arXiv:2301.07221v1 [math.RT] 17 Jan 2023

关于伪树箭图的 $\mathbb{F}_1$-表示的组合学

JAIUNG JUN、JAEHOON KIM 和 ALEX SISTKO

摘要。我们研究 $\mathbb{F}_1$ 上的箭图表示。系数箭图是组合工具，与箭图的 $\mathbb{F}_1$-表示等价。我们重点研究箭图 Q 为伪树的情形。对于这类箭图，我们首先利用系数箭图的概念，完整分类 $\mathbb{F}_1$ 上不可分解表示的渐近行为。接着，我们证明了关于伪树所关联李代数的一些基本结构性结果。最后，我们利用覆盖构造箭图 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示 M 的实例，在此构造下，可以纯粹通过组合方法计算箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}^{Q}{}_{d}(\mathrm{M})$ 的欧拉示性数。

–

1. 引言

箭图是有限有向图，而域 k 上箭图 Q 的一个表示是由一族$\mathbb{V} = \{\mathrm{V}_i$、映射 $\mathrm{f}\alpha\}_{i\in Q_0,\ \alpha\in Q_1}$ 中的 k-向量空间 V_i 以及 k-线性映射 fα组成的，其中 Q_0 （分别是 Q_1）表示顶点（分别是箭）的集合。箭图及其表示是数学各个领域中自然出现的研究对象。例如，箭图格拉斯曼簇是一种特定的箭图表示模空间，它推广了格拉斯曼流形（对应于箭图只有一个顶点且没有箭的情形）。箭图格拉斯曼簇是射影簇，而且在 [Rei13], Reineke 证明了任意射影簇确实都是一个箭图格拉斯曼簇。

$\mathbb{F}_1$ （“只有一个元素的域”）这一记号表示的是一种想法，而非定义明确的数学对象。根据不同文献， $\mathbb{F}_1$ 上的代数几何可能有几种不同含义。有时它指的是幺半群上的代数几何（例如 Deitmar [Dei08、Dei05], Soul´e [Sou04], Connes-Consani-Marcolli [CCM09、CC10、CC11], 以及 Corti˜nas-Haesemayer-Walker-Weibel [CHWW15]所发展的幺半群概形理论）。有时它指的是半环上的代数几何；对于幂等半环，这使其与热带几何建立了联系 [GG16]。在自然数 $\mathbb{N}$上， $\mathbb{N}$上的代数几何以非常基础的方式体现了正性[Bor16]。

Szczesny [Szc11] 首次提出了在 $\mathbb{F}_1$ 上定义箭图表示的概念，并将其视为域 $\mathbb{F}_q$ 上箭图 Q 的表示范畴 $\mathrm{Rep}(\mathrm{Q}\ \mathbb{F}_q)$ 的一种退化组合模型；$\mathbb{F}_q$-向量空间被 $\mathbb{F}_1$-向量空间（有限基点集）取代，而 $\mathbb{F}_q$-线性映射被 $\mathbb{F}_1$-线性映射（基点集映射 $\mathrm{f}:(\mathrm{V}\ 0_V)\to(\mathrm{W}\ 0_W)$，满足 $\mathrm{f}|_{V\setminus f^{-1}(\{0_W\})}$是单射）取代。Szczesny 证明了范畴 $\mathrm{Rep}(\mathrm{Q}\ \mathbb{F}_1)$ 具有若干良好性质。他还研究了与 $\mathrm{Rep}(\mathrm{Q}\ \mathbb{F}_1)$ 相关的霍尔代数及其与 Kac-Moody 代数的关系，并将其视为 Ringel [Rin90] 和 Green [Gre95]定理在 $\mathrm{q}=1$ 时的退化版本。

尽管这种表示具有有限性和组合性，但我们总能函子性地从 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上的表示得到 Q 在域 k 上的表示：有限基点集 $(\mathrm{V}\ 0_V)$ 定义了一个向量空间 V_k，其基为 $\mathrm{V}-\{0_V\}$。这诱导出一个忠实（但通常不满）的函子：

$$k\otimes_{\mathbb{F}_1} - : \mathrm{Rep}(Q,\mathbb{F}_1)\to\mathrm{Rep}(Q,k). \tag{1}$$

在 [JS20 中，JS21], 第一作者和第三作者引入了一个概念，即针对 $\mathbb{F}_1$ 上箭图表示的系数箭图，并将表示 $\mathbb{V}\in\mathrm{Rep}(\mathrm{Q}\ \mathbb{F}_1)$ 解释为某些箭图映射

2020年数学主题分类：主要分类号 16G20；次要分类号 05E10、16G60、17B35。关键词与短语：箭图表示、系数箭图、覆盖、箭图格拉斯曼簇、李代数、伪树。

$\Gamma_{\mathbb{V}} \to Q$，其中 $\Gamma_{\mathbb{V}}$ 是由 $\mathbb{V}$ 构造的箭图。箭图 $\Gamma_{\mathbb{V}}$（连同其到 Q 的结构映射）因类似于 Ringel [Rin98] 定义的系数箭图，而被称为 Q 的系数箭图。系数箭图这一概念是我们的关键工具，可将关于 $\mathbb{F}_1$ 上 Q 的箭图表示（以及将其扩展到 $\mathbb{F}_q$ 或 $\mathbb{C}$ 上）的各种问题转化为纯粹的组合问题。

例 1.1. 考虑以下箭图：

$$Q = \left(\alpha_1 \circlearrowright \bullet \circlearrowleft \alpha_2 \right)$$

令 $\mathbb{V} = \{V_0, f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}\}$ 为 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示，其中 $V_0 = \{0_{V_0}, 1, 2, 3\}$, $f_{\alpha_1}(n) = \max\{0, n-1\}$, 且 $f_{\alpha_2}(n) = \max\{0, n-2\}$。于是，可以将 $\mathbb{V}$ 编码为一个“着色箭图” $\Gamma_{\mathbb{V}}$。顶点是 V_0 的非零元素，箭则指出每个元素经由 f_{α_1}（蓝色虚线）和 f_{α_2}（红色）映射到何处：

$$\Gamma_{\mathbb{V}} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \xleftarrow{\quad} & 2 \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & 3 & \end{array} \right)$$

$\Gamma_{\mathbb{V}}$ 的着色可以通过如下到 Q 的结构映射来编码：

$$F: \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & \xleftarrow{B_1} & 2 \\ & {\scriptstyle R}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle B_2} & \\ & 3 & \end{array} \right) \longrightarrow \left(\alpha_1 \circlearrowright \bullet \circlearrowleft \alpha_2 \right) \tag{2}$$

$\Gamma_{\mathbb{V}}$ 的所有顶点都映射到 Q 的顶点，R 映射到 α_2，而 B_1, B_2 映射到 α_1。

事实上，我们研究 $\mathbb{F}_1$ 上的箭图表示的动机，与 Tits 最初的动机一致：寻找 $\mathbb{F}_1$ [Tit56]; 也就是寻找几何结构中的某些组合核心（若存在）。具体而言，我们旨在发展 $\mathbb{F}_1$ 上箭图表示的理论，通过基变换函子 (1) 来处理 $\mathbb{C}$（或 $\mathbb{F}_q$）上的箭图表示问题。例如，在 [JS21], 中，我们运用 [Ire11] 和 [Hau12] 中的技巧，仅通过计数系数箭图的（后继封闭）子箭图来计算箭图格拉斯曼簇的欧拉示性数。在 [JS21], 中，我们证明，对于若干类箭图格拉斯曼簇，可以通过一种纯组合的方法计算欧拉示性数，即“计数 $\mathbb{F}_1$-有理点”。请注意，我们的结果严格涵盖树模和带模。参见例 2.24。

受表示论中有限维代数的温和-野性二分启发，在 [JS20], 中，第一和第三作者引入了一个增长函数，用于计数不可分解幂零表示的同构类（定义 2.14）。该增长函数在箭图上定义了一种序关系 $\leq_{nil}$，进而在箭图上定义了一种等价关系 $\approx_{\text{nil}}$。文献 [JS20] 证明，树、单环箭图 $\mathbb{L}_1$ 和双环箭图 $\mathbb{L}_2$ 属于不同的等价类。更确切地说，树构成了纽约州上有限表示型连通箭图的等价类 $\mathbb{F}_1$；而 $\mathbb{L}_1$ 连同型 $\mathbb{A}$ 仿射 Dynkin 箭图，构成了 $\mathbb{F}_1$ 上所有有界表示型连通箭图的等价类。此外，对于任意箭图 Q，若秩 $H_1(Q\ \mathbb{Z}) \geq 2$，则 $Q \leq_{nil} \mathbb{L}_2$ 且 $Q \approx_{\text{nil}} \mathbb{L}_2$。尚未探索的是由真伪树构成的未知领域，即那些不属于型 $\tilde{\mathbb{A}}$、但仍满足 $H_1(Q\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的连通 Q。已知这类箭图都严格大于 $\mathbb{L}_1$，且有 $\mathbb{L}_2$ 作为上界；但尚不清楚它们是否彼此等价，或是否等价于 $\mathbb{L}_2$。

在第 3 节中，我们完全分类了满足等价关系 $\approx_{\text{nil}}$ 的箭图。为此，我们递归地计数真伪树 Q 的系数箭图 Γ（其顶点数固定）。由此，我们证明了以下结论。

定理 A（推论 3.7）。设 Q 为真伪树。那么

$$Q \approx_{\text{nil}} Q', \text{ where } Q' = \quad \bullet \longrightarrow \bullet \circlearrowleft$$

接下来，我们研究与 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示相关的李代数。经典地，人们会为有限阿贝尔范畴赋予一个霍尔代数。Dyckerhoff 和 Kapranov [DK19] 将这一构造推广到了原精确范畴。特别地，可以得到范畴 Rep(Q $\mathbb{F}_1$) 的霍尔代数，其中对象是 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示。详情见第 2.4 节。在这种情况下，Rep(Q $\mathbb{F}_1$) 的霍尔代数是由不可分解对象定义的李代数的包络代数。

如果连通箭图 Q 的 $H_1(Q\ \mathbb{Z})$˜的秩至多为一，我们就称 Q 为伪树（不一定是真伪树）。换言之，伪树或者是树、类型为 $\mathbb{A}$ 的箭图，或者是上文定义的真伪树。由 [JS21], 中的结果可直接推出，伪树 Q 的任意幂零不可分解表示的系数箭图仍是伪树。令 $\mathscr{T}_Q(n)$（分别地，$\mathscr{P}_Q(n)$）表示 Rep(Q $\mathbb{F}_1)_{\text{nil}}$ （幂零表示）中 n 维不可分解对象的同构类集合，其中其系数箭图为树（分别地，为伪树但非树）。令 $\mathscr{T}_Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_Q(n)$ 和 $\mathscr{P}_Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_Q(n)$。请注意，在 [JS21], 中，第一作者和第三作者研究了与树及 $\mathbb{A}$ 型仿射 Dynkin 箭图相关的李˜代数。以下定理将这些结果推广到真伪树。

定理 B（定理 4.6）。设 Q 为一伪树。令 $\mathfrak{n}$ 为 Q 的幂零不可分解表示的李代数，且 $\mathfrak{p} = \text{Span}(\mathscr{P}_Q)$。则有以下结论：

（1）作为李代数，$\mathfrak{n}$ 由 $\mathscr{T}_Q$生成。（2） $\mathfrak{p}$是 $\mathfrak{n}$的李理想。作为李代数，$\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 的同构类仅取决于 Q 的底层无向图。

最后，我们将注意力转向箭图覆盖。在 [JS21], 中，第一作者和第三作者证明：当 $\mathbb{F}_1$-表示 M 的系数箭图 Γ_M 配备了满足某些良好条件的顶点上的整数值函数（定义 2.21、2.22）时，可以通过计数 M 的系数箭图的子箭图，以纯组合的方式计算箭图格拉斯曼簇的欧拉示性数（定理 2.23）。在第 5 节中，我们通过考察系数箭图的覆盖和收缩，进一步探索这一思路。特别地，我们证明了以下结论以及其他结果。

定理 C（命题 5.10）。设 Q 为一个箭图。对于每个 $e \in Q_1$, ，都可以构造一个覆盖 $c_e : \Gamma_e \to Q$，使其具有能够区分顶点的良分次。

本文组织如下。第 2 节中，我们回顾 $\mathbb{F}_1$-箭图表示的基本定义和事实。第 3 节中，我们证明定理 A，讨论计数伪树的不可分解幂零表示的同构类的增长函数的渐近行为。第 4 节中，我们证明定理 B，给出关于伪树的 $\mathbb{F}_1$-表示的李代数的结构性结果。最后，在第 5 节中，我们探讨覆盖这一概念，并证明定理 C。

致谢：本研究的部分工作是在第一作者访问 KAIST 并拜访第二作者期间完成的。第一作者感谢 KAIST 的热情款待。

2. 预备知识

2.1 $\mathbb{F}_1$-箭图表示。关于 $\mathbb{F}_1$ 的箭图表示，是通过将向量空间范畴替换为“$\mathbb{F}_1$-向量空间”范畴而得到的。

定义 2.1. 一个 $\mathbb{F}_1$-向量空间是一个有限 pointed 集 $(V\ 0_V)$。V 的维数为 $\dim_{\mathbb{F}_1} V = |V| - 1$。一个 $\mathbb{F}_1$-线性映射

$$f : (V, 0_V) \to (W, 0_W)$$

在 $\mathbb{F}_1$-向量空间之间是一个 pointed 函数 f，其在 $(V - f^{-1}(0_W))$ 上的限制是单射。我们称 $\mathrm{Vect}(\mathbb{F}_1)$ 为 $\mathbb{F}_1$ 上的向量空间范畴，其对象是 $\mathbb{F}_1$ 向量空间，态射是 $\mathbb{F}_1$-线性映射。

