arXiv:2301.07149v1 [math.SP] 17 Jan 2023

紧致度量图相邻特征值之间的间隙

DAVID B ORTHWICK、EVANS M. HARRELL II 和 HAO ZHE YU

Abstract. 对于紧致度量图，我们研究在标准顶点条件与狄利克雷顶点条件混合使用时定义的拉普拉斯算子的谱。我们建立了一个关于间隙 $\lambda_2 - \lambda_1$ 的 Cheeger 型下界，其常数仅取决于图的总长度和最小边长。我们还证明了对度量树的特征值间距和比值已有上界的一些改进，并将结果推广到某些其他类型的图。

1. Introduction

估计特征值之间的间距是谱理论中的一个经典问题，其历史可追溯至 Payne、P´olya 和 Weinberger 为平面区域建立上界的工作 [17]。对于有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的狄利克雷问题，他们关于特征值间距的“普适界”可推广为

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq \frac{4}{nd} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

对于凸的 Ω，利用梯度方法证明了一个下界 $\lambda_2 - \lambda_1 \geq 4\pi^2/\mathrm{diam}(\Omega)^2$（见 Singer-Wong-Yau-Yau [18]）。对于带边界的紧致流形上的狄利克雷问题，Cheng-Oden [5] 和 Oden-Sung-Wang [16]分别利用加权切格常数给出了 $\lambda_2 - \lambda_1$ 的下界。

本文研究连通紧致度量图 Γ上拉普拉斯算子的相应问题，并在每个顶点处施加标准（基尔霍夫-诺伊曼）条件或狄利克雷条件。更具体地说，将 Γ的顶点集 $\mathcal{V}$ 划分为 $\mathcal{V}_{\mathrm{N}} \cup \mathcal{V}_0$，而 $-\Delta$ 是与二次型 $\|u'\|^2$ 相关联的自伴算子，其定义域为 $\{u \in H^1(\Gamma) : u = 0 \text{ 在 } \mathcal{V}_0\}$上。此定义为 $\mathcal{V}_{\mathrm{N}}$中的元素赋予标准顶点条件。由于狄利克雷条件会使边彼此分离，因此假设 $\mathcal{V}_0$ 中的所有顶点的度均为 1。在标准顶点条件下，度为 2 的顶点实际上不可见，因此对于 $\mathcal{V}_{\mathrm{N}}$，我们假设其度为 1 或 ≥ 3。

$-\Delta$ 的谱为

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots.$$

我们主要关注谱隙 $\lambda_2 - \lambda_1$，但首先回顾一下这一背景下已有的一些特征值估计。

在完全采用标准顶点条件的情况下，$\mathcal{V}_0 = \emptyset$，已有多种有趣的特征值估计。沿用 [2, 3]，的记号，我们

Date: 2023年1月19日。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34B45，81Q35。

将标准顶点条件下的特征值记为 λ_j^{N}。就总长度 $L:=|\Gamma|$ 而言，标准特征值满足

$$\lambda_k^{\mathrm{N}} \geq \frac{k^2\pi^2}{4L^2} \tag{1.1}$$

对所有 $k \geq 2$。这个下界由 Nicaise [15, Thm. 3.1]，对 $k=2$ 证明，由 Friedlander [7, Thm. 1]，对 $k \geq 2$ 证明，Kurasov-Naboko [14] 也独立地对 k 证明了这一结果。该下界是锐利的，且若某个 k 取等，则意味着当 $k=2$ 时，Γ 是一条线段；当 $k>2$ 时，则是一个等边 k-星形图。

Nicaise 还建立了一个 Cheeger 型下界，

$$\lambda_2^{\mathrm{N}} \geq \frac{1}{4}h(\Gamma)^2, \tag{1.2}$$

其中，度量图版本的 Cheeger 常数定义为

$$h(\Gamma) := \inf \frac{\#S}{\min(|Y_1|,|Y_2|)}, \tag{1.3}$$

下确界取遍满足以下条件的有限集合 S：$\Gamma\backslash S$ 是互不相交的非空开集 Y_1 与 Y_2 的并。Cheeger 常数满足一个平凡的下界

$$h(\Gamma) \geq \frac{2}{L}, \tag{1.4}$$

但这比 (1.1) 得出的结果弱得多。若 D :=diam(Γ) 满足 $D \leq L/2$，则 Kennedy 等人 [11, Thm. 7.2] 证明了

$$\lambda_2^{\mathrm{N}} \geq \frac{1}{2DL}.$$

对于直径足够小的图，这改进了 (1.1)。

结合极小极大原理与手术原理，可以证明 λ_2^{N} 的上界。例如，如果 Γ 的边数为 $E \geq 2$，那么 [11，定理 4.2] 给出了精确的上界

$$\lambda_2^{\mathrm{N}} \leq \frac{\pi^2 E^2}{L^2}.$$

例如，基于 Γ 其他几何性质的估计可见于 [1, 2, 3, 4, 11, 13]。

回到一般情形，如果 $\mathcal{V}_0$ 非空，那么导出 (1.1) 的论证意味着存在一个下界

$$\lambda_k \geq \frac{k^2\pi^2}{4L^2}. \tag{1.5}$$

这在 [15，中的定理 3.1] 已对 $k=1$ 证明，而对于 $k \geq 1$，这也隐含在 [7, 定理 1] 的证明中。Berkolaiko-Kennedy-Kurasov-Mugnolo 在 [1，定理 4.7] 中证明，若 Γ 不是一个环，则对于 $k \geq E - V_0 + 1$，该界可以改进为

$$\lambda_k \geq \left(k - \tfrac{1}{2}(E - V_0 + 1)\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2},$$

其中 $V_0 := \#\mathcal{V}_0$。[15, 中的定理 3.2]对 Cheeger 估计 (1.2) 的论证同样可以得出

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4}h(\Gamma)^2$$

如果 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$。

至于上界，利用简单的试验函数论证可得

$$\lambda_1 \le \frac{\pi^2}{\ell_{\max}^2}, \tag{1.6}$$

其中， ℓ_{max} 是最大边长。同样，Berkolaiko-Kennedy-Kurasov-Mugnolo [3, 定理 1.3] 证明了一个上界

$$\lambda_1 \le \frac{\pi^2}{\operatorname{girth}(\Gamma)^2}, \tag{1.7}$$

其中，围长定义为由 Γ将所有狄利克雷顶点合并后形成的图的最小圈长。对于更高的特征值，同一组作者还根据贝蒂数 $\beta = E - V + 1$证明了上界；该数统计了 Γ 中的独立圈数量。用我们的记号表示，这给出 [1, 定理 4.9]

$$\lambda_k \le \left(k - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}E - V_{\mathrm{N}} - \tfrac{1}{2}V_0\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}. \tag{1.8}$$

在确立了这一背景之后，我们现在转向这样一个问题：当 Γ 至少有一个狄利克雷顶点时，对 $\lambda_2-\lambda_1$的估计。据我们所知，文献中尚无针对这一情形的下界。(1.5) 和 (1.7) 的结合无法给出间隔的界，因为围长显然受总长度限制。

通过改编 Cheng 和 Oden [5, 命题 1.3], 的论证，我们在 §2 中建立了 $\lambda_2 - \lambda_1$ 的一个下界，该下界以加权切格常数表示，权函数为第一特征函数 ϕ_1。为利用这一界，我们在 §3 中证明了 ϕ_1 的一个哈纳克不等式，其常数仅取决于 L 和 ℓ_0，即 Γ的最小边长。

哈纳克不等式（命题 3.1）推出了 ϕ_1的一个包络估计，这一结果或许本身也具有研究价值。定义函数

$$\Upsilon(q) := \begin{cases} 1, & \operatorname{dist}(q, \mathcal{V}_0) \ge \ell_0/2, \\ \sin\!\left(\frac{\pi}{\ell_0}\operatorname{dist}(q, \mathcal{V}_0)\right), & \operatorname{dist}(q, \mathcal{V}_0) < \ell_0/2. \end{cases} \tag{1.9}$$

定理 1.1. 设 Γ 是一个紧致度量图，其总长度为 L，最小边长为 ℓ_0。假设 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$，且第一特征函数经过归一化，使得$\phi_1 \ge 0$ 且 $\|\phi_1\| = 1$。存在常数 $c_1(L, \ell_0) > 0$，使得

$$c_1(L, \ell_0)\Upsilon \le \phi_1 \le \sqrt{\frac{2}{\ell_0}}\Upsilon.$$

加权切格不等式与 ϕ_1 的估计相结合，得到以下结果，其证明见 §4：

定理 1.2. 设 Γ 是一个度量图，具有 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$。存在一个常数$C(L, \ell_0) > 0$，它仅取决于总长度 L 和最小边长 ℓ_0，使得

$$\lambda_2 - \lambda_1 \ge C(L, \ell_0). \tag{1.10}$$

对于完全标准的边界条件， $\lambda_1 = 0$，相应的谱隙估计为 (1.1)，且仅取决于 L。以下情形表明，对于至少有一个狄利克雷顶点的图，必须同时依赖 L 和 ℓ_0。

