arXiv:2301.07222v1 [math.RT] 17 Jan 2023

某些温和代数中完美聚类词与带砖的一种推广

BENJAMIN DEQUˆENE、M ´ELODIE 拉普安特、YANN PALU、Pierre-Guy Plamondon、Christophe Reutenauer 和 HUGH THOMAS

Dedicated to the memory of Andrzej Skowroński

Abstract. 我们推广了 Simpson 和 Puglisi 提出的完美聚类词，并将其与某些温和代数上的带砖联系起来。这使我们得以证明第二作者关于完美聚类词的一个猜想的推广。

Contents

1. 引言 2 1.1. 完美聚类词 2 1.2. 温和代数 Λ_n 2 1.3. 完美聚类词与 Λ_n 3的表示之间的联系 1.4. 词的推论 3 1.5. Λ_n 模的推论 4 2. 温和代数 4 2.1. 温和代数及其表示的定义 4 2.2. 字符串表示 6 2.3. 带表示 7 2.4. 砖模 9 3. 温和代数的表示与曲面上的曲线 9 3.1. 曲面与剖分 10 3.2. 剖分的温和箭图 10 3.3. 手风琴与带 12 3.4. 对偶剖分 13 3.5. 带模与态射 14 3.6. 欧拉形式 16 3.7. 带砖与带半砖 18 4. Λ_n 18的带半砖组合学 4.1. Λ_n 18的曲面模型 4.2. Dyck 路径模型 21

第一作者感谢数学科学研究所（ISM）给予的部分资助。第二作者感谢加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的资助，[资助参考编号为 BP–545242–2020]，并感谢魁北克研究基金会科学与技术部的支持。第三、第四和第六作者感谢法国国家研究署 CHARMS 项目（ANR-19-CE40-0017- 02）的资助。第四作者感谢法国大学研究院（IUF）的支持。第五作者获得了 NSERC 加拿大的部分资助。第六作者感谢 NSERC 探索资助以及加拿大研究主席计划的支持。

5. 完美聚类词 235.1. Burrows–Wheeler变换与完美聚类词 235.2. 完美聚类词与带砖 256. 带半砖 276.1. 带砖相容扇 276.2. 欧拉形式与两两相容砖的最大数量 286.3. 带砖的特征 g- 向量，适用于 $n = 4$ 307. 示例：Christoffel情形（$n = 3$） 327.1. 温和代数 337.2. 剖分曲面 337.3. g-向量 357.4. Christoffel词 357.5. 欧拉形式 367.6. 相容砖 36参考文献 36

1. Introduction

Christoffel词是由某些格路径关联而来、由两个字母构成的一类研究颇多的词。关于这一主题的全面介绍，请参阅 [4] 。它们之所以重要，是因为它们出现在多种背景中，例如回文、自由群（由两个生成元生成）的（正）本原元、连分数、Markoff 数以及直线离散化等研究中。中引入的完美聚类词，将（下）Christoffel词推广到了具有任意数量字母的字母表。它们与词组合学和自由群、数论以及动力系统相关。

本文通过一类特定的温和代数，揭示了完美聚类词与表示论之间的一种新关系。这为研究完美聚类词以及由此延伸出的Christoffel词提供了新工具，我们将运用这些工具证明[17]中的一个猜想。

现在我们介绍一些主要结果。

1.1. 完美聚类词。设 A 为一个全序字母表，$w \in A^*$ 为一个非空单词。 w 的Burrows–Wheeler变换记作 $BW(w)$，定义如下。考虑所有与 w 共轭（即循环等价）的单词 $w_1, \dots, w_r$，并按字典序排列。于是 $BW(w) = a_1 a_2 \cdots a_r$，其中 $a_1, \dots, a_r$ 分别是 $w_1, \dots, w_r$ 的末尾字母。

若 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$，且 w 是本原的，也就是说，不能将 w 写成另一个单词的幂，那么 w 称为完美聚类。

例如，若 $w = acab$，则 $w_1 = abac$， $w_2 = acab$， $w_3 = baca$， $w_4 = caba$，且w 是完美聚类的。相反，若 $w = acba$，则 $w_1 = aacb$， $w_2 = acba$，$w_3 = baac$， $w_4 = cbaa$，且 w 不是完美聚类的。

1.2. 温和代数 Λ_n。我们通过某个特定有限维代数 Λ_n 在代数闭域 k 上的表示，将完美聚类词与表示论联系起来。该代数由以下生成元与关系给出：

其形式为以下带关系的箭图：

$$Q_n:\ 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\leftrightarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\leftrightarrows}} \cdots \underset{\beta_{n-1}}{\overset{\alpha_{n-1}}{\leftrightarrows}} n \qquad R_n : \beta_i\alpha_{i+1} = 0,\ \alpha_i\beta_{i+1} = 0$$

Λ_n 上的左模也可以等价地理解为（Q_n， R_n）的表示。因此，它们由以下数据给出：

- 每个顶点处的一个有限维向量空间，
- 每支箭处相关向量空间之间的一个线性映射，并满足 R_n中的关系。

带关系的箭图（Q_n， R_n）是温和的，其不可分解表示已有充分研究[6]：它们要么是字符串表示 M（ω），由 Q_n 中的箭及其形式逆元构成的某些单词 ω 给出；要么是带表示$B_{z,\ m,\ \lambda}$，由 Q_n 中的某些无向循环 z 以及两个参数$m \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda \in k^\times = k \setminus \{0\}$给出。

1.3. 完美聚类词与Λ_n的表示之间的联系。对于每个整数 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们关联一个循环

$$z_i = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{i-1}\beta_{i-1}^{-1} \cdots \beta_2^{-1}\beta_1^{-1}.$$

对于由 n 个字母组成的每个本原词 $w = i_1 \cdots i_r \in \{1, \ldots, n\}^*$，我们关联循环 $\varphi(w) = z_{i_1} \cdots z_{i_r}$。我们的第一个主要结果是

定理 1.1 (参见定理5.12)。由 n 个字母组成的本原词 w 是完美聚类词，当且仅当带 Λ_n-模 $B_{\varphi(w),1,\lambda}$ 对某个（等价地，对任意） $\lambda \in k^\times$ 都是砖。

在上述陈述中，表示 M Λ_n 称为*砖*，如果 id_M 构成 k-向量空间的基，该空间由 M的自同态组成；也就是说，若 $\mathrm{End}_{\Lambda_n}(M) \cong k$。我们的证明使用拓扑模型 [1, 3, 19, 20] 来描述Λ_n 的表示，其描述方式是借助定向曲面上的某些弧。

1.4. 关于词的推论。 映射 Φ 由 Gessel 和第五作者提出（定义见第 5.1 节），是一个映射 Φ 从 A^* 中的词到本原词共轭类的多重集。更确切地说，对于 $w \in A^*$，$\Phi(w)$ 是由其标准置换的逆得到的词的共轭类多重集。映射 Φ 为完美聚类词给出了 BW 的逆映射。

第二作者在她的学位论文中提出了一个猜想，涉及出现在 $\Phi(n^{\alpha_n} \ldots 2^{\alpha_2})$ 中的完美聚类词的不同长度个数。（为与本文其余部分保持一致，我们使用字母表 $\{2, \ldots, n\}$。）

猜想 1.2 ([17])。 设 $n \geqslant 2$ 且 $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是一个 $(n-1)$-元组，其元素均为非负整数。出现在 $\Phi(n^{\alpha_n} \ldots 2^{\alpha_2})$ 中的词的共轭类的不同长度个数至多为 $\lceil (n-1)/2 \rceil$。

借助我们这一设定中的一个更一般结果（定理 6.7），我们证明了下述对先前猜想的加强版。

推论 1.3 （见推论 6.9）。设 $n \geqslant 1$和$(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ 是一个由非负整数构成的 $(n-1)$ 元组。出现在 $\Phi(n^{\alpha_n} \ldots 2^{\alpha_2})$ 中的不同单词共轭类数量至多为 $\lceil (n-1)/2 \rceil$。

也就是说，我们实际限定的是不同共轭类的数量，而不是单词的共轭类所具有的不同长度的数量。

1.5. 对 Λ_n 模的推论。设 M 是一个 Λ_n 模。M 的 g向量是一个整数向量，记录了 M的极小投射表示中不可分解直和项的重数。下一节将给出更精确的定义。

两个砖模 B 和 B' 相容，当且仅当

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(B,B')=0=\mathrm{Hom}_{\Lambda_n}(B',B).$$

若模 M 可分解为若干两两相容的砖模的直和，则称其为半砖。

本文重点研究同时也是砖的带模，并称之为带砖。我们还研究两两相容的带砖的直和，并称之为带半砖。

我们回顾 [10], 的一些重要结果，并将其专门化到本文的情形。 Λ_n 的带半砖由其 g向量唯一确定（见推论 4.11），但砖模的参数选择除外。记 Σ_n 为 g向量空间中的锥的集合，这些锥由与两两相容的带砖相对应的 g向量族所张成。则 Σ_n 是一个扇，而与作为带半砖直和项的带砖相对应的 g向量，是包含 Σ_n 的 g向量的最小锥的射线。

在我们的设定中，我们明确描述了扇的支撑 Σ_n （见推论4.11）。对于 $n=4$，我们明确描述了扇的射线（定理6.10）。这推广并拓展了 Coll、Giaquinto 和 Magnant 的结果 [7]。

2. Gentle algebras

2.1. 温和代数及其表示的定义。箭图是一个四元组 $Q=(Q_0,Q_1,s,t)$，其中 Q_0和 Q_1 分别是称为顶点和箭的（有限）集合，而 $s,t\colon Q_1\longrightarrow Q_0$ 是源映射和靶映射。我们将箭图视为有向图。设 Q 为一个箭图。 Q 中的路径要么是由箭组成的序列 $\gamma_r\dots\gamma_1$，满足 $t(\gamma_i)=s(\gamma_{i+1})$ 对于 $1\leq i\leq r-1$ 均成立；要么是在每个顶点 i 处的形式元素 e_i，称为长度为零的惰性路径。对于任意路径$\gamma=\gamma_r\dots\gamma_1$，我们定义 $s(\gamma)=s(\gamma_1)$ 为 γ的起点，并定义 $t(\gamma)=t(\gamma_r)$ 为 γ的终点。我们进一步定义 $s(e_i)=t(e_i)=i$。

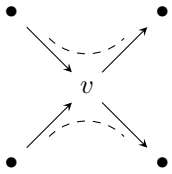
令 k 为一个代数闭域。我们将 Q 在 k 上的路径代数记为 kQ。它是一个以 Q 的路径为基的 k 上的向量空间，并配备乘法：若两个路径 σ 和 τ 的拼接 $\sigma\tau$ 仍是一条路径，则定义它们的乘积为该拼接；否则乘积为零。路径的线性组合之间的乘积则由双线性定义。定向环是长度至少为一且起点与终点重合的路径。

假设 Q 的每个顶点至多有两条出箭和两条入箭。路径代数 kQ/I 的一个商称为温和代数，若 I 是由一组长度为二的路径 R 生成的理想，并且对每个顶点 i，

- 对于任意终点为 i 的箭 α，至多有一条起点为 i 且 $\beta\alpha\notin R$ 的箭 β，并且至多有一条起点为 i 且 $\gamma\alpha\in R$ 的箭 γ，
- 反过来，对于任意一支以 i 为起点的箭 δ，至多存在一支以 i 为终点且满足 $\delta\beta\notin R$ 的箭 β，并且至多存在一支以 i 为终点且满足 $\delta\gamma\in R$ 的箭 γ，

• 对于 Q 的任一定向环 $\alpha_r \cdots \alpha_1$，其中必有一对相邻的箭（即某个 i 满足 $\alpha_{i+1}\alpha_i \in R$ 或 $\alpha_1\alpha_r \in R$）。

若一对 (Q, R) 满足： Q 是一个箭图，且 R 是满足上述条件的一组路径，则称其为温和箭图。除要求每个循环中都包含某些关系这一条件外，上述所有条件都可以概括为：任意顶点 v 处的局部构型，都可以通过删除下图中的任意数量的箭（并可能合并某些顶点）得到。



这里 v 是中心顶点；虚线弧表示关系。若删除一条箭，包含该箭的关系也会一并删除。

温和箭图 (Q, R) 在 k 上的一个表示 V，是指给 Q 的每个顶点 i 赋予一个k-向量空间 V_i，并为 Q中的每条箭 $i \xrightarrow{\gamma} j$ 赋予一个线性映射 $V_\gamma : V_i \to V_j$，使得与 R 中元素相对应的复合的线性组合为零。