定义 2.2. 箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 是一个有限有向图[1]，，其中

(1) Q_0（分别地，Q_1）是顶点（分别地，箭）的有限集合；

(2) s 和 t 是函数

$$s, t : Q_1 \to Q_0$$

将 Q_1 中的每个箭映射到 Q_0中的源点和目标点。

设 Q 和 Q′ 为箭图。箭图映射 $c : Q \to Q'$ 是由一对函数组成的

$$c_i : Q_i \to Q'_i, \quad \text{for } i = 0, 1,$$

满足以下条件:

$$s(c_1(\alpha)) = c_0(s(\alpha)) \text{ and } t(c_1(\alpha)) = c_0(t(\alpha)), \quad \forall \alpha \in Q_1.$$

箭图映射 c 是单射（分别地，满射）当且仅当 c_0 和 c_1 是单射（分别地，满射）。

若 Q 连通，则其底层图 Q 可视为一个连通的 1-单形。略微滥用记号，我们用 $H_1(Q, \mathbb{Z})$ 表示 Q 的第一同调群（取整数系数）。注意，$H_1(Q, \mathbb{Z})$ 是一个有限生成自由阿贝尔群。

定义 2.3. 设 Q 为一个连通箭图。若 $\mathrm{rank}\, H_1(Q, \mathbb{Z}) \leq 1$，则称 Q 为伪树。若 Q 是伪树，且既非树也非 $\mathbb{A}$ 型箭图（即简单环的任意一种定向），则称 Q 为真伪树。

真伪树将是本文关注的重点。特别地，我们将研究其 $\mathbb{F}_1$-表示，如下所定义。

定义 2.4. [Szc11，定义 4.1] 设 Q 为一个箭图。Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示是一个集合 $\mathbb{V} = (V_i, f_\alpha), i \in Q0, \alpha \in Q_1,$，其中 V_i 是 $\mathbb{F}_1$-向量空间，$f_\alpha : V^{s(\alpha)} \to V^{t(\alpha)}$ 是 $\mathbb{F}_1$-线性映射。

定义 2.5. [Szc11，定义 4.3] 设 $\mathbb{V} = (V_i, f_\alpha)$ 是 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示。

(1) $\mathbb{V}$ 的维数为 $\dim(\mathbb{V}) = \sum_{i \in Q_0} \dim(V_i)$。 (2) $\mathbb{V}$ 的维数向量是 $|Q_0|$-元组 $\dim(\mathbb{V}) = (\dim(V_i))_{i \in Q_0}$。

$\mathbb{F}_1$-表示的幂零性和 $\mathbb{F}_1$-表示的不可分解性等概念，均以类似于域上的情形定义。精确定义见 [JS21，第 2] 节。

对于域 $\mathbb{F}_1$ 上箭图 Q 的表示 $\mathbb{V} = (V_i, f_\alpha)$ 和 $\mathbb{W} = (W_i, g_\alpha)$，一个态射 $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ 是一组 $\mathbb{F}_1$-线性映射 $(\phi_i)_{i \in Q_0}$，其中 $\phi_i : V_i \to W_i$，使得对每个 $i \in Q_0$，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{s(\alpha)}} & W_{s(\alpha)} \\ \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle g_\alpha} \\ V_{t(\alpha)} & \xrightarrow{\phi_{t(\alpha)}} & W_{t(\alpha)} \end{array} \tag{3}$$

我们令 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbb{F}_1)$ 表示 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上的表示范畴，而 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbb{F}_1)_{\mathrm{nil}}$ 是由幂零表示组成的全子范畴。

对于任意域 k 和 $\mathbb{F}_1$-向量空间 V，我们令 V_k 表示以 $V - \{0_V\}$为基的向量空间。对于一个 $\mathbb{F}_1$-线性映射 $f : V \to W$，我们令 f_k表示由 f 诱导的从 V_k到 W_k的线性映射。这定义了一个基变换函子 $k \otimes_{\mathbb{F}_1} - : \mathrm{Rep}(Q, \mathbb{F}_1) \to \mathrm{Rep}(Q, k)$。对于 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示 M，我们记 $M_k := k \otimes_{\mathbb{F}_1} M$。当然，基变换函子也限制到幂零表示上。

[1]我们允许多重箭和环

2.2 系数箭图。Ringel [Rin98] 最早引入了系数箭图，将其作为研究箭图表示的一种组合工具。在 [JS20，JS21], 中，第一位和第三位作者用其他箭图（也称为系数箭图）重新表述了$\mathbb{F}_1$-表示。

定义 2.6. 设 $\mathbb{V}$ 是 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示。其系数箭图 $\Gamma_{\mathbb{V}}$ 的顶点集如下：

$$(\Gamma_{\mathbb{V}})_0 = \bigsqcup_{v\in Q_0} (\mathbb{V}_v \setminus \{0\}).$$

对每个 $\alpha \in Q_1$,，当且仅当 $\mathbb{V}_\alpha$(i) =j 时，在 $\Gamma_{\mathbb{V}}$ 中画一条从 i 到 j 的箭 (α,i, j)。接着为$\Gamma_{\mathbb{V}}$ 关联一个箭图映射 $c_{\mathbb{V}}$: $\Gamma_{\mathbb{V}} \to$Q。该映射在顶点上的定义如下：

$$c_{\mathbb{V}}(i) = v,$$

对所有 i $\in \mathbb{V}_v$成立。它在箭上的定义如下：

$$c_{\mathbb{V}}(\alpha, i, j) = \alpha.$$

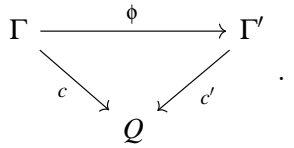
在 [JS21 的命题 3.7], 中，已证明 Rep(Q $\mathbb{F}_1$) 等价于一个范畴 $\mathscr{C}_Q$，其对象是绕行映射 c : $\Gamma \to$ Q。下面我们回顾这一构造，以及若干相关结果；这些结果最初在 [JS20]中得到了证明。

定义 2.7. 绕行是一个箭图映射 c : $\Gamma \to$Q，使得对于所有满足 $\alpha \neq \beta$的 α和β $\in \Gamma_1$，若 c(α) =c(β), 则 s(α) $\neq$ s(β) 且 t(α) $\neq$t(β)。

注意，若 M 是 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示，则 c_M : $\Gamma_M \to$Q 是一个缠绕。事实上，反过来亦成立：缠绕 c : $\Gamma \to$Q 唯一确定一个 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示（在同构意义下）。

D定义 2.8. [JS20，定义 3.8] 设 c : $\Gamma \to$ Q 和 c′ : $\Gamma' \to$ Q 为箭图映射。

(1) 系数态射 c $\to$ c′ 是一个箭图映射 ϕ: $\Gamma \to \Gamma'$，使得下图可交换：



系数态射 ϕ: c $\to$ c′ 是系数同构，当且仅当它在顶点和箭上均为双射。

(2) 若顶点集合 $\mathscr{U}$属于 Γ，则称其为后继封闭的，如果对于从 v 到 u 的每一条有向路径（位于 Γ 中），只要 u $\in \mathscr{U}$，就有 v $\in \mathscr{U}$。若一个全子箭图的顶点集是后继封闭的，则称该全子箭图为后继封闭的。

(3) 若顶点集合 $\mathscr{D}$ 属于 Γ，则称其为前驱封闭的；如果对 Γ 中从 d 到 v 的每条有向路径，d $\in \mathscr{D}$ 蕴含 v $\in \mathscr{D}$ 也成立。若一个全子箭图的顶点集是前驱封闭的，则称该全子箭图为前驱封闭的。

命题 2.9. *[*JS20，引理 3.*10]* 设 Q 为一个箭图。对于 Q 的任意两个 $\mathbb{F}_1$-表示 $\mathbb{V}$ =(V_u, fα) 和 $\mathbb{W}$ =(W_u,gα)，Hom($\mathbb{V}$,$\mathbb{W}$) 与从 $\Gamma_{\mathbb{V}}$ 的后继封闭全子箭图到 $\Gamma_{\mathbb{W}}$ 的前驱封闭全子箭图的系数同构集合之间存在一个双射。

推论 2.10. 设 Q 为一个箭图，M 和 N 是 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示。当且仅当 Γ_M 与 Γ_N 之间存在系数同构时，M $\cong$N。

定义 2.11. [JS21] 设 Q 为一个箭图。定义 $\mathscr{C}_Q$ 为一个范畴，其对象是箭图的缠绕 F : S $\to$ Q。态射 ϕ : (S, F) $\to$(S′, F′) 是一个有序三元组 ϕ =($\mathscr{U}_\phi$, $\mathscr{D}_\phi$, cϕ)，其中

(1) $\mathscr{U}_\phi$是 S 的一个全子箭图，其顶点集是后继封闭的，

(2) $\mathscr{D}_\phi$ 是 S′ 的一个全子箭图，其顶点集是前驱封闭的，并且 (3) c_ϕ : $\mathscr{U}_\phi \to \mathscr{D}_\phi$ 是一个系数同构。

若 (S, F) $\xrightarrow{\phi}$(S′, F′) 和 (S′, F′) $\xrightarrow{\Psi}$(S″, F″) 是 $\mathscr{C}_Q$ 中的两个态射，则它们的复合 (S, F) $\xrightarrow{\Psi\circ\phi}$ (S″, F″) 是有序三元组

$$\Psi\circ\phi = \left(\mathscr{U}_{\Psi\circ\phi}, \mathscr{D}_{\Psi\circ\phi}, c_{\Psi\circ\phi}\right) = \left(c_\phi^{-1}\left(\mathscr{U}_\Psi \cap \mathscr{D}_\phi\right), c_\Psi\left(\mathscr{U}_\Psi \cap \mathscr{D}_\phi\right), c_\Psi \circ c_\phi\right). \tag{4}$$

命题 2.12. *[*JS21, 命题 3.*7]* 设 Q 为一个箭图。那么存在一个范畴等价 F : $\mathscr{C}_Q \to$Rep(Q $\mathbb{F}_1$), 它将 Rep(Q $\mathbb{F}_1$)$_{\text{nil}}$ 限制为 $\mathscr{C}_Q$ 的满子范畴与之等价，该子范畴的对象是满足 Γ 无圈的缠绕 c : Γ → Q。

我们以一个将在第 4 节中用到的引理结束本节。

引理 2.13. *[*JS20, 引理 3.*12]* 设 Q 为一个箭图，E 是 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示，X 是 E 的一个子表示。

(1) Γ_X 是从 Γ_E 中删去不对应于 X 的顶点（以及与这些顶点相邻的箭）后得到的全子箭图。映射 c_X 是 c_E 在该子箭图上的限制。(2) 商 E/X 的系数箭图 $\Gamma_{E/X}$ 是从 Γ_E 中删去对应于 X 的顶点（以及与这些顶点相邻的箭）后得到的全子箭图。映射 $c^{E/X}$ 是 c_E 在该子箭图上的限制。(3) 如果

$$0 \to X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \to 0$$

是 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示范畴的一个短正合列，那么 Γ_E 可由不相交并 $\Gamma_X \sqcup \Gamma_Y$ 通过添加某些 α-着色的箭得到：对每个 $\alpha \in Q_1$，从 Γ_Y 的 α-汇点指向 Γ_X的 α-源点。在此分解下， Γ_X（分别为 Γ_Y）是 Γ_E 的前驱封闭（分别为后继封闭）子箭图。[2]

2.3 幂零不可分解 $\mathbb{F}_1$-表示的增长。本小节简要回顾 [JS20] 中引入的与箭图 Q 相关的增长函数的主要定义和定理。

定义 2.14. 设 Q 为一个箭图。那么 NI$_Q$: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是满足以下条件的函数

$$\mathrm{NI}_Q(n) = \#\{\text{isomorphism classes of } n\text{-dimensional indecomposables in } \mathrm{Rep}(Q, \mathbb{F}_1)_{\text{nil}}\}. \tag{5}$$

定义 2.15. 对于箭图 Q、Q′，我们定义如下预序 $\leq_{\text{nil}}$：

$$Q \leq_{\text{nil}} Q' \iff \exists\, x \in \mathbb{R}_{>0},\ y \in \mathbb{N} \text{ such that } \mathrm{NI}_Q(n) \leq x\mathrm{NI}_{Q'}(yn) \quad \forall n \gg 0. \tag{6}$$

预序 (6) 诱导出如下等价关系 $\approx_{nil}$：

$$Q \approx_{nil} Q' \iff Q \leq_{\text{nil}} Q' \text{ and } Q' \leq_{\text{nil}} Q. \tag{7}$$

定义 2.16. 给定两个函数 f : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ 和 g : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$，若存在正实数 M >0，使得对于 n $\gg 0$, 有 f(n) $\leq$ Mg(n)，则记作 f $=$ O(g) 或 f(n) $=$O(g(n))。

注 2.17. 根据上述定义，Q $\leq_{\text{nil}}$ Q′ 当且仅当对于某个 y $\in \mathbb{N}$，NI$_Q$(n) $=$O(NI$_{Q'}$(yn))。于是，我们可以将 $\leq_{\text{nil}}$ 的定义扩展到所有函数 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$，规定 f $\leq_{\text{nil}}$ g 当且仅当对于某个 y $\in \mathbb{N}$，f (n) $=$ O(g(yn))。那么，f $\approx_{\text{nil}}$ g 当且仅当 f $\leq_{\text{nil}}$ g 且 g $\leq_{\text{nil}}$ f。以下基本事实在全文中都会有用：对于任意两个实数 a、b $\in (1,\infty)$，都有 $a^n \approx_{\text{nil}} b^n$。