例1.3. 设 Γ 为一个有四条边的星形图，其中两条边长为1，另外两条边长为 $a < 1$，如图1所示。在四个

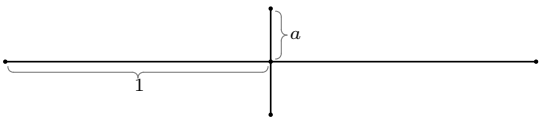


FIGURE 1. 如例1.3所示的四臂星形图。

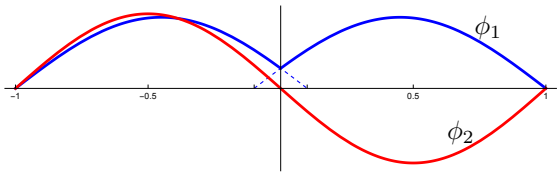


FIGURE 2. 例1.3中四臂星形图前两个特征函数的比较。

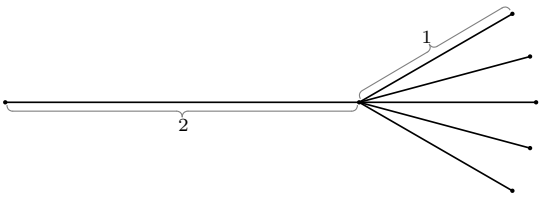


FIGURE 3. 如例1.4所示的星形图。

外部顶点处施加狄利克雷条件。注意，总长度 $L = 2\,(1 + a) \;< 4$，$\ell_0 = a$，且直径为常数 $D = 2$。

定义坐标 x，使较长边以 $x \in [0, 1]$ 为参数化方式，较短边以 $x \in [1, 1+a]$ 为参数化方式。用此坐标表示，第一特征函数可写为

$$\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{1+a}\right), \tag{1.11}$$

从而得到

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(1+a)^2}.$$

第二特征函数在短边上为零，在长边上与 $\sin(\pi x)$ 成正比，因此 $\lambda_2 = \pi^2$。由此可得谱隙为

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \pi^2\left(1 - \frac{1}{(1+a)^2}\right),$$

其中 $\sim 2\pi^2 a$ 因为 $a \to 0$。

例1.4. 设 Γ 是一个星形图，其中一条边的长度为 2，k 条边的长度为 1，并在所有外部顶点上施加狄利克雷顶点条件，如图3所示。这里 $L = 2 + k$、$\ell_0 = 1$和 $D = 3$。

对于最低的两个特征值，只需考虑在中心顶点处不为零的特征函数，因此它们在每条较短的边上都必须取相同的值。因此，我们可以使用线性坐标 $x \in [0, 3]$，内部顶点

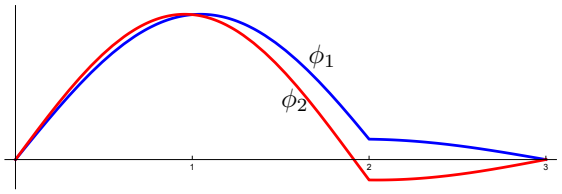


FIGURE 4. 例1.4中前两个特征函数的比较。

位于 $x = 2$。设特征函数为

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin(\sigma x), & x \in [0,2], \\ c\sin\sigma(3-x), & x \in [2,3]. \end{cases} \tag{1.12}$$

连续性条件和顶点条件给出 $\sin(2\sigma) = c\sin\sigma$ and $\cos(2\sigma) = kc\cos\sigma$。利用倍角公式，可将其化简为 $(\tan\sigma)^2 = 2k+1$，从而得到

$$\sigma \in \arctan\sqrt{2k+1} + \pi\mathbb{Z}.$$

另一方面，在中心顶点处取值为零的特征函数，其特征值属于 $(\pi\mathbb{N})^2$。因此，前两个特征值为

$$\lambda_1 = \left(\arctan\sqrt{2k+1}\right)^2, \quad \lambda_2 = \left(\pi - \arctan\sqrt{2k+1}\right)^2,$$

其取值分别略低于和略高于 $\pi^2/4$。当 k 较大时，我们有 $\lambda_2 - \lambda_1 \sim 2\pi/\sqrt{k}$。在此例中，量 $\ell_0 = 1$ and $D = 3$ 固定，而 $L = k+2$。

现在我们来讨论相邻特征值之间间隔或比值的上界问题。对于一般的图 Γ，若有 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$，我们至少可以从 (1.5) 和 (1.8) 推导出一个上界：

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leq (2n+1+3E-2V_N-V_0)^2, \tag{1.13}$$

只要 Γ 不是圈图。一般而言，比值 λ_2/λ_1 确实可能无界，例如，对 [6, 例 1.2]的如下改述就展示了这一点：

例 1.5。考虑一个等边“气球”图，它由一个含有 k 条长度为 1 的边的南瓜图，以及连接在一个顶点上的一条悬挂边组成，如图5所示。在自由边的端点处施加狄利克雷条件。南瓜图各边上的两个最低特征值相等，因此我们可以使用线性参数 $x \in [0,2]$，其范围 $[0,1]$ 对应于自由边。对于形如

$$\phi(x) = \begin{cases} \sin(\sigma x), & x \in [0,1], \\ c\cos\sigma(2-x), & x \in [1,2], \end{cases}$$

连续性条件和顶点条件给出 $(\tan\sigma)^2 = 1/k$。最低的两个解给出

$$\lambda_1 = \arctan(1/\sqrt{k})^2, \qquad \lambda_2 = (\pi - \arctan(1/\sqrt{k}))^2,$$

因此

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left(\frac{\pi}{\arctan(1/\sqrt{k})} - 1\right)^2.$$

这给出了 $\lambda_2/\lambda_1 = 25$ 在 $k = 3$下的结果，并且 $\lambda_2/\lambda_1 \sim \pi^2 k$ 为 $k \to \infty$。

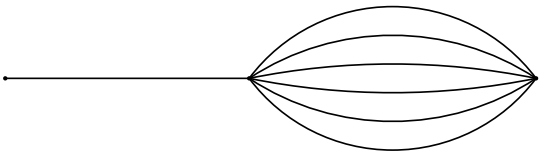


FIGURE 5. 一个等边气球图，其中 $k = 6$，且$\lambda_2/\lambda_1 \approx 50$。

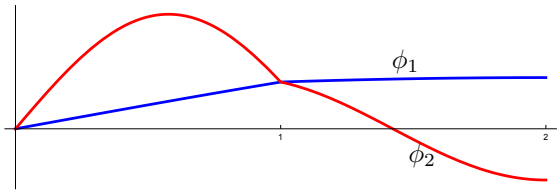


FIGURE 6. 例 1.5 中前两个特征函数的比较。

除了说明 λ_2/λ_1 可以任意大之外，例 1.5 还表明了 (1.13) 中环限制的必要性，因为气球是一个圈图。在这种情况下，(1.13) 的右侧化简为 $(3k+1)^2$，因此当 k 较大时，随着比值趋近于 π^2，该不等式不成立

对于一棵度量树 Γ，在外部顶点处设置狄利克雷顶点，Nicaise [15,定理 4.3]证明了

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 2 + \sqrt{5}, \tag{1.14}$$

并给出了一个类似于 Payne-P´olya-Weinberger [17]的界：对于 $n \geq 2$,

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq \frac{4}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j. \tag{1.15}$$

界 (1.15) 是采用 Hile-Protter [10] 为定义域中的狄利克雷特征值所提出的方法推导得出的 $\mathbb{R}^n$。与该文献中的情形一样，界 (1.15) 是一个更复杂但更精确估计的推论。同样，对于一棵度量树Γ，在外部顶点处设置狄利克雷顶点，

$$\lambda_{n+1} \leq \sigma, \tag{1.16}$$

其中，σ 表示方程在 $[\lambda_n, \infty)$ 中的唯一根

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{\sigma - \lambda_j} = \frac{n}{4}. \tag{1.17}$$

利用（1.17）中的 $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq \sigma - \lambda_j$ 可由（1.16）推出界（1.15）。

在§5中，我们将说明，结合 Nicaise [15] 和 Demirel-Harrell [6]的思想，Harrell-Stubbe 基于对易子公式的估计技术 [9], 可应用于度量树。这将得到一个更一般的界，其中（1.16）是其特例。

在最后一节 §6 中，我们将考虑把关于比值λ_2/λ_1 的上界推广到非树形度量图。特别是，我们将看到，对于由树和附着其上的悬挂图组成的图，只要这些悬挂结构足够小，且至少包含一个狄利克雷顶点，上界 $\lambda_2/\lambda_1 \leq 5$ 仍然成立