两个表示 V, W 之间的态射，是由一组线性映射$f_i : V_i \to W_i$ 构成的，每个顶点 $i \in Q$对应一个，并且对于 Q中的每条箭 $i \xrightarrow{\gamma} j$，都有 $f_j \circ V_\gamma = W_\gamma \circ f_i$。同构是可逆态射；态射 $(f_i)_{i\in Q_0}$ 是同构，当且仅当Q的每个顶点 i 对应的 f_i 都是同构。

左 kQ/I-模范畴与 (Q, R) 在 k 上的表示范畴等价。因此，每当我们谈到表示时，都可以将其理解为一个模，反之亦然。基于此，我们可以根据上下文自由使用任一术语。

给定两个表示 X 和 Y，它们的直和定义为 $(X \oplus Y)_i = X_i \oplus Y_i$ 和 $(X \oplus Y)_\gamma = X_\gamma \oplus Y_\gamma$，对每个顶点 i 和每个箭 γ均如此。非零表示称为不可分解的，如果它不同构于两个非零表示的直和。

设 $\Lambda = kQ/I$。对于每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，我们用 $P_i = \Lambda e_i$ 表示顶点 i处的不可分解投射表示。任意表示 X 都属于一个正合列

$$\bigoplus_{i=1}^{n} P_i^{\oplus b_i} \to \bigoplus_{i=1}^{n} P_i^{\oplus a_i} \to X \to 0$$

称为投射表示。在 X的所有投射表示中，存在唯一一个（在同构意义下），使得 a_i 和 b_i 均为极小；它称为 X的极小投射表示。 X 的 g-向量是整数向量 $g(X) = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n)$，其中 a_i和 b_i 分别是极小投射表示中的那些对象。注意， $g(X \oplus Y) = g(X) + g(Y)$。

对于一般的箭图 Q 和一般的理想 I，不可分解表示的分类并不可行。然而，当 kQ/I 是温和的时，Butler 和 Ringel 得到了不可分解模的分类 [6]。下面我们回顾这一

分类：不可分解模分为两类，即弦和带。

2.2. 字符串表示。首先，介绍箭图 Q 的逆箭头集合很方便。 Q 的逆箭头集合就是对应于 $\alpha \in Q_1$ 的形式对象 α^{-1} 的集合。我们定义 $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ 和 $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$。

箭图 Q 中的游走是一个序列 $(v_r, \alpha_r, v_{r-1}, \ldots, v_1, \alpha_1, v_0)$，其元素在顶点集合与箭及逆箭头集合之间交替出现，以一个顶点开始并以一个顶点结束，并且满足 $s(\alpha_i) = v_{i-1}$, $t(\alpha_i) = v_i$。对于任意游走$w = (v_r, \alpha_r, v_{r-1}, \ldots, v_1, \alpha_1, v_0)$，我们定义 $s(w) = v_0$为 w的起点，并定义$t(w) = v_r$ 为 w的终点。除零长度游走外，顶点不携带任何信息，因此我们通常写作 $w = \alpha_r \cdots \alpha_1$。然而，务必记住零长度游走确实存在，而且它们指定了一个（单独的）顶点。

温和箭图（Q, R）中的字符串游走是一个游走 $w = \alpha_r \cdots \alpha_1$，满足对于所有的 $i \in \{1, \ldots, r-1\}$， $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i^{-1}$，且 $\alpha_{i+1}\alpha_i$和（$\alpha_{i+1}\alpha_i$）$^{-1}$中没有一个是 R中的路径。

每个字符串游走 z 都定义一个字符串表示 M_z，如下所示。设$z_r, z_{r-1}, \ldots, z_0$是游走 z依次经过的 Q的顶点，其中 z_r是 z 的终点，而 z_0 是其起点。

在顶点 i 处定义向量空间为

$$(M_z)_i = \bigoplus_{z_s = i} k\epsilon_s$$

也就是说，顶点 i 处的向量空间以满足$z_s = i$的向量 ϵ_s 为基。

现在，对于 Q中的每个箭 γ，假设它从顶点 i 指向顶点 j，我们必须定义一个线性映射（M_z）γ：（M_z）$_i \to$（M_z）$_j$。只需对 $z_s = i$定义（M_z）γ（ϵ_s）即可。

我们将其定义为:

- ϵ_{s+1} 若 z 沿着 γ从 z_s 向前游走至 z_{s+1}，
- ϵ_{s-1} 若 z 沿着 γ从 z_{s-1} 向后游走至 z_s，
- 否则为零。

注意，根据字符串游走定义中的第一条，前两种情况互不相交。

那么， M_z 确实定义了 kQ/I 的一个表示。回顾一下， I 是由 R生成的理想；根据字符串游走定义中的第二条， R 中任意一对箭所对应的线性映射的复合均为零。

事实证明，这些表示 M_z 是不可分解的。一个游走及其逆游走定义了同构表示，但除此之外，不同的字符串游走会得到非同构表示。

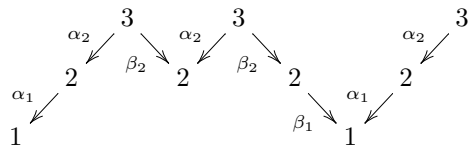
例 2.1. 考虑以下箭图 Q

$$1 \underset{\alpha_1}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3$$

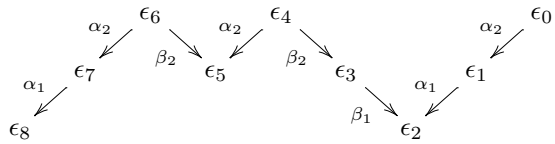
配备由 $R = \{\alpha_1\beta_2, \beta_1\alpha_2\}$ 生成的理想 I。例如

$$\rho = (1, \alpha_1, 2, \alpha_2, 3, \beta_2^{-1}, 2, \alpha_2, 3, \beta_2^{-1}, 2, \beta_1^{-1}, 1, \alpha_1, 2, \alpha_2, 3)$$

是 $(Q,\ R)$ 的字符串游走。更直观地说，我们可以将同一字符串游走绘制如下。



按照惯例，箭头总是朝下。要从组合角度得到与字符串 ρ 相关联的字符串表示M_ρ，我们可以将上图中字符串的每个顶点替换为相应的 ϵ_i。每个箭头都确定了我们将得到的线性映射的方向。



然后，将字符串压缩后，我们就得到下方的表示。

$$\begin{array}{c} \epsilon_7 \longmapsto \epsilon_6 \\ \epsilon_5 \longmapsto \epsilon_4 \\ \epsilon_2 \longmapsto \epsilon_3 \quad\quad \epsilon_1 \longmapsto \epsilon_0 \end{array}$$

$$\langle \epsilon_2, \epsilon_8 \rangle \longleftarrow\!\!\!

这样， z 访问的每个顶点（最后一个除外）都会为对应顶点上的向量空间贡献 m 个基元素。我们约定 $\epsilon_r^p = \epsilon_0^p$ 。

现在，设 γ 是 Q 中一条从顶点 i 指向顶点 j 的箭。我们以与字符串游走几乎相同的方式定义 $(B_{z,\ m,\ \lambda})_\gamma$。具体来说，除非 γ 是 z 在 z_{r-1} 和 z_r 之间经过的那条箭，否则 $(B_{z,\ m,\ \lambda})_\gamma(\epsilon_s^p)$ 的定义如下：

- ϵ_{s+1}^p 如果 z 沿着 γ 向前从 z_s 行进到 z_{s+1} ，
- ϵ_{s-1}^p 如果 z 沿着 γ 向后从 z_{s-1} 行进到 z_s ，
- 否则为零

剩下的情况分为两种可能。第一种是 $z_{r-1} = i$、$z_r = j$ 和 γ 是 z 从 z_{r-1} 到 z_r 所经过的箭。在这种情况下，我们将 $(B_{z,\ m,\ \lambda})_\gamma$ 在 $\bigoplus_{p=1}^m k\epsilon_{r-1}^p$ 上的限制定义为到 $\bigoplus_{p=1}^m k\epsilon_r^p$ 的线性映射；相对于这些基，该映射由一个特征值为 λ 的若尔当块给出。

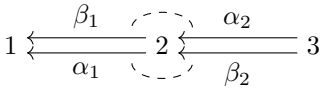
第二种可能是 $z_{r-1} = j$、 $z_r = i$ 和 z 沿着与 γ 相反的方向，从 z_{r-1} 到 z_r。在这种情况下，我们将 $(B_{z,\ m,\ \lambda})_\gamma$ 在 $\bigoplus_{p=1}^m k\epsilon_r^p$ 上的限制定义为到 $\bigoplus_{p=1}^m k\epsilon_{r-1}^p$ 的线性映射；相对于这些基，该线性映射由一个特征值为 λ^{-1} 的若尔当块给出。

至此，带表示$B_{z,\ m,\ \lambda}$ 的定义完成。

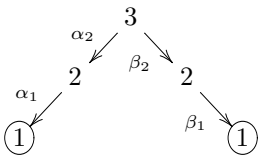
我们指出以下两点：

- 带表示$B_{z,\ m,\ \lambda}$ 是不可分解的；
- 两个带表示$B_{z,\ m,\ \lambda}$ 与 $B_{y,\ n,\ \mu}$ 同构，当且仅当$m = n$ 且：– z 与 y （循环地）共轭；或 – z 与 y 的逆共轭，且 $\lambda = \mu^{-1}$。

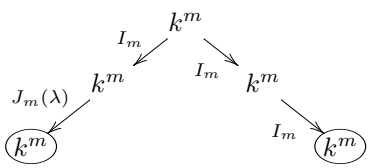
例2.2。 考虑与例 Q， R)相同的温和箭图（2.1。



我们可以验证，$\omega = \alpha_1\alpha_2\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}$是（$Q$， R）的带游走。更直观地说，我们可以像画字符串一样画出一条带。注意，我们将第一个和最后一个顶点圈起来，因为我们要将它们识别为同一点。

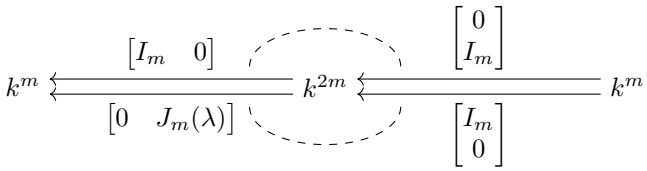


设 $m > 0$ 和 $\lambda \in k^\times$。为了从组合角度得到与带 ω 相关联的带表示 $B_{\omega,\ m,\ \lambda}$ ，我们可以将带的每个顶点替换为向量空间 k^m的一个副本。每个箭都定义向量空间之间的恒等映射，最后一个箭除外，它定义的映射由一个若尔当块矩阵给出。



where $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$.

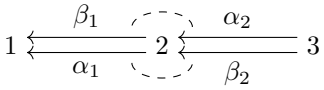
然后，像我们将弦压缩以得到字符串表示那样压缩带，不过要将 k^m 的第一个和最后一个副本（圈出的那些）识别为同一个副本，这样就得到以下表示。



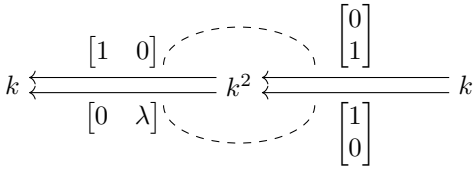
kQ/I 的每个不可分解表示都恰好属于一个字符串表示或带表示的同构类，定义如上。这里我们用到了 k 是代数闭域这一事实：若底域不是代数闭域，就需要采用更一般的带表示定义。对于一个带 z和一个整数 m，我们称族 $\{B_{z,m,\lambda} \mid \lambda \in k^\times\}$ 为一参数带族。

2.4. 砖模。若模 M 的环 $\mathrm{End}(M) := \mathrm{Hom}(M, M)$ 是斜域，则称 M 为砖。由于 $\mathrm{End}(M)$ 是代数闭域 k上的有限维代数，这一条件等价于 $\mathrm{End}(M) \simeq k$；也就是说，$\mathrm{End}(M)$ 的向量空间基由恒等映射构成。

例 2.3. 考虑与前面例子中相同的温和箭图（Q, R）。



考虑$M = B_{\omega,\ 1,\ \lambda}$ 其中 ω 是例2.2中定义的带。



设 $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathrm{Hom}(M, M)$。那么我们知道，对于某个 $a \in k$，$f_3 = a \cdot \mathrm{Id}_k$，因为 f_3 必须是域 k 上的线性自同态。由于 f 必须满足交换方格，我们很容易推得 $f_2 = a \cdot \mathrm{Id}_{k^2}$ 且 $f_1 = a \cdot \mathrm{Id}_k$。因此我们得出结论： M 是一个砖模。