[2]所谓 Γ_E 的前驱封闭（分别为后继封闭）子 quiver，是指满足以下条件的全子箭图 Γ：对于 u,v $\in$V (Γ_E)，若 u $\in$V (Γ)（分别若 v $\in$V (Γ)），且存在一条从 v 到 u 的任意有向路径，则 v $\in$V (Γ)（分别 u $\in$V (Γ)）。

回想一下，箭图 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上具有有限表示型，当且仅当 $\mathrm{Rep}(Q\ \mathbb{F}_1)_{nil}$ 有有限多个不可分解对象的同构类。按照定义 2.15 中的序关系，我们有如下结论：

定理 m 2.18. *[*JS20，定理5。*3]* 设 Q 为连通箭图。以下条件等价： *nt.*

(1) Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上是有限表示型。(2) Q 是一棵树。(3) $Q \approx_{nil} \mathbb{L}_0$。

回顾一下，若存在正数 M，使得对任意 $n \gg 0$，$\mathrm{NI}\varrho(n) \leq M$，则称箭图 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上具有有界表示型。我们有以下结果。

定理 2.19。 *[*JS20，定理5。*14]* 设 Q 为连通箭图。以下条件等价。

(1) Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上具有有界表示型。(2) $Q \leq_{\mathrm{nil}} \mathbb{L}_1$。(3) Q 或是一棵树，或是一个环箭图。

此外，Q 是环箭图，当且仅当 $Q \approx_{nil} \mathbb{L}_1$。

最后，我们有如下结果，表明 $\mathbb{L}_2$ 是一个“普适上界”。

定理 2.20. *[*JS20，定理 4.6，命题 5.*4]* 对于任意连通箭图 Q，都有 $Q \leq_{\mathrm{nil}} \mathbb{L}_2$。此外，若 $\mathrm{rank}\ H_1(Q\ \mathbb{Z}) \geq 2$，则 $Q \approx_{\mathrm{nil}} \mathbb{L}_2$。

2.4 $\mathbb{F}_1$-表示的霍尔代数与李代数。本小节简要回顾 $\mathbb{F}_1$ 上箭图表示的霍尔代数。有关详情，请参阅 [JS20、JS21、Szc11]。

令 Iso(Q) 为 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示的同构类集合。其底层集合如下：

$$H_Q := \{f : \mathrm{Iso}(Q) \to \mathbb{C} \mid f([M]) = 0 \text{ for all but finitely many } [M].\} \tag{8}$$

元素 $f \in H\varrho$ 的支撑是集合 $\mathrm{supp}(f) = \{[M] \in \mathrm{Iso}(Q) \mid f([M]) \neq 0\}$。对于每个 $[M] \in \mathrm{Iso}(Q)$，令 $\delta_{[M]}$ 为 $H\varrho$ 中支撑于 $[M]$ 的 δ 函数。特别地，我们将 $H\varrho$ 视为由 $\{\delta_{[M]}\}_{[M]\in \mathrm{Iso}(Q)}$ 张成的 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。为简化记号，我们将 δ 函数 $\delta_{[M]}$ 记为 $[M]$。在 Iso(Q) 中的元素上定义如下乘法：

$$[M] \cdot [N] := \sum_{R \in \mathrm{Iso}(Q)} \frac{a^R_{M,N}}{a_M a_N} [R], \tag{9}$$

其中 $a_M = |\mathrm{Aut}(M)|$ 且 $a^R_{M,\ N}$ 是以下形式的“短正合列”的数量：[3]

$$0 \to N \to R \to M \to 0.$$

然后，可以像经典情形那样轻易验证以下等式：

$$\frac{a^R_{M,N}}{a_M a_N} = |\{L \leq R \mid L \simeq N \text{ and } R/L \simeq M\}|.$$

将乘法 (9) 线性延拓到 $H\varrho$，我们得到一个 $\mathbb{C}$ 上的结合代数 $H\varrho$。此外，可以验证 $H\varrho$ 还配备了如下定义的余乘法：

$$\Delta : H_Q \to H_Q \otimes_{\mathbb{C}} H_Q, \quad \Delta(f)([M],[N]) = f([M \oplus N]). \tag{10}$$

霍尔代数 $H\varrho$ 是分次、连通、余交换的霍普夫代数，因此根据 Milnor–Moore 定理，$H\varrho$ 同构于其由本原元（即不可分解表示）构成的李子代数 $\mathfrak{n}_Q$ 的万有包络代数。特别地，可以通过系数箭图的某些“堆叠运算”来描述 $H\varrho$ 的代数结构；详情参见 [JS20]。

[3]对于向量空间 $\mathbb{F}_1$ 之间的给定态射 φ，ker(φ) 和 coker(φ) 的定义与经典情形类似。所谓短正合列，是指 ker = coker。详情见 [JS20]。

请注意，对于幂零表示的霍尔代数 $H_{Q,\ \mathrm{nil}}$，上述结论同样成立。特别是，$H_{Q,\ \mathrm{nil}}$ 是由幂零不可分解表示构成的李代数 $\mathfrak{n}_{Q,\ \mathrm{nil}}$ 的万有包络代数。

2.5 分次与良好序列。我们将回顾 [JS21] 中的一些基本定义。箭图 Γ 上的一个分次，简单来说就是一个函数 $\partial\colon \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$。我们将关注 Γ 上满足某些条件的有限分次序列。这样的分次序列的存在，使我们能够以纯组合的方式计算某些箭图格拉斯曼簇的欧拉示性数。

定义 2.21. 设 $c\colon \Gamma \to Q$ 是一个缠绕。

(1) 若分次 $\partial : \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$ 满足：对于 $\alpha,\beta \in \Gamma_1$，若 $c(\alpha) = c(\beta)$，则称其为良分次

$$\partial(s(\alpha)) - \partial(t(\alpha)) = \partial(s(\beta)) - \partial(t(\beta)) \tag{11}$$

(2) 若良分次 ∂ 满足：对于每个 $\alpha \in Q_1$ 以及满足 $c_1(\beta) = \alpha$ 的 $\beta \in \Gamma_1$，都有 $\partial(t(\beta)) - \partial(s(\beta)) \neq 0$，则称其为非退化。(3) 设 $\{\partial_0,\dots,\partial_i\}$ 是 Γ 上的分次。若对于每个 α, $\beta \in \Gamma_1$，以下条件均成立，则称分次 ∂ 为 $\{\partial_0,\dots,\partial_k\}$-良分次：

$$c(\alpha) = c(\beta) \quad \text{and} \quad \partial_i(s(\alpha)) = \partial_i(s(\beta)), \quad \partial_i(t(\alpha)) = \partial_i(t(\beta)) \quad \forall i = 1,\dots k. \tag{12}$$

这意味着

$$\partial(s(\alpha)) - \partial(t(\alpha)) = \partial(s(\beta)) - \partial(t(\beta)) \tag{13}$$

(4) 序列 $\{\partial\} := \{\partial_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个良好序列，如果对每个 i，∂_i 是 $(\partial_1,\dots,\partial_{i-1})$-良分次，且 ∂_1 是一个良分次。

定义 2.22. 设 $c : \Gamma \to Q$ 是一个缠绕，且 $\{\partial\}$ 是 Γ 上的一个良好序列。若对每个 $u, v \in \Gamma_0$，都存在 ∂_i 使得 $\partial_i(u) \neq \partial_i(v)$，则称 $\{\partial\}$ 能区分 Γ 的顶点。特别地，若对每个 $u \neq v \in \Gamma_0$，都有 $\partial(u) \neq \partial(v)$，则称良分次 ∂ 能区分 Γ 的顶点。

定理 2.23. *[JS21，命题 5.2]* 设 Q 是一个箭图，M 是 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示；设 $c : \Gamma \to Q$ 是相应的缠绕。假设 Γ 有一个能区分 Γ 的顶点的良好序列。那么对于任意维数向量 $d \leq \dim(M)$，箭图格拉斯曼簇 $\mathrm{Gr}^Q_{\underline{d}}(M_{\mathbb{C}})$ 的欧拉示性数 $\chi_{\underline{d}}(M_{\mathbb{C}})$ 等于以下集合的基数：

$$\{N \leq M \mid \underline{\dim}(N) = \underline{d}\} \tag{14}$$

下面的例子表明，我们的结果比 Haupt [Hau12] 更一般 .

例 2.24. [Hau12, 例 3.7] 考虑以下箭图：

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\beta_4}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} 3 \right)$$

考虑以下系数箭图 Γ_M：

$$F : \Gamma_M = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\beta_4}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} 2' \underset{\beta_4}{\overset{\beta_2}{\rightrightarrows}} 3' \right) \to Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\beta_4}{\overset{\beta_1}{\rightrightarrows}} 3 \right)$$

那么，$M_{\mathbb{C}}$ 既不是树，也不是带，也不是薄表示。不过，请注意， Γ_M 是一个伪树，因此我们可以应用 [JS21] 中的定理来计算如下内容：

$$\chi^{Q}_{(0,1,2)}(M_{\mathbb{C}}) = 2$$

因为与 (0, 1, 2) 对应的 Γ_M 有两个前驱闭子箭图，如下所示：

$$3 \xleftarrow{\beta_1} 2 \xrightarrow{\beta_4} 3' \ , \quad 3 \xleftarrow{\beta_2} 2' \xrightarrow{\beta_3} 3'$$

3. $\mathbb{F}_1$ 表示的增长

本节中，我们证明定理 A。在小节 3.1 中，我们先考察具有一个环的有根树这一特殊情形，然后在后续的第 3.2 节（同向定向情形）和第 3.3 节（无圈情形）中，利用这一结果研究伪树的一般情形。

3.1 具有一个环的有根树。设 T 为一棵有根树，Q_T 为通过将 $\mathbb{L}_1$ 的顶点与 T 的根识别而得到的箭图，如下所示。

$$Q_T := \quad \begin{array}{c} T \\ \vdots \\ \bullet \\ \circlearrowleft \end{array} \tag{15}$$

设 S_k 为 T 的有根子树集合，其中每棵子树恰有 k 个顶点且根相同，并且 $s_k = |S_k|$。Q_T 的 n 维不可分解表示的系数箭图具有以下形式：

$$\begin{array}{ccccccccc} T_i & & & & T_\ell & & & & T_j \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \bullet & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \tag{16}$$

其中，T_i 是 T 的一个有根子树，恰有 i 个顶点，而式 (16) 中出现的顶点总数恰为 n。注意，每个 T_i 的根都与有向路径上的一个顶点相识别。事实上，这可以等价地理解为：我们将集合 $[n] = \{1 \dots, n\}$ 分拆为

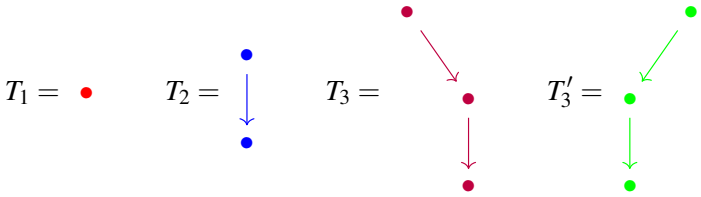
$$[n] = \lambda_1 \sqcup \cdots \sqcup \lambda_r,$$

其中存在一个序列 $1 = n_1 \le n_2 \le \ldots \le n_r \le n_{r+1} = n$，使得对所有 i，均有 $\lambda_i = \{n_i、n_i+1、\ldots\ldots、n_{i+1}\}$。我们首先构造一条单色有向路径 $\lambda_1 \xrightarrow{\alpha} \lambda_2 \xrightarrow{\alpha} \cdots \xrightarrow{\alpha} \lambda_r$，其中 α 是 $\mathbb{L}_1$中的环。若 $|\lambda_i| = a_i$，则随后在 λ_i处附加一棵有根子树 T^{a_i}，其顶点数恰好为 a_i（包括与 T_i的根重合的那个有向路径顶点）。

例 3.1。考虑以下箭图。

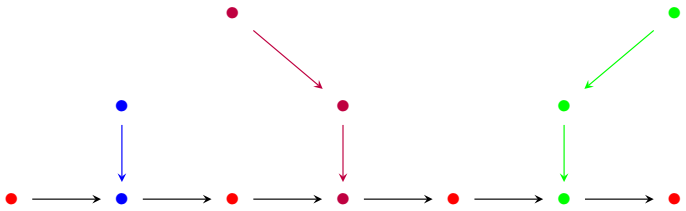
$$Q_T = \quad \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \bullet & \\ & \downarrow & \\ & \bullet & \\ & \circlearrowleft & \end{array} \ , \qquad T = \quad \begin{array}{ccc} \bullet & & \bullet \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \bullet & \\ & \downarrow & \\ & \bullet & \end{array} \tag{17}$$

那么，我们有



$$S_1 = \{T_1\}, \quad S_2 = \{T_2\}, \quad S_3 = \{T_3, T_3'\}, \quad S_4 = \{T\}.$$

设 $\mathbb{V}$ 是一个 12 维表示，其系数箭图如下所示：



(18)

这可以对应于以下分拆：

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \{2,3\}, \quad \lambda_3 = \{4\}, \quad \lambda_4 = \{5,6,7\}, \quad \lambda_5 = \{8\}, \quad \lambda_6 = \{9,10,11\}, \quad \lambda_7 = \{12\},$$

其中，我们将 T_1 附加到每个红色顶点 $\{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_7\}$，将 T_2 附加到 λ_2，将 T_3 附加到 λ_4，并将 T_3' 附加到 λ_6。