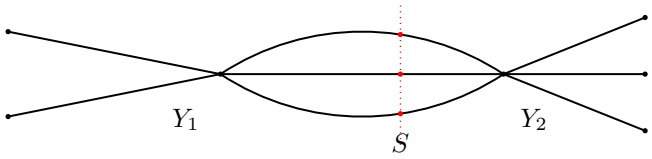


FIGURE 7. 将图分为两个分支的 Cheeger 截集。

图被连接在一起，前提是悬挂图足够小且至少包含一个狄利克雷顶点。

2. Weighted Cheeger constant

与引言中一样， Γ 表示一个紧致连通度量图，拉普拉斯算子 $-\Delta$ 根据分解 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathrm{N}} \cup \mathcal{V}_0$施加顶点条件定义。特征值 $\{\lambda_j\}$ 按升序排列，并从$\lambda_1 \geq 0$开始。我们可以假设相应的特征函数 ϕ_j 为实数值，且$\phi_1 > 0$ 在 $\mathcal{V}_0$之外。

本节将通过把 Cheng 和 Oden [5] 提出的加权切格常数推广到度量图情形，为 $\lambda_2 - \lambda_1$ 建立一个下界。给定连续函数 $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$，我们定义

$$h_\phi(\Gamma) := \inf \frac{\sum_S \phi^2}{\min(\int_{Y_1} \phi^2, \int_{Y_2} \phi^2)}, \tag{2.1}$$

其中， $S \subset \Gamma$ 是一个有限子集，使得 $\Gamma \backslash S$ 是非空开集 Y_1 与 Y_2的不交并。这个称为 Cheeger 截集的分解如图 7 所示。注意，当 ϕ 为常数时，(2.1) 与 (1.3) 一致。

定理 2.1. 在上述设定下，

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq \frac{1}{4} h_{\phi_1}(\Gamma)^2.$$

注意，在 $\mathcal{V}_0 = \emptyset$ 的情况下，这一结果可化为 (1.2)。证明中的关键步骤是以下估计。

引理 2.2. 设 f 是 Γ 上的分段 C^1 函数，且对于 $\phi\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ 连续，假设

$$\int_\Gamma f\phi^2 = 0. \tag{2.2}$$

Then

$$\|f'\phi\| \geq \frac{1}{2} h_\phi(\Gamma)\, \|f\phi\|.$$

证明. 令

$$k := \sup\left\{ t : \int_{\{f \leq t\}} \phi^2 \leq \tfrac{1}{2} \int_\Gamma \phi^2 \right\},$$

并定义

$$g_+ = (f-k)^2 \chi_{\{f>k\}}.$$

对于几乎所有的 $t > 0$，水平集 $\{g_+ = t\}$ 都是有限的，而余面积公式给出

$$\int_\Gamma |g_+'|\phi^2 = \int_0^\infty \Big(\sum_{\{g_+ = t\}} \phi^2 \Big) dt. \tag{2.3}$$

另请注意，根据 k的选择，

$$\int_{\{g_+>t\}} \phi^2 \le \int_{\{g_+<t\}} \phi^2$$

对所有 $t>0$。因此，对于满足 $\{g_+=t\}$ 有限的 t，

$$\sum_{\{g_+=t\}} \phi^2 \ge h_\phi(\Gamma) \int_{\{g_+>t\}} \phi^2.$$

将其代回 (2.3) 得到

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |g_+'|\phi^2 &\ge h_\phi(\Gamma) \int_0^\infty \left(\int_{\{g_+>t\}} \phi^2 \right) dt \\ &= h_\phi(\Gamma) \int_\Gamma g_+ \phi^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

类似地，对于 $g_- := (f-k)^2 \chi_{\{f<k\}}$，我们得到

$$\int_\Gamma |g_-'|\phi^2 \ge h_\phi(\Gamma) \int_\Gamma g_- \phi^2. \tag{2.5}$$

由于 $(f-k)^2 = g_+ + g_-$，将 (2.4) 与 (2.5) 相加可得

$$\int_\Gamma \big(|g_+'| + |g_-'|\big)\phi^2 \ge h_\phi(\Gamma) \int_\Gamma (f-k)^2 \phi^2. \tag{2.6}$$

计算后

$$|g_+'| + |g_-'| = 2|f-k|\,|f'|,$$

对 (2.6) 应用柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\begin{aligned} h_\phi(\Gamma)\, \|(f-k)\phi\|^2 &\le 2 \int_\Gamma |f-k|\,|f'|\phi^2 \\ &\le 2\, \|(f-k)\phi\|\, \|f'\phi\|. \end{aligned}$$

因此

$$\|f'\phi\| \ge \frac{1}{2} h_\phi(\Gamma)\, \|(f-k)\phi\|.$$

最后一步需要注意，假设 (2.2) 意味着

$$\|(f-k)\phi\|^2 = \|f\phi\|^2 + k^2 \|\phi\|^2 \ge \|f\phi\|^2.$$

□

为了从引理 2.2 推导出加权切格尔界，我们借助一个广为人知的变分原理。用我们的记号表示，

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\|f'\phi_1\|^2}{\|f\phi_1\|^2} : \int_\Gamma f\phi_1^2 = 0 \right\}, \tag{2.7}$$

对于 f 上的分段 C^1 函数，其最小值在 $f=\phi_2/\phi_1$ 处取得。这个公式相当一般，已在多种不同背景下被独立证明。据我们所知，最早的出处是 Thompson-Kac [19, eq. (3.10)]。下文的论证中包含了度量图情形的简短证明。

定理 2.1 的证明。设 $f=\phi_2/\phi_1$，它在顶点之外光滑，并且满足

$$\int_\Gamma f\phi_1^2=\langle\phi_2,\phi_1\rangle=0.$$

假设特征函数已归一化，

$$\begin{aligned}\lambda_2&=\|\phi_2'\|^2\\&=\|f'\phi_1+f\phi_1'\|^2\\&=\|f'\phi_1\|^2+\|f\phi_1'\|^2+\frac{1}{2}\int_\Gamma(f^2)'(\phi_1^2)'.\end{aligned}\tag{2.8}$$

由于 f^2 和 ϕ_1^2 都满足顶点条件，我们可以分部积分得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Gamma(f^2)'(\phi_1^2)'&=-\frac{1}{2}\int_\Gamma f^2\Delta(\phi_1^2)\\&=\int_\Gamma\big(\lambda_1\phi_2^2-f^2(\phi_1')^2\big)\\&=\lambda_1-\|f\phi_1'\|^2.\end{aligned}$$

这将 (2.8) 化简为

$$\lambda_2-\lambda_1=\|f'\phi_1\|^2,\tag{2.9}$$

这正是 (2.7) 中取最小值的情形。由引理 2.2 可得结论，因为 $f\phi_1=\phi_2$。□

3. Estimates of the first eigenfunction

为了在 $\mathcal{V}_0\neq\emptyset$ 的情形下使用定理 2.1，我们需要对第一特征函数 ϕ_1 的取值范围有所掌握。具体而言，我们将证明，在一个不包含狄利克雷顶点的子集上存在一个下界。

对于每个顶点 $v_j\in\mathcal{V}_0$，将与 v_j 相接的边参数化为 $x_j\in[0,\ell_j]$，其中 $x_j=0$ 位于 v_j 处。在这条边上定义区间，

$$I_j:=\sup\{x_j\in[0,\ell_j):\phi_1'(x_j)>0\},\tag{3.1}$$

除非 ϕ_1 有局部最大值，否则该区间包含这条边的整个内部。接着令

$$\Gamma_1:=\Gamma\backslash(\cup_{v_j\in\mathcal{V}_0}I_j).\tag{3.2}$$

如果 ϕ_1 在外部边上没有局部最大值，那么 Γ_1 就是从 Γ 中裁去所有与 $\mathcal{V}_0$ 相接的边后得到的子图，如图 8 所示。如果 ϕ_1 在外边内部确实有局部最大值，那么在裁剪之前，我们需要先在这些最大值处添加人工顶点。

本节的目标是证明 ϕ_1 在 Γ_1 上的限制满足一个显式的哈纳克不等式。Harrell-Maltsev [8, 的定理 2.2] 证明了量子图上特征函数的一般哈纳克不等式。这里的区别在于，我们将得到一个仅依赖于 L 和 ℓ_0 的常数。

