arXiv:2301.07217v1 [math.FA] 17 Jan 2023

希尔伯特 C*-模上的积分算子框架

HATIM LABRIGUI[1], MOHAMED ROSSAFI*[2]、ABDESLAM TOURI[1] 和 NADIA ASSILA[1]

摘要。框架理论由 Duffin 和 Schaefer 于 1952年 在研究非调和傅里叶级数时提出。近几十年来，随着该领域研究工作的不断增多，框架理论经历了十分有趣的发展。本文为希尔伯特 C*-模 H 上所有可伴随算子的集合引入一个新概念，即积分算子框架，并给出与积分算子框架某些构造相关的一些新性质，同时还建立了一些新结果。文中提供了一些说明性示例，以展示这些结果的适用性。

1. 引言与预备知识 ES

1952年，Duffin 和 Schaefer [7] 在研究非调和傅里叶级数时引入了框架的概念。框架具有许多优良性质，因此在小波分析、非均匀采样理论、信号处理及许多其他领域中都非常有用。框架理论迅速得到推广，希尔伯特空间和希尔伯特 C^*-模中的框架也出现了各种推广形式 [8]。框架理论已从离散情形或连续情形下的希尔伯特空间推广到希尔伯特 C^*-模（参见 [8, 9, 3, 10, 11, 15, 18, 19, 20]）。

本文旨在将李春燕和曹怀新 [14],针对希尔伯特空间离散情形所得的结果推广到希尔伯特 C^*-模的连续情形。为此，我们引入并研究了 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架概念。此外，还给出了一些性质。下文中，令 $\mathcal{H}$ 为一个可分希尔伯特空间， $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 表示从希尔伯特C^*-模 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 的所有可伴随算子构成的集合，并令 $(\Omega\ \mu)$ 为一个带正测度 μ 的测度空间。
设 $K,T \in End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$，若 $TK = I$，则称 T为 K的左逆，记作K_l^{-1} 。

若 $KT = I$，则称 T 为 K 的右逆，记作 $K_r^{-1} = T$。
若 $KT = TK = I$, 则 T 和 K 互为逆元。
对于可分希尔伯特空间 H 和可测空间 $(\Omega\ \mu)$，定义：

$$l^2(\Omega, \mathcal{H}) = \{x_\omega \in \mathcal{H}, \quad \omega \in \Omega, \quad \left\| \int_\Omega \langle x_\omega, x_\omega \rangle d\mu(\omega) \right\| < \infty\}.$$

For 任意 $x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega}$ 和 $y = (y_\omega)_{\omega\in\Omega}$， $l^2(\Omega\ H)$上的内积定义为 ，

$$\langle x, y\rangle = \int_\Omega \langle x_\omega, y_\omega\rangle d\mu(\omega).$$

范数由 $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 定义。

本节简要回顾 C^*-代数、希尔伯特 $\mathcal{A}$-模以及希尔伯特 $\mathcal{A}$-模中框架的定义和基本性质。关于

日期：..... 2010 数学主题分类。主要分类 42C15；次要分类 46L05。关键词和短语。框架、算子框架、 C^*-代数、Hilbert $\mathcal{A}$-模。

希尔伯特空间中的框架，请参阅 [4]。关于 C^*-代数，可参考文献 [6, 5]。对于 C^*-代数 $\mathcal{A}$，若 $a \in \mathcal{A}$ 为正，则记作 $a \geq 0$，而 $\mathcal{A}^+$ 表示 $\mathcal{A}$中正元素的集合。

定义 1.1. [12]。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺 C^*-代数，$\mathcal{H}$ 是一个左 $\mathcal{A}$-模，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{H}$ 的线性结构相容。若 $\mathcal{H}$ 上定义了一个取值于 $\mathcal{A}$的内积 $\langle ,. \rangle_{\mathcal{A}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{A}$，且该内积具有共轭双线性、正定性并与模作用相容，则称 $\mathcal{H}$ 为预希尔伯特 $\mathcal{A}$-模。换言之，

(i) 对任意 $x \in \mathcal{H}$和 $\langle x, \quad \langle x, x \rangle_{\mathcal{A}} \geq 0$ 当且仅当 $x = 0$。（ii）对任意 $a \in \mathcal{A}$和 $x, y, z \in \mathcal{H}$，$\langle ax + y, z \rangle_{\mathcal{A}} = a\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} + \langle y, z \rangle_{\mathcal{A}}$。（iii）对任意 $x, y \in \mathcal{H}$，$\langle x, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle y, x \rangle^*_{\mathcal{A}}$。