3. Representations of gentle algebras and curves on surfaces

我们将采用 [1, 3, 19, 20] 中提出的拓扑模型来研究温和代数及其表示。虽然我们主要关注 Λ_n 引言中定义的温和代数族，但本节将对一般情形进行描述。

3.1. 曲面与剖分。本文所说的曲面，始终指去掉有限个（可以为零）开圆盘后的定向紧曲面 S。我们用 ∂S表示 S 的边界。这种曲面由其亏格以及 ∂S的连通分支数确定；我们将这些连通分支称为 S的边界分支。

标记曲面是一个二元组（S, M），其中 S 是一个曲面，M 是 S 上满足以下条件的有限标记点集：

- M 是两个子集的不交并 $M_\circ$ 和 $M_\bullet$；
- 在 S的每个边界分支上，属于 $M_\circ$ 和 $M_\bullet$ 的标记点交替出现，且每类至少有一个；
- 曲面的内部也允许有标记点。

一条 $\circ$弧是（S，M）上的一条曲线，连接 $M_\circ$ 中的两个点；形式上，它是从闭区间 $[0, 1]$ 到 S 的连续映射，其端点位于 $M_\circ$ 中，且其内部的像与 M 不相交。一条 $\bullet$弧的定义类似。

一条 $\circ$弧是单对象的，当且仅当它不与自身相交（端点处可能相交）。

（S，M）的 $\circ$弧剖分是由两两不相交的单对象 $\circ$弧组成的集合，这些弧将曲面切分成多边形，称为剖分的单元，其中每个单元在 $M_\bullet$中恰好包含一个标记点。类似地定义 $\bullet$剖分。

例 3.1。以下是圆盘（即具有一个边界分支的球面）、圆环（或具有两个边界分支的球面）以及具有一个边界分支的环面的 $\circ$剖分示例。

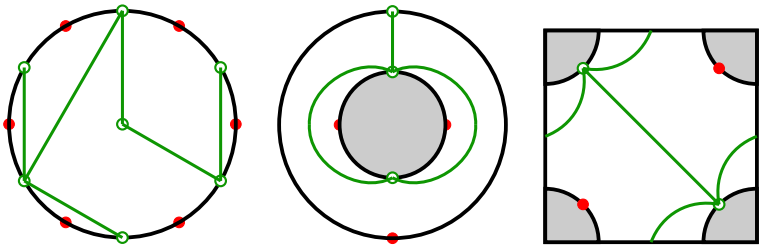


FIGURE 1. $\circ$-圆盘（左）、圆环（中）和带一个边界分支的环面（右）的剖分。

3.2. 剖分的温和箭图。设 Δ° 是 (S, M) 的一个 $\circ$-剖分。我们如下定义一个箭图 $Q(\Delta^\circ)$ 和一组关系 $R(\Delta^\circ)$：

(1) $Q(\Delta^\circ)$ 的顶点与 Δ°中的弧一一对应；(2) 对于 2 中的 Δ° 左图所示的每种构型（也就是说，对于一对弧 i 和 j 的每个公共端点，若 j在逆时针方向上紧接在 i 之后），都有一个箭 $i \to j$ 属于 $Q(\Delta^\circ)$；(3) 对于 2 中 Δ° 右图所示、对应箭为 $i \xrightarrow{\alpha} j$ 和 $j \xrightarrow{\beta} k$的每种构型，路径 $\beta\alpha$ 是 $R(\Delta^\circ)$ 中的一个关系。

例 3.2. 见图 3 图 1 中所绘剖分对应的带关系的箭图1。

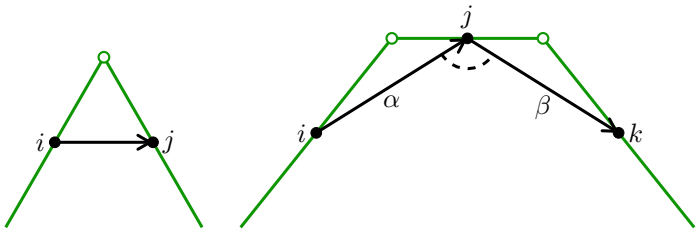


FIGURE 2. 表示上述构造规则的图 $Q(\Delta^\circ)$ 和 $R(\Delta^\circ)$，左侧为 (2)，右侧为 (3)。

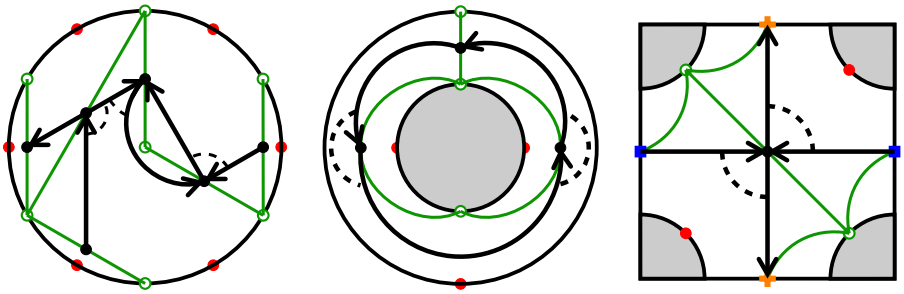
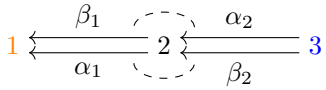


FIGURE 3. 图 1中由曲面导出的带关系箭图

首先，在最右侧的例子中，我们需要识别蓝色方形点和橙色叉形点。这意味着，与该剖分相关联的箭图恰好是温和箭图（Q_3, R_3）。



其次，请注意，我们可能遇到无法构成温和代数的构型，例如最左侧的例子。事实上，任何带关系的箭图（$Q(\Delta^\circ)$ $R(\Delta^\circ)$）若包含一个定向环 $Q(\Delta^\circ$，且该环的长度为二的路径均不在 $R(\Delta^\circ)$中，则定义了一个无限维代数，按定义它不是温和代数。恰当有一个绿色标记点位于内部时，就会出现这种情况。以下结果证实，若我们考虑内部没有绿色标记点的带剖分曲面 Δ°，则得到的恰好是所有温和代数。

定理 3.3 ([3, 19, 20])。

(1) 若 Δ° 是标记曲面（S, M）的一个 $\circ$-剖分，且 S 的内部没有绿色标记点，则（Q（Δ°） R（Δ°））是一个温和箭图。(2) 对于任意温和箭图（Q, R），都存在一个标记曲面（S, M），其 S 的内部没有绿色标记点，并且存在一个 $\circ$- 剖分 Δ°，使得（Q, R）与（Q （Δ°） R （Δ°））同构。此外，（S, M）和 Δ° 在保向同胚及弧的同伦意义下唯一。

构造（S, M）和 Δ° 的方法，可由温和箭图（Q, R明确给出，见 [20, 第 4 节。2]。

3.3. 手风琴线与带。温和箭图的表示与相关曲面上的某些弧有关：这些弧称为手风琴线。

固定一个标记曲面（S， M），其上赋有一个 $\circ$-剖分 Δ°，并令（$Q(\Delta^\circ)$，$R(\Delta^\circ)$为其对应的温和箭图。

S 中的闭曲线是包含在 S内部且避开 M标记点的非可缩曲线；形式上，它是从圆周 S^1 到 $S \setminus (\partial S \cup M)$的非可缩连续映射。若闭曲线不与自身相交，则称其为单对象。闭曲线 γ 是本原的，如果不存在闭曲线 γ_0，使得 γ 在同伦意义下等于 γ_0 与自身拼接 $m \geq 2$ 次。

定义 3.4。对于 (S, M, Δ°) 的闭合手风琴线，是环面 S 上的一条本原闭曲线 γ，满足以下限制：每当 γ 穿过一条弧 α 进入 Δ° 的一个胞腔时，

(a) 它会穿过一条与 β 相邻的 α弧离开该胞腔；(b) 弧 α、β 和 γ 的相关线段围成一个圆盘，且该圆盘不包含 M。中属于该胞腔的唯一标记点。

参见图 4，图中展示了规则（a）和（b）。

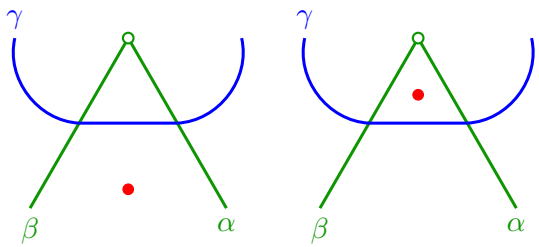


FIGURE 4. 展示手风琴线必须满足的规则的示意图：左侧，γ 满足规则（a）和（b）；右侧，γ 不满足规则（b）。

例 3.5。 图 5 展示了环面上的闭合手风琴线示例。

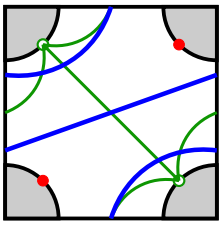


FIGURE 5. 环面上的闭合手风琴线（蓝色）示例 $\circ$环面的剖分，参见例 3.1。

命题 3.6。 将一条带映射到 S 上沿着 $Q(\Delta^\circ)$ 的箭所绘制的闭曲线 S，由此得到一个双射：

$$\{\text{bands for } (Q(\Delta^\circ), R(\Delta^\circ))\}$$
$$\Big\updownarrow \text{1:1}$$
$$\{（S，\ M，\ \Delta^\circ）\text{的简单闭合手风琴曲线同伦类}\}$$

证明。 证明与[20, 命题 423], 中的证明基本相同，其中讨论了弦的情形。关键在于，闭合手风琴曲线在同伦意义下由其与剖分 Δ°的交点序列唯一确定。 □

3.4. 对偶剖分。对于任意 $\circ$-剖分 Δ°，存在唯一的 $\bullet$-剖分 $\Delta^\bullet$，使得 Δ° 中的每条弧恰好与 $\Delta^\bullet$ 中的一条弧相交，反之亦然。具体而言，每条 $\circ$-弧 γ 在 Δ° 中邻接两个胞腔，每个胞腔都恰好包含一个标记点。画一条 $M_\bullet$-弧，连接这两个标记点，并与 $\bullet$相交。 γ剖分 Δ° 和 $\Delta^\bullet$ 称为对偶剖分。

如 [20, 命题 3.13], 所示，(S, M, Δ°) 的闭合手风琴曲线可以等价地视为 $\Delta^\bullet$的闭合回旋。

定义 3.7。 闭合回旋是 (γ, S, M) 上的一条本原闭曲线，并且对于 $\Delta^\bullet$ 中任意两个 γ 相继相交的胞腔，它们在 $\circ$-标记点在 $M_\bullet$ 上位于 γ的相对两侧。

若曲线 $C_1,\ldots,C_r$ 处于最小位置，则表示选取它们各自同伦类中的代表，使得 C_i 和 C_j 横截相交且交点数最少。如多曲线在 [9]第 1.2.5 节之前的部分 $\Delta^\bullet$ 所解释的，这种选取总是可行的。因此，我们始终假设，相对于剖分 $\Delta^\bullet$的回旋总是以与其相交次数尽可能少的方式绘制。

例 3.8。 我们可以验证，例 3.5 中给出的Δ° 闭合手风琴线是一个关于 $\Delta^\bullet$的闭合回旋。

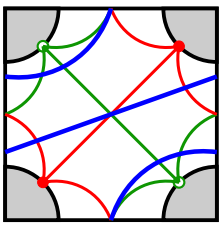


FIGURE 6. 一个关于某个
$\bullet$环面的剖分的闭合回旋（蓝色），如例 3.1中所示。

命题 3.9 ([20]中的命题 3.13）。 在$(S,\ M)$ 上的闭曲线是关于 Δ° 的闭合手风琴线，当且仅当它是关于 $\Delta^\bullet$的闭合回旋。

注3.10。注意，闭合回旋恰好在关联带到达深部（即形如 $\beta^{-1}\alpha$ 的子词）或峰部（即形如 $\alpha\beta^{-1}$ 的子词）时穿过 $\bullet$-弧 $\Delta^\bullet$。

3.5. 带模与态射。 接下来，我们将关注同时也是砖的带模。我们称这类对象为带砖。在考察它们之前，我们需要回顾 H. Krause 关于带模之间态射的一个结果 [14] ，并讨论其在曲线交点方面的诠释。

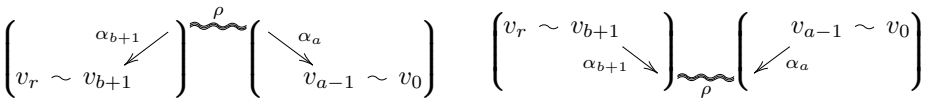
设（Q， R）是一个温和箭图。设 $w = \alpha_r^{\varepsilon_r} \cdots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ 是（Q， R）上的一个字符串。 w 的子串 ρ 可以是形如 $\rho = \alpha_b^{\varepsilon_b} \cdots \alpha_a^{\varepsilon_a}$ 的字符串，其中 $0 \le a \le b \le r$，也可以是惰性路径 $\rho = e_v$ ，其中 v 是 w 支撑中的一个顶点。若满足

