arXiv:2301.07212v1 [math.SP] 17 Jan 2023

关于具有周期分布系数的一阶方程组的谱理论

Kevin Campbell 和 Rudi Weikard

In memory of Sergey Nikolaevich Naboko (1950–2020)

摘要 我们为微分方程一阶系统 $u' = ru$ 建立了一个 Floquet定理，其中 r 是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素是零阶周期分布。随后，我们研究当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时，方程 $Ju' + qu = wf$ 在 $\mathbb{R}$ 上的谱理论，其中 J 是一个实常数可逆斜对称矩阵，而 q 和 w 是周期矩阵，其元素为实零阶分布，且 q 对称、 w 非负。

1 引言

周期结构和周期现象一直在科学和数学中发挥着重要作用。1883 年，Floquet [4] 给出了具有周期系数的 m 阶齐次微分方程解的标准形式。后来，人们发现他的结果对于理解相关的谱理论至关重要。如今，即使在稍为一般的情形下，这类结果也已成为经典：一阶系统 $u' = Au$ 具有周期局部可积矩阵 A。关于这些问题有许多优秀的资料，但我们从 Eastham [3]以及 Brown 、 Eastham 、 Schmidt [1]所著的书中获益最多。这两本书都列有详尽的参考文献，便于进一步了解这一主题。

在本文中，我们通过允许微分方程的系数为零阶周期分布，推广了一些经典结果。

Kevin Campbell 阿拉巴马大学伯明翰分校数学系，阿拉巴马州伯明翰，邮编 35294，美国，电子邮箱： campke@uab.eduRudi Weikard 阿拉巴马大学伯明翰分校数学系，阿拉巴马州伯明翰，邮编 35294，美国，电子邮箱： weikard@uab.edu

零阶。[1] 在第 2 节中，我们回顾分布的周期性概念，并陈述其最重要的性质。这包括零阶分布与测度之间的关系。在第 3 节中，我们陈述并证明 Floquet 定理的推广。在第 4 节中，我们回顾分布系数情形下谱理论的一些基本事实。这些内容取自 Ghatasheh 和 Weikard [5]，其中还可找到关于该主题历史与背景的更多信息。在第 5 节和第 6 节中，我们分别专门讨论一阶系统和二阶系统。第 7 节中简要介绍了一些简单例子。

我们以几句话说明记号，为本引言作结。定义在 $\mathbb{R}$ 上的局部有界变差复值函数集合记为 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$。任意 $f \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 都有右极限和左极限，分别记为 $f^{\pm}$。我们还用 $f^{\#}$ 表示函数 $(f^{+}+f^{-})/2$，并称其为平衡的。与这类函数相对应，我们有 $\mathrm{BV}^{\pm}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{BV}^{\#}{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 这两个 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 的子空间。恒等算子记为 $\mathbb{I}$，而 χ_E 是与集合 E相对应的示性函数。函数 $R \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 至少在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上生成一个复测度 dR。相应的全变差测度记为 $|dR|$。特别地，对于勒贝格测度，我们使用符号 dx，并将符号 x 视为恒等函数。我们常用 $\int f$ 代替 $\int f dx$；也就是说，若积分未明确指定测度，则可默认积分是相对于勒贝格测度进行的。同样，若未指定积分范围，则积分是在整个实轴上进行。

2 周期分布的基本性质

分布 r 是定义在测试函数集合上的线性泛函，也就是说，它作用于从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$的紧支撑无穷次可微函数，并满足以下性质：对于每个紧子集 K，存在数 $C \geq 0$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$，使得

$$|r(\phi)| \leq C \sum_{j=0}^{k} \|\phi^{(j)}\|_{\infty} \tag{1}$$

只要 ϕ 是一个支撑包含于 K中的测试函数，

例如，若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 固定，则由 δ_{x_0} 定义狄拉克分布：$\phi \mapsto \phi(x_0)$。此外，对于任意 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(dx)$，分布 $\mathfrak{f}$ 由 $\phi \mapsto \int f(x)\phi(x)dx$ 定义。下文我们通常遵循一种广为采用的惯例，即

[1] 回顾一下，零阶分布是局部有界变差函数的分布导数，因此在 $\mathbb{R}$的紧子区间上，可以将其视为测度。为简单起见，下文中我们有时会用“测度”一词代替“零阶分布”。

对 $\mathfrak{f}$ 和 f 使用相同的符号。具体含义由上下文区分。

若定义 $r'(\phi) = -r(\phi')$，则可知 r' 仍是一个分布，称为 r的导数。分布也有原函数，下面给出一个重要引理。

引理 2.1（杜布瓦-雷蒙）。设分布 r 的导数为零，则 r 是常值分布，即存在一个复数 C，使得对每个测试函数 ϕ，都有 $r(\phi) = C\int \phi$。

若对每个测试函数 ϕ都有 $r(\phi) = r(\phi(\cdot + \omega))$，则称数 $\omega \in \mathbb{R}$ 为分布 r的一个周期。若分布 r 有一个非零周期 ω，则称其为周期的（或更具体地说，是 ω-周期的）。当然，0 是任意分布的周期。

定理 2.2. 周期分布 r 具有以下性质：

1. 若 ω_1 和 ω_2 是 r的周期，则 $\omega_1 \pm \omega_2$也都是其周期。2. 若 ω 是 r的周期，则 ω 的任意整数倍也都是周期。3. 若 r 是常值，则所有实数都是 r的周期。4. 若 r 的周期集合有一个有限极限点，则 r 为常值。5. r 的正周期集合的下确界 ω_0 本身也是一个周期。若$\omega_0 > 0$，则 r 的每个周期都是 ω_0的整数倍。此时，周期 ω_0 称为 r的基本周期。6. 若 R 是 r的一个原函数，则存在一个复数 α 和一个与 r具有相同周期的周期分布 P，使得 $R(\phi) = \alpha\int x\phi(x)\,dx + P(\phi)$。

证明。（1）–（3）显然成立。

为证明（4），首先注意到 0 也必定是r的周期的一个聚点。我们证明 $r' = 0$，因为由此即可根据杜布瓦-雷蒙引理得出我们的结论。设 ω 是 r 的一个周期，且 $0 < \omega < 1$，并令 ϕ 为一个测试函数。取一个紧区间 K，使得 ϕ 和 ϕ（$\cdot + \omega$）的支集均包含在 K中。于是

$$0 = \frac{r(\phi(\cdot + \omega)) - r(\phi)}{\omega} = r\left(\frac{\phi(\cdot + \omega) - \phi}{\omega}\right)$$

因此，对于适当的数 C 和 k,

$$|r'(\phi)| = |r(\phi')| = |r(\psi)| \leq C\sum_{j=0}^{k} \|\psi^{(j)}\|_\infty$$

其中

$$\psi = \frac{\phi(\cdot + \omega) - \phi}{\omega} - \phi'.$$

两次应用中值定理，得到

$$\psi^{(j)}(x) = \phi^{(j+1)}(c) - \phi^{(j+1)}(x) = (c - x)\phi^{(j+2)}(\tilde{c})$$

对于某个 $c \in (x, x+\omega)$ 和某个 $\tilde{c} \in (x, c)$。因此 $|r'(\phi)| \leq C(k+1)M\omega$其中 $M = \max\{\|\phi^{(j+2)}\|_\infty : 0 \leq j \leq k\}$。由于 ω 可以任意小，我们得到 $r'(\phi) = 0$；又由于 ϕ 是任意的，便得到 $r' = 0$，如前所述。

当下确界 ω_0 为 0 时，性质 (5) 显然成立，因此假设它不为 0。于是 r 不是常数，而前面的结果表明，ω_0 不是正周期集合的极限点。相反，它本身必定是一个周期。现在假设 ω 是 r 的任意另一个周期。那么，对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，有 $\omega = n\omega_0 + b$，并且 $b \in [0, \omega_0)$。由于 b 也是一个周期，它必定等于 0。

最后，对于性质 (6)，首先由杜布瓦-雷蒙引理以及 r 的周期性可得，对于某个数 C，$R(\phi(\cdot + \omega)) - R(\phi) = C\int \phi$。现在定义分布 P 如下：

$$P(\phi) = R(\phi) + \frac{C}{\omega}\int x\phi(x)dx.$$

由于 $\int x\phi(x+\omega)dx = \int (x-\omega)\phi(x)dx$，我们发现 P 是周期的。因此，令 $\alpha = -C/\omega$，即可得出所述结论。