对于 $x \in \mathcal{H}$，我们定义 $||x|| = ||\langle x, x \rangle||^{\frac{1}{2}}$。如果 $\mathcal{H}$ 关于 $||.||$完备，则称其为 Hilbert $\mathcal{A}$-模，或称为 $\mathcal{A}$ 上的 Hilbert C^*-模。对于 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 中的每个 a，我们有 $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$，并且 $\mathcal{H}$ 上的 $\mathcal{A}$ 值范数定义为 $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$，其中 $x \in \mathcal{H}$。

设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个 Hilbert $\mathcal{A}$-模。若映射 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ 存在映射 $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$，使得对所有 $x \in \mathcal{H}$ 和 $y \in \mathcal{K}$，都有 $\langle Tx, y \rangle_{\mathcal{A}} = \langle x, T^*y \rangle_{\mathcal{A}}$，则称其为可伴随的。

我们还用记号 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ 表示从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的所有可伴随算子构成的集合，并将 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ 简记为 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$。

定义 1.2. [13] 设 $\mathcal{H}$ 是定义在含幺 C^*-代数上的希尔伯特 $\mathcal{A}$-模。若存在两个正常数 A、B，使得 $\mathcal{H}$ 中的元素族 $\{x_i\}_{i \in I}$ 满足下列条件，则称其为 $\mathcal{H}$的框架：

$$A\langle x, x \rangle_{\mathcal{A}} \leq \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle_{\mathcal{A}} \langle x_i, x \rangle_{\mathcal{A}} \leq B\langle x, x \rangle_{\mathcal{A}}, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

数值 A和 B 分别称为该框架的下界和上界。若 $A = B = \lambda$，则称该框架为 λ-紧框架。若 $A = B = 1$，则称其为归一化紧框架或帕塞瓦尔框架。如果仅满足 (1.1) 的上界不等式，则称 $\{x_i\}_{i \in I}$为 $\mathcal{H}$的贝塞尔序列。

在 [9], 中，L. Gavruta 引入了 K-框架，用以研究希尔伯特空间中算子的原子系统。

定义 1.3. [16] 设 $K \in End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$。若希尔伯特 $\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 中元素族 $\{x_i\}_{i \in I}$ 满足以下条件：存在两个正常数 A 和 B，则称其为 $\mathcal{H}$的 K-框架，其中 $\mathcal{H}$ 定义在含幺 C^*-代数上：

$$A\langle K^*x, K^*x \rangle_{\mathcal{A}} \leq \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle_{\mathcal{A}} \langle x_i, x \rangle_{\mathcal{A}} \leq B\langle x, x \rangle_{\mathcal{A}}, \qquad x \in \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

The 数 A 和 B 分别称为 K-框架的下界和上界 ly.

以下引理将用于证明我们的主要结果

引理 1.4. [17] 设 $\mathcal{H}$ 是一个 *Hilbert* $\mathcal{A}$-模。对于 $T \in End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$，我们有

$$\langle Tx, Tx \rangle_{\mathcal{A}} \leq \|T\|^2 \langle x, x \rangle_{\mathcal{A}}, \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

引理 1.5. [2]。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个 *Hilbert* $\mathcal{A}$-模，且 $T \in End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$。那么以下陈述等价：

(i) T 是满射。(ii) 存在 $m, M > 0$，使得 $m\|x\| \leq \|Tx\| \leq M\|x\|$，对所有 $x \in \mathcal{H}$ 均成立。

(iii) 存在 $m', M' > 0$，使得 $m'\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}} \leq \langle Tx,Tx\rangle_{\mathcal{A}} \leq M'\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}$，对所有$x \in \mathcal{H}$ 均成立。

引理 1.6。 [22] 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 上的希尔伯特 $\mathcal{A}$-模，且 T, S是作用于 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的两个算子。若 $Rang(S)$ 是闭的，则以下命题等价:

(i) $Rang(T) \subseteq Rang(S)$。(ii)
$TT^* \leq \lambda SS^*$ 对某个 $\lambda > 0$成立。

引理 1.7。 [1]。设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个希尔伯特 $\mathcal{A}$-模，且 $T \in End^*(\mathcal{H},\mathcal{K})$。则:

(i) 若 T 是单射且 T 具有闭值域，则可伴随映射 T^*T 可逆，并且

$$\|(T^*T)^{-1}\|^{-1} \leq T^*T \leq \|T\|^2.$$

(ii) 若 T是满射，则可伴随映射 TT^* 可逆，并且

$$\|(TT^*)^{-1}\|^{-1} \leq TT^* \leq \|T\|^2.$$

引理 1.8。 [21]。设$(\Omega\ \mu)$ 是一个测度空间， X 和 Y 是两个巴拿赫空间，λ : $X \longrightarrow Y$ 是一个有界线性算子，且 f : $\Omega \longrightarrow X$ 是可测函数；则，

$$\lambda(\int_{\Omega} f d\mu) = \int_{\Omega} (\lambda f) d\mu.$$

定理 1.9。 [4] 设 X 是一个巴拿赫空间， U： $X \longrightarrow X$ 是一个有界算子，且 $\|I - U\| < 1$。那么 U 是可逆的。

2. Integral Operator Frames for $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$

定义 2.1。 希尔伯特$\mathcal{A}$-模 $\mathcal{H}$ 上取值于幺 C^*-代数的可伴随算子族 $\{T_w\}_{w\in\Omega} \subset End^*_{\mathcal{A}}$ $(\mathcal{H})$称为$End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的积分算子框架，若存在两个正常数 A、 $B > 0$ 使得，

$$A\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}} \leq \int_{\Omega} \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega) \leq B\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

若（2.1）中间的和按范数收敛，则该积分算子框架称为标准积分算子框架。

A 和 B 分别称为该积分算子框架的下界和上界。

如果存在常数 $0 < A$ 使得，积分算子框架 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 被称为 A-紧的，

$$A\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}} = \int_{\Omega} \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega), \quad x \in \mathcal{H}$$

如果 $A = 1$，则称其为归一化紧积分算子框架或帕塞瓦尔积分算子框架。

若仅满足 (2.1) 中的右侧不等式，则称 $T := \{T_w\}_{w\in\Omega}$ 为 $\mathcal{H}$ 的积分算子贝塞尔族，其贝塞尔界为 B。

例 2.2。 设 $\mathcal{H}$ 为如下定义的希尔伯特空间:

$$\mathcal{H} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{C} \right\},$$

现在，$\mathcal{H}$ 是一个自伴算子代数，并且它本身是一个希尔伯特 C^*-模。我们定义内积:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \times \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ (A, B) & \mapsto & \langle A, B \rangle = \begin{pmatrix} a\bar{a_1} & 0 \\ 0 & b\bar{b_1} \end{pmatrix} \end{array}$$

现在，我们考虑一个测度空间 $(\Omega = [0,1], d\lambda)$，其中 $d\lambda$ 是在区间 $[0,1]$上的勒贝格测度限制。

对于所有 $w \in [0,1]$，我们定义:

$$T_\omega : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} wa & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}wb}{2} \end{pmatrix}$$

显然，族 $\{T_w\}_{w\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{H}$上的连续算子。此外，我们有:

$$\langle T_w A, T_w A \rangle = w^2 \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & \frac{3|b|^2}{4} \end{pmatrix}$$

因此，

$$\int_\Omega \langle T_w A, T_w A \rangle d\lambda(w) = \int_{[0,1]} w^2 d\lambda \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 \\ 0 & \frac{3|b|^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{|a|^2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{|b|^2}{4} \end{pmatrix}$$

So,

$$\frac{1}{4}\langle A, A \rangle \leq \int_\Omega \langle T_w A, T_w A \rangle d\lambda(w) \leq \frac{1}{3}\langle A, A \rangle.$$

这表明 $\{T_w\}_{w\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{H}$的积分算子框架。

设 $T = \{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的积分算子框架。我们定义算子 R_T 如下:

$$\begin{aligned} R_T : \mathcal{H} &\longrightarrow l^2(\Omega, \mathcal{H}) \\ x &\longrightarrow R_T x = \{T_\omega x\}_{\omega\in\Omega}, \end{aligned}$$

算子 R_T称为积分算子框架 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的分析算子。分析算子 R_T 的伴随定义如下:

$$\begin{aligned} R_T^* : l^2(\Omega, \mathcal{H}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \{x_\omega\}_{\omega\in\Omega} &\longrightarrow R_T^*(\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}) = \int_\Omega T_\omega^* x_\omega d\mu(\omega). \end{aligned}$$

算子 R_T^* 称为 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$的合成算子。

通过复合 R_T 和 R_T^*，算子框架 T的框架算子 S_T：$\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 可表示为

$$S_T(x) = R_T^* R_T x = \int_\Omega T_\omega^* T_\omega x d\mu(\omega) \qquad x \in \mathcal{H}.$$