$a = 1$ 或 $\varepsilon_{a-1} = 1$，则称 $\bullet$ 位于底部；并且
$b = r$ 或 $\varepsilon_{b+1} = -1$，则称 $\bullet$ 位于底部。

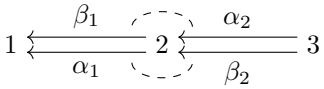
对偶地，若满足以下条件，则称 ρ 位于 w 的顶部：

- 要么 $a = 1$ 要么 $\varepsilon_{a-1} = -1$，并且
- 要么 $b = r$ 要么 $\varepsilon_{b+1} = 1$。

以下图示说明了相关术语；左侧表示 ρ 位于 w 的顶部的情形，右侧则表示ρ 位于 w 底部的情形。图中括号括起来的部分是可选的。



例3.11。 取例 2.1中的同一个温和箭图：



考虑字符串 $w = \alpha_1\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2$，如图 7所示。子串 $\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2$ 最左边的出现位置显然位于 w的顶部。类似地，$\alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2$ 最右边的出现位置位于 w的底部。

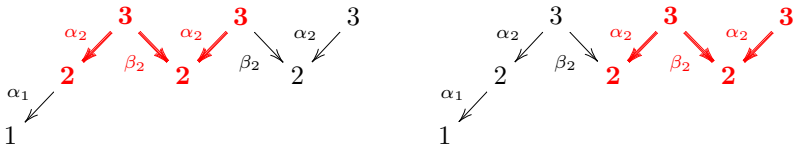


FIGURE 7. 字符串 ρ 的表示，以及字符串$\sigma = \alpha_2\beta_2^{-1}\alpha_2$ 作为子串出现在 ρ顶部（左侧）和底部（右侧）的表示。

子串可以帮助我们直观地呈现表示的底。回顾一下， M 的底是 M的所有单模之和；若 M 是字符串模或带模，则可通过考察 M定义字符串或带底部所有长度为零的子串来得到其底。

子串对于确定字符串模与带模之间的态射也非常有用。字符串模的情形已在 [8]中确定；在本文中，

我们只需要下面这个适用于带模的结果[1]。陈述定理之前，需要先介绍一些记号。

设 z 为一条带游走。设 z_∞^∞ 为由可数个 z 拼接而成、向左和向右无限延伸的单词。我们将 z_∞^∞ 视为 z 的“万有覆盖”；特别地，$\mathbb{Z}$ 在 z_∞^∞ 的有限子词集合上通过平移作用。我们只考虑在此 $\mathbb{Z}$-作用下等价的 z_∞^∞ 子词。定义 $\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{bot}}(z)$ 和 $\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{top}}(z)$ 分别为 z_∞^∞ 底部和 z_∞^∞ 顶部的子串集合（模去 $\mathbb{Z}$- 作用）。

定理 3.12 ([14])。设 z，z' 是两条带游走，m，m' 是正整数，且 λ，λ' 是 k中的两个元素。考虑带模 $B_{z,\ m,\ \lambda}$ 以及 $B_{z',\ m',\ \lambda'}$（定义见第 2.3 节）。

(1) 若 $B_{z,1,\lambda}$ 和 $B_{z',1,\lambda'}$ 不同构，则态射空间 Hom $(B_{z,m,\lambda}, B_{z',m',\lambda'})$ 的一组基与该集合双射

$$\left\{(v,v')\in\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{top}}(z)\times\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{bot}}(z')\;\middle|\;[v]=[v']\ \textit{or}\ [\widetilde{v}]=[v']\right\}\times V_{m,m'},$$

其中 $V_{m,m'}$ 是空间 $\mathrm{Hom}_k(k^m,k^{m'})$ 的一组基，其维数为 mm'，而 $\widetilde{v}$ 是 v 的逆序。

(2) 若 $B_{z,}$1,$_{\lambda}$ 和 $B_{z'}$,1,$_{\lambda'}$ 同构，则态射空间 Hom $(B_{z,m,\lambda}, B_{z',m',\lambda'})$ 的一组基与 (1) 中的集合并上空间 $\mathrm{Hom}_{k[t]}\left(k[t]/(t^m)\ k[t]/(t^{m'})\right)$ 的一组基所得集合双射，其维数为 $\min(m,m')$。

定理3.12 中出现的集合可以通过曲线交叉点来作出一种简洁的解释。

引理 3.13. 设 (Q,R) 是一个温和箭图，其对应的剖分曲面为 (S,M,Δ°)。设 z 和 z' 是 (Q,R) 上的带，其对应的闭合手风琴分别为 (S,M,Δ°) 上的 γ 和 γ'。假设 γ 和 γ' 处于最小位置。令

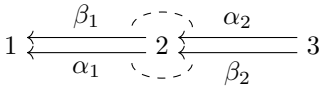
$$K(z,z'):=\left\{(v,v')\in\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{top}}(z)\times\Sigma^{\mathbb{Z}}_{\mathrm{bot}}(z')\;\middle|\;[v]=[v']\ \textit{or}\ [\widetilde{v}]=[v']\right\}.$$

那么，集合 $K(z,z')\sqcup K(z',z)$ 的基数等于曲线 γ 和 γ' 之间交叉点的数量。

证明。引理[20, 4.24], 其中针对 S 弧的证明同样适用于闭曲线，无需任何改动；该证明在 γ 与 γ' 之间的交叉点集合和集合 $K(z,\ z')\sqcup K(z',\ z)$ 之间建立了双射。□

推论 3.14. 设 z 是一条带，其对应的闭合手风琴为 γ。带模 $B_{z,\ m,\ \lambda}$ 是一个砖，当且仅当 $m=1$ 和 γ 不与自身相交。

例 3.15. 让我们再次考虑下面的温和箭图。



其对应的标记曲面配备了一个可对偶化的 $\circ$-剖分（S，M，Δ°），这就是我们在示例3.1中见过的环面剖分。

[1]该定理 [14] 是用涉及态射的“可容许三元组”来表述的~，这些态射来自 A 型的箭图，或 A 进入 Q；对于带模这一特殊情形，我们将给出一个等价表述，即使用带的万有覆盖中的子串来表述。

现在考虑带 $z = \beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\alpha_2$。对应的闭合手风琴$\gamma$ 与图5中所绘的一致。注意，γ 不会与自身相交。因此，根据推论3.14， $B_{z,\ 1,\ \lambda}$ 是 $\lambda \in k^{\times}$对应的 Λ_3 上的一个带砖。
</output>

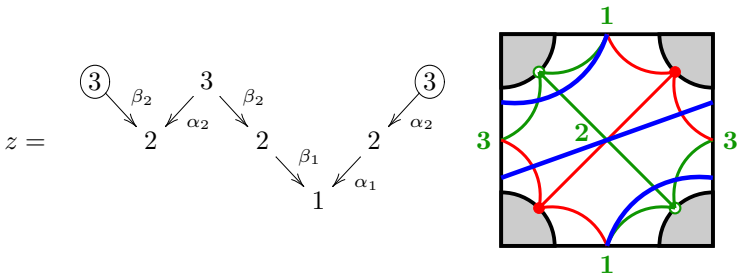


FIGURE 8. 与 z相关联的带游走 z （左侧）和位于 (S, M, Δ°) 上方的闭合手风琴γ（右侧）。

3.6. 欧拉形式。设 Λ 是一个有限整体维数为 d、具有 n 个简单模同构类的代数。存在一个定义在 $\mathbb{Z}^n$ 上的双线性形式 $e(\cdot,\cdot)$，称为欧拉形式，它满足：对于任意两个 Λ-模 X、Y，都有

$$e(\mathbf{dim}(X), \mathbf{dim}(Y)) = \sum_{i=0}^{d} \dim \mathrm{Ext}^i(X, Y).$$

这里，维数(X) 和 维数(Y) 分别表示 X 和 Y的维数向量。（注意，公式右侧的值仅取决于 维数(X) 和 维数(Y)，而不取决于 X 和 Y，这一点并非显而易见。）关于欧拉形式的背景，请参见 [2, 第三节。3]

由于 Λ 具有有限整体维数，可以证明自由阿贝尔群之间的态射

$$\mathbf{dim} : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[P_i] \longrightarrow \mathbb{Z}^n : [P_i] \longmapsto \mathbf{dim} P_i$$

是一个同构。我们在 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[P_i] = \mathbb{Z}^n$ 上定义双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，如下：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = e(\mathbf{dim}(\mathbf{x}), \mathbf{dim}(\mathbf{y})).$$

引理 3.16. 若 X 和 Y 是 Λ-模，且投射维数至多为 1，则 $\langle g(X)\ g(Y) \rangle = e(\dim(X), \dim(Y))$。

证明。若 $0 \to P_1^X \to P_0^X \to X \to 0$ 是 X 的一个投射分解，则

$$\mathbf{dim}(X) = \mathbf{dim}(P_0^X) - \mathbf{dim}(P_1^X) = \mathbf{dim}\left(g(X)\right).$$

Y 也同样如此。因此

$$\langle g(X), g(Y) \rangle = e\left(\mathbf{dim}\left(g(X)\right), \mathbf{dim}\left(g(Y)\right)\right) = e\left(\mathbf{dim}(X), \mathbf{dim}(Y)\right).$$

□

记 e_i 为第 i 个位置为 1、其余位置为 0 的标准基向量。为了显式计算欧拉形式，注意到

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle g(P_i), g(P_j) \rangle = \dim \mathrm{Hom}(P_i, P_j)$$

最后这个量等于表示 P_j在顶点 i 处的维数。

现在我们将讨论 Λ 是有限整体维数的温和代数的情形。条件 Λ 具有有限整体维数，恰好意味着相应的标记曲面没有 $\bullet$-标点（我们仍假设它没有 $\circ$-标点）。

此外，下一个结果给出了 $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ 的一个简明描述，其中 $i \geq 1$ 无论何时 X 和 Y 都是带模。

引理 3.17。设 X 和 Y 是带模。那么

$$\dim \mathrm{Ext}^1(X,Y) = \dim \mathrm{Hom}(Y,X)$$

并且当 $i > 1$时，$\mathrm{Ext}^i(X,Y) = 0$。

证明。Auslander–Reiten 公式指出，$\mathrm{Ext}^1(X,Y)$ 与 $\mathrm{Hom}(Y,\tau X)$ 对偶，其中 $\mathrm{Hom}(Y,\tau X)$ 是从 Y到 τX的态射空间，再对所有经由内射模分解的态射取商。然而，由于 X 是带模，它的投射维数为 1，因此 ~~Hom~~$(Y,\tau X) \simeq \mathrm{Hom}(Y,\tau X)$ [2, 推论 IV.2。14]。最后，由于 X 是带模，$\tau X \simeq X$。

关于 $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ 且 $i > 1$ 的结论，可直接由 X 的投射维数为 1 得出。□

由引理 3.17，我们可推得以下命题：

命题 3.18. 若 Λ 是有限整体维数的温和代数，且 X 和Y 是 Λ的带模，则：

$$\langle g(X), g(Y)\rangle = \dim \mathrm{Hom}(X,Y) - \dim \mathrm{Hom}(Y,X).$$

结合前一个命题与引理 3.13，我们得到了 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 的维数与先前引入的几何模型之间的联系。

推论 3.19. 设 Λ 是一个对应于标记曲面的温和代数，该曲面既没有 $\circ$ 标点，也没有 $\bullet$ 标点，并带有 $\circ$ 剖分（S, M, Δ°）。设 X 和 Y 是两个不同构的带砖。$\mathrm{Hom}(X,Y)$ 的维数等于 $\langle g(X)\ g(Y)\rangle$ 与对应于 X 和 Y 的曲线的交叉点数之和的一半。

例 3.20. 我们再次考察引言中的代数 Λ_n。对于这个代数，我们有

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle \dim P_i, \dim P_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } i > j, \\ 1 & \text{if } j = i, \\ 2 & \text{if } j > i \end{cases}$$

因此，

$$\langle (a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_i b_j.$$

注意，$\langle \cdot, \cdot\rangle$ 在由 $x_1 + \cdots + x_n = 0$给出的超平面上斜对称，且带砖的任意 g-向量都位于此超平面内。

3.7. 带砖与带半砖。半砖模是有限多个砖的直和，并且不同直和项之间不存在非零态射。我们将特别关注由带砖直和构成的半砖模，并称之为带半砖。

给定一个带有 $\circ$-剖分的曲面，(S, M, Δ°)，以及对偶 $\bullet$-剖分 $\Delta^\bullet$，与之对应的是一个温和箭图 $(Q(\Delta^\circ)\ R(\Delta^\circ))$。正如我们所见，$(Q(\Delta^\circ)\ R(\Delta^\circ))$ 的带砖构成单参数族，而这些单参数族对应于 S 上的简单、本原闭曲线。