注 2.3. 若函数 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(dx)$ 满足：对于几乎所有（相对于勒贝格测度）$x \in \mathbb{R}$，$f(x+\omega) = f(x)$，则称其为以 ω 为周期的周期函数。如前所述，这样的函数可通过令$\mathfrak{f}(\phi) = \int f\phi$ 为任意测试函数 ϕ，从而导出一个分布 $\mathfrak{f}$。由于

$$\mathfrak{f}(\phi(\cdot+\omega)) = \int f\phi(\cdot+\omega) = \int f(\cdot-\omega)\phi = \int f\phi = \mathfrak{f}(\phi)$$

我们看到，$\mathfrak{f}$ 是一个周期分布，其周期与 f相同。

以下我们只讨论零阶分布，即无论 K 如何，都可以在不等式 (1) 中取 $k = 0$ 的那些分布。它们与局部有界变差函数密切对应。具体而言，若 $R \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，则它在 $\mathbb{R}$ 的紧子集上生成一个（博雷尔）测度 dR。因此，$\phi \mapsto \int \phi dR$ 是一个零阶分布；事实上，它是分布 $\phi \mapsto \int R\phi dx$ 的导数。反过来，若 r 是一个零阶分布，那么黎斯表示定理表明，存在函数 $R \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，使得 $r(\phi) = \int \phi dR$。为简洁起见，我们将经常把分布 r 与局部测度 dR视为同一对象。我们也将 r 的原函数与相应的 $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ 函数 R视为同一对象。特别地，我们交替使用记号 $r(\phi)$、$\int r\phi$和 $\int \phi dR$。

若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(|dR|)$ 且 r 是 0 阶分布，我们可以通过如下定义 r 与 f（或 f 与 r）的乘积：

$$\phi \mapsto (rf)(\phi) = (fr)(\phi) = \int f\phi dR = \int rf\phi.$$

rf 又是一个 0 阶分布。

计算积分时，我们需要用到以下换元法则。

引理 2.4. 设 (a,b) 和 (α,β) 是实区间，且 $R\colon(\alpha,\beta)\to\mathbb{C}$是左连续且有界变差的。若 $T\colon(a,b)\to(\alpha,\beta)$ 连续且为双射（因此严格单调），则 $R\circ T\colon(a,b)\to\mathbb{C}$也左连续且有界变差。此外，若 $g\in L^1(|dR|)$，则

$$\int g\,dR=\pm\int g\circ T\,d(R\circ T)$$

其中，如果 T 严格递增，则应选择正号；如果它严格递减，则应选择负号。

在周期分布的背景下，这个引理有如下推论。

定理 2.5. 设 w 是周期为 ω 的零阶周期分布，且 $f\in L^1(|w|)$。那么 $\int wf=\int wf(\cdot+\omega)$。

证明. 令 $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon x\mapsto x+\omega$，并令 W 为 w 的原函数。注意，根据定理 2.2 的性质 (6)，对于某个（局部有界变差的）周期函数 P，有 $W(x)=\alpha x+P(x)$。于是 $W(T(x))=W(x)+\alpha\omega$，从而 $dW=\alpha+dP=d(W\circ T)$。

3 弗洛凯理论

本节将为微分方程建立一套 Floquet 理论

$$u'=ru$$

其中 r 是一个 $n\times n$ 矩阵，其各项均为零阶周期分布，且具有共同周期 ω（此时称 r 为周期为 ω 的周期分布）。我们在局部有界变差的平衡 $\mathbb{C}^n$ 值函数中寻求解。

定理 3.1. 假设 u 是一个平衡的局部有界变差函数，且满足 $u'=ru$。若 v 由 $v(x)=u(x+\omega)$ 定义，则还有 $v'=rv$。

证明. 令 $T(x)=x-\omega$，取 ϕ 为测试函数，并设 $\psi=\phi\circ T=\phi(\cdot-\omega)$。由此及定理 2.5 得

$$(rv)(\phi)=\int rv\phi=\int r(v\phi)\circ T=\int ru\psi=(ru)(\psi).$$

此外，根据勒贝格测度的平移不变性，

$$v'(\phi)=-\int v(x)\phi'(x)dx=-\int u(x)\psi'(x)dx=u'(\psi).$$

由于最右侧的表达式相同，最左侧的表达式也相同。

因此，将 $u(\cdot+\omega)$ 赋给 u 的算子是一个从 $u'=ru$ 的解空间映射到其自身的映射。它称为单值算子。

例子 $r=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k$ 和 $r=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\delta_{2k+1}-\delta_{2k})$分别是周期为 1 和 2 的周期分布，它们表明 $u'=ru$ 的解空间未必是 n维的。事实上，前一种情况下解空间是平凡的，而后一种情况下解空间是无限维的。这是因为这些方程的初值问题存在唯一性定理不再成立。

接下来，我们定义矩阵 $\Delta_r(x)=R^+(x)-R^-(x)$，并提出以下假设。

假设 3.2。令 $\omega>0$。假设 r 是一个由 ω-周期零阶分布构成的 $n\times n$ 矩阵，并且对每个 $x\in\mathbb{R}$，矩阵 $\mathbb{I}\pm\frac{1}{2}\Delta_r(x)$ 都可逆。

文献 [5] 已证明，在此假设下，初值问题的平衡解存在且唯一。由此立即可知，$u'=ru$ 的解空间是 n 维的，因此存在一个解的基本矩阵 U。对任意 $x\in\mathbb{R}$，$U(x)$ 的行列式均不为 0。定理 3.1 表明，$U(\cdot+\omega)$ 也是一个解的基本矩阵。因此，存在一个常矩阵 M，使得

$$U(x+\omega)=U(x)M.$$

称矩阵 M 为单值矩阵，它取决于 U 的选取。若 V 是另一个解的基本矩阵，且对于一个常数可逆矩阵 $\tilde{}$，有 $V=US$，而 M 是相应的单值矩阵，则 $M=S\tilde{M}S^{-1}$，即 M 和 $\tilde{M}$ 是相似矩阵。特别地，它们具有相同的特征值。

根据线性代数，我们知道可以选择 S 使得 $\tilde{M}$ 是一个分块对角矩阵，其对角块称为 Jordan 块，是如下形式的方阵：

$$\tilde{M}_k=\begin{pmatrix}\rho_k&1&0&\cdots&0\\0&\rho_k&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\rho_k&1\\0&0&\cdots&0&\rho_k\end{pmatrix}.$$

这里，ρ_k 是 M（以及 M）的一个特征值，因此非零。若 Jordan 块的个数为 s，其大小分别为 μ_k、$k=1$、...、s，那么显然有 $\sum_{k=1}^{s}\mu_k=n$。

定理 3.3. 假设 r 满足假设 3.2。微分方程$u'=ru$ 具有如下形式的基本解系

$$\mathrm{e}^{\alpha_k x}\sum_{j=0}^{\ell} q_{k,j}(x)p_{k,\ell-j}(x) \ \ for\ \ell=0,...,\mu_k-1\ \ and\ k=1,...,s$$

其中 $\mathrm{e}^{\alpha_k\omega}=\rho_k$, $q_{k,0}(x)=1$, $q_{k,j+1}(x)=q_{k,j}(x)\frac{x-j\omega}{(j+1)\rho_k\omega}$，且 $p_{k,j}$ 是平衡的、周期的 $\mathbb{C}^n$ 值函数，其周期为 ω。

证明。我们改写 Hochstadt 在 [6] 中的证明，该证明避免引入 M的对数。[2] 设 v_m 为 V的第 m列，其中 V是单值矩阵处于 Jordan 标准形的基本矩阵。存在唯一的数 $k\in\{1,...,s\}$ 和 $\ell\in\{0,...,\mu_k-1\}$ 使得 $m=1+\ell+\sum_{h=1}^{k-1}\mu_h$。令 $m_0=1+\sum_{h=1}^{k-1}\mu_h$。接下来我们将对 ℓ进行归纳证明，存在 ω-周期函数 $p_{k,j}$ 使得

$$v_{m_0+\ell}(x)=\mathrm{e}^{\alpha_k x}\sum_{j=0}^{\ell} q_{k,j}(x)p_{k,\ell-j}(x) \tag{2}$$

对于 $\ell=0,...,\mu_k-1$。若 $\ell=0$，定义 $p_{k,0}$，使其满足 $p_{k,0}(x)=v_{m_0}(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha_k x}$。那么恒等式 $v_{m_0}(x+\omega)=\rho_k v_{m_0}(x)$ 表明 $p_{k,0}$ 是 ω-周期的，也就是说，v_{m_0}具有所需的形式。现在假设对于 $\ell=0,...,r-1$，结论 (2) 已经成立，包括 $p_{k,0},...,p_{k,r-1}$ 的周期性，其中某个 $0<r<\mu_k$ 成立。令 $\ell=r$，并注意到 $v_{m_0+\ell}$ 定义了尚未确定的函数 $p_{k,\ell}$。现在只需证明 $p_{k,\ell}$ 是 ω-周期的。由于 $v_{m_0+\ell}(x+\omega)-\rho_k v_{m_0+\ell}(x)-v_{m_0+\ell-1}(x)=0$，利用 $p_{k,0},...,p_{k,\ell-1}$的周期性，我们得到

$$p_{k,\ell}(x+\omega)-p_{k,\ell}(x)=\sum_{j=1}^{\ell}\left(\frac{1}{\rho}q_{k,j-1}(x)+q_{k,j}(x)-q_{k,j}(x+\omega)\right)p_{k,\ell-j}(x).$$

