arXiv:2301.07169v1 [math.QA] 17 Jan 2023

量子逻辑中的环状事件系统

Dietmar Dorninger 和 Helmut L¨anger

摘要

本文研究一类环状事件系统（RLSE），它是布尔环的推广。本文在这一类系统中刻画了由正交模格表示的量子逻辑，并将布尔代数与布尔环之间的对应关系推广到正交模格。本文分析了 RLSE 及其各种子类的结构，并特别指出了经典逻辑。此外，本文还描述了不同物理问题情境中的数值事件集合。数值事件定义为从物理系统的状态集合 S 到 $[0,1]$ 的函数 p，使得 $p(s)$ 表示系统处于状态 $s \in S$ 时某一事件发生的概率。特别是，本文回答了这样一个问题：给定一个（较小的）数值事件集合，是否足以据此认定所讨论的是经典物理系统还是量子力学系统。

美国数学学会学科分类：06C15, 03G12, 81P16
关键词：量子逻辑、正交模格、事件环状结构、数值事件

1 引言

在量子力学中，所谓的量子逻辑（也称为事件系统）是进行理论推理和实际计算的重要工具。最常见的事件系统是正交模格（及其推广），尤其是可分希尔伯特空间的闭子空间格，即所谓的希尔伯特逻辑。正交模格可以看作布尔代数的推广，而布尔代数是经典物理学中事件系统的典型形式。因此，我们不禁要问：某个实验背后的逻辑是否可能是布尔代数？布尔代数与布尔环一一对应，因此也可以将其理解为布尔环。正如电气工程中常见的情况，相较于在格中进行计算，有时更倾向于在环中进行计算。于是问题变成：一种逻辑是否为布尔环？这又引出了一个问题：如何找到与正交模格相对应的布尔环的适当推广。本文将对这个问题给出答案。

为此，我们首先回顾事件环状结构（RLSE）的定义，随后将对一大类特征 2 的 RLSE $\mathrm{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$ 重新表述（这意味着它们满足恒等式 $x + x \approx 0$），并说明这些结构只需弱化布尔环的惯常公理，或者采用其他更直观的定律，便可简单地得到。

定义1.1。（参见 [9]）事件环状结构（RLSE）是一个型为 (2, 2, 0, 0) 的代数 $(R, +, \cdot, 0, 1)$，满足 $(R, \cdot, 0, 1)$ 是一个有界交半格，并满足以下恒等式：

(R1) $x + y \approx y + x$, (R2) $(xy + 1)(x + 1) + 1 \approx x$, (R3) $\big((xy + 1)x + 1\big)x \approx xy$, (R4) $xy + (x + 1) \approx (xy + 1)x + 1$.

很容易验证，所有布尔环都是 RLSE。

定义1.2。若 RLSE $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 满足恒等式，则称其为特定的

(R5) $x + y \approx x(y + 1) + (x + 1)y$.

正如我们将在下文指出的，特定 RLSE 的特征为 2（一般而言，情况并非如此）。此外，我们将证明正交模格与特定 RLSE 之间存在一一对应关系。这意味着，所有 RLSE 组成的类大于特定 RLSE 组成的类。

本文将考察 RLSE 的各种类，回答 RLSE 何时为布尔环这一问题，研究 RLSE 的结构性质，并将 RLSE 与所谓的数值事件代数联系起来（数值事件代数是通过测量可获得的概率集合——参见 [2]和 [13]）。接下来，我们将把针对 RLSE 得出的结果应用于数值事件代数。我们将证明，在某些条件下，RLSE 的运算 $+$ 将与实函数的求和一致，而 RLSE 元素的序将与函数序一致。此外，我们将回答这样一个问题：通过测量获得的一组（较小的）数值事件，是否足以判定所研究的是经典物理系统。最后，我们将通过省略公理 (R3) 来弱化 RLSE 的概念，并将这些结构与配备了实验相关运算的数值事件集合联系起来。

在某种程度上，我们的研究与任意带有反单调对合的有界格同所谓偏广义布尔拟环（pGBQRs）之间的一一对应有关。关于偏广义布尔拟环的更多结果，参见 [1] 和 [6] – [10]。

2 事件环状结构的初等性质

对于正交模格，我们将其中两个元素x、 y 的上确界记作 $x \vee y$，它们的下确界记作 $x \wedge y$；元素 x 的补元记作 x'。若 x 和 y 正交，即 $x \wedge y' = x$，则记作$x \perp y$。此外，对于 RLSE 中的 x、 y，我们约定当且仅当 $xy = x$ 时定义 R、 $x \leq y$，并称 x 与 y 彼此正交（作为环状元素），若 $x(1 + y) = x$。