固定一棵有根树 T，并令 $Q = Q_T$。可以观察到，NI_Q 可递归地写出（通过考虑 $\lambda = \lambda_1$ 的最后一个分拆 λ_r 的大小 a_r，……，λ_r），如下所示：

$$NI_Q(n) = s_1 NI_Q(n-1) + s_2 NI_Q(n-2) + s_3 NI_Q(n-3) + \cdots + s_t NI_Q(n-t), \quad \forall n \geq 2t, \tag{19}$$

其中，t 是树 T 的顶点数。更明确地说，考虑一个 n 维幂零不可分解表示 M。设 $\lambda = \lambda_1 \sqcup \cdots \sqcup \lambda_r$ 为其关联分拆，其中 T_i 是与 λ_i 对应的有根子树。由于 $n \geq 2t$，从 M 中删去 T_r 后得到的表示 M' 是不可分解的，且满足 $\dim_{\mathbb{F}_1}(M') \geq t$。特别地，系数箭图 $\Gamma_{M'}$ 中至少有一个顶点以 T 的根着色。显然，可以通过插入一支箭来从有序对 (M', T_r) 重构 M，这支箭的源点位于 M' 中，目标点位于 T_r 中。在假设 $n \geq 2t$ 的条件下，这样的有序对有 $s_{a_r} NI_Q(n - a_r)$ 种选择。[4]

由递推公式 (19)，我们得到以下用于计算 $NI_Q(n)$ 的多项式：

$$p_T(x) := x^t - s_1 x^{t-1} - s_2 x^{t-2} - \cdots - s_t = 0. \tag{20}$$

令 $c_1, \ldots, c_r$ 为 $p_T(x)$ 的不同根。根据线性递推理论，我们可以写成

$$NI_Q(n) = \sum_{i=1}^{r} f_i(n) c_i^n$$

对于适当的多项式 $f_i(n)$ 和 $n \geq 2t$。设 c 是 (20) 的一个根，且其绝对值最大。则 $NI_Q(n) = O(n^t |c|^n)$，特别地，若 $|c| > 1$，则 $NI_Q(n) = O(|c|^{2n})$。若 T 有多个顶点，则此条件成立。事实上，若 $t > 1$，则 $\deg(p_T) > 1$，且 $s_t = 1 = s_1$。特别地，

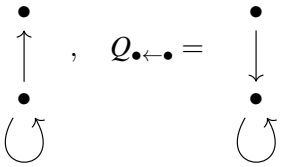
$$p_T(1) = 1 - \sum_{i=1}^{t} s_i \leq -1,$$

[4]如果 $n < 2t$，那么删除通常会产生少于 $s_{a_r} NI_Q(n - a_r)$ 个有序对 (M', T_r)。问题在于，M'总是包含一个根着色顶点，而维数为 $<t$ 时通常存在不含根着色顶点的不可分解表示。

并且当 $x \to +\infty$ 时，$p_T(x) \to +\infty$。因此，p_T 有一个绝对值严格大于 1 的根 c。特别地，对于某个 $a \in (1,\infty)$，有 $NI_Q(n) = O(a^n)$。

现在，我们有如下结论。我们将使用以下记号：

$$Q_{\bullet\to\bullet} = \quad , \quad Q_{\bullet\leftarrow\bullet} =$$



命题 3.2. 设 T 和 T′ 是有根树，并假设 T 的顶点数大于 1。那么 $Q_T \approx_{nil} Q_{T'}$ 当且仅当 T′ 的顶点数大于 1。

证明. 必要性由以下事实得出：$Q_{T'}$ 具有有界表示型当且仅当 T′ 只有一个顶点。由于 T 的顶点数大于 1，$Q = Q_{\bullet\to\bullet}$ 或 $Q = Q_{\bullet\leftarrow\bullet}$ 是 Q_T 的子 quiver。注意，对于任一种 Q 的选取，$NI_Q(n) = NI_Q(n-1) + NI_Q(n-2)$，其中 $n \geq 4$。此外，$NI_Q(4) = 5$ 且 $NI_Q(5) = 8$，因此由比内公式可得

$$\mathrm{NI}_Q(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

对所有 $n \geq 4$ 均成立。特别地，$NI_Q(n)$ 渐近于 $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$，因此当 n 足够大时，$NI_Q(n) > d^n$，其中 $d = \sqrt{5}/2$。由于 Q 是 Q_T 的子 quiver，$Q \leq_{\mathrm{nil}} Q_T$。我们声称 $Q_T \leq_{\mathrm{nil}} Q$ 也成立。根据上一段中的论证，存在 $a \in (1,\infty)$，使得 $NI_{Q_T}(n) = O(a^n)$。但请注意

$$a^n = d^{\log_d(a)n} \leq d^{\lceil \log_d(a) \rceil n}$$

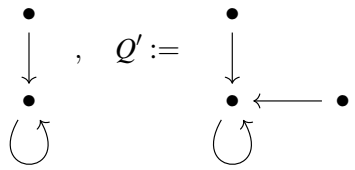
因此

$$\mathrm{NI}_{Q_T}(n) = O(a^n) = O(d^{\lceil \log_d(a) \rceil n}) = O(\mathrm{NI}_Q(Kn)),$$

其中 $K := \lceil \log_d(a) \rceil$。这表明 $\mathrm{NI}_{Q_T} \leq_{\mathrm{nil}} Q$，如所声称的。由此可得 $Q_T \approx_{\mathrm{nil}} Q$，其中 $Q = Q_{\bullet\to\bullet}$ 或 $Q = Q_{\bullet\leftarrow\bullet}$。显然 $Q_{\bullet\to\bullet} \approx_{\mathrm{nil}} Q_{\bullet\leftarrow\bullet}$，故结论成立。□

例3.3。考虑以下两个箭图。

$$Q := \quad , \quad Q' := \qquad (21)$$



我们有 $Q \approx_{\mathrm{nil}} Q'$。事实上，由 Q 可得：

$$\mathrm{NI}_Q(n) = \mathrm{NI}_Q(n-1) + \mathrm{NI}_Q(n-2), \quad x^2 - x - 1 = 0, \quad c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

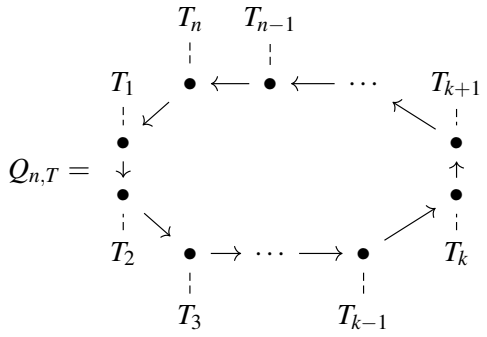
另一方面，由 Q′可得：

$$\mathrm{NI}_{Q'} = \mathrm{NI}_{Q'}(n-1) + 2\,\mathrm{NI}_{Q'}(n-2) + \mathrm{NI}_{Q'}(n-3), \quad x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0, \quad d > 2.$$

其中，c 和 d 分别是 $x^2 - x - 1$ 和 $x^3 - x^2 - 2x - 1$ 的绝对值最大的根。特别地，我们有 $Q \approx_{nil} Q'$。

3.2 具有同向中心环的伪树。事实上，我们的论证也可用于任意伪树。本小节中，我们首先考虑具有同向中心环的伪树：

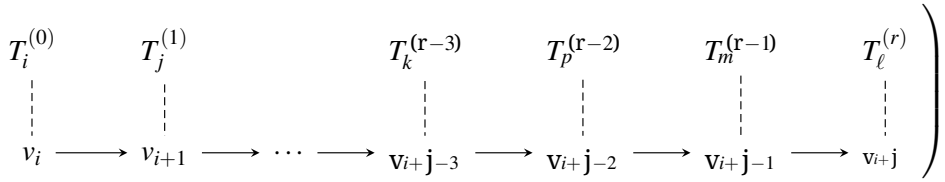
$$Q_{n,T} = \quad (22)$$



其中每个 T_i 都是一棵有根树，其根与环上的一个顶点重合。

设 $Q = Q_{n,\ T}$ 且 C 是 Q 的中心环。我们假设 C 是同向的，因此可以按顺时针方向将其顶点标记为 $v_1, v2$、.....、v_n；对于每个 $1 \le i < (n-1)$，都有一条箭 $\alpha_i : v_i \to v_{i+1}$，以及一条箭 $\alpha_n : v_n \to v_1$。为方便起见，我们将 C 的顶点和箭的下标扩展定义为 $v_i := v_i \bmod n$ 以及 $\alpha_i := \alpha_i \bmod n$，其中 $i \in \mathbb{Z}$。我们用 T_i 表示如 (22) 所示附着于 v_i 的有根树，并用 t_i 表示 T_i 的顶点总数（包括作为根的 v_i）。我们还用 $s^{(i)}{}_k$ 表示 T_i 中恰有 k 个顶点的有根子树的数量。Q 的 d 维幂零不可分解表示范畴 $\mathbb{F}_1$-表示 M 的系数箭图 Γ_M 具有以下形式：[5]

$$\Gamma_M = \quad (23)$$



其中，$T^{(i)}{}_d$ 是树 T_i 的一个有根子树，恰好包含 d 个顶点（根再次与有向路径的一个顶点相重合）。式（23）中出现的顶点数恰好为 d，因为它对应于 $Q_{n,T}$ 的一个 d 维表示。

我们将式（23）中的有向路径称为 M 的脊，而 $j+1$ 称为脊柱长度。顶点 v_i 是脊的源点（或起点），顶点 v_{i+j} 是目标点（或终点）。我们定义如下函数：

定义3.4. 设 Q 为一个真伪树，并遵循上述记号约定。对于所有 $1 \le i, f \le n$ 和 $j, d \in \mathbb{N}$，我们将 $Q_{i\to f}(j,d)$ 定义为 Q 的不可分解、幂零、d 维 $\mathbb{F}_1$ 表示中脊柱长度为 j、从 v_i 开始并于 v_f 结束的同构类数量。我们还定义

$$Q_{i\to f}(d) = \sum_{j\ge 0} Q_{i\to f}(j,d).$$

显然，以下关系对 $d \ge \max\{t_i\}$ 成立：

$$\mathrm{NI}_Q(d) = \sum_{1\le i,f\le n} Q_{i\to f}(d).$$

我们从以下基本观察开始：

命题3.5. 对于 $d \ge t_f + t_{f-1}$，我们有

$$Q_{i\to f}(j,d) = \sum_{k=1}^{t_f} s_k^{(f)} Q_{i\to(f-1)}(j-1, d-k),$$

[5]参见 [Szc11，定理 5] 以及 [JS20，定理 5.12]。

其中，涉及 C 的顶点的下标均按需要对 n 取模。特别是 $r;$

$$Q_{i\to f}(d)=\sum_{k=1}^{t_f} s_k^{(f)} Q_{i\to(f-1)}(d-k).$$

证明。设 M 是 Q 的一个 d 维、不可分解、幂零的 $\mathbb{F}_1$-表示范畴，其脊柱长度为 j，从 v_i 开始并以 v_f 结束。由于 $d \geq t_i + t_{i+1}$，我们必有 $j \geq 2$。于是，删除 Γ_M 中最后一棵有根树，便在这样的 M 与有序对 (N, T) 之间建立了双射对应，其中 N 是脊柱长度为 $j-1$、维数为 $d-k$ 的幂零不可分解对象，而 T 是 T_f 的一棵有根子树，含有 k 个顶点（对所有 $1 \leq k \leq t_f$）。脊柱长度为 $j-1$、维数为 $d-k$ 的不可分解对象共有 $Q_{i\to(f-1)}(j-1, d-k)$ 种选择，而每一个都恰好有 $s^{(f)}_k$ 种方式可扩展为脊柱长度为 j、维数为 $d-k$ 的不可分解对象。第一个关系显然成立，第二个关系可通过对第一个关系两边关于所有 $j \geq 0$ 求和得到。□

固定 i。假设对于所有 $1 \leq f \leq n$ 和 $d' < d$，数值 $Q_{i\to f}(d')$ 均已知。那么，上述关系表明，我们可以将 $Q_{i\to f}(d)$ 写成 $Q_{i\to(f-1)}$先前取值的非负线性组合；将 $Q_{i\to(f-1)}$写成 $Q_{i\to(f-2)}$ 先前取值的非负线性组合；依此类推。特别地，我们可以将 $Q_{i\to f}(d)$ 写成 $Q_{i\to(f-n)} = Q_{i\to f}$先前取值的非负线性组合。换言之，我们有如下结论：

推论 3.6. 对于 $d \geq t_f + t_{f-1}$，$Q_{i\to f}(d)$ 满足一个具有非负常系数的线性递推：

$$Q_{i\to f}(d)=\sum_{k=1}^{d_{i\to f}} \lambda_k^{(f)} Q_{i\to f}(d-k)$$

其中 $\lambda^{(f)}_k \in \mathbb{N}$ 且 $d_{i\to f} \in \mathbb{Z}_{>0}$。

容易证明，$\lambda^{(f)}_{d_{i\to f}} = 1$。因此，与上述递推相关联的特征多项式 $p_{i\to f}(d)$ 满足

(1) $p_{i\to f}(0) = -1$.(2)
$\lim_{x\to\infty} p_{i\to f}(x) = +\infty$.