对于我们所选的多项式 $q_{k,\,j}$ 通过归纳可知，右侧的每一项均为 0，从而证明了 $p_{k,\,\ell}$的周期性。

单值矩阵的特征值 ρ_k 称为 Floquet 乘子，而数值 α_k 称为弗洛凯指数。相应的（广义）特征函数称为 $u'=ru$的（广义）弗洛凯解。

4 谱理论

本文的主要目标是研究与周期的一阶 2×2微分方程组相关的谱理论。为此，我们将回顾 [5] 和 [2]中的一些基本定义和结果。

若 w 是一个非负的 $n\times n$ 矩阵，且其元素为零阶分布，则 $\mathrm{tr}\,w$ 表示一个正标量测度。我们用 $\mathcal{L}^2(w)$ 表示以下函数的集合

[2] Hochstadt 的推理似乎存在一个缺陷，我们曾试图绕开这一问题。

: 其取值于 $\mathbb{C}^n$，且分量关于 $\mathrm{tr}\ w$ 可测，并满足 $\|f\|^2 = \int f^* w f < \infty$。那么 $L^2(w)$ 表示相应的希尔伯特空间，即 $\mathcal{L}^2(w)$ 关于 $\|\cdot\|$ 的核的商空间。当然， $L^2(w)$ 的内积由 $\langle f, g\rangle = \int f^* w g$ 给出。现在考虑微分方程

$$Ju' + qu = wf \tag{3}$$

其中 J 是一个常数、可逆的斜厄米 $n \times n$ 矩阵，而 q 是一个厄米 $n \times n$ 矩阵，其元素为零阶分布。定义线性关系

$$\mathcal{T}_{\max} = \{(u, f) \in \mathcal{L}^2(w) \times \mathcal{L}^2(w) : u \in \mathrm{BV}^{\#}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})^n, Ju' + qu = wf\}$$

and

$$\mathcal{T}_{\min} = \{(u, f) \in \mathcal{T}_{\max} : \operatorname{supp} u \text{ is compact in } \mathbb{R}\}.$$

然后，在希尔伯特空间框架下，我们用以下关系表示微分方程

$$T_{\max} = \{([u], [f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u, f) \in \mathcal{T}_{\max}\}$$

and

$$T_{\min} = \{([u], [f]) \in L^2(w) \times L^2(w) : (u, f) \in \mathcal{T}_{\min}\}.$$

谱理论的基石是如下结果： $T^*_{\min} = T_{\max}$，即 $T_{\min}$ 是一个对称关系（见 [2]）。因此，我们有

$$T_{\max} = \overline{T_{\min}} \oplus D_{\mathrm{i}} \oplus D_{-\mathrm{i}}$$

其中 D_λ 定义为 $\{(u, \lambda u) \in T_{\max}\}$。当 $\lambda \notin \mathbb{R}$ 时，这些称为亏格空间。数值 $n_\pm = \dim D_{\pm \mathrm{i}}$ 称为亏指数。需要注意的是，只要 λ 在复平面的上半部或下半部变化，$\dim D(\lambda)$ 就与 λ 无关。亏指数是有限的（见 [7]）；若二者相同，则存在 $T_{\max}$ 的自伴限制（可能就是 $T_{\max}$ 本身）。

即使在常系数的情形下，也会出现两个复杂情况。首先，空间 $\mathcal{L}_0 = \{u : Ju' + qu = 0 \text{ 和 } wu = 0\}$ 可能是非平凡的（请注意， $wu = 0$ 当且仅当 $\|u\| = 0$）。若出现这种情况，该问题称为非定型。另一个问题是，正如我们引入线性关系时已暗示的那样， $T_{\max}$ 确实可能不是线性算子。

若 T 是 $T_{\max}$ 的一个自伴限制，则将 T的预解集定义为

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda) = \{0\}, \operatorname{ran}(T - \lambda) = L^2(w)\}$$

T 关于 $\sigma(T) = \varrho(T)^{\mathrm{c}}$ 的谱，即 $\varrho(T)$ 的补集。对于 $\lambda \in \varrho(T)$，关系 $(T - \lambda)^{-1}$ 实际上是一个从 $L^2(w)$ 到 T 的定义域的线性算子。

定义空间 $\mathcal{H}_\infty = \{f \in L^2(w) : (0,f) \in T\}$，并令 $\mathcal{H}_0$ 为其正交补。那么， T 的定义域是 $\mathcal{H}_0$ 的稠密子集；若 $(u,f) \in T$，则显然 $f = f_0 + f_\infty$，其中 $f_0 \in \mathcal{H}_0$ 且 $f_\infty \in \mathcal{H}_\infty$。但是，由于 $(0,f_\infty)$ 属于 T，所以 (u,f_0) 也属于其中。由于 f_0 由 u 唯一确定，因此 $T_0 = T \cap (\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0)$ 是一个稠密定义的自伴线性算子，称为 T 的算子部分。特别地， $\mathcal{H}_0 = \{0\}$ 当且仅当 T 的谱为空集。

5 情形 $n = 1$

假设 5.1. 本节中，我们假设 ω 是正实数， J 是非零纯虚数。此外， q 是 0 阶实分布，而 w 是非负但非零的 0 阶分布。 q 和 w 都是周期为 ω 的周期分布。

当 λ 和 x 属于 $\mathbb{R}$ 时，数

$$B_\pm(x,\lambda) = J \pm \frac{1}{2}(\Delta_q(x) - \lambda \Delta_w(x))$$

的虚部与 J 的虚部相同，因而非零。因此， $n = 1$ 满足假设 3.2。

令 $U(\cdot,\lambda)$ 为齐次方程 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的唯一解，满足初始条件 $U^+(0,\lambda) = 1$。那么， $\rho(\lambda) = U^+(\omega,\lambda)$ 是 Floquet 乘子。因此，只要 $n \in \mathbb{Z}$，就有 $U(x + n\omega, \lambda) = \rho(\lambda)^n U(x,\lambda)$。回忆引理 3.2 中的结论： [5]

$$U^+(x,\overline{\lambda})^* J U^+(x,\lambda) = U^-(x,\overline{\lambda})^* J U^-(x,\lambda) = J.$$

因此 $U^+(x,\overline{\lambda})^* U^+(x,\lambda) = 1$，特别是 $\rho(\overline{\lambda})\rho(\lambda) = \overline{1}$。

定理 5.2. 假设假设 5.1 成立。那么，线性关系 $T_{\max}$ 是自伴的。其谱是纯连续谱，且充满整个实数轴。

证明. 固定 λ 属于 $\mathbb{C}$，并注意到 $\rho(\lambda) \neq 0$。利用定理 2.5，我们对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 得到，

$$\int_{[n\omega,(n+1)\omega)} |U(\cdot,\lambda)|^2 w = |\rho(\lambda)|^{-2n} \int_{[0,\omega)} |U(\cdot,\lambda)|^2 w.$$

因此

$$\|U(\cdot,\lambda)\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\rho(\lambda)|^{-2n} \int_{[0,\omega)} |U(\cdot,\lambda)|^2 w$$

只有当 $w = 0$ 时，该值才是有限的；但这种情况因平凡而已被排除。因此， $T_{\max}$ 不可能有任何 λ 作为特征值，也就是说，亏格空间是平凡的，且 $T_{\max}$ 是自伴的。

现在假设 λ 是实数。由于 $\rho(\overline{\lambda})\overline{\rho(\lambda)} = 1$ ，这表明 $|\rho(\lambda)| = 1$。由此可知， λ 属于所谓的稳定集 S，即使得 $U(\cdot,\lambda)$ 有界的那些 λ 所构成的集合。我们将证明 $S \subset \sigma$ 是 $T_{\max}$ 的谱。然后

$$\mathbb{R} \subset S \subset \sigma \subset \mathbb{R}$$

这意味着 $S = \sigma = \mathbb{R}$。

因此现在假设 $\lambda \in S$，并且反设它也属于 $T_{\max}$ 的预解集。如果我们能构造一个序列 $n \mapsto (\phi_n, \lambda\phi_n + f_n) \in T_{\max}$ ，使得 $\|\phi_n\| = 1$ 且 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$，那么 $\phi_n = R_\lambda f_n$。由于 R_λ（即 $T_{\max}$ 在 λ 处的预解算子）有界，[3]，我们得到 $1 = \|\phi_n\| \leq \|R_\lambda\|\|f_n\| \to 0$，这就产生了矛盾。