对于每个类型为 (2, 2, 0, 0) 的代数 R $=$（R、$+$、$\cdot$、0、1），令 $\mathbb{L}$(R) 表示由下式定义的代数（R、$\vee$、$\wedge$、$'$、0、1）：

$$x \vee y := (x+1)(y+1)+1,$$
$$x \wedge y := xy,$$
$$x' := x+1$$

对所有 $x, y \in R$。正如 [9] 中已证明的（参见定理 2.1），若 R 是 RLSE，则 $\mathbb{L}$(R) 是正交模格。我们也将在 RLSE 中使用该格的运算。显然，格论中的正交关系与上文为 RLSE 定义的正交关系一致。——我们注意到，对于 RLSE，正交模格 $\mathbb{L}$(R) 可以是布尔代数，而 R 本身并非布尔环（参见 [9]）；但对于特定 RLSE，情况并非如此，正如下文所示。

下面我们将用到以下定理。

定理 2.1。（参见 [9]）设 R $=(R, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个型为 (2, 2, 0, 0) 的代数。那么，R 是 RLSE，当且仅当 $\mathbb{L}$(R) $=(R, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是正交模格，并且 $+$ 对所有 $x, y \in R$ 满足以下条件：

(a) $x+y=y+x$, (b) $x+1=x'$, (c) $x+y=x \vee y$ 当 $x \leq y'$ 时。

此外，利用 RLSE 的格结构，可以很容易看出：

命题 2.2.（参见 [9]）RLSE R $=(R, +, \cdot, 0, 1)$ 对任意 $x, y \in R$ 均具有以下性质：

(i) $(x+1)+1=x$, (ii) $x(x+1)=0$，因此 $1+1=0$, (iii) $x+0=x$, (iv) $x+(x+1)=1$, (v) $x \leq y$ 当且仅当 $y+1 \leq x+1$, (vi) $x \perp y$ 蕴含 $(x+y)+1=(x+1)(y+1)$, (vii) 当 $x \leq y'$ 时 $x+y=x \vee y$,

(viii) $x+x=0$ 如果 R 是特定的。

回顾一下，在正交格中，若两个元素 x, y 满足 $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x$，则称它们可交换（简记为 x C y）；而 $c(x, y) := (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \vee (x' \wedge y')$ 称为 x 和 y的交换子。我们为 RLSEs（$R, +, \cdot, 0, 1$）定义类似的概念：若元素 x, y满足 $xy+x(y+1)=x$，则称它们可交换（亦记为 xC y）；并将元素 $c(x, y) := \big(xy + x(y+1)\big) + \big((x+1)y + (x+1)(y+1)\big)$ 称为 x 和 y的交换子。这些定义是合理的，以下命题对此作出断言。

命题 2.3. 设 R $=(R,+,\cdot,0,1)$ 是一个 RLSE，且 $a,b\in R$。则以下结论成立：

(ix) a C b 在 R 中，当且仅当 aC b 在 $\mathbb{L}$(R) 中，

(x) a 与 b 在 R 中的交换子，与 a 与 b 在 $\mathbb{L}$(R) 中的交换子相同。

证明。

(ix) 由于 $a\wedge b\perp a\wedge b'$，我们有 $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=(a\wedge b)+(a\wedge b')=ab+a(b+1)$。现在，$a$ C b 在 $\mathbb{L}$(R) 中，当且仅当 $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=a$。

(x) 由命题 2.2 的 (vii) 可知，$(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=ab+a(b+1)$。将 a 替换为 a'，得到 $(a'\wedge b)\vee(a'\wedge b')=(a+1)b+(a+1)(b+1)$。由于 $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\perp(a'\wedge b)\vee(a'\wedge b')$，因此我们有

$$\begin{aligned}&(a\wedge b)\vee(a\wedge b')\vee(a'\wedge b)\vee(a'\wedge b')=\\&=\big((a\wedge b)\vee(a\wedge b')\big)\vee\big((a'\wedge b)\vee(a'\wedge b')\big)=\\&=\big((a\wedge b)\vee(a\wedge b')\big)+\big((a'\wedge b)\vee(a'\wedge b')\big)=\\&=(ab+a(b+1))+\big((a+1)b+(a+1)(a+1)\big).\end{aligned}$$

□

对于每个类型为 (2, 2, 1, 0, 0) 的代数 L $=(L,\vee,\wedge,',0,1)$，令 $\mathbb{R}$(L) 表示由下式定义的类型为 (2, 2, 0, 0) 的代数 $(L,+,\cdot,0,1)$

$$\begin{aligned}x+y&:=(x\wedge y')\vee(x'\wedge y),\\xy&:=x\wedge y\end{aligned}$$