假设 $\{T_\omega\}_{w\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的积分算子框架，且 R_T和 R_T^* 分别是 T 的分析积分算子框架和合成算子框架。我们称 S_T 为与该积分算子框架相关联的框架算子。

定理 2.3. 假设 S_T 是积分算子框架 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 的积分框架算子，该框架作用于 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$，其界为 A, B。那么， S_T 是作用于 $\mathcal{H}$上的自伴、正且可逆算子。此外，我们有如下重构公式:

$$x=\int_\Omega S_T^{-1}T_\omega^*T_\omega x d\mu(\omega)\qquad x\in\mathcal{H} \tag{2.2}$$

证明。 设 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是一个界为 A, B的积分算子框架。那么，对所有$x\in\mathcal{H}$，有:

$$\langle Ax,x\rangle_{\mathcal{A}}=A\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}\le\int_\Omega\langle T_wx,T_wx\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)=\langle S_Tx,x\rangle_{\mathcal{A}}\le B\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}=\langle Bx,x\rangle_{\mathcal{A}}.$$

这表明： $A.I\le S_T\le B.I$。那么

$$0\le I-B^{-1}S_T\le\frac{B-A}{B}.I,$$

因此:

$$\|I-B^{-1}S_T\|=\sup_{x\in\mathcal{H},\|x\|=1}\|\langle(I-B^{-1}S_T)x,x\rangle_{\mathcal{A}}\|\le\frac{B-A}{B}<1.$$

由定理 1.9，我们证明了 S_T 是可逆的。
显然， S_T 是一个正算子。
此外，对于任意 $x\in\mathcal{H}$，我们有:

$$x=S_T^{-1}S_Tx=S_T^{-1}\int_\Omega T_\omega^*T_\omega x d\mu(\omega)=\int_\Omega S_T^{-1}T_\omega^*T_\omega x d\mu(\omega) \tag{2.3}$$

□

定理 2.4. 设 $T=\{T_w\}_{w\in\Omega}\subset End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 是一个积分算子 *Bessel* 族。那么， T 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架，当且仅当存在正常数 A 和 B 使得:

$$A\|x\|^2\le\|\int_\Omega\langle T_\omega x,T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\|\le B\|x\|^2,\qquad x\in\mathcal{H}. \tag{2.4}$$

证明。 假设 (2.4) 成立，我们有:

$$\langle S_T^{\frac12}x,S_T^{\frac12}x\rangle_{\mathcal{A}}=\langle S_Tx,x\rangle_{\mathcal{A}}=\int_\Omega\langle T_\omega x,T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(w). \tag{2.5}$$

利用 (2.4)，对于所有 $x\in\mathcal{H}$，我们有:

$$\sqrt{A}\|x\|\le\|S_T^{\frac12}x\|\le\sqrt{B}\|x\|,$$

由引理 1.5，存在 m、 $M>0$ 使得:

$$m\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}\le\langle S_T^{\frac12}x,S_T^{\frac12}x\rangle_{\mathcal{A}}\le M\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}.$$

因此， $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的积分算子框架。
收敛 因此，设 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架，其界为 A

和 B。
于是,

$$A\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}} \leq \int_{\Omega}\langle T_w x, T_w x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(w) \leq B\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}, \qquad x\in\mathcal{H}. \tag{2.6}$$

由于 $0\leq\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}$，对所有 $x\in\mathcal{H}$，因此我们可以对上述不等式 (2.6) 左边、中间和右边的项取范数。于是,

$$\|A\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}\| \leq \|\int_{\Omega}\langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(w)\| \leq \|B\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}\|, \qquad x\in\mathcal{H}.$$

最终得到,

$$A\|x\|^2 \leq \|\int_{\Omega}\langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(w)\| \leq B\|x\|^2, \qquad x\in\mathcal{H}.$$

证明完毕。 □

定义 2.5. 设 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 和 $\Lambda=\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的两个积分算子框架。若对所有 $x\in\mathcal{H}$均有，积分算子框架 Λ 称为 T 的对偶,

$$x=\int_{\Omega} T^*_\omega \Lambda_\omega x d\mu(w) \tag{2.7}$$

例2.6。设 $\mathcal{H}$ 为如下定义的希尔伯特空间:
$\mathcal{H}=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \ / \ a,b\in\mathbb{C}\right\}$,
并设 $\{T_w\}_{w\in[0,1]}$ 为例 2.2 中定义的族。显然， $T_w=T^*_w$.
对于所有 $w\in[0,1]$，我们定义:

$$\Lambda_\omega : \mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$$
$$\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 3wa & 0\\ 0 & 2\sqrt{3}wb\end{pmatrix}$$