让我们在 $T_{\max}$ 中构造所需的序列。由于 λ 固定，在本证明过程中，我们将直接用 U 代替 $U(\cdot,\lambda)$。令 W 为 w 的左连续原函数，且在 0 处取值为零。对于 $n \in \mathbb{Z}$ ，令 $I_n = (n\omega, (n+1)\omega]$ ，并对 $n \in \mathbb{N}$ 定义

$$h_n = (W + (n+1)W(\omega))\chi_{I_{-n-1}} + W(\omega)\chi_{(-n\omega,n\omega]} - (W - (n+1)W(\omega))\chi_{I_n}$$

以及 $\phi_n = a_n(h_nU)^{\#}$ ，其中数 a_n 的选取满足 $\|\phi_n\| = 1$。注意，函数 h_n 左连续，即 $h_n = h_n^-$。

回忆局部有界变差函数的乘积法则，即 $(fg)' = f^+g' + f'g^- = f^-g' + f'g^+$。因此 $\phi_n' = a_nh_n'U^+ + a_nh_nU'$。由于 $(h_nU)^{\#} = h_nU + \frac{1}{2}(h_n^+ - h_n^-)U^+$，我们得到

$$\begin{aligned} &J\phi_n' + (q - \lambda w)\phi_n \\ &\qquad = a_nh_n(JU' + (q - \lambda w)U) + a_n\big(Jh_n' + \frac{1}{2}(q - \lambda w)(h_n^+ - h_n^-)\big)U^+. \end{aligned}$$

右侧的第一项为 0，第二项则是在 $I_{-n-1} \cup I_n$ 的闭包上支撑的一个测度。更准确地说，对于 ，有 $h_n' = w\chi_{[-n-1,-n)} - w\chi_{[n,n+1)}$，
$h_n^+\ x\ - h_n^-\ x\ = \Delta_w\ x \qquad x \in [-n-1,-n \qquad h_n^+\ x\ - h_n^-\ x\ = -\Delta_w\ x\ (\ )\ (\ )\ (\ )$；对于 $x \in [n, n+1)$，有 ( ) ( ) ( )。现在注意到离散测度 $q\Delta_w$ 和 $\Delta_q w$ 相同，因此定义为

$$f_n = a_n(J + \frac{1}{2}(\Delta_q - \lambda\Delta_w))U^+(\chi_{[-n-1,-n)} - \chi_{[n,n+1)}).$$

由此可知，$(\phi_n, \lambda\phi_n + f_n)$ 是 $T_{\min} \subset T_{\max}$ 的一个元素。

接下来我们证明赋范常数 a_n 趋于 0。事实上，再次利用定理 2.5 以及 $|\rho(\lambda)| = 1$这一事实，

[3] 即使在关系的情形下，预解式也必然是一个算子。

$$\|\phi_n\|^2 \geq |a_n|^2 W(\omega)^2 \int_{[-n\omega, n\omega)} |U|^2 w = 2n|a_n|^2 C$$

其中 $C = W(\omega)^2 \int_{[0,\omega)} |U|^2 w$ 与 n 无关。因此，$|a_n| \leq 1/\sqrt{2nC}$。现在也显然可见，$\|f_n\|$ 趋于 0，由此证明完毕。

6 情形 $n = 2$，实系数

本节始终采用以下假设。

假设 6.1。2×2 矩阵 J 为实矩阵、斜厄米且可逆。2×2 矩阵 q 和 w 的元素均为零阶实分布，且 q 厄米（对称）并且 w 非负。q 和 w 均为 ω 周期的，其中 ω 是一个正实数。此外，矩阵

$$B_\pm(x, \lambda) = J \pm \frac{1}{2}(\Delta_q(x) - \lambda \Delta_w(x))$$

对所有 λ、$x \in \mathbb{R}$ 均可逆。

我们注意到，对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和所有 $\lambda \in \mathbb{C}$，均有 $\det B_+(x, \lambda) = \det B_-(x, \lambda)$。令 Λ 为所有满足以下条件的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的集合：存在某个 $x \in \mathbb{R}$，使得 $\det B_\pm(x, \lambda) = 0$。我们的假设保证 Λ 与 $\mathbb{R}$ 不相交，并且任意有限半径的圆盘内，Λ 只有有限多个元素。因此，Λ 是一个离散集。它关于实轴对称。更多细节请参见 [7]。

此外，我们对 J 的条件意味着 $J = r\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 对某个数 $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 成立。我们之所以将讨论限制在实数情形，是因为若 u 满足 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$，则 $v = \overline{u}$ 满足 $Jv' + (q - \overline{\lambda} w)v = 0$。特别地，若 $U(\cdot, \lambda)$ 对于 $\lambda \notin \Lambda$ 是 $Ju' + (q - \lambda w)u = 0$ ~~的一~~个基本矩阵，那么 $U(\cdot, \lambda)$ 就是 $Ju' + (q - \overline{\lambda} w)u = 0$ 的一个基本矩阵。因此，对于 $\lambda \in \mathbb{R}$，我们可以选择实值基本矩阵。此外，当 U_1 和 U_2 分别表示 U 的第一列和第二列时，$r \det U^\pm(\cdot, \lambda) = -U_1^\pm(\cdot, \overline{\lambda})^* J U_2^\pm(\cdot, \lambda)$。因此，[5] 中的引理 3.2 意味着 $\det U^+(\cdot, \lambda) = \det U^-(\cdot, \lambda)$ 是常数。于是，任何单值矩阵 $M(\lambda)$ 的行列式均为 1，进而 Floquet 乘子互为倒数。因此，Floquet 乘子可由它们的和，即 Floquet 判别式，唯一确定（相差一个转置）。

$$D(\lambda) = \operatorname{tr} M(\lambda).$$

注意，$\operatorname{tr} M(\lambda)$ 与 $\det M(\lambda)$ 一样，在相似变换下保持不变，也就是说，它与用于求得 $M(\lambda)$ 的具体基本矩阵无关。由于我们可以选择使 $U(\cdot, \lambda)$ 对 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为实数，因此可知此时 $D(\lambda)$ 也为实数。此外，根据 [5] 的定理 2.7，$U(x, \cdot)$ 的各个元素对于

$\mathbb{C}\setminus\Lambda$中的任意 $x\in\mathbb{R}$都是解析的。因此，Floquet判别式 D 也是解析的。

我们的首要目标是证明 $T_{\max}$ 不存在特征值。首先证明 Λ 中没有任何点可以是特征值。

定理 6.2. 若 $\lambda\in\Lambda$，则 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的任意解恒等于 0。

证明. 由于 $\lambda\in\Lambda$，存在一点 x_0，使得 $B_\pm(x_0,\lambda)$ 不可逆。当然，$x_0+\omega$ 也同样是这样的点。首先证明 $\operatorname{ran}B_+(x_0,\lambda)$ 与 $\operatorname{ran}B_-(x_0,\lambda)$ 仅在零向量处相交。为简便起见，将 $B_\pm(x_0,\lambda)$ 记为 $B_\pm$。B_+ 和 B_- 均不为 0。因此，存在两个向量 v_+ 和 v_-，分别张成它们的核。此外，$0\neq 2Jv_+=B_-v_+$ 和 $0\neq 2Jv_-=B_+v_-$。现在，反设且不失一般性地假设 $B_-v_+=B_+v_-$，则得到 $Jv_+=Jv_-$，这与 J 是单射相矛盾，并说明 $\operatorname{ran}B_+\cap\operatorname{ran}B_-=\{0\}$。

如果 u 满足方程 $Ju'+qu=\lambda wu$，则必有 $B_+(x_0,\lambda)u^+(x_0)=B_-(x_0,\lambda)u^-(x_0)$，因此根据上述结论，$B_\pm(x_0,\lambda)u^\pm(x_0)=0$。用同样的论证可得 $B_\pm(x_0+\omega,\lambda)u^\pm(x_0+\omega)=0$。由此可知，$v=(u\chi_{(x_0,x_0+\omega)})^\#$ 也是 $Ju'+qu=\lambda wu$的一个解，事实上还是一个有限范数解。若该范数为正，则会有一个 $T_{\min}$ 的复特征值，这是不可能的。因此 $wv=0$，于是 v 对所有 $\lambda\in\mathbb{C}$（包括 $\lambda=0$）也满足$Ju'+qu=\lambda wu$。然而，对于 $\lambda=0$，初值问题的解是唯一的。因此 $\mathcal{L}_0$ 是平凡解，而 u 恒等于 0。