对所有的 $x,y\in L$。

定理 2.4。设 R 是一个特定 RLSE，L 是一个正交模格。则以下结论成立：

(i) $\mathbb{L}$(R) 是一个正交模格，(ii) $\mathbb{R}$(L) 是一个特定的 RLSE，(iii) $\mathbb{R}\big(\mathbb{L}(\mathrm{R})\big)=\mathrm{R}$，(iv) $\mathbb{L}\big(\mathbb{R}(\mathrm{L})\big)=\mathrm{L}$。

证明。设

$$\begin{aligned}\mathbf{R}&=(R,+,\cdot,0,1),\\\mathbb{L}(\mathbf{R})&=(R,\vee,\wedge,',0,1),\\\mathbb{R}\big(\mathbb{L}(\mathbf{R})\big)&=(R,\oplus,\odot,0,1),\\\mathbf{L}&=(L,\vee,\wedge,',0,1),\\\mathbb{R}(\mathbf{L})&=(L,+,\cdot,0,1),\\\mathbb{R}\big(\mathbb{L}(\mathbf{R})\big)&=(L,\cup,\cap,^*,0,1).\end{aligned}$$

(i) 由定理 2.1 得出。

(iii) 利用命题 2.2 (vii)，我们得到

$$x \oplus y \approx (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \approx x(y+1) + (x+1)y \approx x + y,$$
$$x \odot y \approx x \wedge y \approx xy.$$

(iv) 我们有

$$x + 1 \approx (x \wedge 1') \vee (x' \wedge 1) \approx x',$$
$$x \cup y \approx (x+1)(y+1) + 1 \approx (x' \wedge y')' \approx x \vee y,$$
$$x \cap y \approx xy \approx x \wedge y,$$
$$x^* \approx x + 1 \approx x'.$$

(ii) 由定理 2.1 和 (iv) 可得，因为对于所有的 $x, y \in L$

(a) $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = (y \wedge x') \vee (y' \wedge x) = y + x$,
(b) $x + 1 = (x \wedge 1') \vee (x' \wedge 1) = x'$, (c) $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = x \vee y$ 若 $x \leq y'$。

□

推论 2.5. 对于固定的基集 A，映射 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{R}$ 是 A 上所有特定 RLSE 的集合与 A 上所有正交模格的集合之间的互逆双射。

推论 2.6. 对于特定 RLSE R，其关联的正交模格 $\mathbb{L}$(R) 是布尔代数，当且仅当 R 是布尔环。

推论 2.7. 对于特定 RLSE $(R, +, \cdot, 0, 1)$，条件 $x(y+1) = xy + x$ for some $x, y \in R$ 等价于 x C y。

证明。方程 $x(y+1) = xy + x$ 等价于 $x \wedge (x' \vee y') = x \wedge y'$，根据 [12] 中的结果，这又等价于 x C y'，因此也等价于 x C y。 □

推论 2.8. 特定 RLSE $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 是布尔环，当且仅当它满足恒等式 $x(y+1) \approx xy + x$。

证明。这由推论 2.7 以及以下事实得出：正交模格 $(L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ 是布尔代数，当且仅当对于所有 $x, y \in L$，x C y（参见 [12]）。 □

3 RLSE 的结构理论

定义 3.1. 若 RLSE（$R, +, \cdot, 0, 1$）满足恒等式，则称其为弱分配的

(R6) $(xy + 1)x \approx xy + x$。

显然，任何特定 RLSE $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 都是弱分配的，因为根据命题 2.2 (ii) 和 (R5)，我们有

$$(xy + 1)x \approx xy(x + 1) + (xy + 1)x \approx xy + x.$$

此外，任何弱分配 RLSE 都具有特征 2，因为

$$x + x \approx x1 + x \approx (x1 + 1)x \approx (x + 1)x \approx 0$$

命题 2.2 (ii)，任何弱分配 RLSE 都具有特征 2。

例 3.2. 与正交模格 MO_2 对应的特定 RLSE 是弱分配的。

根据推论 2.6，这个例子表明，一般而言，特定 RLSE R 并非布尔环。

下一个定理说明，对于弱分配 RLSE，最初引入的 RLSE 公理可以通过弱化布尔环中熟知的结合律和分配律公理来重新表述。

定理 3.3. 设 $R = (R, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个类型为 (2, 2, 0, 0) 的代数，且 $(R, \cdot, 0, 1)$ 是一个有界交半格。那么以下命题等价：

(i) R 是弱分配 RLSE,

(ii) R 满足以下恒等式：

$(\mathrm{W1})\ 0 + 1 \approx 1,$
$(\mathrm{W2})\ x + y \approx y + x,$
$(\mathrm{W3})\ (xy + x) + 1 \approx xy + (x + 1),$
$(\mathrm{W4})\ (xy + x) + x \approx xy + (x + x),$
$(\mathrm{W5})\ (xy + 1)x \approx xy + x,$
$(\mathrm{W6})\ (xy + 1)(x + 1) \approx xy(x + 1) + (x + 1).$