我们将 上的简单闭多曲线 S 定义为 S 上一组有限个本原闭曲线的集合，这些曲线没有自交点，且彼此不相交。将 上的简单闭合多重斜线 S 定义为 S 上的一条简单闭多曲线，其每个分支相对于 $\Delta^\bullet$都是回旋线。（等价地，每个分支相对于 Δ°都是手风琴线，但前一种观点对我们更有用。）

对于这样的简单闭合多重斜线，我们称模对应于该多重斜线，如果它是若干砖的直和，每条闭曲线对应一个砖；该砖取自与这条闭曲线对应的单参数族。如果有多条曲线对应同一个砖族，则选取相应的砖，使它们两两不同构。

命题 3.21. 设 (S, M, Δ°) 是一个带有 $\circ$-剖分的曲面。每个对应于 $(Q(\Delta^\circ)\ R(\Delta^\circ))$ 的带半砖，都对应于 S 上的一条简单闭合多重斜线。反过来，任何对应于这样一条简单闭合多重斜线的模都是带半砖。

在这一对应关系中，带砖对应于单条回旋。

证明。 我们已经知道，每个带砖都定义了一条本原闭合回旋，且没有自交点。给定一个带半砖，由引理 3.13 可知，相应的曲线必然要么在同伦意义下重合，要么可以画成互不相交。这说明，每个带半砖都如所述对应于一条简单闭合多重斜线。

反过来，我们还必须注意到，若 B 和 B' 是对应于同伦曲线的两个不同构带砖，则 $\mathrm{Hom}(B, B') = 0$。□

前一个命题意味着，要理解温和箭图（$Q(\Delta^\circ)\ R(\Delta^\circ)$ 的带半砖，就相当于理解 S 上的简单闭多斜线。

4. Combinatorics of band semibricksof Λ_n

本节中，我们将上一节的讨论具体应用于分析 Λ_n 的带半砖。

4.1. 的曲面模型。如前所述，[20] 提供了一种明确的方法，可将温和代数转化为带有对偶剖分的曲面，并由此恢复该代数。根据 [20, 例 4.16]可知，代数 S_n 对应的曲面 Λ_n 在 n 为奇数或偶数时，分别有 1 个或 2 个边界分支；也就是说，其亏格为 $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$，并且恰有两个 $\circ$-标记点和两个
$\bullet$-个标记点，且都在边界上。我们将描述它的剖分，以便满足我们的目的。

曲面的剖分 $\Delta^\bullet$ 由 S_n 两个（$n+1$）边形组成，为方便起见，我们将它们编号为 P_1 和P_2。我们按顺时针方向将P_i 的边编号为$E_0^{(i)}$， $E_1^{(i)}$，……， $E_n^{(i)}$其中 $i=1$，2。

这两个多边形通过将 $E_j^{(1)}$ 与 $E_j^{(2)}$ 对 $1\le j\le n$粘合在一起。沿着边 $E_j^{(1)}$ 在 P_1 中顺时针前进，与沿着边 $E_j^{(2)}$ 在 P_2中逆时针前进相对应。注意，边 $E_0^{(1)}$ 和 $E_0^{(2)}$ 并未粘合。我们将这些粘合后的边称为 E_1、……、 E_n。

为方便起见，我们将多边形 P_1 和 P_2 画成长上边与边界相对应的形状，因此沿边顺时针前进 $E_1^{(i)}$、……、 $E_n^{(i)}$相当于从右向左行进，如图 9

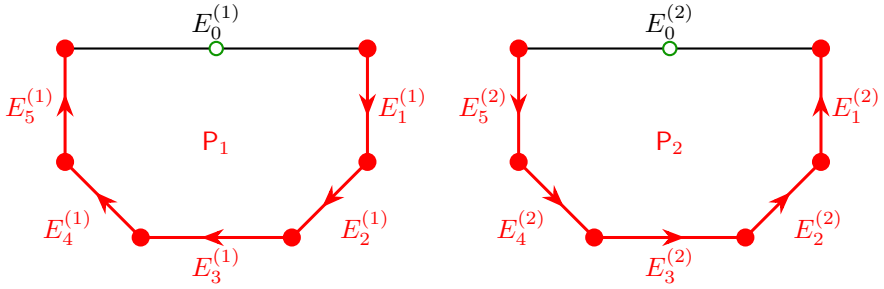


FIGURE 9. 剖分中的两个六边形 $\Delta^\bullet$ 所对应的曲面 S_5对应于代数 Λ_5

引理 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是 S_n上的一条简单闭合多重斜线。设 x 是 $\mathcal{C}$与 E_i交叉的一个点。在 P_1 和 P_2，上，我们知道 $\mathcal{C}$ 将 x 连接到另一个交点。这两个交点要么都在 x的左侧，要么都在 x的右侧。

证明。这由之字形条件可得。 □

引理 4.2. 设 $\mathcal{C}$ 是 S_n上的一条简单闭合多重斜线。设 E_i 是与$\mathcal{C}$ 相交的一条边。只考虑 S_n的两个$n+1$边形之一。则要么 $\mathcal{C}$将 $\mathcal{C}\cap E_i$ 上的每个点连接到左侧边上的点，要么它将 $\mathcal{C}\cap E_i$ 上的每个点连接到右侧边上的点。无论我们考察的是哪个 $n+1$边形，结论都相同。

证明。设我们所考察的多边形为 P_1,，并设 $E_i^{(1)}$ 上有两点 x、 y，使得 $\mathcal{C}$ 在 P_1上分别将它们连接到左侧某条边上的一点（即指标大于 i的边）和右侧某条边上的一点（即指标小于 i的边）。为了使 $\mathcal{C}$ 在 P_1中没有交叉点， x 在 P_1上必须位于 y 的左侧。

由于 P_1 和 P_2 的粘合方式， x 位于 y 在 P_2的右侧。根据引理 4.1， x 必须通过 $\mathcal{C}$ 在 P_2 连接到其左侧的一条边， i而y 必须通过 $\mathcal{C}$ 在 P_2 连接到其右侧的一条边 i。这与 $\mathcal{C}$ 是单对象（即没有自交点）的假设矛盾，如图 10所示。

结论与我们考察的是哪一个（$n+1$）边形无关，这一事实由引理 4.1 得出。 □

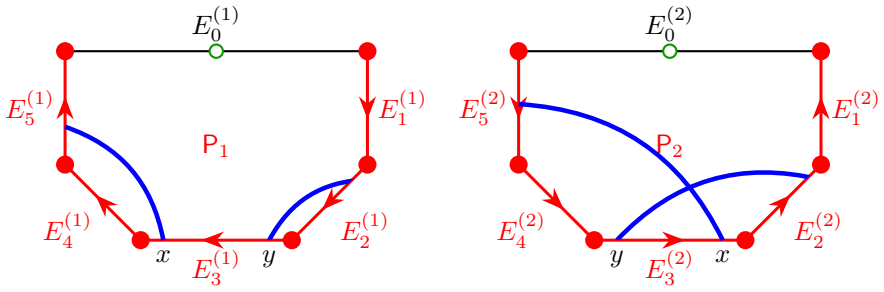


FIGURE 10. 引理4.2的证明示例

注4.3。 前一个引理也可以用更纯粹的表示论术语来证明。与 $\mathcal{C}$ 的 E_i 交点对应于相应带半砖的顶或底中出现单对象 i，具体取决于 $\mathcal{C}$ 将 x 连接到右侧还是左侧的边（分别如此），如注 3.10所述。由带半砖的顶和底中不可能出现同一个单对象这一事实，即可得到该引理。

我们将 $\mathcal{C}$一个 n-元整数a_1（，……， a_n）与之关联，并称其为g-向量，这里借用了 [13, 命题 33]中的一个公式。对于 $1 \leq i \leq n$，定义 $|a_i|$ 为 $\mathcal{C}$ 穿过 E_i的次数。假设 $|a_i| \neq 0$，若 a_i将 $\mathcal{C}$ 的点连接到更靠右的边，则其符号定义为正；若将 $\mathcal{C} \cap E_i$ 的点连接到更靠左的边，则其符号定义为负。根据引理4.2，该符号定义良好。

命题4.4。设 $\mathcal{C}$ 是 S_n上的一条简单闭合多重斜线，且 X 是与 $\mathcal{C}$对应的一个带半砖。 X 的 g-向量与 $\mathcal{C}$ 的 g-向量相同。

证明。令 z 为定义 X的带游走。字符串模和带模的组合性质给出了如下 X 的 g-向量公式：令 $\mathrm{Top}(z)$ 为 z 顶部顶点的多重集，$\mathrm{Bot}(z)$ 为 z底部顶点的多重集。那么 $g(X) = (g_1, \ldots, g_n)$，其中 $g_i = |\{a \in \mathrm{Top}(z) \mid a = i\}| - |\{b \in \mathrm{Bot}(z) \mid b = i\}|$。由 $\mathcal{C}$ 的 g-向量定义可直接得到结论。□

引理4.5。设 $\mathcal{C}$ 是 S_n上的简单闭合多重斜线。那么 $\mathcal{C}$ 可以被重构（在同伦意义下），仅凭其 g-向量即可完成。

证明。首先考虑 P_1。在每条边上标出正确数量的交叉点。从 $E_1^{(1)}$ 的右端开始，向左进行。每当到达一条满足 $a_i < 0$ 的边 E_i 上的交叉点时，该交叉点必须与此前经过的某个交叉点相连。事实上，它必须与最近遇到且仍可连接的交叉点相连，因为任何其他选择最终都会导致交叉。如此一来，无需作出任何选择（交叉点的位置除外），便可在 P_1 上重构 $\mathcal{C}$。接着对 P_2, 进行同样的操作，只是此时交叉点的位置已经固定。由此即可重构 $\mathcal{C}$。□

推论 4.6. 设 $\mathcal{C}$ 是 S_n 上的简单闭合多重斜线。那么，将 $\mathcal{C}$ 限制在 P_1 和 P_2 上所得的结果在同伦意义下相同（即端点位于指定边界线段上的曲线族相同）。

证明. 由上文给出的重构过程可立即得知，重构得到的曲线集在 P_1 和 P_2 上同伦等价。因此，这对 $\mathcal{C}$ 也成立。□

推论 4.7. 若 X 和 Y 是具有 g-向量 $(a_1, \ldots, a_n)$ 的带半砖，则可将其写作 $X = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i$ 和 $Y = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i'$，其中 B_i 和 B_i' 是属于同一个单参数族的带砖。

证明. 这是因为具有此 g-向量的曲线集合在同伦意义下唯一，因此 X 和 Y 必定都与之对应。□

注 4.8. 推论4.7 是温和代数中一条更一般结果的特例：带半砖 $X = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i$ 其中 B_i 属于砖的单参数族，由其 g-向量确定，允许将每个 B_i 替换为同一单参数族中的一个砖。此结论可由 [10, 第 3], 另见 [22,定理 3。8] 关于 g-向量的表述。

由于 g-向量（a_1，……，a_n）使我们能够重构 $\mathcal{C}$，因此，除单参数族中带砖的选择外，也就能确定相应的带半砖。由此自然产生两个问题：首先，哪些 n-元整数元组（a_1，……，a_n）可以作为带半砖的 g-向量出现？其次，对于作为某个带半砖 g-向量的（a_1，……，a_n），我们如何判断它实际上是单个砖的 g-向量，而非若干带砖的直和？第一个问题将在下一小节中解决。第二个问题将在第 6 节中讨论，但不会完全解决。

4.2. Dyck 路径模型。给定平面 S_n 上的一个简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$，有一种特殊的重绘方式 S_n，可使集合 $\mathcal{C}$ 的描述格外简单。回顾一下，Dyck 字是二元字母表 $\{u, d\}$ 上的一个单词 w，满足：w 中 u 的个数与 d 的个数相同，并且 w 的每个前缀中，u 的个数都不少于 d 的个数。基本步是形如 [（x，y），（$x+1$，$y+1$）] 或 [（x，y），（$x+1$，$y-1$）] 的线段。格路径是平面 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 中由连续基本步构成、且从原点出发的序列。Dyck 路径是表示 Dyck 字的格路径，其中 u 对应由 [（x，y），（$x+1$，$y+1$）] 给出的上步，而 d 对应由 [（x，y），（$x+1$，$y-1$）] 给出的下步。例如，表示单词 $uuuuddduuddd$ 的 Dyck 路径见图11。Dyck 路径可定义为始终不低于 x 轴，且起点和终点都在该轴上的格路径。

g-向量 $(a_1, \ldots, a_n)$ $\mathcal{C}$可以改写为字母表$\{u, d\}$上的单词 $\mathsf{d}(\mathcal{C})$，其中 a_i 对应于 $|a_i|$ 个 u 副本（若 $a_i < 0$），或 d 副本（若 $a_i > 0$）。值得注意的是，一个或许出人意料的约定是：当 g-向量中的项为负时，它对应一串上步。