引理 6.3。固定 $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$。对于 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的解 u 和 $n\in\mathbb{Z}$，定义

$$I_n(u)=\int_{[n\omega,(n+1)\omega)}u^*wu.$$

如果 $I_n(u)=0$ 对两个连续的非零整数成立，则 $\|u\|=0$。否则，u 的范数为无穷大。若在前一种情况下，u 不是弗洛凯解且不等于 0，那么 $Ju'+qu=\lambda wu$ 的所有弗洛凯解的范数也都为 0。

证明。首先假设我们有两个线性无关的弗洛凯解ψ_1 和 ψ_2，前者的乘子为 ρ，后者的乘子为 $1/\rho$。定义 $N_j^2=\int_{[0,\omega)}\psi_j^*w\psi_j$，其中 $N_j\geq 0$，且 $A=\int_{[0,\omega)}\psi_1^*w\psi_2$。注意到$|A|\leq N_1N_2$。如果 $u=\alpha\psi_1+\beta\psi_2$，我们得到

$$\begin{aligned}I_n(u)=|\alpha|^2|\rho|^{2n}N_1^2+2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\beta(\overline{\rho}/\rho)^nA)+|\beta|^2|\rho|^{-2n}N_2^2\\ \geq(|\alpha|N_1|\rho|^n-|\beta|N_2|\rho|^{-n})^2.\end{aligned}$$

若 $u=0$，则无需证明，因此我们可以假设 α 和 β 不同时为 0。若 α 和 β 中有一个为 0，则 u 是一个 Floquet 解，并且 $I_n(u)$ 要么全为 0，要么全为正数。相应地，$\|u\|=0$

或者 $\|u\| = \infty$。若 α 和 β 均不为 0，不妨设对于某个 $n \in \mathbb{Z}$，$I_n(u) = I_{n+1}(u) = 0$。这意味着 $N_1 = N_2 = 0$，或者 $|\rho| = 1$。在前一种情形下，$Ju' + qu = \lambda wu$ 的所有解的范数均为 0。在后一种情形下，我们有

$$I_n(u) = 2N^2(1 + \mathrm{Re}(z\rho^{-2n}))$$

其中我们令 $N = |\alpha|N_1 = |\beta|N_2 > 0$ 和 $z = \overline{\alpha}\beta A/N^2$。由于 $|z\rho^{-2n}| \le 1$和 $I_n(u) = I_{n+1}(u) = 0$，我们得到 $z\rho^{-2n} = z\rho^{-2n-2} = -1$，这意味着$\rho^2 = 1$。但这意味着 ψ_1 和 ψ_2 具有相同的 Floquet 乘子。因此，u 本身是一个弗洛凯解，且其范数必须为 0。

现在我们考虑只有一个线性无关的弗洛凯解的情形。此时 $\rho = \pm 1$，我们讨论 $\rho = 1$的情形；另一种情形类似。根据定理 3.3，$Ju' + qu = \lambda wu$的一般解为

$$u(x) = \frac{\alpha x}{\omega}\psi(x) + \alpha p(x) + \beta\psi(x),$$

其中 ψ 是一个弗洛凯解，p 是某个 ω-周期函数。我们仅考虑 $\alpha = 1$ 的情形，并定义 $\varphi = p + \beta\psi$，它是 ω-周期的。对于 $n \ge 1$，我们得到 $I_n(u) \ge (F_n - G)^2$，其中 $F_n^2 = \int_{[0,\omega)} (x+n\omega)_{\omega^2}{}^2 \psi^* w\psi$ 并且$G^2 = \int_{[0,\omega)} \cancel{\varphi^* w\varphi}$。现在，$I_n(u) = I_{n+1}(u) = 0$ 意味着 $F_n = G = F_{n+1}$，因此$0 = \int_{[0,\omega)}(2n+1+2x/\omega)\psi^* w\psi$。由此我们得出 $\psi^* w\psi = 0$，从而 $\|\psi\| = 0$、$F_n = G = 0$ 和 $\|u\| = 0$。

现在唯一尚待证明的是：一个范数不为 0 的解 u 具有无限范数。对于 Floquet 解，这一点已是已知的，因此我们假设 u 不是 Floquet 解。若要使 u 具有有限范数，必要条件是 $I_n(u)$ 在 n 趋于 ∞ 或 $-\infty$时趋于 0。因此，在存在两个线性无关的 Floquet 解的情况下，必要条件是 $|\alpha|N_1 = |\beta|N_2$ 且 $|z| = |\overline{\alpha}\beta A|/N^2 = 1$。此时我们有 $I_n(u) = 2N^2(1+\cos(t_0 + 2nt))$，其中令 $z = \mathrm{e}^{it_0}$ 和 $\rho = \mathrm{e}^{-it}$，其中某些 t_0、$t \in \mathbb{R}$。然而，序列$n \mapsto I_n(u)$ 只有在恒等于 0 时才会收敛到 0。如果只存在一个线性无关的 Floquet 解，且 u 不是 Floquet 解，那么除非 $F_n = G = 0$，否则$I_n(u)$ 不可能收敛到 0。

上一个引理的直接推论是下一个定理。

定理 6.4. 线性关系 $T_{\max}$ 没有特征值。特别地，它是自伴的。

引理 6.5. 固定 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$。令 B为向量 $\int U(\cdot,\overline{\lambda})^* wf$构成的集合，其中 f 取遍支集包含于 $[0, 2\omega)$ 的 $L^2(w)$ 中的函数。若 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的，则 $B = \mathbb{C}^2$。

证明。反设 B 的维数小于 2。由于 $B = \{0\}$会推出 $w = 0$，因此实际上 B 是一维的。将 B 中分别限制为仅支撑在 $I_1 = [0, \omega)$ 或 $I_2 = [\omega, 2\omega)$ 上的函数后得到的子空间记为 B_1和B_2，其中限制对象为 f。这两个子空间也都是一维的，因此 $B_1 = B_2 = B$。

选取支撑在 I_1 上的 $0 \neq \alpha \in B^\perp$ 和 $f \in L^2(w)$，利用定理 2.5 以及 w的周期性，得到

$$0 = \alpha^* \int_{I_2} U(\cdot, \overline{\lambda})^* w f(\cdot - \omega) = \alpha^* \int_{I_1} U(\cdot + \omega, \overline{\lambda})^* w f$$
$$= \alpha^* M(\overline{\lambda})^* \int_{I_1} U(\cdot, \overline{\lambda})^* w f.$$

这表明 $M(\overline{\lambda})\alpha$ 与 B_1 垂直，因此是 α 的倍数。因此，$u = U(\cdot, \overline{\lambda})\alpha$ 是 $Ju' + qu = \overline{\lambda} w u$ 的一个范数为 0 的弗洛凯解，即 $u \in \mathcal{L}_0$，这与我们的假设矛盾。

如果我们的问题是非定型的，那么 $T_{\max}$ 是一个特别简单的关系，正如下一个定理所示。

定理 6.6. 关系 $T_{\max}$ 等于 $\{0\} \times L^2(w)$ 的充要条件是 $\mathcal{L}_0 \neq \{0\}$。在这种情况下，$T_{\max}$ 的谱为空。

证明. 为证明必要性，假设 $T_{\max} = \{0\} \times L^2(w)$，并反设 $\mathcal{L}_0 = \{0\}$。对于任意支撑包含于 $[0, 2\omega)$ 的 $f \in L^2(w)$，存在一个局部有界变差函数 u，使得 $Ju' + qu = wf$ 且 $wu = 0$。在 $(-\infty, 0)$ 上，u 必须等于若干（广义）弗洛凯解的线性组合，我们将其记作 $\tilde{u}$。由于在引理 6.3 的术语中，$I_n(\tilde{u}) = 0$ 对所有负整数 n 都成立，且由于 $\mathcal{L}_0 = \{0\}$，实际上有 $\tilde{u} = 0$，从而 $u = 0$ 在 $(-\infty, 0)$ 上成立。类似地，我们可以证明 $u = 0$ 在 $[2\omega, \infty)$ 上成立。对于 $x > 0$，常数变易公式（见 [5] 中的引理 3.3）给出