证明。(i)
$\Rightarrow$ (ii)：

(W1) 由命题 2.2（iii）和 (R1) 得出。

(W2) 等同于 (R1)。

(W3) 我们有

$$(xy + x) + 1 \approx (xy + 1)x + 1 \approx xy + (x + 1)$$

根据（R6）和（R4）。

（W4）我们发现

$$(xy + x) + x \approx (xy + 1)x + x \approx \big((xy + 1)x + 1\big)x \approx xy \approx xy + 0 \approx xy + (x + x)$$

根据 (R6)、(R3)、命题 2.2（iii），以及每个弱分配 RLSE 都具有特征 2 这一事实。

(W5) 等于 (R6)。

(W6) 注意到

$$(xy+1)(x+1) \approx \big((xy+1)(x+1)+1\big)+1 \approx x+1 \approx 0+(x+1) \approx xy(x+1)+(x+1)$$

根据命题 2.2（i）、(R2)、命题 2.2（iii）、(R1) 和命题 2.2（ii）。

(ii) ⇒(i)：将 $y=0$ 代入 (W5)，并利用 (W1) 和 (W2)，得到 $x+0 \approx 0+x \approx x$。将 $y=0$ 代入 (W4)，得到 $x+x \approx 0$。在 (W5) 中令 $y=1$，得到 $x(x+1) \approx 0$。在 (W4) 中令 $x=1$，得到 $(y+1)+1 \approx y$。下文中我们经常直接使用这些恒等式，而不再特别说明。

(R1) 等于 (W2)。

(R2) 我们有

$$(xy+1)(x+1)+1 \approx \big(xy(x+1)+(x+1)\big)+1 \approx \big(0+(x+1)\big)+1 \approx (x+1)+1 \approx x$$

due to (W6).

(R3) 我们得到

$$\big((xy+1)x+1\big)x \approx (xy+1)x+x \approx (xy+x)+x \approx xy$$

according to (W5) and (W4).

(R4) 我们看到

$$xy+(x+1) \approx (xy+x)+1 \approx (xy+1)x+1$$

根据 (W3) 和 (W5)。

(R6) 等于 (W5)。

□

回想一下，对于 RLSE $\mathbf{R}=(R,+,\cdot,0,1)$ $a \le b$，对于 $a,b \in R$ 意味着 $ab=a$；这一概念与关联格 $\mathbb{L}(\mathbf{R})$ 的 $a \le b$ 一致。于是我们有 $\{(xy,x) \mid x,y \in R\} = \{(x,y) \in R^2 \mid x \le y\}$，现在可以将定理 3.3 改述如下：

定理 3.4。设 $\mathbf{R}=(R,+,\cdot,0,1)$ 是一个 (2, 2, 0, 0) 型代数，且 $(R,\cdot,0,1)$ 是有界交半格。则以下条件等价：

(i) R 是弱分配 RLSE,

(ii) R 满足以下恒等式和条件：

(1) $0+1 \approx 1$, (2) $x+y \approx y+x$, (3) 如果 $x \le y$ 那么 $(x+y)+1=x+(y+1)$，

(4) *if* $x \leq y$ *then* $(x+y)+y = x+(y+y)$,

(5) *if* $x \leq y$ *then* $(x+1)y = x+y$,

(6) *if* $x \leq y$ *then* $(x+1)(y+1) = x(y+1)+(y+1)$.

定理 3.3 中的恒等式 (W3) 和 (W4) 是结合律的特例。结合律的另一个版本如下。

定义 3.5.（参见 [9]）若 RLSE $(R, +, \cdot, 0, 1)$ 满足恒等式，则称其为弱结合的

(R7) $(x+y)+1 \approx x+(y+1)$.

当然，每个布尔环都是弱结合的。反之则不成立。特征 2 的 RLSE R 满足 $\mathbb{L}(R) = \mathbf{MO}_2$, $a+b = a'+b' = c$ 且 $a+b' = a'+b = c'$ 对于 $a \neq b, 0 < a, b < 1$ 以及任意 $c \in \mathbf{MO}_2$，它是弱结合的，但不是布尔环。如 [9] 所示，弱结合的特定 RLSE 是布尔环。现在我们注意到，弱结合的 RLSE 是弱分配的（因此具有特征 2），因为

$$(xy+1)x \approx \big((xy+1)x+1\big)+1 \approx \big(xy+(x+1)\big)+1 \approx \big((xy+x)+1\big)+1 \approx xy+x$$