显然，族 $\{\Lambda_w\}_{w\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{H}$上的积分算子框架。此外，我们有:

$$\langle\Lambda_w A,\Lambda_w A\rangle=\begin{pmatrix} 9w^2|a|^2 & 0\\ 0 & 12w^2|b|^2\end{pmatrix}$$

因此,

$$\int_\Omega\langle\Lambda_w A,\Lambda_w A\rangle d\lambda(w)=\int_{[0,1]}\begin{pmatrix} 9w^2|a|^2 & 0\\ 0 & 12w^2|b|^2\end{pmatrix}d\lambda=\begin{pmatrix} 3|a|^2 & 0\\ 0 & 4|b|^2\end{pmatrix}$$

So,

$$3\langle A,A\rangle\leq\int_\Omega\langle\Lambda_w A,\Lambda_w A\rangle d\lambda(w)\leq 4\langle A,A\rangle.$$

这表明 $\{\Lambda_w\}_{w\in[0,1]}$ 是 $\mathcal{H}$的一个积分算子框架。
此外，对于 $A\in\mathcal{H}$，我们有,

$$\int_{[0,1]} T^*_w\Lambda_w(A)d\lambda(w)=\int_{[0,1]} T_w\begin{pmatrix} 3wa & 0\\ 0 & 2\sqrt{3}wb\end{pmatrix}d\lambda(\omega)=\int_{[0,1]}\begin{pmatrix} 3w^2a & 0\\ 0 & 3w^2b\end{pmatrix}d\lambda(\omega)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

这表明 $\{\Lambda_w\}_{w\in[0,1]}$ 是 $\{T_w\}_{w\in[0,1]}$ 的对偶积分算子框架。

定理 2.7。 对于 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ ，每个积分算子框架都有一个对偶积分算子框架。

证明。 设 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 上一个界为 A和 B的积分算子框架。

对于所有 $x\in\mathcal{H}$，我们有:

$$x=S_TS_T^{-1}x=\int_\Omega T_\omega^*T_\omega S_T^{-1}xd\mu(\omega) \tag{2.8}$$

剩下要证明的是，$\Lambda=\{T_\omega S_T^{-1}\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 上的一个积分算子框架。事实上，由 (2.1) 可得:

$$A\langle S_T^{-1}x,S_T^{-1}x\rangle_{\mathcal{A}}\leq\int_\Omega\langle T_\omega S_T^{-1}x,T_\omega S_T^{-1}x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\leq B\langle S_T^{-1}x,S_T^{-1}x\rangle_{\mathcal{A}},\quad x\in\mathcal{H}.$$

由于 S_T^{-1} 是一个满射且自伴算子，因此（根据引理 1.5）存在 $m>0$，使得:

$$Am\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}\leq\int_\Omega\langle T_\omega S_T^{-1}x,T_\omega S_T^{-1}x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\leq B\|S_T^{-1}\|^{-2}\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}},\quad x\in\mathcal{H}.$$

这表明 $\Lambda=\{T_\omega S_T^{-1}\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的对偶积分算子框架 □

定义 2.8. 称 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 中的算子族 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$满足以下条件时为独立的:

$$\int_\Omega T_\omega^*x_\omega d\mu(\omega)=0,\quad \{x_w\}_{\omega\in\Omega}\in l^2(\Omega,\mathcal{H})\Longrightarrow x_\omega=0\quad \mu pp.\quad for\ all\quad \omega\in\Omega.$$

定理 2.9. 设 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$中的积分算子 *Bessel* 族。则以下结论成立:

1 - $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架，当且仅当 R_T下有界。2 - $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的独立积分算子框架，当且仅当 R_T 可逆。

证明。(1): 显然。
对于 (2)，设 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的独立积分算子框架。对于所有 $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}\in l^2($Ω $\mathcal{H})$，有:

$$R_T^*(\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega})=\int_\Omega T_\omega^*x_\omega d\mu(\omega)=0\Longrightarrow\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}=0\qquad for\ all\quad \omega\in\Omega.$$

这证明了 R_T^* 是单射。
So,

$$(\mathcal{R}(R_T))^\perp=Ker(R_T^*)=\{0\}.$$

这表明 $\mathcal{R}(R_T)$在 H中稠密。
由（1）可知， R_T 下有界且 $\mathcal{R}(R_T)$是闭的，因此 R_T 可逆。

反过来，若 R_T 可逆，则 R_T 下有界。
因此， $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是一个积分算子框架。

