发展的技术，特别是中间辫群$B^2_{n,\ n}(Y)$ 和定理 3。

7. ACKNOWLEDGEMENTS

本文的研究工作是在第一作者于 IME-USP 进行博士后实习期间完成的，实习时间为2020年3月至2021年8月，获得了 Capes/INCTMat 项目资助，项目编号为 88887.136371/2017-00-465591/2014-0。作者谨向教授 Daciberg Lima Gonçalves 和 Daniel Vendrúscolo 致谢，感谢他们作出的重要贡献。

REFERENCES

[1] E. Artin, 《辫理论》，汉堡大学数学研讨会论文集 4 (1926), 47–72.[2] E. Artin, 《辫理论》，《数学年刊》48 (1947), 101–126.[3] T. Asoh, 《曲面上自由对合的分类》，《广岛数学杂志》6 (1976), 171–181.[4] J.S. Birman, 《辫子、纽结与映射类群》，《数学年刊研究丛书》82，普林斯顿大学出版社, 1974.[5] K. Borsuk, 《关于 n维欧几里得球面的三个定理》，《数学基础》20 (1933), 177–190.[6] R.F. Brown, D.L. Goncalves, 《关于 n值映射的拓扑》，《固定点理论进展》8 (2018), 205–220.[7] W.L. Chow, 《关于代数辫群》，《数学年刊》49 (1948), 654–658.[8] P.E. Desideri, P.L. Q. Pergher, D. Vendrúscolo, 《博苏克-乌拉姆定理的一些推广》。《数学出版物》（德布勒森）78 (2011), 583–593.[9] E. Fadell, S.Y. Husseini, 《构形空间的几何与拓扑》，施普林格数学专著丛书（施普林格出版社，柏林，2001）。[10] E. Fadell, L. Neuwirth, 《构形空间》，《斯堪的纳维亚数学》10 (1962), 111–118.[11] R.H. Fox, L. Neuwirth, 《辫群》，《斯堪的纳维亚数学》10 (1962), 119–126.[12] F.A. Garside, 《辫群及其他群》，《牛津数学季刊》20 (1969), 235–254.[13] R. Gillette 和 J. Van Buskirk, 《二维球面的辫群与映射类群的字问题及其推论》，《美国数学会汇刊》131 (1968), 277–296.[14] C.H. Goldberg, 《辫群的一个正合列》，《斯堪的纳维亚数学》33 (1973), 69–82.[15] D.L. Gonçalves, 《曲面上的博苏克-乌拉姆定理》，《数学问题》29 (2006), 117–123.[16] D.L. Gonçalves, J. Guaschi, 《曲面辫群中全扭转的根》，《剑桥哲学会数学会刊》137 (2004), 307–320.[17] D. L. Gonçalves 和 J. Guaschi, 《射影平面的辫群》，《代数与几何拓扑学》4 (2004), 757–780.[18] D.L. Gonçalves, J. Guaschi, 《辫群$B_{n,m}(\mathbb{S}^2)$与广义 Fadell-Neuwirth 短正合列》，《纽结理论及其分支》14 (2005), 375–403.[19] D.L. Gonçalves, J. Guaschi, 《映入曲面的映射的博苏克-乌拉姆定理》，《拓扑学及其应用》157 (2010), 1742–1759.[20] D.L. Gonçalves, J. Guaschi, 《 n值映射的不动点、不动点性质及曲面情形——一种辫群方法》，《数学研究》29 (2018), 91–124.[21] D.L. Gonçalves, J. Guaschi, V.C. Laass, 《欧拉示性数为零的曲面的自映射同伦类的博苏克-乌拉姆性质》，《固定点理论及其应用杂志》21 (2019) 21–65.[22] F.V. Haeseler, G. Skordev, 《多重映射的博苏克-乌拉姆定理、不动点指数与链逼近》，《太平洋数学杂志》153 (1992), 369–396。

[23] V.L. Hansen, 《辫子与覆盖：选讲主题》，伦敦数学学会学生教材 18，剑桥大学出版社，1989.[24] S.T. Hu, 《一般拓扑学基础》，Holden-Day 数学丛书（1964），Holden-Day, Inc.[25] M. Izydorek, 《关于多值映射的博苏克-乌拉姆定理的评注》，波兰科学院数学通报 35 (1987), no. 7-8, 501–504.[26] D.L. Johnson, 《群的表示》，第 2 版，伦敦数学学会学生教材，第 15 卷，剑桥大学出版社，1997.[27] J. Li, J Wu, 《阿廷辫群与同伦群》，伦敦数学学会会刊 (3) 99 (2009) 521–556.[28] J. Matouˇsek, 《博苏克-乌拉姆定理的应用》，Universitext，施普林格出版社（2002）。[29] D. de Mattos, T.F.M. Monis, E.L. dos Santos, 《具有自由$\mathbb{Z}_2$作用的空间的相对博尔苏克-乌拉姆定理》，波兰科学院数学通报 61 (2013), 71–77.[30] J.R. Munkres, 《拓扑学》，普伦蒂斯·霍尔，第二版（2000）。[31] K. Murasugi, 《塞弗特纤维空间与辫群》，伦敦数学学会会刊 44 (1982), 71–84[32] H. Schirmer, 《n-无环值多值函数的不动点、对跖点与重合点》，《当代数学》，21 (1983), 207–212.[33] H. Schirmer, 《n 值多值函数的有限不动点近似》，《数学基础》121 (1984), 73–80.[34] H. Steinlein, 《博尔苏克对跖定理及其推广与应用：综述》，《非线性分析中的拓扑方法》，S´em. Math. Sup. 95，蒙特利尔大学出版社，蒙特利尔，魁北克（1985），166–235。

VINICIUS CASTELUBER LAASS
Universidade Federal da Bahia, IME, Departamento de MatemáticaAv. Milton Santos, S/N Ondina CEP: 40170-110, Salvador-BA, Brazil.电子邮箱地址：vinicius.laass@ufba.br

CAROLINA DE MIRANDA E PEREIRO
Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, Departamento de Matemática 29075-910, Vitória, Espírito Santo, Brazil电子邮箱地址：carolina.pereiro@ufes.br