$$u^-(x) = U^-(x, 0) J^{-1} \int_{[0,x)} U(\cdot, 0)^* w f.$$

特别是，$\int_{[0,2\omega)} U(\cdot, 0)^* w f = 0$无论 f 如何，都与引理 6.5 的结论相矛盾。

为证明充分性，我们首先注意到可以假设 $w \neq 0$，否则$L^2(w) = \{0\}$。一旦验证定理 7.3 在 [5] 中的假设成立，结论便随之得出。我们已经证明了 $n_\pm = 0$，并且显然 $0 < \dim \mathcal{L}_0 < 2$；前一个不等式由假设 $\mathcal{L}_0$ 非平凡得出，后一个则因为 $w \neq 0$。剩下要证明的是，对所有 $x \in \mathbb{R}$，$\ker \Delta_w(x) \subset \ker \Delta_w(x) J^{-1} \Delta_q(x)$。因此，固定 $x \in \mathbb{R}$，并令$\Delta_q(x) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$且 $\Delta_w(x) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \delta \end{smallmatrix}\right)$。若 $\Delta_w(x)$ 的秩为 0 或 2，则所需的包含关系显然成立。因此，我们假设 $\alpha\delta = \beta^2$，且这两个数中至少有一个非零。在这种情况下，$\det B_\pm(x, \lambda)$ 是关于 λ 的次数至多为 1 的实多项式。由于 $\det B_\pm(x, \cdot)$ 不得有实零点，可知 λ 的系数必须为 0，即 $a\delta + \alpha d = 2b\beta$。在此条件下，$\Delta_w(x) J^{-1} \Delta_q(x)$ 是对称的，因此等于$-\Delta_q(x) J^{-1} \Delta_w(x)$，这就证明了所需的包含关系，从而证明了引理。

关于最后一个断言，我们只需注意到 $T_{\max}$ 的算子部分是{([0], [0])}，它的谱为空。

现在将条件稳定集 S 定义为使方程 $Ju' + qu = \lambda wu$ 存在非平凡有界解的所有 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的集合。注意，定理 6.2 表明 S 和 Λ 不相交。因此，条件稳定集就是使单值矩阵 $M(\lambda)$ 具有绝对值为 1 的特征值的所有 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ 的集合。

引理 6.7. 若 λ 不属于 $S \cup \Lambda$，则 $M(\lambda)$ 有两个不同的特征值 $\rho_1 = \tilde{\mathrm{e}}^{m\omega}$ 和 $\rho_2 = \mathrm{e}^{-m\omega}$，其中 $m = \operatorname{Re} \tilde{m} > 0$。相应的特征函数$\psi_{1,2}$ 可选取为满足 $(\psi_1^{\pm})^{\top} J \psi_2^{\pm} = 1$。若对给定的 $f \in L^2(w)$，定义

$$u^-(x) = \psi_2^-(x) \int_{(-\infty, x)} \psi_1^{\top} w f + \psi_1^-(x) \int_{[x, \infty)} \psi_2^{\top} w f,$$

则 $u = u^{\#}$ 满足微分方程 $Ju' + qu = w(\lambda u + f)$。

证明。前两个结论由 [5] 中的定理 3.3 和引理 3.2 得出。

与之前一样，我们用 $B_{\pm}$ 代替 $B_{\pm}(\cdot, \lambda)$。由于 $\psi_j = (\psi_j^+ + \psi_j^-)/2$, $B_+ \psi_j^+ = B_- \psi_j^-$ 和 $B_+ + B_- = 2J$，我们关于 $\psi_{1,\ 2}$ 归一化的假设表明

$$B_+(\psi_2^+ \psi_1^{\top} - \psi_1^+ \psi_2^{\top}) = \mathbb{I}. \tag{4}$$

由于

$$u^+(x) = \psi_2^+(x) \int_{(-\infty, x]} \psi_1^{\top} w f + \psi_1^+(x) \int_{(x, \infty)} \psi_2^{\top} w f$$

由方程 (4) 得到 $B_+ u^+ - B_- u^- = \Delta_w f$，因此

$$J u^- = B_+ u^{\#} - \frac{1}{2} \Delta_w f. \tag{5}$$

现在回想一下，根据勒贝格–斯蒂尔杰斯测度的定义，u^- 和 u 的导数相同。因此，局部有界变差函数的乘积法则给出

$$Ju' = J\psi_2' \int_{(-\infty, \cdot)} \psi_1^{\top} w f + J\psi_1' \int_{[\cdot, \infty)} \psi_2^{\top} w f + J(\psi_2^+ \psi_1^{\top} - \psi_1^+ \psi_2^{\top}) w f.$$

利用恒等式 $J\psi_k' = (\lambda w - q)\psi_k = (\lambda w - q) B_+^{-1} J \psi_k^-$ 以及方程和 (5)，我 (4) 们现在得到

$$\begin{aligned} Ju' &= (\lambda w - q) B_+^{-1} J u^- + J B_+^{-1} w f \\ &= (\lambda w - q) u^{\#} + \frac{1}{2} (q - \lambda w) B_+^{-1} \Delta_w f + J B_+^{-1} w f. \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{2}(q-\lambda w)B_+^{-1}\Delta_w f=\frac{1}{2}(\Delta_q-\lambda\Delta_w)B_+^{-1}wf=(\mathbb{I}-JB_+^{-1})wf$$

我们最终得到 $Ju'+(q-\lambda w)u^{\#}=wf$。

接下来，我们证明刚构造的函数 u 实际上是 $\mathcal{L}^2(w)$ 的一个元素。下文将直接使用引理 6.7 及其证明中的记号。首先注意，对 u^+ 和 u^- 取平均可得

$$u(x)=\psi_2(x)\int^x\psi_1^\top wf+\psi_1(x)\int_x\psi_2^\top wf \\ +\frac{1}{2}(\psi_2^+(x)\psi_1(x)^\top+\psi_1^-(x)\psi_2(x)^\top)\Delta_w(x)f(x) \quad (6)$$

这里，我们引入记号 $\int^x$ 和 $\int_x$，分别作为 $\int_{(-\infty,\,x)}$ 和 $\int_{(x,\,\infty)}$ 的简写。

引入 W，即 w 关于正标量测度 $\operatorname{tr} w$ 的拉东-尼科迪姆导数。于是 W 是实对称矩阵，并且 $0\le W\le\mathbb{I}$ 关于 $\operatorname{tr} w$ 几乎处处成立；我们可以假定该等式处处成立。因此，$f^*\tilde{W}(x)g$ 是 $\mathbb{C}^2$ 上的半内积，记作 $\langle f,\ g\rangle_x$。相应的半范数为 $|f|_x=\sqrt{\langle f,\ f\rangle_x}$。

回顾一下，$m=\operatorname{Re}\tilde{m}>0$。由于 $\psi_1(x)=\mathrm{e}^{\tilde{m}x}p_1(x)$，我们得到 $|\psi_1(x)|_x=\mathrm{e}^{mx}|p_1(x)|_x$。类似地，$|\psi_2(x)|_x=\mathrm{e}^{-mx}|p_2(x)|_x$。由于 p_1 和 p_2 都是周期的，我们可以找到一个常数 K，使得 $|\psi_j(x)|_x\le K\mathrm{e}^{\pm mx}$，其中指数中的符号为 $(-1)^{j+1}$。秩一矩阵 $ab^\top$ 的范数等于 a 和 b 的范数之积。因此，我们可以用 $K^2|\Delta_w(x)f(x)|_x$ 来估计 (6) 中最后一项的 $|\cdot|_x$-范数。然而，矩阵 $\Delta_w(x)$ 必须一致有界，例如以某个数 $D\ge1$ 为界，因为 w 是周期的且局部有限。因此，我们对 (6) 中最后一项的估计变为 $K^2D|f(x)|_x$。

为处理（6）中的其他项，我们定义 ne

$$\phi_1(x)=\int^x\psi_1^\top wf\quad\text{and}\quad\phi_2(x)=\int_x\psi_2^\top wf.$$

对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$-内积应用柯西不等式，可得估计 $|\phi_j(x)|\le KH_j(x)$，其中

$$H_1(x)=\int^x\mathrm{e}^{my}|f(y)|_y\operatorname{tr}w(y)\quad\text{and}\quad H_2(x)=\int_x\mathrm{e}^{-my}|f(y)|_y\operatorname{tr}w(y).$$

因此我们得到

$$|u(x)|_x\le K^2\mathrm{e}^{-mx}H_1(x)+K^2\mathrm{e}^{mx}H_2(x)+K^2D|f(x)|_x.$$

由于 $\|u\|^2=\int|u(x)|_x^2\operatorname{tr}w(x)$ 且 $H_j^2\le H_j^{2\#}$ 我们得到

$$\|u\|^2 \le 3K^4D^2 \int \left(\mathrm{e}^{-2mx}\, H_1^{2\#}(x) + \mathrm{e}^{2mx}\, H_2^{2\#}(x) + |f(x)|_x^2 \right) \operatorname{tr} w(x).$$