根据命题 2.2 (i)、(R4) 和弱结合律。反之则不成立。与正交模格 $\mathbf{MO}_2$ 对应的特定 RLSE 是弱分配的，但不是弱结合的，因为对于两个不可比元素 a 和 b

$$\begin{aligned}(a+b)+1 = \big((a \wedge b') \vee (a' \wedge b)\big)' = (0 \vee 0)' = 0' = 1 \neq 0 = 0 \vee 0 = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b') = \\ = a+b' = a+(b+1).\end{aligned}$$

我们以一条关于 RLSE 结构的纯代数性评述结束本节。

设 $\mathbf{A} = (A, F)$ 是一个代数。用 Con A 表示 A 上所有同余组成的集合，用 $\mathbf{Con\,A} = (\mathrm{Con\,A}, \subseteq)$ 表示 A 的同余格。代数 A 称为

- 同余可置换，如果 $\Theta \circ \Phi = \Phi \circ \Theta$ 对所有 $\Theta, \Phi \in \mathrm{Con\,A}$,
- 同余分配，如果 Con A 是分配格,
- 算术的，如果它既同余可置换又同余分配,
- 同余正则，如果对于所有 $a \in A$ 和 $\Theta, \Phi \in \mathrm{Con\,A}$, $[a]\Theta = [a]\Phi$ 蕴含 $\Theta = \Phi$,
- 同余一致是指对于每个 $\Theta \in \mathrm{Con\,A}$, Θ 的所有类都具有相同的基数。

注 3.6. RLSE 是算术的、同余正则且同余一致的 .

证明。设 R 是一个 RLSE。由于 $\mathbb{L}(R)$ 的基本运算都是 R 中的项，我们有 $\mathrm{Con}R \subseteq \mathrm{Con}\ \mathbb{L}(R)$。现在，根据正交模格是算术的、同余正则且同余一致这一事实（参见例如 [4]），定理即得。

□

4 数值事件代数

设 S 是某物理系统的一组状态， $p(s)$ 表示系统处于状态 $s \in S$ 时某事件发生的概率。函数 p 从 S 到 $[0,1]$ 称为数值事件，或更确切地说，称为 S-概率（参见 [2] 和 [3]）。

设 P 为一个 S-概率集合，其中包含常值函数 0 和 1。我们用 $\leq$ 表示实函数的序；若 p 和 q 在 P 中正交，即 $p \leq q'$，则记 $p' := 1 - p$ 为 $p \in P$ 和 $p \perp q$ 的反概率。若 p、 $q \in P$ 的下确界或上确界存在于 P 中，则分别记为 $p \wedge q$ 和 $p \vee q$。最后，约定用 $p+q$、 $p-q$ 和 pq 表示函数 p、 $q \in P$ 的和、差和乘积。为避免将函数的和与乘积同 RLSE 中的和与乘积混淆，对于 RLSE，我们分别用 $\oplus$ 和 $\odot$，而不用 $+$ 和 $\cdot$。

定义 4.1。（参见 [2]）若一个 S-概率集合 P 满足

(S1) $0, 1 \in P$,

(S2) 对每个 $p' \in P$ $p \in P$，(S3) 若 $p \perp q \perp r \perp p$ 对于 p、 q、 $r \in P$成立，则 $p + q + r \in P$。

将 $r = 0$ 代入公理 (S3)，可得 $p \perp q$ 蕴含 $p + q \in P$；在这种情况下，可以证明 $p + q = p \vee q$（相对于函数 P的函数序 $\leq$）。
一般而言，(P、 $\vee$、 $\wedge$、 $'$、0、1) 关于函数的偏序构成一个正交模偏序集；但从现在起，我们有充分理由假定 P 是一个格。
S-概率代数是一个格，因而也是一个正交模格，这是许多量子逻辑的典型特征。特别是，每个希尔伯特空间逻辑都可以看作一个格序的 S-概率代数（参见 [3]）；并且在 $|S| = 2$ 的这个重要情形下，每个 S-概率代数都是一个格（参见 [5]）。当然，所有其序 $\leq$ 对应于布尔代数的经典逻辑（参见 [13]）也可以理解为数值事件的格序代数。

如果在一组 P_n 数值事件的背景下可以进行测量，那么通常至关重要的是要弄清所面对的是经典情形还是量子力学情形；这意味着必须决定 P_n 是否能够嵌入到一个 S-概率代数 P 中，使得 P_n 的元素属于 P的某个布尔子代数。如果情况确实如此，则称 P_n 是可布尔嵌入的，或简称为可嵌入的（参见 [11]）。