由此可　知，hat $p_{i\to f}(d)$ 有一个绝对值为正的根。进而，这意味着：

推论 3.7。在上述记号约定下，

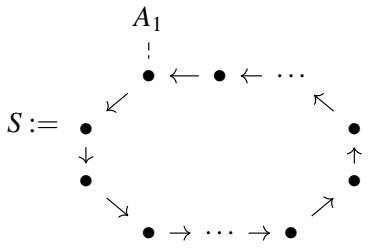
$$Q_{i\to f}(d) = O(r_{i\to f}^d)$$

$$\mathrm{NI}_Q(d) = O(r^d)$$

对于适当的 $r_{i\to f}$，$r \in (1,\infty)$。[6]特别地，$Q \approx_{\mathrm{nil}} Q_{\bullet\to\bullet}$，如式 (15) 所示。

证明。令 $Q' = Q_{\bullet\to\bullet}$。由于 $\mathrm{NI}_Q(d) = O(r^d)$，因此立即可得 $Q \leq_{\mathrm{nil}} Q'$。反之，不失一般性地假设 T_1 至少有两个顶点。则 Q 有一个形如

$$S := \quad (24)$$



[6]请再次参阅命题 3.2 之前的论证以及定义 2.16。

其中 $A_1 = \bullet \to \bullet$ 或 $\bullet \leftarrow \bullet$（视为有根树）。若 S 的中心环有 n 个顶点，则对所有 d，$NI_{Q'}(d) \leq NI_S(nd)$。事实上，设 M 是一个 d 维的幂零不可分解对象，是 Q′-表示，且其脊为

$$s_1 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots s_{j-1} \xrightarrow{\alpha_{j-1}} s_j.$$

˜特别地，M 的脊柱长度为 j，且 $j \leq d \leq 2j$。定义 M 为如下列步骤得到其系数箭图的 Q-表示：

(1) 将 Γ_M 脊柱中的每条箭替换为一条含 n 个顶点的有向路径，使脊柱变为

$$s_{1,1} \xrightarrow{\alpha_{1,1}} \cdots s_{1,n-1} \xrightarrow{\alpha_{1,n-1}} s_{1,n} \xrightarrow{\alpha_{2,1}} s_{2,1} \xrightarrow{\alpha_{2,1}} \cdots s_{j,n-1} \xrightarrow{\alpha_{j,n-1}} s_{j,n}.$$

所得结果是一个维数为 $nj+d-j$ 的 Q′-表示。由于 $j \leq d$,

$$nj+d-j = j(n-1)+d \leq d(n-1)+d = nd.$$

(2) 必要时反转脊柱外箭的定向后，这个 Q′-表示可自然地视为一个 S-表示。

(3) 在脊柱末端添加箭，得到系数箭图 $\Gamma_{\tilde{M}}$，使 S-表示的脊柱变为

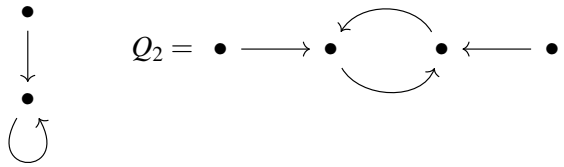
$$s_{1,1} \xrightarrow{\alpha_{1,1}} \cdots s_{1,n-1} \xrightarrow{\alpha_{1,n-1}} s_{1,n} \xrightarrow{\alpha_{2,1}} s_{2,1} \xrightarrow{\alpha_{2,1}} \cdots s_{j,n-1} \xrightarrow{\alpha_{j,n-1}} s_{j,n} \to s_{jn+1} \to \cdots \to s_{(n-1)(d-j)}.$$

所得结果是一个维数为 dn 的不可分解 S-表示。

容易验证映射 $M \mapsto \tilde{M}$ 是单射，因此 $NI_{Q'}(d) \leq NI_S(nd)$。特别地，我们有 $Q' \leq_{\text{nil}} S \leq_{\text{nil}} Q$。由此可得 $Q' \approx_{\text{nil}} Q$，正如我们所要证明的。□

例3.8。考虑以下箭图。

$$Q_1 := \quad Q_2 = \quad (25)$$



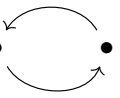
根据例3.3，我们知道 $NI_{Q_1}(d) = O((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^d)$。另一方面，对于 Q_2,，我们得到以下递归公式：

$$g(d) = b_2 g(d-2) + b_3 g(d-3) + b_4 g(d-4) = g(d-2) + 2g(d-3) + g(d-4),$$

其中 $g(d) = Q^{i \to f}(d)$，如定义3.4所示。因此，我们有 $p(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$，或者 $x^2 = x + 1$ 且 $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。于是，我们有 $Q_1 \approx_{nil} Q_2$。

例3.9。

$$Q_2' = \quad$$



对于 Q_2'，我们得到以下递归公式：

$$g(d) = g(d-2) + g(d-3)$$

因此，我们有 $x^3 - x - 1 = 0$ 和 $c \approx 1.32$，这表明 $Q_2' \approx_{nil} Q_2 \approx_{\text{nil}} Q_1$ 与前一个例子相同。

3.3 具有无环中心环的伪树。设 Q 为真伪树，n 为自然数。设 $\mathscr{N}_Q(n)$ 是一个集合，其中恰好包含 $\mathrm{Rep}(Q\ \mathbb{F}_1)_{\mathrm{nil}}$ 中每个 n 维不可分解对象同构类的一个代表元。然后，我们可以将 $\mathscr{N}_Q(n)$ 分解如下：

$$\mathscr{N}_Q(n) = \mathscr{T}_Q(n) \sqcup \mathscr{P}_Q(n),$$

其中

$$\mathscr{T}_Q(n) = \{M \in \mathscr{N}_Q(n) \mid H_1(\Gamma_M, \mathbb{Z}) = 0\} \text{ and } \mathscr{P}_Q(n) = \{M \in \mathscr{N}_Q(n) \mid H_1(\Gamma_M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\}.$$

这些集合由 Q 的 n 维树表示和真伪树表示组成。注意，Q 存在真伪树表示，当且仅当其中心环无圈（见 [JS21]）。对于一条箭 $\alpha \in Q_1$, ，令 rαQ 表示将 α 的定向反转后得到的箭图 Q。给定一个绕行映射为 $c_M : \Gamma_M \to Q$ 的表示 M，将每条 α 色箭的定向反转后，可得到绕行映射 $r\alpha(c_M) : r\alpha(\Gamma_M) \to r\alpha Q$。将对应的 rαQ 表示记为 rαM（即 $\Gamma_{r_\alpha M} = r\alpha(\Gamma_M)$，且 $c_{r_\alpha M} = r\alpha(c_M)$）。

注3.10。稍微滥用一下记号，我们将 rαQ 中对应于 α 的箭记为 α。

下面的命题显然成立。

命题 3.11. 设 Q 为一个箭图，M 为 Q 的一个 $\mathbb{F}_1$-表示。则以下结论成立：

(1) $r\alpha r\alpha M \cong M$. (2) $\dim(r\alpha M) = \dim(M)$. (3) rαM 不可分解, ~~当~~且仅当 ~~M 不~~可分解。(4) $H_1(\Gamma_{r_\alpha M}\mathbb{Z}) \cong H_1(\Gamma_M, \mathbb{Z})$.

现在设 Q 是一个真伪树。若 $M \in \mathscr{T}_Q(n)$，则由命题3.11(2)-(4)可知，rαM 同构于 $\mathscr{T}_{r_\alpha Q}(n)$ 中恰好一个元素。因此，对每个 n，我们有一个映射 $r_{\alpha,n} : \mathscr{T}_Q(n) \to \mathscr{T}_{r_\alpha Q}(n)$。由命题3.11(1)，$r_{\alpha,n}$ 是双射。由此立即得到推论：

推论3.12. 设 Q 是一个真伪树。那么对于每个自然数 n，$|\mathscr{T}_Q(n)|$ 的数量与 Q 的定向无关。

证明。令 Q′ 为一个与 Q 具有相同底层图的真伪树。则存在箭α_1、……、$\alpha_m \in Q_1$，使得 $Q' = [r\alpha_m r\alpha_{m-1} \cdots r_{\alpha_1}]Q$。由上面的双射即可得出结论。□

推论3.13。设 Q 为一个真伪树。则存在一个正实数 $a > 1$，使得 $|\mathscr{T}_Q(n)| = O(a^n)$。

证明。当 Q 的中心环方向一致时，结论成立。根据前一个推论，该结论对 Q 也成立。□

注意，相应的结论对 $\mathscr{P}_Q(n)$ 并不成立：即使 M 是幂零的，rαM 也可能不是幂零的。不过，我们仍有以下结果。

命题 3.14。设 Q 为一个真伪树。则对每个 n，$|\mathscr{P}_Q(n)| \leq |\mathscr{T}_Q(n)|$.

证明。不失一般性，假设 $\mathscr{P}_Q(n) \neq /0$。令 C 表示 Q 的中心环。对于每个 $N \in \mathscr{P}_Q(n)$，$c_N^{-1}(C) \neq /0$，因此我们可以选择一条箭 $\alpha_N \in c_N^{-1}(C)$。令 T (N) 表示从 N 中删除 α_N（但不删除其源点或目标点）后得到的表示。于是 $T(N) \in \mathscr{T}_Q(n)$。这意味着存在一个满射 $P : \mathscr{T}_Q(n) \to \mathscr{P}_Q(n)$，其构造如下：任取一个表示 $Z \in \mathscr{P}_Q(n)$。对于任意 $M \in \mathscr{T}_Q(n)$，$c_M^{-1}(C)$ 是一条路径的定向、一个单个顶点，或空集。在后两种情况下，令 P(M) =Z。否则，$c_M^{-1}(C)$ 包含两个顶点 ℓ_1, ℓ_2，它们各自恰好与 $c_M^{-1}(C)$[7] 中的一个顶点相邻。至多有一个

[7]在等定向情形下,它们分别就是 脊。

Q 中连接 $c_M(\ell_1)$ 与 $c_M(\ell_2)$ 的箭 $\alpha \in$：如果存在这条箭，令 P(M) 为在 ℓ_1 与 ℓ_2 之间添加一条 α 着色的箭后得到的表示；否则，令 P(M) = Z。对于每个 $N \in \mathscr{P}_Q(n)$，T (N) 满足 P(T (N)) = N。因此，P 是一个满射。□

推论 3.15。设 Q 是一个真伪树。特别地，$Q \approx_{nil} Q'$ 当且仅当 Q′ 是真伪树。

证明。对于每个 n，我们有

$$\mathrm{NI}_Q(n) = |\mathscr{N}_Q(n)| = |\mathscr{T}_Q(n)| + |\mathscr{P}_Q(n)| = O(a^n),$$

其中有一个 > 1。因此，$Q \leq_{nil} Q_{\bullet\to\bullet}$。反之，设 Q′ 是一个与 Q 具有相同底层图、但带有同向中心环的箭图。于是，对于所有 n，$\mathrm{NI}_{Q'}(n) = |\mathscr{T}_Q(n)| \leq \mathrm{NI}_Q(n)$，从而 $Q' \leq_{nil} Q$。但根据推论 3.7，$Q_{\bullet\to\bullet} \leq_{nil} Q'$，因此结论成立。□

3.4 幂零不可分解对象的增长。在 [JS20 的问题 5.17、5.18] 中，第一作者和第三作者提出了以下问题：

(1) 设 Q 和 Q′ 是真伪树。能否推出 $Q \approx_{nil} Q'$? (2) 是否存在满足 $Q \approx_{nil} \mathbb{L}_2$的伪树 Q? 这里，$\mathbb{L}_2$ 是一个具有一个顶点和两个环的箭图。

上述结果表明，第一个问题的答案是肯定的。事实证明，第二个问题的答案是否定的，因为 $\mathrm{NI}_{\mathbb{L}_2}(n)$ 的增长速度快于任何指数函数。准确地说，我们有如下结论。

命题 3.16. 设 $Q = \mathbb{L}_2$ 为双环箭图。则，$\mathrm{NI}_Q(n) \geq O((n/2)!)$.