根据构造，第一特征函数的最大值

$$M_1:=\max_\Gamma\phi_1,\tag{3.3}$$

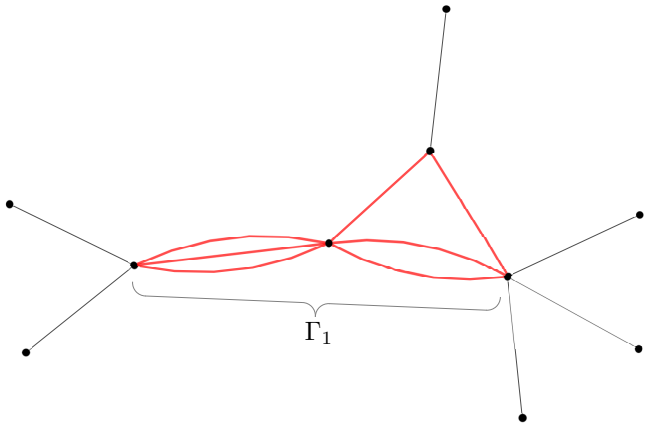


FIGURE 8. 通过修剪外部边创建的子图 Γ_1 。

出现在 Γ_1 中的某一点，而在 Γ_1 上的最小值，

$$m_1 := \min_{\Gamma_1} \phi_1, \tag{3.4}$$

严格为正。注意， Γ_1 可能只由一个点组成。在这种情况下， Γ 有 $k = \#\mathcal{V}_0$ 条边，每条边都连接 v 和一个狄利克雷顶点。 v 处的连续性条件意味着这些边的长度都相等。因此，当 $k = 1$时，Γ 是一个半狄利克雷区间；当 $k = 2$时，是一个全狄利克雷区间；当 $k \geq 3$时，则是一个等边星形图。

如果 Γ_1 包含多个点，那么根据 ϕ_1 在边上的凹性， m_1 会在顶点 $v \in \mathcal{V}_N$处取得。标准顶点条件意味着， ϕ_1 在 v 处沿 Γ中的至少一条关联边 e 的出射导数为 ≤ 0 。根据凹性， ϕ_1在 e的内部严格递减，因此 e 必定位于 Γ_1之外。因此，最小值 m_1 在 $\mathcal{V}_N$ 中一个与 $\mathcal{V}_0$中的顶点相邻的顶点处取得。

ϕ_1 在与狄利克雷顶点相连的一条边上严格递减这一事实意味着 $\sigma\ell \leq \pi/2$，其中 ℓ 是这条边的长度，且 $\sigma := \sqrt{\lambda_1}$。由此得到一个上界

$$\lambda_1 \leq \frac{\pi^2}{4\ell_0^2}, \tag{3.5}$$

前提是 Γ_1 包含多个点。对于 Γ_1仅包含一个点的特殊情形，我们可以明确看出，全狄利克雷区间满足 $\lambda_1 = \pi^2/\ell_0^2$ ，而所有其他情形满足 $\lambda_1 = \pi^2/4\ell_0^2$ 。因此，狄利克雷区间是界（3.5）的唯一例外。

如果 $\mathcal{V}_0$ 包含多个顶点，或者如果 Γ 包含一个至少有两条边的环，则围长估计（1.7）蕴含估计（3.5）。不过，该估计还涵盖了少数其他情形，例如只有一个狄利克雷顶点的树或蝌蚪图。

命题 3.1. 假设 Γ_1 包含多个点，则存在常数 $c(L, \ell_0) > 0$，它仅取决于 $L = |\Gamma|$ 和 ℓ_0 最小边长，使得

$$\frac{m_1}{M_1} \geq c(L, \ell_0). \tag{3.6}$$

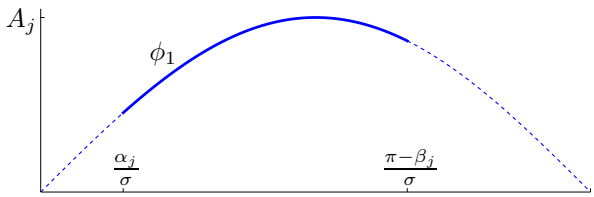


FIGURE 9. 相位为 α_j, β_j 时的参数化 (3.7)。

证明. 令 $\lambda_1 = \sigma^2$ 对于 $\sigma > 0$。在 Γ_1的每条边 e_j 上， ϕ_1 由正弦函数的一个正弧给出。因此，我们可以选取相位 α_j、 $\beta_j \in (0, \pi)$，使得

$$\phi_1|_{e_j}(x) = A_j \sin(\sigma x), \tag{3.7}$$

对 e_j 进行如下参数化

$$x \in \left[\frac{\alpha_j}{\sigma}, \frac{(\pi - \beta_j)}{\sigma}\right].$$

这些相位如图 9 所示。必要时改变方向后，我们可以假设 $\alpha_j \le \beta_j$。

$\log \phi_1$ 在 e_j 上的变化为

$$\log \phi_1\Big|_{\alpha_j/\sigma}^{(\pi-\beta_j)/\sigma} = \log \frac{\sin \beta_j}{\sin \alpha_j}.$$

若定义

$$\delta_0 := \min_{e_j \subset \Gamma_1} \alpha_j,$$

那么，对于 Γ_j中的每条边 e_j ，

$$\left|\log \phi_1\Big|_{\alpha_j/\sigma}^{(\pi-\beta_j)/\sigma}\right| \le -\log \sin \delta_0. \tag{3.8}$$

注意， $\delta_0 < \pi/2$，因为 $\alpha_j + \beta_j < \pi$ 在每条边上。

假设 Γ_1 中 ϕ_1 的最小值和最大值出现处的顶点可以通过一条至多包含 q 条边的路径连接起来。那么估计式 (3.8) 给出

$$\log \frac{M_1}{m_1} \le -q \log \sin \delta_0, \tag{3.9}$$

现在，问题归结为求 δ_0的一个下界。

假设最小相位 δ_0 出现在 Γ_1 的一个顶点 v_0 处，该顶点是由 $x \in [0, \ell_j]$参数化的边 e_j 的 $x = 0$端点。在此参数化下，

$$\phi_1(x) = A \sin(\sigma x + \delta_0).$$

由于 $\delta_0 < \pi/2$， ϕ_1 在 v_0处没有局部最大值，这意味着$v_0 \in \mathcal{V}_{\mathrm{N}}$。

从 v_0 指向 e_j 的向外导数为

$$\phi_1'(0^+) = A \cos \delta_0.$$

令 e_k 为与 v_0 相接的 Γ 的边，其中 v_0 处的向内导数最大。我们可以用 $x \in [-\ell_k, 0]$ 对 e_k 进行参数化，然后将特征函数延拓为

$$\phi_1(x) = B \sin(\alpha_k - \sigma x), \quad \text{for } x \le 0, \tag{3.10}$$

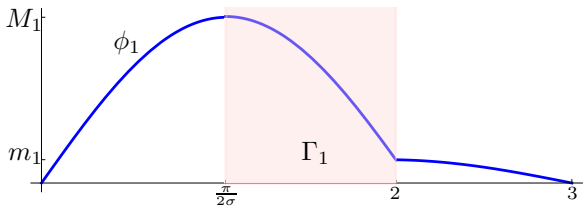


FIGURE 10. 如例1.4中的星形图的第一特征函数的界，其中 $k = 100$。

其中某个相位 $\alpha_k \in$ 属于 $(0, \pi)$。由连续性可知，振幅满足

$$A \sin \delta_0 = B \sin \alpha_k. \tag{3.11}$$

由于 v_0 处的顶点条件是标准的，且根据 e_k的选取，我们可以估计

$$\phi_1'(0^+) \leq (d_0 - 1)\phi_1'(0^-),$$

其中 d_0 是 v_0的度。这给出

$$A \cos \delta_0 \leq (d_0 - 1)B \cos \alpha_k.$$

将此结果与 (3.11) 结合，得到一个下界

$$\tan \delta_0 \geq \frac{1}{d-1} \tan \alpha_k. \tag{3.12}$$

为了从 (3.10) 得到相位 α_k 的下界，注意到由于 ϕ_1 在 e_k的内部不能为零，$\alpha_k \geq \sigma \ell_k$。因此，由 (3.12) 得到

$$\tan \delta_0 \geq \frac{1}{d_0 - 1} \tan(\sigma \ell_k). \tag{3.13}$$

若将（3.13）的右侧记为 b，则得到

$$\sin \delta_0 \geq \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}},$$

而（3.9）意味着

$$m_1 \geq \left(\frac{b}{\sqrt{1 + b^2}} \right)^q M_1. \tag{3.14}$$

为完成证明，注意到 $\ell_k \geq \ell_0$、q 和 d_0 均由 L/ℓ_0 控制，而在（1.5）中，σ 已被证明有下界 $\pi/2L$。□

例1.4为检验特征函数估计的尖锐性提供了一个有趣的例子。第一特征函数由（1.12）给出，其中 $\sigma = \arctan\sqrt{2k+1}$。在此归一化下，$\max \phi_1 = 1$，其取值点为 $x = \pi/2\sigma$。子图 Γ_1 由线段 $[\pi/2\sigma, 2]$ 构成，而 ϕ_1 在该线段上的最小值出现在 $x = 2$。因此