现在，假设 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}\subset End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$不是独立的，则存在$0\neq\{\eta_w\}_{\omega\in\Omega}\in l^2(\Omega\ \mathcal{H})$，使得，

$$\int_\Omega T^*_\omega\eta_\omega d\mu(\omega)=0 \tag{2.9}$$

由于 R_T 是满射，因此存在 $x\in\mathcal{H}$ 使得，

$$R_Tx=\{T_\omega x\}_{\omega\in\Omega}=\{\eta_\omega\}_{\omega\in\Omega}$$

So

$$\eta_\omega=T_\omega x\qquad\forall\omega\in\Omega$$

一方面，我们有，

$$\begin{aligned}\langle R_Tx,\{\eta_\omega\}_{\omega\in\Omega}\rangle_{l^2(\Omega,\mathcal{H})}&=\langle\{T_\omega x\}_{\omega\in\Omega},\{\eta_\omega\}_{\omega\in\Omega}\rangle_{l^2(\Omega,\mathcal{H})}\\&=\int_\Omega\langle T_\omega x,\eta_\omega\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&=\int_\Omega\langle x,T^*_\omega\eta_\omega\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&=\langle x,\int_\Omega T^*_\omega\eta_\omega d\mu(\omega)\rangle_{\mathcal{A}}=0\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\langle R_Tx,\{\eta_\omega\}_{\omega\in\Omega}\rangle_{l^2(\Omega,\mathcal{H})}&=\langle x,R^*_T(\{\eta_\omega\}_{\omega\in\Omega})\rangle_{\mathcal{A}}\\&=\langle x,\int_\Omega T^*_\omega\eta_\omega d\mu(\omega)\rangle_{\mathcal{A}}\\&=\langle x,\int_\Omega T^*_\omega T_\omega x d\mu(\omega)\rangle_{\mathcal{A}}\\&=\int_\Omega\langle x,T^*_\omega T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&=\int_\Omega\langle T_\omega x,T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&=\|\eta_\omega\|_{l^2(\Omega,\mathcal{H})}\neq 0\end{aligned}$$

这是矛盾的。
这 sh 现知 $T=\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的独立积分算子框架。 □

3. 积分算子框架的扰动

定理 3.1. 设 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架，其框架界为 A 和 B。设 $K\in End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H}),(K\neq 0)$，且 $\{c_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是任意标量族。那么，扰动算子族 $\{T_\omega+c_\omega K\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的积分算子框架，当且仅当 $\int_\Omega|c_\omega|^2d\mu(\omega)<\frac{A}{\|K\|}$。

证明。设 $\Gamma_\omega=T_\omega+c_\omega K$，对所有 $\omega\in\Omega$ 均成立。因此，对所有 $x\in\mathcal{H}$，有:

$$\begin{aligned}\int_\Omega\langle T_\omega x-\Gamma_\omega x,T_\omega x-\Gamma_\omega x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)&=\int_\Omega\langle c_\omega Kx,c_\omega Kx\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&\leq\int_\Omega|c_\omega|^2\|K\|^2\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}d\mu(\omega)\\&\leq R\langle x,x\rangle_{\mathcal{A}}.\quad where\quad R=\int_\Omega|c_\omega|^2\|K\|^2d\mu(\omega).\end{aligned}$$

一方面，对所有 $x \in \mathcal{H}$，有：

$$\begin{aligned}(\int_\Omega \langle (T_\omega + c_\omega K)x, (T_\omega + c_\omega K)x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} &= \|(T_\omega + c_\omega K)x\|_{l^2(\Omega,H)} \\ &\leq \|T_\omega x\|_{l^2(\Omega,H)} + \|c_\omega K x\|_{l^2(\Omega,H)} \\ &= (\int_\Omega \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (\int_\Omega \langle (c_\omega K)x, (c_\omega K)x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{B}(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}} + \sqrt{R}(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\sqrt{B} + \sqrt{R})(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Then

$$\int_\Omega \langle (T_\omega + c_\omega K)x, (T_\omega + c_\omega K)x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega) \leq (\sqrt{B} + \sqrt{R})^2 \langle x, x\rangle_{\mathcal{A}}. \tag{3.1}$$