引理 4.9. 对于 S_n上的 $\mathcal{C}$ 简单闭合多重斜线，单词 $\mathsf{d}(\mathcal{C})$ 是一个 Dyck 字。

证明。我们先给出 $\mathsf{d}(\mathcal{C})$ 的另一种描述。将注意力限制在 P_1 上。将 $\mathcal{C}$ 与 $E_i^{(1)}$ 相交的每个点标记为 u 或 d；若 $\mathcal{C}$ 将该点连接到更靠左的一条边，就标记为 u；若 $\mathcal{C}$ 将该点连接到更靠右的一个点，就标记为 d。那么，$\mathsf{d}(\mathcal{C})$ 就是从右向左读取 $\mathcal{C}$ 与 P_1 的边界相交处各点的标记后得到的单词。

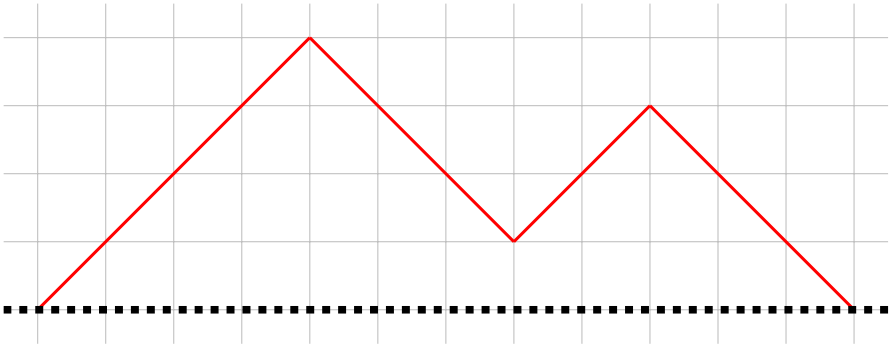


FIGURE 11. Dyck 字 $uuuuddduuddd$的 Dyck 路径。

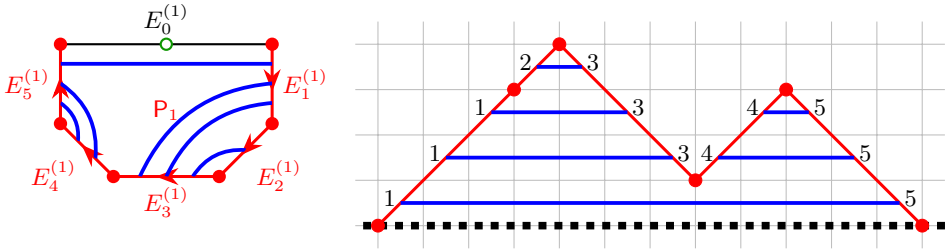


FIGURE 12.左：由 g-向量 $(-3,-1,3,-2,3)$ 给出的多重回旋线 $\mathcal{C}$ ，绘制在 S_5的任一多边形上。右：用于以更简单的方式表示同一多重回旋线的 Dyck 路径模型。

因此，每当我们读到一个 d 时，必定已经读过其右侧与之相连的 u ，因为 $\mathcal{C}$ 将二者连接起来，所以 d($\mathcal{C}$) 的任意前缀中， u 的出现次数至少与 d 一样多。此外，d($\mathcal{C}$) 中两者的总数相同，因为读到末尾时，所有交叉点都已配对。□

边 $E_i^{(1)}$ 由一段长度为 a_i的基本步组成。因此，我们用 i标记 Dyck 路径上相应的步。添加一条连接路径两个端点、并沿路径下方延伸的边，这样我们现在就在平面上得到了一条闭曲线。将这条闭曲线内部的区域认作 P_1。由于 d($\mathcal{C}$) 是一个 Dyck 字，每个上步都有一个匹配的下步。我们通过用一条水平线连接每对匹配的上步和下步，恢复 $\mathcal{C}$。这种在 S_n 上绘制多重回旋线的方式称为 Dyck 路径模型。

图 12 展示了曲面 P_1 上的一条曲线及其在 Dyck 路径模型中的表示。特别要注意，同一区域也可以识别为 P_2, ，并且$\mathcal{C}$ 仍由水平线组成。

命题 4.10. 一个整数 n-元组（$a_1,\ldots,a_n$）是某个简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 在 S_n 上的 g-向量，当且仅当部分和 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ 对 $1 \le k \le n-1$均为非正，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$。

证明。对 $(a_1,\ldots,a_n)$ 的这些条件等价于要求 $d(\mathcal{C})$ 是一个 Dyck 字，而我们已经证明这是必要条件。反过来，如果 $(a_1,\ldots,a_n)$

满足命题的条件，那么它就定义了一个 Dyck 字；Dyck路径模型表明，可以在 S_n 上绘制一条具有此 g- 向量的单对象闭合多重回旋线。□

推论4.11. 整数 n-元组 $\mathbf{g} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是一个半砖带模的 g-向量，当且仅当部分和 $\sum_{i=1}^{k} a_i$ 对于$1 \le k \le n-1$均为非正，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$。在这种情况下，存在一组带砖的单参数族 $(\mathscr{F}_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$，在置换意义下唯一，使得若

$$X = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i$$

其中 B_i 在 $\mathscr{F}_i$ 中一般性地选取，则 X 是一个带半砖，并满足$g(X) = \mathbf{g}$。

例4.12. 令 $n = 3$ 和 $g = (-1, -1, 2)$。那么我们得到图 8 中所示的带模。

5. Perfectly clustering words

5.1. Burrows–Wheeler变换与完美聚类词。考虑一个字母表 A。自由幺半群 A^* 由A 自由生成，其中的两个词称为共轭词，若存在 A^* 中的某些词 x、y，使它们可以写成 xy 和yx。一个共轭类是一个词的所有共轭词组成的集合。若一个词不是另一个词的幂，则称其为本原词。若一个共轭类中的某个元素（等价地，所有元素）都是本原词，则称该共轭类为本原共轭类。

现在假设字母表 A 具有全序，并在 A^*上使用字典序。

Burrows–Wheeler 变换，由 [5], 引入，是从 A^* 到其自身的映射，记作 BW，定义如下。称单词 v 的 Burrows–Wheeler 表 v为一个矩形杨表，其各行自上而下是 v的共轭词，并按字典序从小到大排列。见图13。根据定义， $BW(v)$ 是从上到下读取该杨表最后一列所得的单词。

定义5.1. 若 v 是本原的，且 $BW(v)$是弱递减词，则称单词 $v \in A^*$ 为完美聚类词。

例5.2。设 $v = acacacbbbc$。我们可以很容易地验证 v 是本原的。按照图13，得到 $BW(v) = ccccbbbaaa$。因此， v 是完美聚类词。

显然，共轭词在 BW 下的像相同。因此，映射 BW 实际上是从 A^* 的共轭类集合到 A^* 的映射。将其限制在本原共轭类集合上，它便成为单射。事实上，假设 v 是其共轭类中字典序最小的词（因此 v 是一个 Lyndon词）。令 $BW(v) = w$。下面介绍如何从 w 中恢复 v。考虑 w 的标准置换，记为 $st(w)$：从 A 中最小的字母开始，为 w 的字母编号，并按从左到右的顺序为该字母的各次出现编号；然后为第二小的字母编号，以此类推。例如， $st(baaacaba) = 61238475$。令 τ 为 $st(w)$ 的逆置换；将 τ 写成对称群中的不相交循环之积；结果会发现其中有唯一一个循环。然后，将该循环中的 i 替换为 w 中第 i 个字母。接下来

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a & c & a & c & a & c & b & b & b & \boldsymbol{c} \\
a & c & a & c & b & b & b & c & a & \boldsymbol{c} \\
a & c & b & b & b & c & a & c & a & \boldsymbol{c} \\
b & b & b & c & a & c & a & c & a & \boldsymbol{c} \\
b & b & c & a & c & a & c & a & c & \boldsymbol{b} \\
b & c & a & c & a & c & a & c & b & \boldsymbol{b} \\
c & a & c & a & c & a & c & b & b & \boldsymbol{b} \\
c & a & c & a & c & b & b & b & c & \boldsymbol{a} \\
c & a & c & b & b & b & c & a & c & \boldsymbol{a} \\
c & b & b & b & c & a & c & a & c & \boldsymbol{a}
\end{array}
$$

FIGURE 13. 完美聚类词 $acacacbbbc$的 Burrows–Wheeler 杨表

得到 Burrows–Wheeler 表 的其中一行 v。如果该循环以 1 结尾，它就是第一行，即 v （见 [23, 第 15 节。2] 了解更多详情）。

例 5.3。 设 v 如例 5.2所示。 $BW(v) = c^4b^3a^3$ 是 $789X456123$ (我们将 X 记作 10)，其逆为 $\tau = 89X5671234$，循环表示为 $\tau = (8293X45671)$，并将循环中的 i 替换为 i的第 w个字母，得到 $acacacbbbc$，从而还原出 v。

完美聚类词有一个简单的刻画。为陈述这一刻画，将单词 w 的长度不超过 w 长度的因子称为 ww 的循环因子。

命题 5.4。单词 $v \in A^*$ 是完美聚类词，当且仅当对于 v 中任意形如 aub、满足 a、$b \in A$ 和 $u \in A^*$的循环因子，不存在 v 中形如 $a'ub'$ 、满足 a'、$b' \in A$、 $a < a'$ 和 $b < b'$的循环因子。

证明。假设 v有循环因子 aub和 $a'ub'$，且 $u \in A^*, a, b, a', b' \in A$, $a < a'$和 $b < b'$。那么 v有两个共轭词 $v_1 = ub \cdots a$和 $v_2 = ub' \cdots a'$。于是 $v_1 < v_2$，因此在 Burrows–Wheeler 表中， v_1 位于 v_2 上方，它们的末字母分别为 a, a'；由于 $a < a'$， v 不是完美聚类的。

反过来，假设 v 不是完美聚类的；那么 v 有两个共轭词v_1, v_2，其中 $v_1 < v_2$，且末字母分别为 a, a'，并且 $a < a'$。由于 $v_1 < v_2$且它们长度相同，存在分解 $v_1 = ub \cdots, v_2 = ub' \cdots$，满足 $u \in A^*, b, b' \in A$和 $b < b'$。由此可知，要么 $v_1 = ub \cdots a, v_2 = ub' \cdots a'$，且 w 有循环因子 aub 和 $a'ub'$；要么 $v_1 = ub$, $v_2 = ub'$，并将$M(v)$记作单词 v中出现的字母多重集，我们看到 $M(ub) = M(ub')$, 因为这两个单词共轭，因此 $b = b'$，矛盾：这种情况不可能发生。□

该双射 BW 是 Gessel 与其中一位作者所提出的双射的一个特例 [11]。我们给出 [12] 中所述的一个小变体。每个单词的共轭类也称为 项链。

设 $w = a_1 \cdots a_n$是一个单词， τ是其标准置换的逆。对 τ 的每个循环 $(j_1, \ldots, j_i)$，将其与项链 $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_i})$ 关联。结果表明，这条项链总是本原的。

定义 5.5. 设 Φ 是一个映射，它将每个单词 $w \in A^*$ 映射为一个本原项链多重集：取标准置换 $\tau = st(w)^{-1}$ 的逆的所有循环，并将 i 替换为 w的第 i 个字母。

例 5.6。设 $w = baacbcab$。我们有 $st(baacbcab) = 41275836$，后一个置换的逆为 $41275836^{-1} = 23715846$。τ 的循环为 (1, 2, 3, 7, 4)、(5) 和 (6, 8)。因此，对应的项链多重集为$\Phi(w) = \{(baaac)、(b)、(cb)\}$。

定理 5.7 ([11])。 映射 Φ是双射。

为了描述逆双射，我们遵循 [12]。给定一个本原项链的多重集，考虑由所有对应共轭类按重数取并得到的单词多重集（每个长度为 i 的项链对应 i 个词）；注意这些词都是本原的。将它们按如下次序从上到下排列在一个右对齐杨表中：$u < v$ 当且仅当 $uuuu.... < vvvv...$ （无限单词的字典序）。如果多重集中存在非平凡重数，则会出现重复的行。然后，取该多重集的原像，即从上到下读取最后一列。