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{M_1} &= \sin(2\sigma) \\ &= \frac{\sqrt{2k+1}}{k}. \end{aligned}$$

对于该图，(3.13) 的右侧为

$$\frac{1}{k} \tan \sigma = \frac{\sqrt{2k+1}}{k},$$

且 $q = 1$。因此，在这种情况下，当 $k \to \infty$ 时，下界 (3.14) 渐近锐利。

我们可以将界（3.6）推广到 Γ_1 之外。在（3.1）中的每个区间 $I_j = [0, \ell_j)$ 上，特征函数的形式为 $\phi_1(x_j) = A_j \sin(\sigma x_j)$。点 $x_j = \ell_j$ 位于 Γ_1 中，因此

$$A_j \sin(\sigma \ell_j) \geq m_1.$$

因此，

$$\phi_1(x_j) \geq \frac{m_1}{\sin(\sigma \ell_j)} \sin(\sigma x_j) \tag{3.15}$$

在每个区间 I_j 上。

为证明定理 1.1，我们首先注意到，在上述记号中，用于参数化 I_j 的变量 x_j 等于 $\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{V}_0)$，其中 $x_j \leq \ell_0/2$。式（1.9）中定义的包络函数 Υ 在 Γ_1 上等于 1，而在外侧边缘上满足

$$\Upsilon|_{I_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j \geq \ell_0/2, \\ \sin(\frac{\pi}{\ell_0} x_j), & x_j < \ell_0/2. \end{cases} \tag{3.16}$$

定理 1.1 的证明。我们可以假设 Γ_1 由多个点组成，因为在例外情形下，ϕ_1 可以很容易地显式计算。

由 (3.15)、(3.16) 以及 $\sigma > \pi/2L$ 这一事实，我们可以立即推出不等式，

$$\phi_1 \geq m_1 \sin(\pi \ell_0 / 4L) \Upsilon, \tag{3.17}$$

在所有 Γ 上。另一方面，由于 ϕ_1 在外侧边缘上具有 $A_j \sin(\sigma x_j)$ 的形式，且 $\sigma \leq \pi/\ell_0$，因此可得

$$\phi_1 \leq M_1 \Upsilon. \tag{3.18}$$

常数 M_1 满足显然的不等式

$$M_1 \geq \sqrt{\frac{2}{L}}. \tag{3.19}$$

为完成论证，我们需要从上方估计 M_1。设 ϕ_1 的最大值在点 $q_1 \in \Gamma_1$ 处取得。由 ϕ_1 的凹性和顶点条件，存在 Γ 的一条线段，以 $y \in [0, \pi/2\sigma]$ 为参数，且 $y = 0$ 位于 q_1 处，在该线段上

$$\phi_1(y) \geq M_1 \cos(\sigma x).$$

将 ϕ_1^2 在这条线段上积分，得到不等式

$$\pi M_1^2 / 4\sigma \leq 1.$$

由于根据 (3.5) 有 $\sigma \leq \pi/2\ell_0$，这就证明了

$$M_1 \leq \sqrt{\frac{2}{\ell_0}}, \tag{3.20}$$

利用不等式 (3.17)、(3.18)、(3.19) 和 (3.20)，即可由命题 3.1 得出定理 1.1。□

4. Estimation of the weighted Cheeger constant

为完成定理 1.2 的证明，我们将利用命题 3.1 来估计$h_{\phi_1}(\Gamma)$。在整个讨论过程中，我们假设 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$ ，因为界 (1.1) 已经涵盖了标准顶点条件的情形。

正如我们在 §3 开头所指出的，如果 Γ_1 由单个点 v组成，那么 Γ 有k 条等长边连接 v 与狄利克雷顶点。若 a 表示边长，则在所有情况下

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi^2}{a^2}. \tag{4.1}$$

由于 $\ell_0 = 2a$ 对于 $k = 2$ 成立，且 $\ell_0 = a$ 对于 $k \neq 2$成立，因此定理 1.2 的结论在这些情况下显然成立。

一般情况下，我们的目标是用未加权 Cheeger 常数 $h(\Gamma)$ 来估计 $h_{\phi_1}(\Gamma)$。由于后者满足平凡上界 $h(\Gamma) \geq 2/L$，这便完成了证明。

如果 Γ 不是一个区间（且 $\mathcal{V}_0 \neq \emptyset$），那么其 Cheeger 常数也满足一个平凡的上界，

$$h(\Gamma) \leq \frac{1}{\ell_0}. \tag{4.2}$$

为此，取一个割集 S，它由 Γ的一条外边上的单个点给出，使得Y_1 是长度为 ℓ_0的线段。

对于 $h_{\phi_1}(\Gamma)$，我们可以根据函数作出类似的估计

$$f(x) := \frac{\sin^2(\sigma x)}{\int_0^x \sin^2(\sigma t)dt} = \frac{2\sin^2(\sigma x)}{x - \frac{1}{2\sigma}\sin(2\sigma x)}, \tag{4.3}$$

该函数定义在 $x \in (0, \pi/\sigma)$ 上。容易验证， f 在此区间上递减。

引理 4.1. 若 Γ_1 包含多个点，则

$$h_{\phi_1}(\Gamma) \leq f(\ell_0), \tag{4.4}$$

证明. 取一个 Cheeger 截集 S，它由区间 I_j （见 (3.1)）之一中的单个点 $x_j = \ell_0$ 组成，可得比值

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2} = f(\ell_0), \tag{4.5}$$

其中 $Y_1 = \{0 \leq x_j < \ell_0\}$，而 Y_2 是 $\Gamma \backslash S$的另一个连通分支。若 $\mathcal{V}_0$ 包含多个点，则我们可以选择 j，使其在所有 I_j中令 $\int_{Y_1} \phi^2$ 最小，从而保证

$$\int_{Y_1} \phi_1^2 \leq \int_{Y_2} \phi_1^2. \tag{4.6}$$

另一方面，如果 $\#\mathcal{V}_0 = 1$，那么假设 Γ_1 不是一个单点， Γ至少包含一条内部边，在其上 $\phi_1 \geq m_1$，这意味着 (4.6) 在此情形下也成立。因此，由 (4.5) 可得 (4.4)。□

命题 4.2. 如果 Γ_1 包含多个点，那么

$$h_{\phi_1}(\Gamma) \geq \left(\frac{m_1 \sin(\sigma\ell_0/2)}{M_1}\right)^2 h(\Gamma),$$

其中 $\sigma = \sqrt{\lambda_1}$ 和 M_1, m_1 是§3 中关于 ϕ_1 的上界和下界。

证明。根据引理 4.1，为了估计 $h_{\phi_1}(\Gamma)$，我们可以只考虑满足以下条件的 Cheeger 截集 S

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\min(\int_{Y_1}\phi_1^2, \int_{Y_2}\phi_1^2)} \le f(\ell_0). \tag{4.7}$$

如有必要，通过重新标记，我们也可以假设分母中的最小值是 Y_1 积分，即

$$\int_{Y_1}\phi_1^2 \le \int_{Y_2}\phi_1^2. \tag{4.8}$$

Let

$$W := \big\{q \in \Gamma : \operatorname{dist}(q, \mathcal{V}_0) \ge \ell_0/2\big\}.$$

情形 1：假设 $S \cap W = \emptyset$。采用 (3.1) 中的记号，

$$\Gamma\backslash W = \cup_j \big\{0 \le x_j \le \ell_0/2\big\}.$$

由于 ϕ_1 是关于 x_j 的增函数，约定 (4.8) 意味着 $Y_1 \subset \Gamma\backslash W$ 和 $Y_2 \supset W$。令 $\mathcal{J}$ 为满足 S 与 I_j 相交的指标 j 的集合，并设

$$s_j = \max S \cap I_j.$$

若将 ϕ_1 在 I_j 上的限制写作 $A_j \sin(\sigma x_j)$，则

$$\begin{aligned}\sum_S \phi_1^2 &= \sum_{j\in\mathcal{J}} A_j^2 \sin^2(\sigma s_j)\\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}} f(s_j)\int_0^{s_j} A_j^2\sin^2(\sigma x)\,dx.\end{aligned}$$

由于 f 是递减的，且 $s_j \le \ell_0/2$，这意味着

$$\sum_S \phi_1^2 \ge f(\ell_0/2)\int_{Y_1}\phi_1^2, \tag{4.9}$$

这与假设 (4.7) 矛盾。

情形 2：设 $S \cap W \ne \emptyset$ 和 Y_1 包含一个区间 $J \subset \Gamma\backslash W$。若 S' 表示删除 J 的端点后对应的割集，则 Y_1 化为一个分支 $Y_1' = Y_1\backslash J$，而 $Y_2' = Y_2 \cup J$。替换后，不等式 (4.8) 仍然成立，并且

$$\sum_{\partial J}\phi_1^2 \ge f(\ell_0/2)\int_J \phi_1^2, \tag{4.10}$$

根据用于证明 (4.9) 的相同论证。由假设 (4.7) 以及 f 严格递减这一事实，我们得到

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1}\phi_1^2} < \frac{\sum_{\partial J}\phi_1^2}{\int_J \phi_1^2}$$