设 P 是一个 S-概率的格序代数，并且

$$p \oplus q := (p \wedge q') \vee (p' \wedge q),$$
$$p \odot q := p \wedge q$$

对所有 p、 $q \in P$均成立。那么，正如 [9],所示，R $=$（P、 $\oplus$、 $\odot$、0、1）是一个 RLSE，且 $\mathbb{L}$(R) $= P$。我们称 R 为与 P 相关联的 RLSE。R 具有特征 2，并且是弱分配的，因为 R 显然满足恒等式（R5）。如果一组 P_n 数值事件可嵌入到 P 中，我们也称其可布尔嵌入到 R 中。

接下来，我们用实值函数的和、差及 $\leq$ 来表示与 S-概率代数相关的 RLSE 的 $\oplus$、 $\odot$ 和 $\leq$。

命题 4.2. 设 R 是与 S-概率格序代数相关的 RLSE， P 和 p、$q \in P$。那么

(i) $p \oplus q = p \odot (1 - q) + (1 - p) \odot q$，(ii) $p \oplus q = q - p$ 若 $p \leq q$，
(iii) $p \oplus 1 = 1 - p$，(iv) $p \oplus q = p + q$ 若 $p \perp q$。

证明。

(i) 成立，因为运算 $\odot$ 和 $\wedge$ 重合， $p' = 1 - p$ 和 $(p \odot q') \perp (p' \odot q)$。

(ii) 是由 [5]中的定理 3.4 和命题2.1 推出的。

(iii) 由 (ii) 得出。

(iv) 由命题 2.2 (vii) 得出。

□

当我们说一组 P_n S-概率可布尔嵌入到 RLSE R $= (R, \oplus, \odot, 0, 1)$ 中时，我们假定存在一个（任意的）S-概率格序代数 P，使得 $P = \mathbb{L}$(R)。如果 P_n 的元素只能取两个值，即 0 和 1，那么我们也对 P的元素作此假定。这样的 S-概率代数称为具体逻辑，也就是一种可用集合表示的量子逻辑。

定理4.3. 设 $P_2 = \{p, q\}$。则以下结论成立:

(i) P_2 可布尔嵌入，当且仅当 $p \odot (1 - q) = p - p \odot q$。

(ii) 如果 p 和 q 是二值的，那么 P_2 是布尔的，当且仅当 $p \odot q = pq$.

证明。

(i) p, q 可布尔嵌入到一个正交模格中，当且仅当 p C q。根据推论 2.7，这等价于 $p \odot (q \oplus 1) = p \odot q \oplus p$，而根据命题 4.2，这意味着 $p \odot (1 - q) = p - p \odot q$。

(ii) 我们假设 p 和 q 只能取值 0 和 1。对于正交模格， p C q 等价于 p C q'，因此根据我们已经证明的结论， p和 q 可布尔嵌入，当且仅当 $p \odot q = p - p \odot (1 - q)$。在布尔子代数中， $p(s) \wedge q(s)$ =最小值 $\big(p(s)\ q(s)\big) = p(s)q(s)$，其中 min 是最小值的缩写。因此， pq必定是 R 中的元素 $p \odot q$。反过来，若 $pq = p \odot q$，则 $p \odot q \oplus p = p - p \odot q = p - pq = p(1 - q) = p \odot (1 - q)$，因为 $p(1 - q)$是 R 中一个与 $p \wedge (1 - q)$相同的元素。

□

设 A 是 RLSE R 的一个有限子集。我们用$\prod_{\mathbf{R}} A$ 表示 R 中 A 所有元素的乘积，用 $\bigwedge A$ 表示这些元素在 $\mathbb{L}$(R)中的下确界。此外，我们用 $\prod A$ 表示属于 A 的所有函数在实数范围内的乘积，并用 $A \cup B$表示 A 与 B 的集合论并集。正如 [8] 中所证明的，对于 $n > 1$，正交模偏序集的一个 n元子集 T可布尔嵌入，当且仅当对每个 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$及 T的每个 k元子集 A， $\bigwedge A$ 和 $\bigwedge B$ 都可交换。考虑到这一点，可以从定理4.3推导出一种粗略的程序，用来判断一组$P_n = \{p_1, \ldots, p_n\}$ S-概率是否可布尔嵌入，即

对于 $k = 1$ 至 $n-1$:
检查 P_n 的每一对 k 元子集 A 和 B 是否满足 $\prod_{\mathbf{R}} A \odot (1 - \prod_{\mathbf{R}} B) = \prod_{\mathbf{R}} A - \prod_{\mathbf{R}} A \odot \prod_{\mathbf{R}} B$;
或者更确切地说，检查 $\prod_{\mathbf{R}} A \odot \prod_{\mathbf{R}} B = \prod(A \cup B)$ 是否成立，前提是所有 S-概率都是二值的。