证明. 不妨设 n 是偶数，记为 $n = 2k$。我们证明存在一组互不相同的同构类，其基数为 $k! = (n/2)!$。我们用红色表示一个环，用蓝色表示另一个环。为 $\mathbb{L}_2$构造系数箭图时，总共有 2k 个顶点：

$$2k \qquad (2k-1) \qquad \cdots \qquad 4 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 1 \tag{26}$$

我们首先可以构造一条含有 k 个红色箭的链，如下所示：

$$2k \qquad (2k-1) \qquad \cdots \qquad 4 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 1 \tag{27}$$

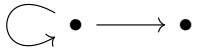
然后，我们按如下方式添加 k 个蓝色箭：将 $A = \{2k, 2k-1, 2k-2, \ldots, k+1\}$（分别将 $B = \{k, k-1, \ldots, 1\}$）重新排列为 $A = \{a_1, \ldots, a_{k+1}\}$（分别为 $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$），并从 a_i 向 b_i 画一支蓝色箭。这样，我们就得到一类系数箭图。考虑同构类后，可以验证这类系数箭图的数量至少为 $k! = (n/2)!$。这就证明了我们的结论。□

这使我们能够按照等价关系 $\approx_{nil}$ 对（有限连通）箭图进行完整分类。更准确地说，我们有如下结论：

推论 3.17. 设 Q 为有限连通箭图，则 $Q \approx_{nil} Q'$，其中 Q′ 恰为以下四种箭图之一：

(1) $\mathbb{L}_0 = \bullet$

(2) $\mathbb{L}_1 =$ 

(3) $Q_{\bullet\to\bullet} =$ 

(4) $\mathbb{L}_2 =$ 

˜此外，当且仅当 Q 是树时，$Q \approx_{nil} \mathbb{L}_0$；当且仅当 Q 属于 $\mathbb{A}$ 型时，$Q \approx_{nil} \mathbb{L}_1$；当且仅当 Q 是真伪树时，$Q \approx_{nil} Q_{\bullet\to\bullet}$；否则 $Q \approx_{nil} \mathbb{L}_2$。

采用 [JS20], $Q \leq \mathbb{L}_0$ 当且仅当 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上具有有限表示型，而 $Q \leq \mathbb{L}_1$ 当且仅当 Q 在 $\mathbb{F}_1$ 上具有有界表示型。由上述结果可知，$Q \leq_{\mathrm{nil}} Q_{\bullet\to\bullet}$ 当且仅当对于某个 a，有 $\mathrm{NI}_Q = O(a^n) > 1$；并且 $Q \approx_{\mathrm{nil}} Q_{\bullet\to\bullet}$ 当且仅当对于某个 a，有 $\mathrm{NI}_Q \approx_{\mathrm{nil}} a^n > 1$。[8]

4. 伪树的李代数

本节中，除非另有说明，设 Q 是一棵（不一定是真伪树的）伪树。令 $\mathscr{T}_Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_Q(n)$ 和 $\mathscr{P}_Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_Q(n)$，其中 $\mathscr{T}_Q(n)$（分别地，$\mathscr{P}_Q(n)$）是 Q 的 n 维幂零不可分解树（分别地，真伪树）表示的同构类集合。

令 $\mathfrak{n} := \mathfrak{n}_{Q,\mathrm{nil}}$ 表示第 2.4 节中的幂零不可分解表示的李代数，并令 $\mathfrak{p} := \mathrm{Span}(\mathscr{P}_Q)$。由定义可直接得到以下结论。

引理 4.1. 使用上述相同的记号，有以下结论成立。

(1) 如果 $0 \to X \to E \to Y \to 0$ 是 $\mathrm{Rep}(Q, \mathbb{F}_1)_{\mathrm{nil}}$ 中的短正合列，且 X 或 Y 属于 $\mathscr{P}_Q$，那么 $E \in \mathscr{P}_Q$ 也属于其中。特别地，$\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{n}$ 的李理想。(2) 如果 X 和 Y 都属于 $\mathscr{P}_Q$，那么 $E \cong X \oplus Y$。因此，$\mathfrak{p}$ 是阿贝尔的。

证明。第一个断言直接由引理 2.13 得出。第二个断言也很明显，因为伪树 Q 的任意不可分解幂零表示要么属于 $\mathscr{T}_Q$，要么属于 $\mathscr{P}_Q$。□

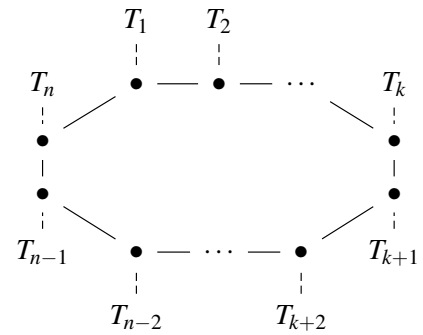
商 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 是一个李代数，其基由 $\mathscr{T}_Q$ 中元素的陪集组成。根据命题3.11，对于任意底层图为 Q 的箭图 Q'，存在双射 $r\colon \mathscr{T}_Q \to \mathscr{T}_{Q'}$，因此 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 的底层向量空间仅取决于底层图 $P := Q$。为方便起见，我们记 $\mathfrak{q}_P := \mathfrak{n}/\mathfrak{p}$，表示 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 的底层向量空间。于是，$\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 上的李括号可视为一个线性映射 $[\cdot,\cdot]_Q\colon \mathfrak{q}_P \otimes \mathfrak{q}_P \to \mathfrak{q}_P$。

定义 4.2. 设 Q 为真伪树，C 为 Q 的中心环。若 $c_T\colon \Gamma_T \to Q$ 是关联缠绕，且 $c_T^{-1}(C_0) \neq /0$，则称表示 $T \in \mathscr{T}_Q$ 为脊表示，其中 C_0 是 C 的顶点集。否则，称 T 为分支表示。

若 $T, S \in \mathscr{T}_Q$，则非分裂短正合列

$$0 \to S \to E \to T \to 0$$

结果表明，这些序列受到相当多的限制。需要注意的是，通过对所涉及的树表示施加额外假设，可以进一步加强以下结果；但就目前的形式而言，它已足以满足本文的需要。为此结果，我们将 Q 写作

$Q =$ 

(28)

其中每个箭的定向可以任意选择，且每个 T_i 都是一棵有根树 .

[8]见上文注 2.17。

引理 4。 3. 设 Q 是一个中心环为 C 的伪树，且 S、T $\in \mathscr{T}_Q$。则以下结论成立：

(1) 如果 S 或 T 中任一个是分支表示，那么非分裂短正合列 $0 \to S \to E \to T \to 0$至多有 $\max\{1, |c_S^{-1}(C_0)|, |c_T^{-1}(C_0)|\}$ 个。在存在此类序列的情况下，$E \in \mathscr{T}_Q$，并且任意短正合列 $0 \to T \to E' \to S \to 0$ 均分裂。(2) 如果 S 和 T 都是脊表示，那么非分裂短正合列 $0 \to S \to E \to T \to 0$的数量可能为零、一个或三个。如果恰好有一个非分裂序列，那么 $E \in \mathscr{T}_Q$，并且至多有一个非分裂短正合列 $0 \to T \to E' \to S \to 0$。如果恰好有三个此类序列，则对于其中两个序列，$E \in \mathscr{T}_Q$；对于第三个序列，$E \in \mathscr{P}_Q$；并且任意短正合列 $0 \to T \to E' \to S \to 0$ 均分裂。(3) 在 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$, [中，S、T] 可写成 $\mathscr{T}_Q$ 中至多 $\max\{2, |c_S^{-1}(C_0)|, |c_T^{-1}(C_0)|\}$ 个元素的和，其系数属于 $\mathbb{Z}$。

证明。设 $0 \to S \to E \to T \to 0$ 是一个非分裂短正合列。那么 Γ_E 可由不交并 $\Gamma_S \sqcup \Gamma_T$ 添加若干条从 α 的汇点指向 Γ_S 的源点、颜色为 α 的箭得到，其中 $\alpha \in Q_1$。由于 Γ_E 是一棵不一定是真伪树的伪树，因此从 Γ_T 到 Γ_S 至多能添加两条箭。

(1)：如果 S 或 T 是分支表示，那么从图 (28) 可以看出，任何连接 Γ_T 和 Γ_S 的箭都必定属于 $c_E^{-1}(Q_1 \setminus C_1)$。因此，连接箭必定属于某个唯一的 T_i，并将 T_i 的一个顶点与另一个顶点连接起来。特别地，如果存在非分裂短正合列 $0 \to S \to E \to T \to 0$，那么 E 是通过恰好添加一条从 Γ_T 到 Γ_S 的箭得到的。在这种情况下，不会有从 Γ_S 到 Γ_T 的箭，因此任何短正合列 $0 \to T \to E' \to S \to 0$ 都会分裂。现在，由于只向 $\Gamma_S \sqcup \Gamma_T$ 添加了一条箭，$\Gamma_E \in \mathscr{T}_Q$，且非分裂短正合列的数量至多为 $\max\{1, c_S^{-1}(C_0), c_T^{-1}(C_0)\}$。这就证明了第一个断言。

（2）：设 S 和 T 都是脊表示。由于至多可以添加两条箭，因此添加这些箭并得到一个连通箭图 Γ_E 的方式至多有 3 种。此外，恰好存在三个非分裂短正合列 $0 \to S \to E \to T \to 0$ 的唯一情形，是可以从 Γ_T 向 Γ_S 添加两条箭。添加两条箭会得到一个真伪树，而只添加一条箭则会得到 $\mathscr{T}_Q$ 中的一个元素。在这种情况下，无法从 Γ_S 向 Γ_T 添加箭，因此任意短正合列 $0 \to T \to E' \to S \to 0$ 都会分裂。否则只能添加一条箭，此时所得表示将属于 $\mathscr{T}_Q$。这证明了第二个断言。

（3）：最后一个断言由（1）和（2）推出。 □

一般而言，显式计算乘积 $[N] \cdot [M] \in H_{Q,\ \mathrm{nil}}$ 或交换子 $[[N], [M]] \in \mathfrak{n}_{Q,\ \mathrm{nil}}$ 预计会颇具挑战性。当将这类表达式展开为 Q 的 $\mathbb{F}_1$-表示的线性组合时，甚至不清楚其中会有多少个非零项。本节中的结果使我们至少在 Q 是一个不一定为真伪树的伪树这一情形下，对交换子的行为有了一些了解。

推论 4.4. 设 Q 是不一定为真伪树的伪树，M 和 N 是 Q 的不可分解幂零 $\mathbb{F}_1$-表示。则以下结论成立。

(1) 若 Q 是一棵树，则存在自然数 K，使得 $\max\{\dim(M), \dim(N)\} \geq K$ 蕴含 $[[N], [M]] = 0$。 (2) 若 Q 属于类型 $\tilde{\mathbb{A}}$，则存在自然数 K、B，使得 $\max\{\dim(M), \dim(N)\} \geq K$ 蕴含 $[[N], [M]]$ 是至多由 B 个不可分解幂零表示组成的 $\mathbb{Z}$-线性组合。(3) 若 Q 是真伪树，则存在自然数 K，使得 $\max\{\dim(M), \dim(N)\} \geq K$ 蕴含 $[[N], [M]]$ 是至多由 $\max\{\dim(M), \dim(N)\}$ 个不可分解幂零表示组成的 $\mathbb{Z}$-线性组合。

证明。断言 (1) 由以下事实得出：若 Q 是一棵树，则 Q 在 ˜上是有限表示型 $\mathbb{F}_1$。类似地，断言 (2) 由以下事实得出：若 Q 属于类型 $\mathbb{A}$，则 Q 在 ˜上是有界

表示型。更多细节请参见 [JS20] 。对于断言 (3)，首先注意到引理 4.1(2) 表明，我们不失一般性地可以假设 $M \in \mathscr{T}_Q$。若 $N \in \mathscr{P}_Q$，则对任意 $\alpha \in C_1$,，都有 $c_N^{-1}(\alpha) \neq /0$，其中 C 是 Q 的中心环。固定 C 中的一支箭 $\alpha \in C_1$，并从 Γ_N中恰好删除一支 α色箭，得到表示 $N' \in \mathscr{T}_Q$，使得 [[N′]、[M]] 和 [[N],[M]]具有相同数量的非零项。因此，我们也可以不失一般性地假设 $N \in \mathscr{T}_Q$。于是，根据引理 4.3(3)，[[N],[M]] 是至多 $\max\{3, |c_M^{-1}(C_0)|, |c_N^{-1}(C_0)|\}$ 个幂零不可分解表示之和，结论得证。□

鉴于上述结果，自然会提出以下问题。

问题 4.5. 设 Q 为连通箭图，M 和 N 为不可分解幂零 $\mathbb{F}_1$表示。|supp([M,N])| 的上界是多少?

提出上述问题时，我们假定幂零不可分解表示构成 $\mathfrak{n}$ 的一组基。特别地，它们生成 $\mathfrak{n}$: 然而，正如下述结果所示，它们未必构成一个极小生成集。下面的定理证明了关于李代数 $\mathfrak{n}$ 和 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$的一些基本结构性结果。该结果将 [JS21 的命题 6.3、6.7] 直接推广到了真伪树的情形。

定理 4.6. 设 Q 为一个不一定是真伪树的伪树。设 $\mathscr{T}_Q$、$\mathscr{P}_Q$、$\mathfrak{n}$和 $\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 如上定义。则有以下结论:

(1) 作为李代数，$\mathfrak{n}$ 由 $\mathscr{T}_Q$生成。(2) 作为李代数，$\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ 的同构类不依赖于 Q 的定向。

证明。我们先证明断言 (1)。如果 Q 是一棵树，那么无需证明。假设 Q 是一棵真伪树，且 C 是 Q 的中心环。如果 C 是同向的，那么 $\mathscr{P}_Q = /0$，无需证明。

假设 C 是无圈的。那么 C 必须包含一个汇点 $v \in C_0$,，它是两条不同的箭 $\alpha, \beta \in C_1$ 的目标点。令 $M \in \mathscr{P}_Q$。那么对于所有 $x \in C_0$，都有 $c_M^{-1}(x) \neq /0$。特别地，存在一个顶点 $u \in c_M^{-1}(v)$。令 $\tilde{\alpha}$ 和 $\tilde{\beta}$ 为 $c_M^{-1}(C_1)$ 中与 u 相邻的箭。删除 $\tilde{\alpha}$、β 和 u 后，从 Γ_M 得到的箭图 Γ obtained~ 是一个树表示 $T \in \mathscr{T}_Q$ 的系数箭图。令 $T' \in \mathscr{T}_Q$ 为这样一个表示：其系数箭图是 Γ_M 的全子箭图，顶点集为 $(\Gamma_M)_0 \setminus T_0$。那么

$$[T] \cdot [T'] = [S_v \oplus T] + [T \cup \tilde{\alpha}] + [T \cup \tilde{\beta}] + [M],$$

~ 其中 $T \cup \tilde{\alpha}$（分别为 $T \cup \beta$）是通过将 $\tilde{\alpha}$（分别为 β）重新粘合到 T 上所得到的系数箭图。我们还有如下结论。

$$[T'] \cdot [T] = [T' \oplus T].$$

由此可得，在 $\mathfrak{n}$中，

$$[[T],[T']] = [T \cup \tilde{\alpha}] + [T \cup \tilde{\beta}] + [M].$$

Hence，我们有 $[M] = [[T],[T']] - [T \cup \tilde{\alpha}] - [T \cup \tilde{\beta}]$，由此可得第一个断言。