比较交比后可得

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1}\phi_1^2} > \frac{\sum_{S'}\phi_1^2}{\int_{Y_1'}\phi_1^2}.$$

也就是说，从 Y_1 中切去区间 J 会降低切格比。

情形3：假设 $S \cap W \neq \emptyset$ 和 Y_1 中不包含 $\Gamma \backslash W$ 中的任何区间。我们继续假设分支 Y_j 满足 (4.7) 和 (4.8)，二者共同推出

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2} \leq f(\ell_0). \tag{4.11}$$

对于具有这些性质的割集 S， $S \backslash W$ 的点（如果存在）在参数化 (3.1) 中对应于 $x_j = b_j < \ell_0/2$，使得 $[0, b_j) \subset Y_2$。如果我们令

$$Z := \bigcap_{b_j \in S \backslash W} [0, b_j],$$

t此时，集合 $S'' := S \cap W$ 将 Γ 分割为分支 $Y_1'' := Y_1 \cup Z$ 和 $Y_2'' = Y_2 \backslash Z$。根据 (3.15)， ϕ_1 满足一个下界

$$\min_W \phi_1 \geq m_1 \sin(\sigma \ell_0/2).$$

因此我们有

$$\begin{aligned} \frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2} &\geq \frac{\sum_{S''} \phi_1^2}{\int_{Y_1''} \phi_1^2} \\ &\geq \left(\frac{m_1 \sin(\sigma \ell_0/2)}{M_1} \right)^2 \frac{\# S''}{|Y_1''|}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于 Y_2，我们可以将比值写为

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_2} \phi_1^2} = \frac{\sum_{S''} \phi_1^2 + \sum_{S \backslash W} \phi_1^2}{\int_{Y_2''} \phi_1^2 + \int_Z \phi_1^2}. \tag{4.13}$$

根据 (4.11)，以及这一事实

$$\sum_{S \backslash W} \phi_1^2 \geq f(\ell_0/2) \int_Z \phi_1^2,$$

分解 (4.13) 表明

$$\frac{\sum_{S''} \phi_1^2}{\int_{Y_2''} \phi_1^2} \leq \frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2}.$$

ϕ_1 的估计于是得到

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2} \geq \left(\frac{m_1 \sin(\sigma \ell_0/2)}{M_1} \right)^2 \frac{\# S''}{|Y_2''|}. \tag{4.14}$$

结合 (4.12) 和 (4.14) 可得

$$\frac{\sum_S \phi_1^2}{\int_{Y_1} \phi_1^2} \geq \left(\frac{m_1 \sin(\sigma \ell_0/2)}{M_1} \right)^2 h(\Gamma). \tag{4.15}$$

总之，情形 1 可由 (4.7) 排除，而情形 2 可通过降低加权Cheeger比值归约为情形3。因此，界 (4.15) 适用于 $h_{\phi_1}(\Gamma)$。□

现在我们可以完成定理 1.2 的证明。如上所述，如果 Γ_1 由单个点组成，则结论由 (4.1) 得出。否则，命题 3.1 和 4.2 一起表明

$$\begin{aligned} h_{\phi_1}(\Gamma) &\geq \Big(c(L,\ell_0)\sin(\tfrac{\sigma\ell_0}{2})\Big)^2 h(\Gamma) \\ &\geq \Big(c(L,\ell_0)\sin(\tfrac{\pi\ell_0}{4L})\Big)^2 \frac{2}{L}. \end{aligned}$$

由定理 2.1 可得，式 (1.10) 成立，其中

$$C(L,\ell_0) = \frac{1}{L^2}\Big(c(L,\ell_0)\sin(\tfrac{\pi\ell_0}{4L})\Big)^4.$$

5. Upper bounds for trees

引言中提到的 $\mathbb{R}^n$ 上狄利克雷区域的上界，可通过以下方式证明：由特征函数与 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射函数的乘积构造一族试验函数。Nicaise [15, 定理 4.1] 和 Demirel-Harrell [6, 定理 2.5] 的结果采用了类似的构造，其中度量图上的仿射函数被理解为一种连续函数，且在每条边上均为线性函数。本节中，我们假设 Γ 是一棵度量树，且 $\mathcal{V}_0$ 由外部顶点组成，也就是说，这些顶点的度为一。

本节的目标是改编 Harrell-Stubbe [9] 的方法，给出一种一般的特征值估计，使 Nicaise 界 (1.16) 得以推广。我们的第一步是构造一族仿射函数，使其导数在平均意义下均匀覆盖 Γ。

令 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 表示 Γ 上满足在 $\mathcal{V}_{\mathrm{N}}$ 各点处的标准顶点条件的仿射函数空间。在 $\mathcal{V}_0$ 各点处不施加顶点条件。若将 Γ 视为电路，并为每条边赋予等于其长度的电阻，则函数 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 恰好对应于满足欧姆定律和基尔霍夫电路定律的电压函数。正如 Kirchhoff [12] 于 1847 年所证明的，对于施加在 $\mathcal{V}_0$ 各点上的任意一组外部电压，都存在一个电压函数。因此，只要 $\mathcal{V}_0$ 至少包含两个点，$\mathcal{A}(\Gamma)$ 就含有非恒定函数。

我们引用 Nicaise [15, 引理 4.2] 中的以下结果。原文未给出证明，因此我们将在此给出证明。Demirel-Harrell [6, 定理 2.9], 中也独立推导出了类似结果，但未限制为三个函数。

引理 5.1. 对于度量树 Γ，存在函数 $g_\alpha \in \mathcal{A}(\Gamma)$，其中 $\alpha \in \{1,2,3\}$，使得在所有边上，$|g'_\alpha|$ 等于 0 或 1，并且

$$\sum_{\alpha=1}^{3} |g'_\alpha| = 2. \tag{5.1}$$

证明。我们将 Γ 的一个子图称为叶对，该子图由一个顶点及其相连的两条外部边（叶）组成。从度为 ≥ 3 的顶点上修剪掉一个叶对，会使其度减少 2。若从给定顶点上修剪掉所有可能的叶对，结果将是一个人工顶点（度为 2）或一个外部顶点（度为 1）。在每个顶点上尽可能地进行这一修剪过程，最终会将 Γ 缩减为一条线段。因此，Γ 可以通过从一条线段开始并逐步附加叶对来构造。每个叶对都是通过将其

顶点粘合到图上的任意一点来添加，该点可以是已有顶点，也可以是边上的点。

族 $\{g_\alpha\}$ 通过归纳法构造，采用 Γ的这种分解。对于初始线段，我们可以任意选择一个参数化 x ，并令$g_1(x) = x$、 $g_2(x) = -x$，以及 $g_3(x) = 0$。

现在假设，对于一棵˜树 Γ，族 $\{g_\alpha\}$ 已按所需性质定义。设 Γ 是通过向 Γ添加一对叶得到的图。扩展$\tilde{g}_\alpha$ 可按如下方式定义：

(1) 假设这对叶连接在 Γ 的一个内部顶点（可能是人工构造的）上，因此每个 g_α 在此处已经满足标准顶点条件。我们可以扩展该族，使得 $\tilde{g}_1'$ 和 $\tilde{g}_2'$ 在这对叶的边上交替 ± 1 ，而 $\tilde{g}_3$ 在这些边上为常数。(2) 如果这对叶连接在 Γ的一个外部顶点上，那么根据构造，两个 g_α（设为 $\alpha = 1$）2 在该顶点处的导数为 ± 1 ，而 g_3为常数。我们扩展该族，使得 $\tilde{g}_1'$ 在这对叶中的一片叶上为零， $\tilde{g}_2'$ 在另一片叶上为零，并选择另一侧叶上的导数以满足顶点条件。第三个函数的导数沿着指向该顶点的方向为零，将其扩展为在新叶上交替 $\tilde{g}_3'$ ± 1 。

在归纳法的每个阶段，每个函数都满足顶点条件；对于 α 的两个取值以及 $|g_\alpha'| = 0$ 的第三个取值，$|g_\alpha'| = 1$ 和 □

利用集合 $\{g_\alpha\}$，我们可以证明本节的主要结果，即 Harrell-Stubbe $[9,\ 定理\ 5]$ 中一般特征值不等式的一个版本。

定理 5.2. 设 Γ 是一棵度量树，其外部顶点满足狄利克雷条件。对于 $z \in (\lambda_n, \lambda_{n+1}]$，假设 f 是集合 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 上的一个正函数，使得 $f(\lambda_j)/(z - \lambda_j)^2$ 关于 j 单调不减。那么

$$\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \le 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\lambda_j)}{z - \lambda_j} \lambda_j .$$