例 5.8. 取前面的多重集 $\{(baaac), (b), (cb)\}$。词的多重集为 $\{baaac, aaacb, aacba, acbaa, cbaaa, b, cb, bc\}$。相应无限单词的顺序为 $aaacb... < aacba... < acbaa... < baaac... < bb... < bc... <cbaaa... < cbcb...$。因此杨表为

$$\begin{array}{ccccc} a & a & a & c & \boldsymbol{b} \\ a & a & c & b & \boldsymbol{a} \\ a & c & b & a & \boldsymbol{a} \\ b & a & a & a & \boldsymbol{c} \\ & & & & \boldsymbol{b} \\ & & & b & \boldsymbol{c} \\ c & b & a & a & \boldsymbol{a} \\ & & & c & \boldsymbol{b} \end{array}$$

其最后一列为 $baacbcab$，正如所需。

因此，将映射 BW视为定义在本原项链上的映射时，它是映射 Φ^{-1} 在本原项链集合上的限制。另请参见 [21] ，其中研究了这两种构造的相似性。

5.2. 完美聚类词与带砖。展示完美聚类词与带砖之间联系的第一步，是从画在 S_n 上的简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ ，或等价地，从其 g-向量 $(a_1, \ldots, a_n)$，定义一个循环词多重集。要获得与 $\mathcal{C}$相关联的循环词多重集：沿着 $\mathcal{C}$ 前进，并写下被$\mathcal{C}$穿过的曲面 S_n 各边的标签。

更精确地说，由 g-向量（a_1，.....， a_n）画出两份 Dyck 路径（P_1 和P_2），以及带有第 $\mathcal{C}$ 节所示标签的简单闭合多重斜线4.2。我们用 $M_{(a_1,\ldots,a_n)}$ 表示由简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 和 g-向量（a_1，.....， a_n）定义的循环词多重集。我们用以下算法构造 $M_{(a_1,\ldots,a_n)}$ 中的所有循环词。我们任意选择一份 Dyck 路径上的一个未访问步骤。从该处出发，沿着 $\mathcal{C}$ （在第一份路径上向右，在第二份路径上向左）前进，直到到达 Dyck 路径上的另一个步骤 x ，

我们写下 x 的标签，并前往另一份 Dyck 路径上与 x 对应的步骤。我们继续沿着 $\mathcal{C}$ 前进，直到回到起始步骤。此时，我们将该循环词加入$M_{(a_1,\dots,a_n)}$ 。如果两份 Dyck 路径上的所有步骤都已访问，算法便停止；否则，我们从一个未访问步骤重新开始。例如，图12 所示的 g-向量（-3， -1，3， -2，3）的循环词多重集为 $M_{(-3,-1,3,-2,3)} = \{(54545131), (3231)\}$。

注 5.9。$M_{(a_1,\dots,a_n)}$ 中的循环词数量对应于简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 中曲线的数量。

如果 g-向量除第一项外的所有项均为非负数，那么可以通过在 $\Phi(n^{a_n}\dots 2^{a_2})$ 中插入若干个 1，使每个循环中每隔一个字母都是 1，从而得到 $M_{(a_1,\dots,a_n)}$。例如，$M_{(-8,2,2,4)} = \{(41314121)(41314121)\}$是具有 g-向量 (−8,2,2,4) 的简单闭合多重斜线的循环词多重集，而 $\Phi(44443322) = \{(4342)(4342)\}$。在证明这一联系完美聚类词与带砖的关键结果之前，我们需要强调双射 Φ 下弱递减词的循环词的一项性质。

引理 5.10. 设 w 是一个弱递减词。那么，$\Phi(w)$中的每个循环词都是完美聚类的。

证明. 设 u 是 $\Phi(w)$的一个项链。取 u_1 和 u_2 ，它们是 u 的两个共轭词，且满足 $u_1 \neq u_2$。我们用 u_1^ω表示无限单词 $u_1u_1\dots$。由于 u_1 和 u_2 长度相同，因此 $u_1^\omega < u_2^\omega$当且仅当 $u_1 < u_2$。这意味着 u 的共轭词在 u 的杨表和$\Phi(w)$的杨表中出现的顺序相同。因此， u 的杨表的最后一列是弱递减词，因为 $\Phi(w)$的杨表的最后一列，即 w ，是弱递减的。因此， $\Phi(w)$中的任意循环词都是完美聚类的。□

定理 5.11. 设$(a_1,\dots,a_n)$是具有 a_1 为负整数且 a_i 为非负整数（对 $2 \le i \le n$而言）的简单闭合多重斜线的 g-向量。设$M_{(a_1,\dots,a_n)}$ 是由$(a_1,\dots,a_n)$定义的循环词多重集。那么，

$$f(M_{(a_1,\dots,a_n)}) = \Phi(n^{a_n}\dots 2^{a_2}), \tag{1}$$

其中， f是擦除态射 $f(1) = \varepsilon$，而 $f(i) = i$，对于 $i \in \{2,\dots,n\}$。

证明。为了证明等式（1），我们将 $f(M_{(a_1,\dots,a_n)})$ 和 $\Phi(n^{a_n}\dots 2^{a_2})$ 视为定义 $n^{a_n}\dots 2^{a_2}$ 中字母排列的映射，并证明它们互为逆，由此可得所需结论。

由 g-向量（a_1，..，a_n）给出的 Dyck 路径，其中 a_1 为负，且 a_i 为非负，由以下方式给出： $|a_1|$ 标记为 1 的上步，后接 $|a_1|$ 标记为 $2^{a_2}3^{a_3}\dots n^{a_n}$ 的下步。简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 通过第 4.2 节所述的构造得到。

Dyck 路径的形状意味着，循环词 $M_{(a_1,\dots,a_n)}$ 中长度为 3 的因子要么是 $x1y$，要么是 $1x1$，其中 x、 $y \in \{2,3,\dots,n\}$。我们将研究形如 $x1y$ 的因子。因子 $x1y$ 在 $M_{(a_1,\dots,a_n)}$ 中从 P_1 上的一个上步开始。令 s' 为与其匹配的向下步。步 s' 由字母 x 标记，因此我们记下 x。假设 x 是 $n^{a_n}\dots 2^{a_2}$ 中字母 x 的第 q 次出现。因此，它位于 P_1 的 Dyck 路径的高度 $(a_n + a_{n-1} + \dots + a_{x+1} + q)$ 处。P_1 中的步 s' 与 P_2 中位置 ($a_n + a_{n-1} + \dots + a_{x+1} + a_x + 1 - q$) 处的向下步相对应，因为 P_1 与 P_2 之间是沿着方向相反的边进行粘合的。走到下一个匹配的上步时，我们记下 1，并位于 Dyck 路径上的同一高度

，即从底部数起第 $(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{x+1}+a_x+1-q)$ 个 1 所在的位置。P_2 中由第 $(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{x+1}+a_x+1-q)$ 个 1 标记的上步，与 P_1 中第 $|a_1|+1-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{x+1}+a_x+1-q) = a_2+\cdots+a_{x-1}+q$ 个上步相对应。我们走到匹配的向下步，在 $n^{a_n}\ldots 2^{a_2}$ 的位置 $a_2+\cdots+a_{x-1}+q$ 处写下字母。因此，我们的长度为 3 的因子是 $n^{a_n}\ldots 2^{a_2}$ 中位置 $(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{x+1}+q)$ 处的字母，后面跟着一个 1，再后面跟着 $n^{a_n}\ldots 2^{a_2}$ 中位置 $a_2+\cdots+a_{x-1}+q$ 处的字母。

现在让我们来看 $f(M_{(a_1,\ldots,a_n)})$。x 在 w 中第 q 次出现的位置是 $(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{x-1}+q)$，其标准化结果为 $a_2+\cdots+a_{x-1}+q$。回想一下，$\Phi(w)$ 定义为由标准化给出的排列的逆。因此，我们已经证明，$\Phi(w)$ 和 $f(M_{(a_1,\ldots,a_n)})$ 给出了 $n^{a_n}\ldots 2^{a_2}$ 中字母的互逆排列。

现在令 v 为 $\Phi(w)$ 中的一个循环词。由命题 5.10，v 是完美聚类的。因此，v 由定理 4 与 $\widetilde{v}$（v 的逆序 [24，共轭。3]这意味着 $\Phi(w)$ 中的每个循环词都与 $f(M_{(a_1,\ldots,a_n)}$中的一个不同循环词共轭；也就是说，两个多重集相等，因为循环词的共轭词相等。因此，等式 (1) 成立。□

由一个本原词 w，可以在 Λ_n的箭图上构造一条带游走。对于每个整数 $i\in\{2,\ldots,n\}$，我们关联循环 $z_i=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{i-1}\beta_{i-1}^{-1}\cdots\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}$，它位于箭图 Q_n 上。设 $w=w_1w_2\ldots w_r$ 是字母表$\{2,\ldots,n\}$上的一个本原词，我们定义 $\psi(w)=z_{w_1}z_{w_2}\ldots z_{w_r}$。例如，若取 Q_3 如例2.2 中所示，且 $w=23223$，则

$$\psi(23223)=\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_1\alpha_2\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_1\beta_1^{-1}\alpha_1\alpha_2\beta_2^{-1}\beta_1^{-1}.$$

带模 Λ_n-$B_{\psi(w),1,\lambda}$ 对于任意 $\lambda\in k^\times$ 都是带模，因为 $\psi(w)$ 是一条带游走。

定理 5.12. 字母表 $\{2,\ldots,n\}$ 上的本原词 w 是完美聚类的，当且仅当带模 Λ_n-$B_{\psi(w),1,\lambda}$ 对于某个（等价地，对于任意）$\lambda\in k^\times$是带砖。

证明。设 w 是字母表 $\{2,\ldots,n\}$ 上的一个完美聚类词。根据命题 4.10，整数 n-元组 $(-|w|,|w|_2,|w|_3,\ldots,|w|_n)$ 是某个简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 的 g-向量。此外，由于 w 是完美聚类的，且根据定理 5.11，我们有 $\Phi(n^{|w|_n}\ldots 2^{|w|_2})=\{(w)\}=f(M_{(-|w|,|w|_2,|w|_3,\ldots,|w|_n)})$。因此，简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$ 是一条简单闭曲线。根据命题 3.21，带 Λ_n-模 $B_{\psi(w),1,\lambda}$ 是砖。

设 $B_{\psi(w),1,\lambda}$ 是一个带砖，其 g-向量为 $(a_1,\ldots a_n)$。利用 Dyck 路径表示，可以得到一个与 $(a_1,..,a_n)$ 相关联的简单闭合多重斜线 $\mathcal{C}$。事实上，$\mathcal{C}$ 是一条简单闭合斜线，因为 $B_{\psi(w),1,\lambda}$ 根据命题3.21 是砖。因此，

$$|M_{(a_1,\ldots,a_n)}|=|\Phi(n^{a_n}\ldots 2^{a_2})|=1$$

根据命题 5.11 和 $\Phi(n^{a_n}\ldots 2^{a_2})=\{(w)\}$ 这意味着 w 是一个完美聚类词。□

6. Band semibricks

6.1. 带砖相容扇。我们已在推论4.11 中证明，Λ_n 的带半砖与 g向量

$(a_1, .., a_n)$ 满足初始部分和非正且总和为零。

问题在于：哪些 g向量对应一个砖的单参数族，而不是多个带砖的直和？我们将此类 g向量称为带砖 g向量。

此外，给定一个对应于带半砖的 g向量，如何将其分解为构成该带半砖的带砖所对应的带砖 g向量？我们将此称为带半砖分解问题。

将这两个问题放在一起处理是很自然的。

扇是由 $\mathcal{F}$ 锥构成的集合，并满足： $\mathcal{F}$ 中锥的任意面都是 $\mathcal{F}$中的锥，且 $\mathcal{F}$ 中任意两个锥的交点都是各自的一个面。

如果两个带砖单参数族（或两个带砖 g-向量）可以同时出现在一个带半砖中，即这两个砖的单参数族之间不存在非零态射，我们就称它们相容。

定义 6.1。带砖相容扇 Σ_n of Λ_n 是由一组两两相容的带砖 g-向量所张成的向量空间中的锥的集合。

由 C. Geiss、D. Labardini-Fragoso 和 J. Schr¨oer 关于温和代数的结果可知，Σ_n 确实是一个扇 [10, 定理 3。2] （另见 [22, 定理 3。8]）。鉴于温和代数是温和的，下面的结果是在我们的特殊情形下对该结论的改述。

命题 6.2。集合 Σ_n 是一个单纯扇，其支撑由带半砖 g-向量构成。在带半砖 g-向量 a 的带半砖分解中出现的带砖 g-向量，是包含 a 的 Σ_n 最小锥的射线。

接下来的推论也用于下一小节中的一些论证。

推论 6.3. 设 $\mathsf{a}^1, \ldots, \mathsf{a}^r$ 是两两相异的 g-向量，且对应于两两相容的砖。则 $\mathsf{a}^1, \mathsf{a}^2, \ldots, \mathsf{a}^r$ 线性无关。