我们通过弱化前面提出的两个概念来结束本段。

定义 4.4. 在 RLSE 的定义中省略公理 (R3) 和 (R4)，我们将由此得到的结构称为近 RLSE；若近RLSE 满足公理 (R5)，则称其为特定的。此外，在 S-概率代数的定义中，用公理 (S3) 的特例 $r = 0$ 替代它，即若 $p \perp q$对于 $p, q \in P$则 $p + q \in P$，我们便得到所谓的广义事件域（GFE）（参见 [7]）。

如果 R $= (R, \oplus, \odot, 0, 1)$ 是一个近RLSE，那么 $\mathbb{L}$(R) 是一个带有反单调对合 $'$的格，而该对合通常不是补。这样的格可以视为一种量子逻辑，不过，我们现在将关注近RLSE的另一种处理方法。

我们考虑一个包含 0 和 1 的 S-概率集合 Q，并赋予其运算 $\oplus$和 $\odot$，它们对 p、$q \in Q$ 定义如下

$$(p \oplus q)(s) := \max\big(p(s), q(s)\big) - \min\big(p(s), q(s)\big),$$
$$(p \odot q)(s) := \min\big(p(s), q(s)\big)$$

对所有 $s \in S$，其中 min 和 max 具有显而易见的含义。
对于这些运算，可以设想对相同状态 $s \in S$、 $p \oplus q$ 重复进行多次实验，从而得到两次重复结果 p 和 q 之间的带宽； $p \odot q$ 表示所得的最低值，而 $p \oplus 1 = 1 - p$ 则提供 p 的反概率。

在下一个定理的证明中，我们将使用以下两个引理。

引理 4.5. 令 p、$q \in Q$ 和 $s \in S$，并假设 $p(s)$ $q(s)$ $\in \{0, 1\}$。那么

$$p(s) \oplus q(s) = p(s) + q(s) - 2p(s)q(s),$$
$$p(s) \odot q(s) = p(s)q(s).$$

证明. 考虑以下四种情况： $\big(p(s)$ $q(s)\big) \in \{0, 1\}^2$。

□

引理 4.6. 令

$$x \oplus y := \max(x, y) - \min(x, y),$$
$$x \odot y := \min(x, y)$$

对所有 $x, y \in [0, 1]$，并令 $a, b \in [0, 1]$。则有如下结论：

(i) $a \oplus b = b \oplus a$, (ii) $(a \odot b \oplus 1) \odot (a \oplus 1) \oplus 1 = a$, (iii) $\big(($
$a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1\big) \odot a = a \odot b$ 当且仅当 $b \geq \min(a, 1-a)$, (iv) $a \odot b \oplus$
$(a \oplus 1) = (a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1$ 当且仅当 $a \in \{0,1\}$ 或 $b = 0$, (v)
$a \oplus b = a \odot (b \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \odot b$。

注记 4.7。(i)–(v) 中的等式恰好对应恒等式 (R1)–(R5)。

引理 4.6 的证明。

(i) $a \oplus b =$ 最大值$(a,b) -$ 最小值$(a,b) =$ 最大值$(b,a) -$ 最小值$(b,a) = b \oplus a$
(ii) $(a \odot b \oplus 1) \odot (a \oplus 1) \oplus 1 = 1 -$ 最小值 $\big(1 -$ 最小值$(a,b)\ 1-a\big) =$ 最大值(最小值$(a,b)\ a) = a$

(iii) 若 $b \geq a$ 则

$$\big((a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1\big) \odot a = \min\big(1 - \min(1-a, a), a\big) = \min\big(\max(a, 1-a), a\big) = \\ = a = \min(a,b) = a \odot b.$$

若 $b < a$ 且 $b \geq 1-a$ 则

$$\big((a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1\big) \odot a = \min(b,a) = \min(a,b) = a \odot b.$$

最后，如果 $b < a$ 和 $b < 1-a$，那么

$$\big((a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1\big) \odot a = \min(1-a, a) > b = \min(a,b) = a \odot b.$$

(iv) 由于

$$a \odot b \oplus (a \oplus 1) = \max\big(\min(a,b), 1-a\big) - \min\big(\min(a,b), 1-a\big) = \\ = \max\big(\min(a,b), 1-a\big) - \min(a, b, 1-a)$$

and

$$(a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1 = 1 - \min\big(1 - \min(a,b), a\big) = \max\big(\min(a,b), 1-a\big),$$

$a \odot b \oplus (a \oplus 1) = (a \odot b \oplus 1) \odot a \oplus 1$ 当且仅当 $\min(a, b, 1-a) = 0$ 这意味着$a \in \{0,1\}$ 或 $b = 0$。

(v) 如果 $a \leq 1-b$，那么

$$a \oplus b = \max(a,b) - \min(a,b) = \\ = \max\big(\min(a, 1-b), \min(1-a, b)\big) - \min\big(\min(a, 1-b), \min(1-a, b)\big) = \\ = a \odot (b \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \odot b.$$