证明. 设 G_α 是与 g_α 相对应的、作用于 $L^2(\Gamma)$ 上的乘法算子。我们定义相应的一组一阶微分算子

$$D_\alpha := \frac{1}{2}[\Delta, G_\alpha].$$

在以 x 参数化的一条边上， D_α 的作用为 $(\partial_x g_\alpha)\partial_x$。由于 g_α' 的取值属于 $\{0, \pm 1\}$，对易子 $[D_\alpha, G_\alpha]$ 是到 g_α' 的支撑上的投影。根据引理 5.1 中的构造，

$$\sum_{\alpha=1}^{3} [D_\alpha, G_\alpha] = 2.$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) &= \operatorname{tr}(P_n f(-\Delta)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} \operatorname{tr}\big(P_n f(-\Delta)[D_\alpha, G_\alpha]\big), \end{aligned}$$

其中， P_n 表示投影到对应于 $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 的特征空间上的谱投影。像证明 [9, 定理 1], 中那样展开迹，便得到

$$\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) = -\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{m=1\\ \lambda_m\neq\lambda_j}}^{n} \frac{f(\lambda_j)-f(\lambda_m)}{\lambda_j-\lambda_m}|\langle D_\alpha\phi_j,\phi_m\rangle|^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=n+1}^{\infty}\frac{f(\lambda_j)}{\lambda_q-\lambda_j}|\langle D_\alpha\phi_j,\phi_q\rangle|^2.$$

根据关于 f 的假设， [9, 定理 5] 的证明中的论证可直接应用，从而得到

$$\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \le 2\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(\lambda_j)}{z-\lambda_j}\|D_\alpha\phi_j\|^2.$$

根据 g_α 的构造,

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\|D_\alpha\phi_j\|^2 = 2\|\phi_j'\|^2 = 2\lambda_j,$$

这就完成了证明。 □

在定理 5.2 中取 $f=1$ ，即可得到 Nicaise 推导出的 Hile-Protter 界 (1.16)。利用 $f(\lambda)=(z-\lambda)^2$ ，可得不等式

$$\sum_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)(z-5\lambda_j)\le 0, \tag{5.2}$$

对于 $z\in[\lambda_n,\lambda_{n+1}]$, 这一结果此前由 Demirel-Harrell 在 [6, 式 (3.15)] 中得到。式 (5.2) 左侧二次多项式的判别式为正，且其根必定位于区间 $(\lambda_n,\lambda_{n+1})$ 之外。这给出以下结果，与 [9, 命题 6] 类似:

定理 5.3。对于 Γ 一个在外部顶点处设有狄利克雷顶点的度量树，量

$$D_n := \left(\frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)^2 - \frac{5}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2$$

对所有 $n\ge 2$均满足 $D_n\ge 0$ 。此外，特征值满足以下不等式

$$\lambda_n \ge \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j - \sqrt{D_n}, \qquad \lambda_{n+1}\le \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + \sqrt{D_n},$$

因此

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n \le 2\sqrt{D_n}.$$

对于 $n=1$ ，有 $D_1=4\lambda_1^2$, 因此估计可化简为 $\lambda_2/\lambda_1\le 5$, 这等价于 (1.15) 和 (1.16), 但弱于 (1.14)。为了比较 λ_3的估计，我们定义前两个特征值的矩,

$$a_1 := \tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2), \qquad a_2 := \tfrac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2).$$

那么，(5.3) 中的估计可写为

$$\lambda_3 \le 3a_1 + \sqrt{9a_1^2-5a_2}. \tag{5.3}$$

另一方面，Hile-Protter 型界 (1.16) 可化为

$$\lambda_3 \le 3a_1 + \sqrt{9a_1^2 - 5\lambda_1\lambda_2}.$$

由于 $\lambda_1\lambda_2 \le a_2$，根据几何平均不等式，界 (5.3) 更强。

6. Extensions of the upper bound

本节将探讨如何把 §5 中讨论的上界扩展到由树经过修改得到的图。我们将考虑两种可能：在树中已有的顶点之间添加边，以及附加悬挂图。

我们不能指望在一般图上构造出满足 (5.1) 的一组仿射函数。不过，值得注意的是，单个函数 $h \in \mathcal{A}(\Gamma)$ 的存在便能给出一个关于 ϕ_1 的界。回到 §5 中的电路类比，定义（标量）电流为函数 $\eta : \Gamma \to [0,\infty)$，它在每条边上为常数，并且在某种边的定向选择下满足基尔霍夫电流定律。这等价于条件

$$\eta = |h'| \text{ for some } h \in \mathcal{A}(\Gamma). \tag{6.1}$$

在各种情形下，Payne-P´olya-Weinberger 估计 $\lambda_2/\lambda_1 \le 5$ 的证明中隐含着以下不等式。为方便起见，我们给出一个直接证明。

引理 6.1. 若 Γ 是一个存在非零电流函数 η的度量图，则

$$\lambda_2 - \lambda_1 \le 4\,\frac{\|\eta\phi_1'\|^2}{\|\eta\phi_1\|^2}. \tag{6.2}$$

证明. 给定 η，根据 (6.1) 选取 h。如有必要，将 h 平移一个常数，我们可以假设 $u := h\phi_1$ 与 ϕ_1正交。于是由极小极大原理得到估计

$$\lambda_2 \le \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}. \tag{6.3}$$

由于 u 满足顶点条件，根据关于 h的假设，我们可以通过分部积分计算

$$\begin{aligned}\|u'\|^2 &= \langle u, -\Delta u\rangle \\ &= \langle u, \lambda_1 u - 2h'\phi_1'\rangle \\ &= \lambda_1\|u\|^2 - 2\langle u, h'\phi_1'\rangle.\end{aligned}$$

由 (6.3) 可得

$$\lambda_2 - \lambda_1 \le \frac{A}{\|u\|^2}, \tag{6.4}$$

其中

$$A := -2\langle u, h'\phi_1'\rangle.$$

由柯西-施瓦茨估计可得

$$A^2 \le 4\|u\|^2\|\eta\phi_1'\|^2. \tag{6.5}$$

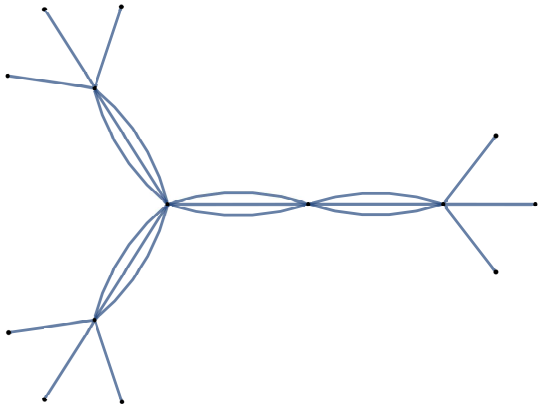


FIGURE 11. 一个仙人掌图。

另一方面，我们可以利用分部积分进行计算，

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\int_\Gamma (h^2)'(\phi_1^2)' \\ &= \frac{1}{2}\int_\Gamma (h^2)''\phi_1^2 \\ &= \|\eta\phi_1\|^2. \end{aligned}$$

由 (6.5) 得

$$\frac{A}{\|u\|^2} \le \frac{\|\eta\phi_1'\|^2}{\|\eta\phi_1\|^2},$$

结论由 (6.4) 得出。 □

如 §5 所述，任何具有至少两个顶点的图 Γ （ $\mathcal{V}_0$ ）都存在非零电流函数。然而，要从 (6.2) 得到普适界，我们需要对 η 的选择具有某种一致性，或者对 ϕ_1 的行为有所控制。

6.1. 仙人掌图。首先注意，引理 5.1 的结论对于通过均匀添加边从树构造出的图仍然成立。也就是说，假设 Γ 是由一棵树构造而成：将每条内部边替换为由 $k>1$ 条等长边组成的南瓜图，并将每条外部边替换为由 k 条等长边组成的星形图。我们将这种图称为仙人掌图，名称取自树状仙人掌图。

给定一个基于树 Γ_{T} 的仙人掌图 Γ ，我们可以应用引理 5.1，在 Γ_{T} 上构造一组三个仿射函数 $\{g_\alpha\}$ 。只需将平行边上的取值复制，这些函数就可以扩展为满足 (5.1) 的 $\mathcal{A}(\Gamma)$ 中的元素。这棵树的存在意味着，所有通用树界都适用于 Γ，包括

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \le 2+\sqrt{5}, \qquad \lambda_{n+1}-\lambda_n \le \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,$$