对于第二个断言，取一个箭 $\alpha \in Q_1$。令 $Q' = r_\alpha Q$ 为将 α 的定向反转后由 Q 得到的箭图。只需证明存在一个向量空间同构 $\phi: \mathfrak{q}_P \to \mathfrak{q}_P$满足

$$[\phi(S), \phi(T)]_{Q'} = \phi([S,T]_Q) \tag{29}$$

对于所有 S、$T \in \mathscr{T}_Q$。对于每个 $S \in \mathscr{T}_Q$，定义 $\varepsilon(S) = (-1)^{|c \ {}^{1}s(\alpha)|}$。这唯一地延拓为一个线性映射 $\varepsilon: \mathfrak{q}_P \to \mathbb{C}$。我们断言，由下式定义的线性映射 $\phi: \mathfrak{q}_P \to \mathfrak{q}_P$

$$\phi(S) = \varepsilon(S)S, \quad \forall S \in \mathscr{T}_Q$$

is 满足 (29) 的向量空间同构。为此，取一个箭 $\beta \in Q_1$，并定义 e

$$(\cdot) \xrightarrow[\beta]{Q} (\cdot) : \mathfrak{q}_P \otimes \mathfrak{q}_P \to \mathfrak{q}_P \tag{30}$$

如下：对于 S,T $\in \mathscr{T}_Q$，我们将 S $\underset{Q}{\overrightarrow{\beta}}$ T 定义为所有通过添加一条从 Γ_S 到 Γ_T的 β色箭而得到的系数箭图之和。特别地，若不存在这样的系数箭图，则 S $\underset{Q}{\overrightarrow{\beta}}$ T $=0$。于是我们可以写成

$$[S,T]_Q = \sum_{\beta \in Q_1} \left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T - T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right). \tag{31}$$

我们现在计算

$$\begin{aligned} \phi\left([S,T]_Q\right) &= \phi\left(\sum_{\beta \in Q_1} \left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T - T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right) \right) \\ &= \sum_{\beta \in Q_1} \left[\varepsilon\left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T \right) S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T - \varepsilon\left(T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right) T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} [\phi(S),\phi(T)]_{Q'} &= \varepsilon(S)\varepsilon(T)[S,T]_{Q'} \\ &= \sum_{\beta \in Q_1'} \left(\varepsilon(S)\varepsilon(T) S \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} T - \varepsilon(S)\varepsilon(T) T \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} S \right), \end{aligned}$$

其中，我们将 ϕ(S) 和 ϕ(T) 理解为 Q' 的表示：通过反转 Γ_S 和 Γ_T 中每个 α 色箭的定向得到。若能证明下述结论，便完成了证明

$$\varepsilon\left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T \right) S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T - \varepsilon\left(T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right) T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S = \varepsilon(S)\varepsilon(T) S \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} T - \varepsilon(S)\varepsilon(T) T \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} S \tag{32}$$

对所有 $\beta \in Q_1$ 均成立。分两种情况。

情况 1：设 $\beta \neq \alpha$ 和 S $\underset{Q}{\overrightarrow{\beta}}$ T $=\sum M_i$。那么对每个 M_i，我们有

$$\varepsilon(M_i) = (-1)^{|c_{M_i}^{-1}(\alpha)|} = (-1)^{|c_S^{-1}(\alpha)|+|c_T^{-1}(\alpha)|} = \varepsilon(S)\varepsilon(T).$$

由此可得

$$\varepsilon\left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T \right) S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T = \sum \varepsilon(M_i) M_i = \sum \varepsilon(S)\varepsilon(T) M_i = \varepsilon(S)\varepsilon(T) \sum M_i = \varepsilon(S)\varepsilon(T) S \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} T.$$

同理，我们有

$$\varepsilon\left(T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S \right) T \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} S = \varepsilon(S)\varepsilon(T) T \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} S.$$

这就证明了此情形下的 (32)。

情形 2：假设 $\beta = \alpha$，S $\underset{Q}{\overrightarrow{\alpha}}$T $=\sum M_i$，且 T $\underset{Q}{\overrightarrow{\alpha}}$S $=\sum N_i$。在此情形下，由于我们通过箭 α 将 S 和 T（或 T 和 S）粘合起来，根据第3.3节中的双射，我们有

$$S \underset{\alpha}{\overset{Q'}{\to}} T = \sum N_i, \quad T \underset{\alpha}{\overset{Q'}{\to}} S = \sum M_i.$$

此外，对于每个 M_i，我们有

$$\varepsilon(M_i) = (-1)^{|c_S^{-1}(\alpha)|+|c_T^{-1}(\alpha)|+1} = -\varepsilon(S)\varepsilon(T).$$

同理，

$$\varepsilon(N_i) = -\varepsilon(S)\varepsilon(T).$$

由此可得

$$\varepsilon\left(S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T \right) S \underset{\beta}{\overset{Q}{\to}} T = \sum \varepsilon(M_i) M_i = \sum -\varepsilon(S)\varepsilon(T) M_i = -\varepsilon(S)\varepsilon(T) T \underset{\beta}{\overset{Q'}{\to}} S.$$

类似地,

$$\varepsilon\left(T \xrightarrow[\beta]{Q} S\right) T \xrightarrow[\beta]{Q} S = -\varepsilon(S)\varepsilon(T) S \xrightarrow[\beta]{Q'} T.$$

这就证明了这种情况下的 (32)。 □

注 4.7. 定理 4.6(1) 表明， $\mathfrak{n}$ 和 $H_{Q,\ \mathrm{nil}}$ 由树表示生成。在文献中，这类表示可解释为路径代数上的非分歧树模，参见例如 [Lor15]。文献中研究了树模的多种概念，参见例如 [Kra91, Rin98, Wei10, Wei12, Kin, Lor15]。这类表示之所以受到关注，是因为它们是绝对不可分解的，也就是说，对于任意域 k，$M \in \mathcal{T}_Q$ 意味着 $k \otimes_{\mathbb{F}_1} M$ 不可分解。绝对不可分解的 $\mathbb{F}_1$-表示的性质将是未来研究的主题。

鉴于上述注释，自然会提出以下问题。

问题 4.8. 哪些连通箭图 Q 的 $\mathfrak{n}$ 由树表-示（作为李代数）生成?

5. 覆盖与收缩

5.1 箭图的覆盖。对于给定的箭图 Q，受箭图覆盖理论的启发，我们构造一族系数箭图 $c: \Gamma \to Q$，它们具有能够区分顶点的良分次。我们先回顾箭图覆盖的定义。

定义 5.1。 [Fra21，第 3] 节。设 $c: \Gamma \to Q$ 是一个箭图映射。若满足以下条件，则称 c 为覆盖:

(1) c 在顶点和箭上都是满射。(2) 对任意 $i \in Q_0$ 和 $k \in \Gamma_0$，若 $c_0(k) = i$,
则有以下双射:

$$\{\beta \in \Gamma_1 \mid s(\beta) = k\} \xleftrightarrow{1-1} \{\alpha \in Q_1 \mid s(\alpha) = i\}, \tag{33}$$

$$\{\beta \in \Gamma_1 \mid t(\beta) = k\} \xleftrightarrow{1-1} \{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = i\} \tag{34}$$

Q 的万有覆盖是一个覆盖 $c: \Gamma \to Q$，其中 Γ 是一棵树。

容易看出，一个覆盖定义了一个 $\mathbb{F}_1$-表示。

引理 5.2. 任意覆盖 $c: \Gamma \to Q$ 都是缠绕。

证明。设 $c_1(\beta) = c_1(\beta')$ 且 $s(\beta) = s(\beta') = k$。于是，令 $i = c_0(k)$，由 (33) 得到$\beta = \beta'$。同样地，当 $t(\beta) = t(\beta')$ 时，有 $\beta = \beta'$。□

下面的例子表明，缠绕比覆盖更为一般。 s.

例 5.3.

$$F: \Gamma = \left(\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3\ \right) \to Q = \left(\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \underset{\beta}{\overset{\gamma}{\rightrightarrows}} 3\ \right)$$

在此情形下，我们有 $F_0(3) = 3$，但 $\{\beta \in \Gamma_1 \mid t(\beta) = 3\} = \{\beta\}$，而 $\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = 3)\} = \{\beta, \gamma\}$，因此 F 不是覆盖。然而，显然 F 是缠绕。

以下结果已在 [Fra21, 引理 3] 中证明。

引理 5.4. 设 Q 为一个箭图。

(1) 设 $c: \Gamma \to Q$ 是万有覆盖，$d: D \to Q$ 是任意覆盖。那么，存在一个箭图映射 $p: \Gamma \to D$，使得 $c = d \circ p$。(2) 如果 Q 是连通的，那么 Q 存在万有覆盖。

以下命题刻画了其系数箭图具有非退化良分次的箭图。

命题 5.5. 设 Q 为一个箭图。当且仅当任意缠绕 $c: \Gamma \to Q$ 都有一个非退化良好分次时，Q 在任何顶点处都没有环。

证明. ($\Leftarrow$)：我们首先注意到，当且仅当对 Q 的所有子箭图 Q'，$c: Q' \hookrightarrow Q$ 都有一个非退化良好分次时，Q 在任何顶点处都没有环。现在，第一个陈述显然成立，因为任意包含映射 $c: Q' \hookrightarrow Q$ 都是一个缠绕。

($\Rightarrow$)：给定一个缠绕 $c: \Gamma \to Q$，我们可以直接在 Γ 上定义一个良分次 ∂，如下所示。我们首先将 Q 的顶点标记为 $v1, \ldots, v_{n_0}$。对于每个顶点 $w \in \Gamma_0$，我们令 $\partial(w) = i$，当且仅当 $c(w) = v_i$。由于 Q 在任何顶点处都没有环，$\partial: \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$ 是一个非退化良好分次。□

对于任意箭图 Q，都可以构造一个缠绕 $c: \Gamma \to Q$，使其具有能够区分顶点的良分次。该构造取决于对 Q 中一支箭的选择，因此会产生一族能够区分顶点的缠绕。注意，该构造是 Q 的一个覆盖，并且 Γ 的任意子箭图都具有能够区分顶点的良分次。

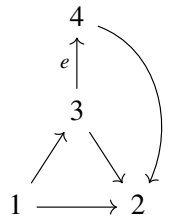
构造 5.6. 设 Q 为一个箭图。固定一支箭 $e \in Q_1$，并将 Q 的顶点标号为 $1, \ldots, |Q_0|$。设 $\tilde{Q}_e$ 为从 Q 中移除 e、但保留所有顶点后得到的箭图。设 $\ell \in \{1, \ldots, |Q_0| - 1\}$。设 Γ_e 为如下定义的箭图：

$$(\Gamma_e)_0 := \bigsqcup_{1 \le k \le \ell} (\tilde{Q}_{e,k})_0, \tag{35}$$

其中每个 $\tilde{Q}_{e,k} = \tilde{Q}_e$。对于箭 $(\Gamma_e)_1$，，我们保留 $\tilde{Q}_{e,k}$ 的所有箭；对于每一对 $(k, k+1)$，我们添加一支箭，从 $\tilde{Q}_{e,k}$ 的一个顶点 s(e) 指向 $\tilde{Q}_{e,k+1}$ 的一个顶点 t(e)，其中使用与 Q 相同的标号。

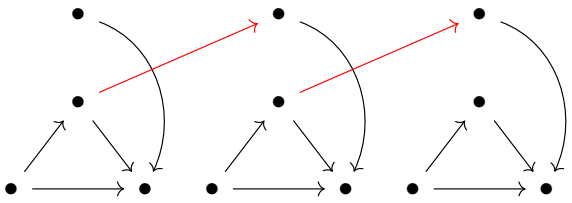
例 5.7. 考虑下面的箭图（顶点按所示标号）：

$Q =$



于是，Γ_e 如同 (35) 中那样，变为如下形式：

$\Gamma_e =$



其中，红色箭是为 Γ_e 新添加的。现在，存在一个自然缠绕 $c: \Gamma_e \to Q$。也就是说，我们将 $\tilde{Q}_{e,k}$ “恒等地”映到 Q，并将红色箭映到 e。

容易看出，与例 5.7 中一样，对于任意箭图 Q，都存在一个缠绕 $c: \Gamma_e \to Q$，其中 Γ_e 如同 (35) 中那样。事实上，下面的结论可由定义直接得到。

命题 5.8. 设 Q 为一个箭图，且 $c: \Gamma_e \to q$ 是如上所述的自然缠绕。那么 Γ_e 是 Q 的一个覆盖。

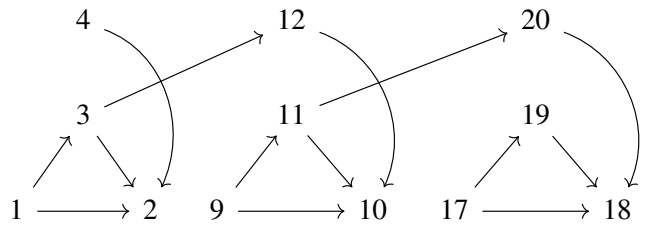
下一步，我们为 Γ_e 配备一种能够区分顶点的良分次，如下所示：

(1) 设 L 是 Q 的顶点标号。我们为每个箭 $\alpha \in Q_1$（e 除外）赋予整数 $m(\alpha) = L(t(\alpha)) - L(t(\alpha))$。我们给 e 赋予一个“足够大的数”，以便为 Q_e 的各个副本中的顶点赋予~不同的整数（见例 5.9）。