另一方面，对于所有 $x \in H$，我们有：

$$\begin{aligned}(\int_\Omega \langle (T_\omega + c_\omega K)x, (T_\omega + c_\omega K)x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} &= \|(T_\omega + c_\omega K)x\|_{l^2(\Omega,\mathcal{H})} \\ &\geq \|T_\omega x\|_{l^2(\Omega,\mathcal{H})} - \|c_\omega K x\|_{l^2(\Omega,\mathcal{H})} \\ &\geq (\int_\Omega \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - (\int_\Omega \langle c_\omega K x, c_\omega K x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega))^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sqrt{A}(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}} - \sqrt{R}(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (\sqrt{A} - \sqrt{R})(\langle x, x\rangle_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

So,

$$\int_\Omega \langle (T_\omega + c_\omega K)x, (T_\omega + c_\omega K)x\rangle_{\mathcal{A}} d\mu(\omega) \geq (\sqrt{A} - \sqrt{R})^2 \langle x, x\rangle_{\mathcal{A}} \tag{3.2}$$

由 (3.1) 和 (3.2) 可知，若 $R < A$，则 $\{T_\omega + c_\omega K\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 的一个积分算子框架，也就是说，若：

$$\int_\Omega |c_\omega|^2 d\mu(\omega) < \frac{A}{\|K\|}.$$

□

定理 3.2. 设 $\{T_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 是一个积分算子框架。设 $\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是作用于 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$ 上的任意一族算子，且 $\{a_\omega\}_{\omega\in\Omega}, \{b_\omega\}_{\omega\in\Omega} \subset \mathbb{R}$ 是两个正向有界序列。若存在常数 α, β，满足 $0 \leq \alpha,\beta < \frac{1}{2}$，使得：

$$\int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x - b_\omega \Lambda_\omega x, a_\omega T_\omega x - b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega) \leq \alpha \int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega) \tag{3.3}$$

$$+ \beta \int_\Omega \langle b_\omega \Lambda_\omega x, b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega). \tag{3.4}$$

那么，$\{\Lambda_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ 是 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$的积分算子框架。

证明。假设定理的某些条件满足式 (3.3)。那么，对于所有
$x \in H$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle b_\omega \Lambda_\omega x, b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega) &\leq 2\Big(\int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega) \\ &\quad + \int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x - b_\omega \Lambda_\omega x, a_\omega T_\omega x - b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega)\Big) \\ &\leq 2\Big(\int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega) + \alpha \int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega) \\ &\quad + \beta \int_\Omega \langle b_\omega \Lambda_\omega x, b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega)\Big).\end{aligned}$$

So,

$$(1-2\beta)\int_\Omega \langle b_\omega \Lambda_\omega x, b_\omega \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega)) \leq 2(1+\alpha)\int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega).$$

这给出，

$$(1-2\beta)[\inf_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2 \int_\Omega \langle \Lambda_\omega x, \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega) \leq 2(1+\alpha)[\sup_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2 \int_\Omega \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle d\mu(\omega).$$

因此，

$$\int_\Omega \langle \Lambda_\omega x, \Lambda_\omega x\rangle d\mu(\omega) \leq \frac{2(1+\alpha)[\sup_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2}{(1-2\beta)[\inf_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2} \int_\Omega \langle T_\omega x, T_\omega x\rangle d\mu(\omega). \tag{3.5}$$

此外，我们有，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle a_\omega T_\omega x, a_\omega T_\omega x\rangle d\mu(\omega) &\leq 2\Big(\int_\Omega \|a_\omega T_\omega x - b_\omega \Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega) + \int_\Omega \|b_\omega \Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega)\Big) \\ &\leq 2\Big(\alpha \int_\Omega \|a_\omega T_\omega x\|^2 d\mu(\omega) + \beta \int_\Omega \|b_\omega \Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega) + \int_\Omega \|b_\omega \Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega)\Big).\end{aligned}$$

因此，

$$(1-2\alpha)[\inf_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2 \int_\Omega \|T_\omega x\|^2 d\mu(\omega) \leq 2(1+\beta)[\sup_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2 \int_\Omega \|\Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega).$$

这给出：

$$\frac{(1-2\alpha)[\inf_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2}{2(1+\beta)[\sup_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2} \int_\Omega \|T_\omega x\|^2 d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \|\Lambda_\omega x\|^2 d\mu(\omega) \tag{3.6}$$

由 (3.5) 和 (3.6) 可得，

$$\frac{(1-2\alpha)[\inf_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2}{2(1+\beta)[\sup_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2} \int_\Omega \|T_\omega x\|^2 d\mu(\omega) \leq \int_\Omega \langle \Lambda_\omega x, \Lambda_\omega x\rangle \mu(\omega) \leq \frac{2(1+\alpha)[\sup_{\omega\in\Omega}(a_\omega)]^2}{(1-2\beta)[\inf_{\omega\in\Omega}(b_\omega)]^2} \int_\Omega \|T_\omega x\|^2 d\mu(\omega).$$