Nicaise [15, §4], 中的结果，以及定理 5.2 给出的一般界。

我们还可以考虑改造仙人掌图的情形，其中每个南瓜图或星形图的边数在 $k_{\min}$ 与 $k_{\max}$ 之间变化。我们继续

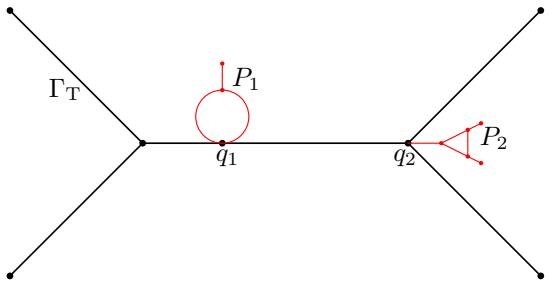


FIGURE 12. 一棵带有两个悬挂结构的装饰树。

假设每个南瓜图或星形图内部的边长相等。设 $\{g_\alpha\}$ 表示引理 5.1 为底层树 Γ_T 生成的三个仿射函数。在 Γ 上，我们可以通过将电流 g'_α 分配到每条线段中的平行边上，得到相应的电流集合 $\{\eta_\alpha\}$。也就是说，对于具有 k 条边的线段（南瓜图或星形图），我们设 $\eta_\alpha := |g'_\alpha|/k$。由于 $\sum_\alpha |g'_\alpha|^2 = 1$ 在 Γ_T 上，这一构造给出

$$\frac{1}{k_{\max}^2} \leq \sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha^2 \leq \frac{1}{k_{\min}^2}.$$

对不等式求和

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\|\eta_\alpha \phi_1\|^2 \leq 4\|\eta_\alpha \phi_1'\|^2$$

在 α 上，得到

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 1 + 4\frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2}.$$

6.2. 装饰树。假设 Γ 是由树图 Γ_T 通过将悬挂图 P_j、$j = 1$、$\ldots m$ 连接到 Γ_T 的内部顶点（也可能是人为设置的顶点）而构成的。令 $q_j \in \mathcal{V}_N$ 表示 P_j 的连接顶点。图12展示了这棵装饰树图的示意图。

命题6.2。设 Γ 是一棵装饰树，由度量树 Γ_T（在外部顶点处满足狄利克雷条件）和悬挂图 P_1、.....、P_m 组成，且每个悬挂图至少包含一个狄利克雷顶点。假设

$$\lambda_1 \leq \lambda_1(P_j)$$

对每个 j，其中 $\{\lambda_n\}$ 表示 Γ 的谱，而 $\lambda_1(P_j)$ 是通过在连接点 q_j处指定标准边界条件定义的 P_j 的第一特征值。于是

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \leq 5.$$

特别地，当.....时，该不等式成立

$$|P_j| \leq \frac{1}{2}\ell_{\max}(\Gamma_T) \tag{6.6}$$

对每个 j。

证明。令 $\{g_\alpha\} \in \mathcal{A}(\Gamma_{\mathrm{T}})$ 为由引理 5.1 得到的三元函数组。我们在 Γ 上定义相应的电流函数：在 Γ_T的边上令 $\eta_\alpha = |g'_\alpha|$，在每个悬挂结构 P_j上令 $\eta_\alpha = 0$。由此得到

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\|\eta_\alpha\phi_1\|^2 = \int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}\phi_1^2,$$

and

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\|\eta_\alpha\phi_1'\|^2 = \int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}(\phi_1')^2.$$

因此，由引理 6.1,

$$\lambda_2 - \lambda_1 \le 4\frac{\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}(\phi_1')^2}{\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}\phi_1^2}. \tag{6.7}$$

分部积分可得

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}(\phi_1')^2 = \lambda_1\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}\phi_1^2 + \sum_{j=1}^{m}\phi_1(q_j)\partial_{P_j}\phi_1(q_j), \tag{6.8}$$

其中，$\partial_{P_j}\phi_1(q_j)$ 表示 ϕ_1 在 q_j 处沿着 P_j 的关联边向内的导数之和。

现在，对每个 j，令 u_j 表示 P_j 的第一特征函数，并在 q_j 处施加标准顶点条件，使得 $u_j \ge 0$ 在 P_j 上成立，并且

$$-\Delta u_j = \lambda_1(P_j)u_j.$$

由格林恒等式以及 $\partial_{P_j}u_j(q_j) = 0$ 这一事实,

$$\int_{P_j}(-\phi_1\Delta u_j + u_j\Delta\phi_1) = -u_j(q_j)\partial_{P_j}\phi_1(q_j).$$

另一方面,

$$\int_{P_j}(-\phi_1\Delta u_j + u_j\Delta\phi_1) = (\lambda_1(P_j) - \lambda_1)\int_{P_j}\phi_1 u_j.$$

由于特征函数为正，我们得出 $\lambda_1(P_j) - \lambda_1 \ge 0$ 意味着

$$\partial_{P_j}\phi_1(q_j) \le 0.$$

在此假设下，由 (6.8) 可得

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}(\phi_1')^2 \le \lambda_1\int_{\Gamma_{\mathrm{T}}}\phi_1^2,$$

由此可根据 (6.7) 得出 $\lambda_2/\lambda_1 \le 5$。

根据一般界 (1.1) 和 (1.6)，只要满足以下条件，特征值条件就成立

$$|P_j| \le \frac{1}{2}\ell_{\max}(\Gamma).$$

显然，只需计算 $\ell_{\max}$ 与 Γ_{T}，而不是 Γ。 □

References

[1] G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo，《组合图与量子图的边连通度及谱隙》，*J. Phys. A* **50** (2017), 365201, 29。[2] G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo，《量子图谱分析的手术原理》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), 5153–5197。[3] G. Berkolaiko、J. B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo，《量子图中的扩散障碍：谱隙的基于几何的上界》，预印本，arXiv:2206.10046v1, 2022。[4] D. Borthwick、L. Corsi 和 K. Jones，《量子图谱隙的尖锐直径界》，*Proc. Amer. Math. Soc.* **149** (2021), 2879–2890。[5] S.-Y. Cheng 和 K. Oden，《欧几里得区域的等周不等式与第一、第二特征值之差》，*J. Geom. Anal.* **7** (1997), 217–239。[6] S. Demirel 和 E. M. Harrell, II，《量子图特征值的半经典不等式与普适不等式》，*Rev. Math. Phys.* **22** (2010), 305–329。[7] L. Friedlander，《度量图特征值的极值性质》，

Ann. Inst. Fourier ( ), – 。[8]

(Grenoble) **55** 2005 199 211

E. M. Harrell, II 和 A. V. Maltsev，《量子图上的局域化与景观函数》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (2020), 1701–1729。[9] E. M. Harrell, II 和 J. Stubbe，《关于某些偏微分算子的迹恒等式与普适特征值估计》，*Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1797–1809。[10] G. N. Hile 和 M. H. Protter，《拉普拉斯算子特征值的不等式》，

Indiana Univ. ( ), – 。

Math. J. **29** 1980 523 538

[11] J. B. Kennedy、P. Kurasov、G. Malenov´a 和 D. Mugnolo，《关于量子图的谱隙》，*Ann. Henri Poincaré* **17** (2016), 2439–2473。[12] G. R. Kirchhoff，《关于研究电流线性分布时所导出的方程之解》，*Pogg. Annal. Phys u. Chemie*72 (1847)，重印于 Gustav Robert Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen，第 22-33 页，Edition Classic Verlag Dr. M¨uller。萨尔布¨吕肯：VDM Verlag Dr. M¨uller，2006。[13] P. Kurasov、G. Malenov´a 和 S. Naboko，《量子图的谱隙及其边连通度》，*J. Phys. A* **46** (2013), 275309, 16。[14] P. Kurasov 和 S. Naboko，《图上微分算子的瑞利估计》，

J. Spectr. ( ), – 。

Theory **4** 2014 211 219

[15] S. Nicaise，《有限拓扑网络的谱》，*Bull. Sci. Math. (2)* **111** (1987), 401–413。[16] K. Oden、C.-J. Sung 和 J. Wang，《紧流形上的谱隙估计》，

Trans. ( ), – 。

Amer. Math. Soc. **351** 1999 3533 3548

[17] L. E. Payne、G. P´olya 和 H. F. Weinberger，《关于相邻特征值之比》，*J. Math. and Phys.* **35** 1956 289 298

( ), – 。[18] I. M. Singer、B. Wong、S.-T. Yau 和 S. S.-T. Yau，《薛定谔算子前两个特征值之差的估计》，*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **12** (1985), 319–333。[19] C. J. Thompson 和 M. Kac，《一维非谐振子的相变与特征值简并》，*Studies in Appl. Math.* **48** (1969), 257–264。

Department of Mathematics, Emory University, Atlanta, GA 30322
Email address: dborthw@emory.edu

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332
Email address: harrell@math.gatech.edu

Department of Mathematics, Emory University, Atlanta, GA 30322
Email address: haozhe.yu@emory.edu