(2) 现在，我们定义 $\partial\colon (\Gamma_e)_0 \to \mathbb{Z}$。对于 $\tilde{Q}_{e,\,1}$，我们使用 L，也就是说，对于每个 $u \in (\tilde{Q}_{e,\,1})_0$，，我们定义$\partial(u) = L(u)$。对于 $\tilde{Q}_{e,\,2}$，我们令 $\partial(t(e)) = \partial(s(e)) + m(e)$。然后，我们利用 $m(\alpha)$ 定义 ∂ Q ~ 的其余顶点，使得 $m(\alpha) = \partial(t(\alpha)) - \partial(s(\alpha))$。(3) 接着，重复这一过程来定义 $\partial\colon (\Gamma_e)_0 \to \mathbb{Z}$。

例 5.9. 以下是 $e = 9$ 取自例 5.7 时的情形。

$\Gamma =$



由上文可得以下命题。

命题 5.10. 设 Q 为一个箭图，$e \in Q_1$，，且 Γ_e 如 (35) 所述。那么，自然绕行映射 $c : \Gamma_e \to Q$ 具有一种能区分顶点的良分次。

注 5.11. 事实上，构造 5.6 可以按需迭代任意多次。此外，也可以移除更多边（而不只是移除一条边）来进行相同的构造，此时命题 5.10 仍然成立。

5.2 系数箭图的收缩。接下来，我们考察收缩和限制在构造区分顶点的良好序列中所起的作用。设 Q 为一个箭图，且 $c : \Gamma \to Q$ 是一个缠绕。设 $A \subseteq Q_1$。那么，我们有一个诱导缠绕 $c|_A : \Gamma[c^{-1}(A)] \to Q$，其中 $\Gamma[c^{-1}(A)]$ 是 $c^{-1}(A)$ 上的诱导子图。此外，我们还有以下映射：

$$c/A : \Gamma/c^{-1}(A) \to Q/A. \tag{36}$$

下面的例子表明，一般而言，(36) 不一定是一个缠绕。

例 5.12.

$$c : \Gamma = \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\alpha} & \bullet \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \bullet & \xrightarrow[\alpha]{} & \bullet \end{array} \right) \longrightarrow Q = \left(\alpha \circlearrowright \bullet \circlearrowleft \beta \right)$$

设 $A = \{\beta\}$。那么，我们有如下结果：

$$c/A : \Gamma/c^{-1}(A) = \left(\bullet \underset{\alpha}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \bullet \right) \longrightarrow Q/A = \left(\alpha \circlearrowright \bullet \right)$$

这不是一个缠绕。

设 Q 是一个箭图，且 $c\colon\ \Gamma \to Q$ 是一个缠绕。对于一个良分次 $\partial\colon\ \Gamma_0 \to \mathbb{Z}$，可以得到一个由 $\partial(\alpha) = \partial(t(\alpha)) - \partial(s(\alpha))$ 定义的函数 $\partial : \Gamma_1 \to \mathbb{Z}$，其中 $\alpha \in \Gamma_1$。该函数 ∂ 满足条件 (11)。反之，对于一个满足条件 (11) 的函数 $\partial\colon\ \Gamma_1 \to \mathbb{Z}$，可以找到相应的良分次 ∂，其差异至多为加上一个常数。更一般地，对于给定的良好序列 ^ ^$\partial = \{\partial_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，我们得到一个函数序列 $\{\partial_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，其中对每个 $i \in \mathbb{N}$，$\partial_i :\ \Gamma_1 \to \mathbb{Z}$，并且它们满足定义 2.21 中的条件 (3)。反之，一个函数序列 $\{\partial_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 可以在加上常数的意义下恢复 $\partial = \{\partial_i\}_{i\in\mathbb{N}}$。

定义 5.13。沿用上述记号，若我们可以定义一个 $\{\partial_0,\dots,\partial_n\}$-良分次 ∂_{n+1}，使得不存在 $\beta\in\Gamma_1$ 满足 $c(\alpha)=c(\beta)$、$\partial_i(s(\alpha))=\partial_i(s(\beta))$，以及 $\partial_i(t(\alpha))=\partial_i(t(\beta))$，其中 $i=0,\ .....,\ n+1$，则称 $\partial=\{\partial_0,\dots,\partial_n\}$ 释放 $\alpha\in\Gamma_1$。

例 5.14. 令 $Q=\mathbb{L}_2$，其箭集为 $Q_1=\{\alpha_1,\alpha_2\}$。令 M 为箭图为

$$\Gamma_M=\ \bullet\xrightarrow{\alpha_2}\bullet\xrightarrow{\alpha_1}\bullet\xleftarrow{\alpha_2}\bullet\xleftarrow{\alpha_1}\bullet$$

在此情形下，任意良分次都会释放 α_2。

注 5.15. 令 $c:\Gamma\to Q$ 为一个缠绕，且 $\partial=\{\partial_0,\dots,\partial_n\}$ 为一个区分顶点的良好序列。则，∂会释放 Γ_1 中的所有箭，因为条件 (12) 在此情形下不可能成立。反之，若一个良好序列 $\partial=\{\partial_0,\dots,\partial_n\}$ 释放 Γ_1 中的所有箭，则 ∂ 区分顶点。

命题 5.16. 令 Q 为一个箭图，且 $c:\Gamma\to Q$ 为一个缠绕。令 $A\subseteq Q_1$，使得

$$c/A:\Gamma/c^{-1}(A)\to Q/A\quad and\quad c|_A:\Gamma[c^{-1}(A)]\to Q$$

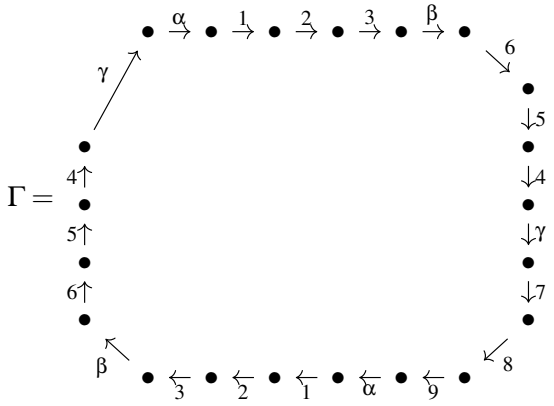
是具有区分顶点的良好序列的缠绕。则，Γ具有区分顶点的良好序列。

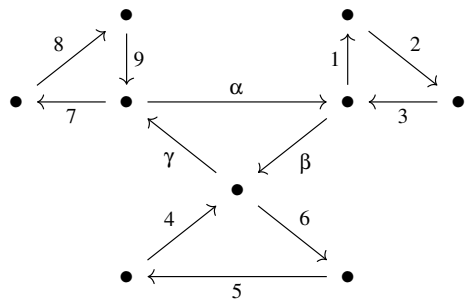
证明。令 $\partial=\{\partial_0,\dots,\partial_k\}$ 为 $c/A:\Gamma/c^{-1}(A)\to Q/A$ 的区分顶点的良好序列。每个 ∂_i 都可以通过令 $\hat{}\,\partial_i:\Gamma_1\to\mathbb{Z}$ 并对任意 $\alpha\in c^{-1}(A)$ 设置 $\hat{}\,\partial_i(\alpha)=0$ 来提升，从而定义一个分次。令 $\partial_i':\Gamma_0\to\mathbb{Z}$ 为由 $\hat{}\partial_i$得到的分次。在此情形下，很容易验证，分次的提升序列 $\partial'=\{\partial_0',\dots,\partial_k'\}$ 是一个良好序列，它释放 Γ中不属于 $c^{-1}(A)$ 的箭。

现在，我们将 Γ 限制到 $\Gamma[c^{-1}(A)]$。根据假设，我们得到一个区分顶点 $\{\partial_{k+1},\dots,\partial_n\}$ 的良好序列。再次，这个序列可以提升为一个良好序列 $\partial''=\{\partial_{k+1}',\dots,\partial_n'\}$，从而释放 $c^{-1}(A)$ 中的箭。特别地，如有需要，再增加一个分次后，我们可以假设，对于 $\Gamma/c^{-1}(A)$ 的任意顶点 u 和 $\in\Gamma[c^{-1}(A)]$ 中的 v，$\partial_n(u)\neq\partial_n(v)$。现在，很容易验证 $(\partial_0',\dots,\partial_n')$ 是一个区分顶点的良好序列。□

如果 $c:\Gamma\to Q$、$c/A:\Gamma/c^{-1}(A)\to Q/A$，以及 $c|_A:\Gamma[c^{-1}(A)]\to Q$ 都是缠绕，且 Γ 有一个区分顶点的良好序列，那么 c/A 也有一个区分顶点的良好序列吗？下面的例子表明并非如此。

例 5.17. 考虑以下箭图 Q 和 Γ。



$Q =$ 

设 c : Γ → Q 是一个缠绕，它将 Γ 的每条箭映射到 Q 中相应的箭。根据 [JS21，引理 5.18], , c 有一个区分顶点的良好序列。设 A = {7, 8, 9}。显然，c|$_A$ 是一个具有区分顶点的良好序列的缠绕。然而，很容易验证，c/A 是一个缠绕，但不具有区分顶点的良好序列（同样根据 [JS21，引理 5.18]）。

参考文献

[Bor16] James Borger. Witt 向量、半环与全正性。Absolute Arithmetic and $\mathbb{F}_1$-Geometry，第 273–329 页，2016 年。[CC10] Alain Connes 和 Caterina Consani。关于 $\mathbb{F}_1$ 上的概形与 ζ 函数。Compositio Mathematica，146(6):1383–1415，2010 年。[CC11] Alain Connes 和 Caterina Consani。论 $\mathbb{F}_1$ 上几何的概念。Journal of Algebraic Geometry，20(3):525–557，2011 年。[CCM09] Alain Connes、Caterina Consani 和 Matilde Marcolli。与 $\mathbb{F}_1$ 共乐。Journal of Number Theory，129(6):1532–1561，2009 年。[CHWW15] Guillermo Corti˜nas、Christian Haesemeyer、Mark E Walker 和 Charles Weibel。环面簇、幺半群概形与 cdh 下降。Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik，2015(698):1–54，2015 年。[Dei05] Anton Deitmar。关于 $\mathbb{F}_1$ 上的概形。载于《数域与函数域：两个平行的世界》，第 87–100 页。Springer，2005 年。[Dei08] Anton Deitmar。

$\mathbb{F}_1$ 49 2 517 525, -概形与环面 2008

簇。Contributions to Algebra and Geometry，( ): – 。[DK19] Tobias Dyckerhoff 和 Mikhail Kapranov。《高阶 Segal 空间》，第 2244 卷。Springer，2019 年。[Fra21] Hans Franzen。刚性箭图格拉斯曼簇的有理性。Algebras and Representation Theory，第 1–11 页，2021 – 。[GG16] Jeffrey Giansiracusa 和 Noah Giansiracusa。热带簇的方程。Duke Mathematical Journal，165(18):3379–3433，2016 年。[Gre95] J ames A Green。霍尔代数、遗传代数与量子群。Inventiones mathematicae，120(1):361–377，1995 年。[Hau12] Nicolas Haupt。箭图格拉斯曼簇的欧拉示性数与串代数的 Ringel-Hall 代数。Algebras and representation theory，15(4):755–793，2012 年。[Ire11] G Cerulli Irelli。与串模相关的箭图格拉斯曼簇。Journal of Algebraic Combinatorics，33(2):259–276，2011 年。[JS20] Jaiung Jun 和 Alex Sistko。关于 $\mathbb{F}_1$ 上的箭图表示。arXiv 预印本 arXiv:2008.11304（即将在 Algebr. Represent. Theory 发表），2020 年。[JS21] Jaiung Jun 和 Alex Sistko。系数箭图、$\mathbb{F}_1$-表示与箭图 Grass- mannians 的欧拉示性数。arXiv 预印本 arXiv:2112.06291，2021 年。[Kin] Ryan Kinser。树模与计数多项式。Algebras and Representation Theory，16。[Kra91] Henning Krause。树模与带模之间的映射。《代数学杂志》，137(1):186–194，1991 年。[Lor15] Oliver Lorscheid。树模的箭图格拉斯曼簇的 Schubert 分解。Algebra & Number Theory，9(6):1337–1362，2015 年。[Rei13] Markus Reineke。每个射影簇都是一个箭图格拉斯曼簇。Algebras and Representation Theory，16(5):1313–1314，2013 年。[Rin90] Claus Michael Ringel。霍尔代数与量子群。Inventiones mathematicae，101(1):583–591，1990 年。[Rin98] Claus Michael Ringel。例外模是树模。Linear Algebra and its applications，275:471–493，1998 年。[Sou04] Chr. Soul´e。Les vari´et´es sur le corps `a un ´el´ement。Mosc. Math. J，4(1):217–244，2004 年。

[Szc11] Matt Szczesny. 关于 $\mathbb{F}_1$ 上的箭图表示与霍尔代数。《国际数学研究通知》，2012(10):2377–2404, 2011.[Tit56] Jacques Tits. 关于复半单群的代数类比。在《高等代数讨论会》上，布鲁塞尔，第261–289页, 1956年。[Wei10] Thorsten Weist. 广义克罗内克箭图的树模。《代数学杂志》，323 1138, 2010 4 1107( ): – .[Wei12] Thorsten Weist. 树模。《伦敦数学会会刊》，44(5):882–892, 2012。

纽约州立大学新帕尔兹分校 , NY, USA
电子邮箱：junj@newpaltz.edu

韩国科学技术院数学科学系，韩国。电子邮箱：
jaehoon.kim@kaist.ac.kr

曼哈顿学院，纽约州，美国 电子邮箱：
asistko01@manhattan.edu