至此，证明完毕。 □

参考文献

[1] A. Alijani 和 M. A. Dehghan, 《希尔伯特 $\mathcal{C}^*$-模中的 $*$-框架》, U.P.B. Sci. Bull., Ser. A, 73(4) (2011), 89-106.[2] L. Arambašić, 《关于可数生成的希尔伯特 $\mathcal{C}^*$-模上的框架》, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007) 469-478.[3] N. Assila、S. Kabbaj 和 B. Moalige, 《希尔伯特空间上的受控 K-融合框架》, Moroccan J. of Pure and Appl. Anal. 7(1) (2021), 116-133.[4] O. Christensen, 《框架与 Riesz 基导论》, Brikhouser,2016.[5] J. B. Conway, 《算子理论教程》, AMS, 21, 2000.[6] F. R. Davidson, 《以实例讲解 $\mathcal{C}^*$-代数》, Fields Ins. Monog. 1996.[7] R. J. Duffin 和 A. C. Schaeffer, 《一类非调和傅里叶级数》, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.[8] M. Frank、D. R. Larson, 《希尔伯特 $\mathcal{C}^*$-模与 $\mathcal{C}^*$-代数中的框架》, J. Oper. Theory 48 (2002), 273-314.[9] L. Gavruta, 《算子框架》, Appl.Comput.Harmon.Anal. 32 (2012), 139-144[10] S. Kabbaj、H. Labrigui 和 A. Touri, 《希尔伯特 C^*-模中的受控连续 g-框架》, Moroccan J. Of Pure and Appl. Anal. (MJPAA), Volume 6(2), 2020, Pages 184-197.[11] S. Kabbaj 和 M. Rossafi, 《 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$上的 $*$-算子框架》, Wavelets and Linear Algebra 5(2) (2018), 1-13.[12] I. Kaplansky, 《算子代数上的模》, Amer. J. Math. 75 (1953), 839-858.[13] A. Khosraviand B. Khosravi, 《希尔伯特空间与希尔伯特$\mathcal{C}^*$-模张量积中的框架与基》, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 117 (2007), 1-12.[14] C. Y. Li 和 H. X. Cao, 《 $\mathcal{B}(H)$的算子》, 《小波分析与应用》, Tao Qian、Mang I. Vai 和 Xu Yuesheng 编。应用与数值调和分析丛书，第67-82页。© 2006 Birkhäuser Verlag 巴塞尔/瑞士。[15] H. Labrigui、A. Touri 和 S. Kabbaj, 《 $End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$上的受控算子框架》, Asian Journal Of Mathematics and Applications, Volume 2020, Article ID ama0554, 13 pages.[16] A. Najati、M. M. Saem 和 P. Gavruta, 《希尔伯特 $\mathcal{C}^*$-模中的框架与算子》, Oam, 10(1) (2016), 73-81.[17] W. Paschke, 《 B^*-代数上的内积模》, Trans. Amer. Math. Soc., 182(1973), 443-468.[18] M. Rossafi 和 A. Akhlidj, 《$End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$上算子框架的扰动与稳定性》, Math- Recherche and Applications 16(1) (2018), 65-81.[19] M. Rossafi、A. Bourouihiya、H. Labrigui 和 A. Touri, 《$End^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{H})$上 $*$-算子框架的对偶》, Asia Mathematika 4(1) (2020), 45-52.[20] M. Rossafi、A. Touri、H. Labrigui 和 A. Akhlidj, 《希尔伯特 C^*-模中的连续 $*$-K-G-框架》, J. Funct. Spaces 2019 (2019), Article ID 2426978, 5 pages.[21] K. Yosida, 《泛函分析》, 数学科学基础丛书第123卷, Springer, 柏林, 德国, 第6版, 1980.[22] L. C. Zhang, 《有界广义逆模的因子分解定理及其拓扑连续性》, J. Acta Math. Sin., 23 (2007), 1413-1418。

[1]数学系，理学院，伊本·图费尔大学，盖尼特拉，摩洛哥
电子邮箱地址：hlabrigui75@gmail.com; touri.abdo68@gmail.com; nadia.assila@uit.ac.ma

[2]LASMA实验室数学系，达尔埃尔理学院
Mahraz，穆罕默德·本·阿卜杜拉大学，Fes，摩洛哥
电子邮件地址：rossafimohamed@gmail.com; mohamed.rossafi@usmba.ac.ma