接下来，在假设 a 和 b 是 W（w 的原函数）的连续点的条件下，我们估计积分 $I_1(a,b) = \int_{(a,b)} \mathrm{e}^{-2mx}\, H_1^{2\#}(x) \operatorname{tr} w(x)$ 和 $I_2(a,b) = \int_{(a,b)} \mathrm{e}^{2mx}\, H_2^{2\#}(x) \operatorname{tr} w(x)$。为此，我们定义

$$R_-(x) = \int_x \mathrm{e}^{-2my} \operatorname{tr} w(y) \quad \text{and} \quad R_+(x) = \int^x \mathrm{e}^{2my} \operatorname{tr} w(y).$$

我们强调，$R_\pm$ 是正函数，且 R_+ 单调不减，而 R_- 单调不增。因此 $R_\pm \le R_\pm^{\#}$。利用 w的周期性和定理 2.5，我们得到，对于适当的常数 $C_{\pm m}$，$R_+(x) \le C_m\, \mathrm{e}^{2mx}$，且 $R_-(x) \le C_{-m}\mathrm{e}^{-2mx}$。这些上界的连续性意味着，即使 $R_+^{\#}(x) \le C_m\, \mathrm{e}^{2mx}$，且 $R_-^{\#}(x) \le C_{-m}\, \mathrm{e}^{-2mx}$。现在我们看到，利用分部积分，

$$I_1(a,b) = -\int_{(a,b)} H_1^{2\#} dR_- = -H_1(b)^2 R_-(b) + H_1(a)^2 R_-(a) + \int_{(a,b)} R_-^{\#} dH_1^2.$$

右侧第一项为负，可以省略。为处理第二项，我们利用柯西不等式证明 $H_1(a)^2 \le R_+(a) \int^a |f|_y^2 \operatorname{tr} w(y)$。因此 $\lim_{a\to-\infty} H_1(a)^2 R_-(a) = 0$。在最后一项中，我们使用链式法则 $dH_1^2 = 2H_1^{\#} dH_1$（参见 Vol′pert [8], 第 13.2 节，或 Vol′pert and Hudjaev [9], 第 4 章，§6.3)。因此

$$\int_{(a,b)} R_-^{\#} dH_1^2 = 2\int_{(a,b)} R_-^{\#} H_1^{\#} dH_1 \le 2C_{-m} \int_{(a,b)} \mathrm{e}^{-mx}\, H_1^{\#}(x) |f(x)|_x \operatorname{tr} w(x).$$

由柯西不等式及 $H_j^{\#2} \le H_j^{2\#}$ 可得

$$I_1(a,b) \le H_1(a)^2 R_-(a) + 2C_{-m} I_1(a,b)^{1/2} \|f\|.$$

现在令 a 趋于 $-\infty$，且 b 趋于 ∞，可得 $I_1(-\infty,\infty) \le 4C_{-m}^2 \|f\|^2$。以类似方式处理 I_2，最终得到

$$\|u\|^2 \le 3K^4D^2(4C_{-m}^2 + 4C_m^2 + 1)\|f\|^2.$$

这证明了 $(u, \lambda u + f) \in T_{\max}$，即 $\lambda \in \varrho$。公式 (6) 表明，$T_{\max}$ 的格林函数为

$$G(x,y)=\begin{cases}\psi_2(x)\psi_1(y)^\top & \text{if } y<x\\ \frac{1}{2}(\psi_2(x)\psi_1(x)^\top+\psi_1(x)\psi_2(x)^\top) & \text{if } y=x\\ \psi_1(x)\psi_2(y)^\top & \text{if } x<y.\end{cases}$$

现在我们已经证明了 $(S\cup\Lambda)^{\mathrm{c}}\subset\varrho$。由于 Λ 也是 ϱ 的子集，我们得到了以下引理。

引理6.8。条件稳定集 S^{c} 的补集包含于 ϱ 中，即 $T_{\max}$ 的预解集。

接下来我们将讨论其逆命题。

引理 6.9。如果 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的，则条件稳定集 S 包含于 σ 中，即 $T_{\max}$ 的谱。

证明。设 $\lambda\in S$，并且为导出矛盾，假设它也属于 ϱ。定理 6.2 表明 $\lambda\notin\Lambda$。因此，微分方程 $J\psi'+(q-\lambda w)\psi=0$ 存在一个具有 Floquet 乘子 ρ 的平衡有界弗洛凯解 ψ。显然，对于某个向量 c_0，有 $\psi=U(\cdot,\lambda)c_0$，其中该向量是 $M(\lambda)$ 对应于 ρ 的特征向量。[5] 中的引理 3.2 表明，Ju_0 是 $M(\overline{\lambda})^*$ 对应于特征值 $1/\rho$ 的特征向量。引理 6.5 说明存在一个函数 g_0，其支集紧包含于 $[0,2\omega)$ 中，并满足

$$\int_{[0,2\omega)}U(\cdot,\overline{\lambda})^*wg_0=-Jc_0.$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，我们令 $g_n=\rho^n g_0(\cdot-n\omega)$ 为一个支撑集包含于$[n\omega,(n+2)\omega)$的函数，并使用常数变易公式得到方程 $Ju'+qu=w(\lambda u+g_n)$ 的一个解v_n，即，

$$v_n^-(x)=U^-(x,\lambda)\big(c_0+J^{-1}\int_{[0,x)}U(\cdot,\overline{\lambda})^*wg_n\big).$$

函数 v_n 在 $(-\infty,n\omega)$ 上与 ψ 相同。由于

$$\int_{[0,(n+2)\omega)}U(\cdot,\overline{\lambda})^*wg_n=\rho^nM(\overline{\lambda})^{*n}\int_{[0,2\omega)}U(\cdot,\overline{\lambda})^*wg_0$$
$$=-\rho^nM(\overline{\lambda})^{*n}Jc_0=-Jc_0$$

由此可知，v_n 在 $(n+2)\omega$ 之外恒等于 0。采用类似的方法处理负半轴，我们现在可以构造一个序列 $(u_n,\lambda u_n+f_n)\in T_{\max}$，使其具有以下性质：(i) $u_n=0$ 在$[-(n+2)\omega、(n+2)\omega]$之外，(ii) $u_n=\psi$ 在 $(-n\omega,n\omega)$ 上，以及 (iii) $\|f_n\|$ 与 n 无关。

由于 $|\rho|=1$，我们有

$$\|u_n\|^2\geq\int_{[-n\omega,n\omega)}\psi^*w\psi=2nC$$

其中 $C = \int_{[0,\omega)} \psi^* w \psi$ 不依赖于 n。

仿照定理 5.2 证明结尾处的推理，我们现在得到 $\|u_n\| \le \|(T-\lambda)^{-1}\| \|f_n\|$，其中左侧趋于无穷大，而右侧为常数，这便得到了所需的矛盾。

结合定理 6.4、引理6.8 和引理 6.9，我们现在得到以下结果。

定理6.10. 假设 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的。那么， $T_{\max}$ 的谱 σ 是纯连续的，并且与条件稳定集 S 重合。

本节最后考察 Floquet 判别式 D 的性质。设 x_0 是 Q 和 W 的连续点， W 是 q 和 w 的反导数，且 $U(\cdot,\lambda)$ 是 $Ju' + qu = \lambda w u$ 的一个基本矩阵，使得 $U(x_0,\lambda) = \mathbb{I}$。注意到

$$J\dot{U}'(\cdot,\lambda) + (q - \lambda w)\dot{U}(\cdot,\lambda) = wU(\cdot,\lambda)$$

其中重音符号 $\dot{}$ 表示关于 λ 的导数。由于 $M = U(x_0+\omega,\cdot)$ 且 $U(x_0,\cdot) = 0$，常数变易公式表明

$$\dot{M}(\lambda) = U(x_0+\omega,\lambda)J^{-1} \int_{(x_0,x_0+\omega)} U(\cdot,\overline{\lambda})^* w U(\cdot,\lambda) = M(\lambda)J^{-1}T(\lambda)$$

其中最后一个方程定义了矩阵 T。

假设 $\lambda \in \mathbb{R}$。那么 $M(\lambda)$ 和 $D(\lambda)$ 都是实数，而 $T(\lambda)$ 是实数且半正定。由于 $\det M = 1$，现在可以验证 $D^2 - 4 = (M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}$。此外，令 $a = (M_{11} - M_{22}, 2M_{21})^\top$ 和 $b = (-2M_{12}, M_{11} - M_{22})^\top$，可得

$$4rM_{21}\dot{D} = -T_{11}(D^2-4) + a^*Ta \quad \text{and} \quad 4rM_{12}\dot{D} = T_{22}(D^2-4) - b^*Tb. \tag{7}$$