如果 $a \geq 1-b$，那么

$$a \oplus b = \max(a,b) - \min(a,b) = 1 - \min(a,b) - \big(1 - \max(a,b)\big) = \\ = \max(1-b, 1-a) - \min(1-b, 1-a) = \\ = \max\big(\min(a, 1-b), \min(1-a, b)\big) - \min\big(\min(a, 1-b), \min(1-a, b)\big) = \\ = a \odot (b \oplus 1) \oplus (a \oplus 1) \odot b.$$

□

现在我们可以证明最终结果。

定理 4.8。对于 Q $=(Q,\oplus,\odot,0,1)$，以下结论成立：

(i) Q 是一个特定的近RLSE；(ii) Q 关于函数的 $\leq$ 序是一个 GFE，

(iii) 以下命题等价：

(a) $Q\subseteq\{0,1\}^S$，(b) Q 满足恒等式（R3），(c) Q 满足恒等式（R4），(d) Q 是一个 RLSE，(e) Q 是一个布尔环。

证明。设 $p,q\in Q$。

(i) 由引理 4.6 立即得出。

(ii) 若 $p\perp q$（相对于 $\leq$，并非在 RLSE 的意义上），则 $p\leq 1-q$，因此

$$p+q=1-(1-q-p)=1-\big(\max(p,1-q)-\min(p,1-q)\big)=\big(p\oplus(q\oplus 1)\big)\oplus 1\in Q.$$

(iii) (a)–(d) 的等价性可直接由引理 4.6 得出 .

$\big(\text{(a) and (d)}\big)\Rightarrow\text{(e)}$:
利用引理 4.5，我们得到

$$p\odot(q\oplus 1)=p(1-q)=p-pq=pq+p-2pqp=p\odot q\oplus p$$

根据推论 2.8，这等价于 (e)。(e) $\Rightarrow$(d)：
这早已是众所周知的。

□

参考文献

[1] E. G. Beltrametti、D. Dorninger 和 M. J. M˛aczy´nski，《经典与非经典事件系统的密码学刻画》。《数学物理报告》60 (2007)，117–123。

[2] E. G. Beltrametti 和M. J. M˛aczy´nski，《经典与非经典概率的刻画》。《数学物理学杂志》32 (1991)，1280–1286。

[3] E. G. Beltrametti 和 M. J. M˛aczy´nski，《概率的刻画：贝尔不等式的推广》。《数学物理学杂志》34（1993），4919–4929。

[4] I. Chajda、G. Eigenthaler 和 H. L¨anger，《普遍代数中的同余类》。Heldermann，莱姆戈，2012年。ISBN 3-88538-226-1。[5] G. Dorfer、D. Dorninger 和 H. L¨anger，《数值事件空间的结构》。Kybernetica 46（2010年），971–981。[6] G. Dorfer、D. Dorninger 和 H. L¨anger，《多维概率的代数》。Math. Slovaca 60（2010年），571–582。[7] D. Dorninger，《广义事件域的结构》。Contr. General Algebra 20（2012年），29–34。[8] D. Dorninger 和 H. L¨anger，《正交模偏序集的布尔子集札记》。Ital. J. Pure Appl. Math. 32（2014年），277–282。[9] D. Dorninger 和 H. L¨anger，《格序数值事件的环状结构》。Asian-Eur. J. Math. 14（2021年），2150186-1 - 2150186-10。[10] D. Dorninger、H. L¨anger 和 M. M˛aczy´nski，《与量子逻辑相关的具有唯一对称差的环状结构》。Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. 21（2001年），239–253。[11] D. Dorninger、H. L¨anger 和 M. J. M˛aczy´nski，《数值事件的布尔性质与贝尔型不等式》。Rep. Mat. Phys. 85（2020年），147–162。[12] G. Kalmbach，《正交模格》。Academic Press，伦敦，1983年。ISBN 0-12- 394580-1。[13] M. J. M˛aczy´nski 和 T. Traczyk，《对具有完备状态集的正交模偏序集的刻画》。Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. 21（1973年），3–8。

作者地址：
Dietmar Dorninger 维也纳工业大学 数学与地理信息学院 离散数学与几何研究所 Wiedner Hauptstraße 8-10 维也纳1040 奥地利
dietmar.dorninger@tuwien.ac.at

Helmut L¨anger 维也纳工业大学 数学与地理信息学院 离散数学与几何研究所 Wiedner Hauptstraße 8-10 维也纳1040 奥地利，以及
帕拉茨基大学奥洛穆茨 理学院

代数与几何系 11月17日街12号 771
46 奥洛穆茨 捷克共和国
helmut.laenger@tuwien.ac.at