现在假设 $D(\lambda)^2 - 4 < 0$。显然， $M_{12}(\lambda)$ 和 $M_{21}(\lambda)$ 均不等于 0，因此上述恒等式表明，只要 $T_{11}(\lambda)$ 和 $T_{22}(\lambda)$ 中至少有一个不等于 0，就有 $D(\lambda) \neq 0$。但是， $T_{11}(\lambda) = T_{22}(\lambda) = 0$ 只有在 $w = 0$ 时才可能成立，而这种情况已被我们的假设排除。

引理6.11。Floquet判别式 D 为常数，当且仅当 $T_{\max}$等于 $\{0\} \times L^2(w)$。此外，若 $\dim \mathcal{L}_0 = 1$, D 不取值于 $(-2,2)$。

证明。假设 D 为常数。若 $D^2 > 4$，则 $\mathbb{R} \subset S^c \subset \varrho$是 $T_{\max}$的预解集。由于谱为空， $T_{\max}$ 的定义域必为 $\{[0]\}$。由于 $T_{\max}$ 是自伴的，其值域必为 $L^2(w)$。若 $D^2 \le 4$，则根据 D 的解析性可知 $S = \mathbb{C} \setminus \Lambda$。若 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的，引理 6.9 将表明 $\sigma = \mathbb{C}$。现在，定理 6.6 表明 $T_{\max} = \{0\} \times L^2(w)$。

反之，如果 $T_{\max} = \{0\} \times L^2(w)$，从而 $\mathcal{L}_0 \neq \{0\}$，则存在一个范数为 0 的 $Ju' + qu = 0$ 非平凡解。引理 6.3 表明

此时至少有一个弗洛凯解的范数必须为 0。于是，这样的解对于所有 λ 都是 $Ju' + qu = \lambda wu$ 的解。如果 ρ 是相应的 Floquet 乘子，那么对于所有 $\lambda \in \mathbb{C}$， $D(\lambda) = \rho + 1/\rho$。

最后，假设 $\dim \mathcal{L}_0 = 1$，并反设 D 属于 $(-2, 2)$。那么，矩阵 T （见式（7））的对角元素中至少有一个为正数。因此 $D(\lambda) \neq 0$ （当 $\lambda \in \mathbb{R}$ 时），这就产生了矛盾。

定理 6.12。假设 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的。那么，在实数轴上，Floquet判别式 D 在 $D^2 < 4$ 的区间内严格单调。若 $D(\lambda)^2 = 4$，则 $\dot{D}(\lambda) = 0$ 当且仅当 $M(\lambda) = \pm \mathbb{I}$。若 $D(\lambda) = 2$，则该点不是严格局部极小值；若 $D(\lambda) = -2$，则该点不是严格局部极大值。

证明。我们上文已经提到，随着 λ 在 $\mathbb{R}$ 中变化， $\lambda \mapsto D(\lambda)$ 是实值且解析的。我们还证明了，当 $D(\lambda)^2 < 4$ 时， $\dot{D}(\lambda) \neq 0$。

现在，假设 $D(\lambda)^2 = 4$ 且 $\dot{D}(\lambda) = 0$。那么（7）表明 $a^*Ta = b^*Tb = 0$。由于 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的， T 是正定的，因此 a 和 b 均为 0，从而证明 $M(\lambda) = \pm \mathbb{I}$。反过来，若 $M(\lambda) = \pm \mathbb{I}$，则 $\dot{D}(\lambda) = \pm \operatorname{tr}(J^{-1}T(\lambda)) = 0$。最后，若 D 在点 λ 处有一个值为 2 的严格局部极小值，则 λ 是 $T_{\max}$ 的谱中的孤立点，因而是一个特征值，这不可能。当然，类似的论证也表明， D 不可能在任何地方取得局部最大值 -2。

7 个例子

在下面给出的所有例子中，我们假设 $n = 2$、 $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\omega = 1$（最后一个例子除外）。

我们的前三个例子具有常系数。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。这里我们有 $\mathcal{L}_0 = \{0\}$ 和 $D(\lambda) = 2\cos(\sqrt{\lambda}) = 2\cosh\sqrt{-\lambda}$。因此 $S = \sigma = [0, \infty)$。这就是描述二阶方程 $-y'' = \lambda y$的系统。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ 和 $w = 0$。我们得到 $D = 2\cosh\sqrt{b^2 - ad} = 2\cos\sqrt{ad - b^2}$。因此 D 是常数（正如预期的那样），且可以取 $[-2, \infty)$ 中的任意值。如果 $ad - b^2 > 0$，我们有 $S = \mathbb{R}$，但 $\sigma = \emptyset$。
- $q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。现在 $\mathcal{L}_0$ 由向量 $(0, \mathrm{e}^{bx})^\top$张成。我们有 $D = 2\cosh b$。注意， D 不能属于 $(-2, 2)$。

最后这两个例子表明，引理 6.9 中关于平凡 $\mathcal{L}_0$ 的假设是必要的。

接下来的三个例子以离散测度作为系数。设 $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$，其中 δ_k 是集中于 $\{k\}$ 的狄拉克测度。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} a\mu & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $w = \left(\begin{smallmatrix} \alpha\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$。若 $\alpha > 0$ 该问题是定定的，即 $\mathcal{L}_0$ 是平凡的。判别式为 $D(\lambda) = 2 + a - \alpha\lambda$。因此 $\sigma = [a/\alpha, (4+a)/\alpha]$。然而，若 $\alpha = 0$，则有 $\dim \mathcal{L}_0 = 2$。此时 D 为常数，且该常数可取任意实数值。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)\mu$和 $w = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\mu$，其中 $b^2 \neq 4$以避免 Λ与 $\mathbb{R}$相交。此处 $\mathcal{L}_0$是一维的。我们得到 $D = 2(4 + b^2)/(4 - b^2)$，它可以取 $[-2, 2)$之外的任意值。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right)\mu$和$w = \mathbb{I}^{\mu}$，其中我们要求$(a - d)^2 + 4b^2 < 16$，以避免 Λ与 $\mathbb{R}$相交。于是

$$D(\lambda) = \frac{16}{\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b^2 + 4} - 2.$$

关于 a、 b和 d的条件保证分母始终为正。因此，对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}$，$D(\lambda) > -2$，但当 λ趋于 $\pm\infty$时， $D(\lambda)$趋近于 -2。 D在 $\lambda = (a + d)/2$处有一个极大值。其值至少为 2，且恰当且仅当 $a = d$和 $b = 0$时等于 2。除这一特殊情况外，谱由两条射线组成，中间隔着一个谱隙。

最后，我们举一个违反条件 $\Lambda \cap \mathbb{R} = \emptyset$的例子。该例取自 [7]，其中可以找到更多细节。

- $q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\delta_{2k} - \delta_{2k+1})$和 $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k$。注意，此处$\omega = 2$。在这种情况下， $\Lambda = \mathbb{C}$，也就是说，对于任意 λ，解的唯一延拓性质均不成立。由于存在具有紧支撑的 $Ju' + qu = 0$解，结果表明 0 是一个无限重特征值。预解集为 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$。

参考文献

1. B. Malcolm Brown、Michael S. P. Eastham 和 Karl Michael Schmidt。*Periodic differential operators* 230 *Operator Theory: Advances and Applications*，第 卷，。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2013。2. Kevin Campbell、Minh Nguyen 和 Rudi Weikard。论不具有唯一延拓性质的一阶系统的谱理论。 *Linear Multilinear Algebra* 69 12 2315 2323, 2021 04 2019 ，（）：–。在线发表于：10月。3. Michael S. P. Eastham。*The spectral theory of periodic differential equations*。数学文本（爱丁堡）。Scottish Academic Press，爱丁堡；Hafner Press，纽约，1973。4. Gaston Floquet。论具有周期系数的线性微分方程。*Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*，第2辑，12：47–88，1883。5. Ahmed Ghatasheh 和 Rudi Weikard。具有分布系数的常微分方程系统的谱理论。 *J. Differential Equations*，268 6 2752（）：–2801，2020。6. Harry Hochstadt。 *Differential equations*。Dover Publications, Inc.，纽约，1975。现代方法；经小幅修订后再版，原版出版于1964年。7. Steven Redolfi 和 Rudi Weikard。不具有唯一延拓性质的一阶常微分方程系统的格林函数。 *submitted*, *16 pages* 2020 ，。8. Aizik I. Vol'pert。BV空间与拟线性方程。 *Mat. Sb. (N.S.)*，73（115）：255–302，1967。

9. Aizik I. Vol'pert 和 S. I. Hudjaev。*Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics* 8 *Mechanics: Analysis* ，第 卷，。Martinus Nijhoff 出版社，多德雷赫特，1985。