6.2. 欧拉形式与两两相容的砖的最大数量。本小节中，我们应用欧拉形式来确定 Σ_n 中锥的最大维数；换言之，也就是来自不同单参数族（或等价地，具有不同 g-向量）的两两相容的砖的最大数量。

引理 6.4. 若 a 和 b 是两个相容带砖的 g-向量，则必有 $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle = 0$。

证明。 这可直接由命题3.18得出。 □

请注意，反过来一般不成立。

例 6.5. 设 $n = 4$， 一个 $= (-1, -2, -2, 5)$， b $= (-3, 0, -4, 7)$ 满足 $\langle \mathsf{a}, \mathsf{b} \rangle = 0$。然而，a 和 b 不是相容砖。我们可以通过构造相应的模并检查它们之间是否存在态射、绘制相应的曲线并观察它们必然相交，或者发现$_1$ $_2$(a $+$ b)本身是某个带砖的 g-向量来得出这一点；如果维数向量为 a、b 的带砖彼此相容，这种情况就不可能发生。

下面的引理是证明我们的一个主要结果的关键步骤。

引理 6.6. 设 V是一个 n维向量空间，配备非退化双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。设 H 是 V 的余维一子空间，满足对于$x, y \in H$，有 $\langle x, y\rangle = -\langle y, x\rangle$。 H 中各向同性子空间的最大维数为 $\lceil(n-1)/2\rceil$。

证明. 令 $\mathcal{R}$ 为限制在 H上的形式的根基。对于任意向量 $x \in \mathcal{R}$，由 $\langle x, -\rangle$ 给出的 V 上的线性形式属于以 H 为核的一维形式子空间。因此， $\mathcal{R}$ 至多是一维的。对于 H上的斜对称形式，我们知道 H 必然可以分解为 $\mathcal{R} \oplus J$，其中限制在 J 上的斜对称形式非退化，而 J 必为偶数维[15, 定理 XV.8.1]。 J 中的各向同性子空间包含于其正交补中，因此其维数至多为 J维数的一半。于是， H 中各向同性子空间的最大维数为 J 维数的一半加上 $\mathcal{R}$的维数，结果为 $\lceil(n-1)/2\rceil$。□

定理 6.7. 来自不同单参数族的两两相容带砖集合的最大大小为 $\lceil(n-1)/2\rceil$。

证明。 我们知道， g带半砖的向量位于 $\mathbb{Z}^n$ 的余维为一的子空间中，其中所有坐标之和为零，见命题4.10。我们已经看到，欧拉形式限制在该子空间上时是反对称的（命题3.18），而在 $\mathbb{Z}^n$上则是非退化的。由上引理可知，各向同性子空间的最大维数为 $\lceil(n-1)/2\rceil$。根据推论6.3 和引理6.4，来自不同单参数族的两两相容带砖的 g向量构成一个各向同性子集的基。因此，该集合中不同带砖的数量至多为$\lceil(n-1)/2\rceil$。□

例 6.8。考虑 $1 \le i \le \lfloor(n-1)/2\rfloor$,

$$\mathbf{b}^i = (-2, 0, \dots, 0, \underset{i+1}{1}, 0 \dots, 0, \dots, 0, \underset{n-i+1}{1}, 0, \dots, 0)$$

若 n 为偶数，则 $\mathbf{b}^{n/2} = (-1, 0, \cdots, 0, \underset{(n/2)+1}{1}, 0, \cdots, 0)$。那么 $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^{\lceil(n-1)/2\rceil}$ 是一族极大的两两相容的带砖 g-向量。

我们的一个主要结果现在可由定理 5.11 得出。

推论 6.9。设 $(a_2, \dots a_n)$ 是一个由非负整数组成的向量。在 $\Phi(n^{a_n} \dots 2^{a_2})$ 中，不同的本原循环词的数量至多为 $\lceil(n-1)/2\rceil$。

证明。由定理6.7 可知，这是因为$\Phi(n^{a_n} \dots 2^{a_2})$ 中不同的本原循环词，根据定理 5.11 与一个带半砖的砖块直和项的单参数族相对应，该带半砖具有 g-向量 $(-a_2 - a_3 - \cdots - a_n, a_2, \dots a_n)$。□

推论6.9 蕴含了 [17] （在引言中称为猜想 1.2 ），因为本原循环词的不同长度数量显然以上不同本原循环词的数量为上界。请注意， [17] 中的猜想 3.33 是以离散区间交换变换的结构来表述的，而该结构等价于由 Φ 给出的循环词多重集的结构，正如 [17, 定理 38]所示。

6.3. 刻画 $n = 4$ 的带砖 g-向量。以下结果给出了与 Λ_n 的单参数族带砖相关联的 g- 向量的刻画， $n = 4$。

定理 6.10. 设 $g = (a, b, c, d)$ 是一个 g-向量。那么 g 对应于一个由 Λ_n 上的带砖构成的一参数族，当且仅当

$$\gcd(a + b, b + c) = 1 \text{ and } a + b \neq 0, \text{ or } (a, b, c, d) = (-1, 1, 0, 0) \text{ or } (0, 0, -1, 1).$$

这一结果可以用曲折图的语言重新表述，而该定理的部分内容此前已由 Coll、Giaquinto 和 Magnant[7]以这种方式证明。 $a, b < 0$； $c, d > 0$ 对应的情形，正是他们所称的相反极大抛物情形；而 $a < 0$ 以及 $b, c, d > 0$ 或 $a, b, c < 0$;$d > 0$ 对应的情形，则是他们所称的次极大抛物情形。[7, 推论 4.9 和定理 4.10] 分别证明了我们定理中的这两部分。情形 $a, c < 0$； $b, d > 0$ 则是新的。我们给出一个统一证明，涵盖全部三种情形。

证明。半砖的 g-向量由三维空间 $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \sum_{i=1}^{4} x_i = 0\}$ 中某个满维锥内的格点组成。限制在 H 上的欧拉形式有一个根基，它由 (−1,1, −1,1) 生成。

应用定理 6.7 于情形 $n = 4$，我们看到，两两相容的砖组成的集合的最大大小为二。此外，一对相容砖的 g-向量必须位于 H 的某个各向同性子空间中。根据上述分析， H 的各向同性子空间恰好是包含根基的二维子空间。

因此，我们将重点放在包含根基的二维子空间 V 上。

方向 (−1, 1, −1, 1) 本身位于 g-向量锥的某个面的相对内部。因此， V 与 g-向量锥的交点必为二维的。

一种特殊情况是，当 V 是由包含根基的锥的面所张成的平面时。这个平面满足 $a + b = 0$。该面的极射线为 (−1, 1, 0, 0) 和 (0, 0, −1, 1)。对应的砖彼此正交，因此该面上的所有格点（包括根基中的格点）都可分解为这两个向量的线性组合。这验证了定理陈述中适用于 $a + b = 0$ 的部分。

在其余情况下，我们看到 V 与 g-向量锥的交点包含由 (−1, 1, −1, 1) 生成的射线，它是两个极射线之一。另一条射线必定由某个整数向量 v 生成，该向量位于 g-向量锥的两个不包含根基的面之一上，也就是说，其第一个坐标或最后一个坐标为零。我们选择 v，使其生成该射线上的格点子群。

令 C 为由 v 和 (−1, 1, −1, 1) 生成的锥，并去掉射线 (−1, 1, −1, 1)。

引理 6.11. 向量 v 和 (−1, 1, −1, 1) 构成环境格$\mathbb{Z}^4 \cap V$的一组基。

证明。不失一般性，假设 v 的倍数是第一坐标为零的向量。给定 V 中任意一个整数向量，通过减去适当的整数倍的 (1, −1, 1, −1)，我们可以使其第一坐标为零，这表明剩下的部分是 v 的整数倍。□

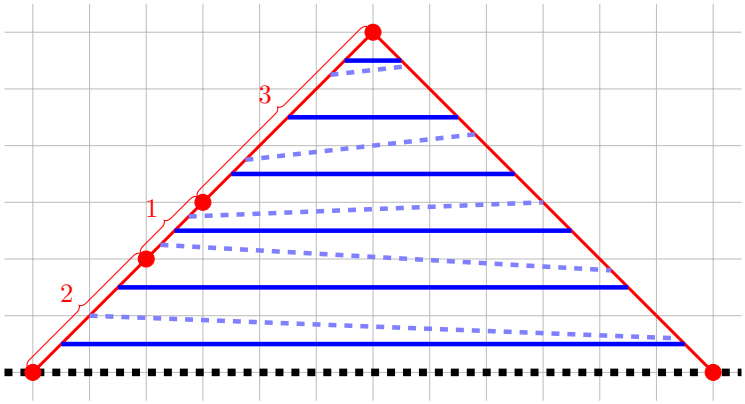


FIGURE 14. 与 g-向量 $(-2,-1,-3,6)$ 对应的曲面，其中相应的弧以蓝色绘出；与 $(-1,-2,-2,5)$ 对应的弧则以虚线叠加绘出，如证明中的第一种情况所示

命题6.12。向量 $\mathcal{D} = \{v + p(-1,1,-1,1) \mid p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是砖g-向量。

证明。对于 C 中的任意 g-向量，包含它的各向同性平面只有 V，因此其正交砖块分解中的砖也必须对应于 V 中的格点。此外，由 $(-1, 1, -1, 1)$ 生成的射线上的格点不可用，因为它们不对应砖的 g-向量。 $\mathcal{D}$ 中的点无法表示为 C 中格点之和的非平凡分解，因此它们必定全都是砖。□

现在，我们通过证明可以在 S_4 上绘制相应的曲线，使它们彼此不相交，从而确立 $\mathcal{D}$ 中两个相邻点对应的砖彼此相容。

引理6.13. 设 (a, b, c, d) 和 $(a + 1, b - 1, c + 1, d - 1)$ 是 $\mathcal{D}$ 中两个相邻的元素。可以在 S_4 上绘制分别对应这两个 g-向量的曲线，使它们互不相交。

证明。首先假设 b和 c均为负数。$(a, b, c, -(a+b+c))$ 对应的 Dyck 路径由 $a + b + c$ 个上步和随后 $a + b + c$ 个下步组成。带有g-向量 (a, b, c, d) 的曲线 C，由位于高度 $i + \frac{1}{2}$的水平线组成，其中 $0 \leq i \leq -a - b - c - 1$。接下来，我们验证可以绘制一条带有 g-向量 $(a+1, b-1, c+1, d-1)$ 的曲线 C'，使得它的每条线都位于 C的相邻水平线之间。将 C' 的右端点置于把曲面的左侧分成 $-a-b-c-1$ 个等长线段后所得各线段的中点。对于左侧，我们先将其分为长度为 $-a$的底部部分，接着是长度为 $-b$的部分，再接着是长度为 $-c$的部分。我们把长度为 $-c$的部分分成 $-c-1$ 个等长线段，并将右端点置于每段的中点；然后以类似方式处理第二和第三部分。我们注意到，在 C 的每对相邻水平线之间，左右两侧各放置了一个端点（但两侧最底端的端点下方和最顶端的端点上方均不包括在内），这意味着可以绘制 C'，使其不与 C相交。

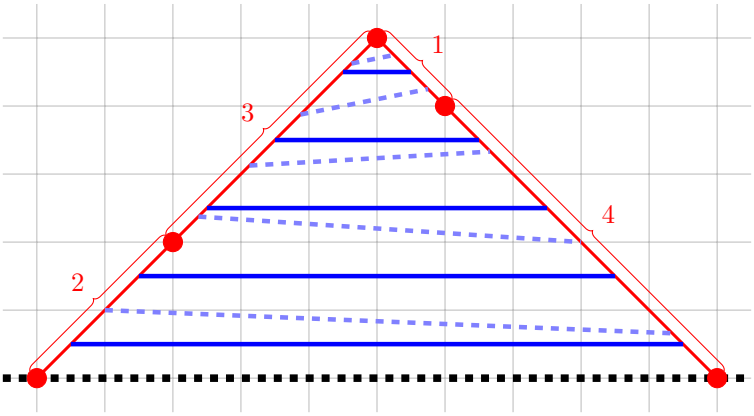


FIGURE 15. (g向量（$-2,-3,1,4$）对应的曲面，弧以蓝色绘出，并将（$-1,-4,2,3$）的曲线以虚线叠加其上，如证明的第二种情形所示

显然，如果 b 和 c 均为负数，也可以用完全等价的论证。

接下来，假设 b 为负且 c 为正。我们基本沿用前一种情形的做法。和之前一样，我们考虑曲面的 Dyck路径模型，并绘制具有 g向量（a,b,c,d）的曲线 C。我们希望绘制一条具有g向量（$a+1,b-1,c+1,d-1$）的曲线 C'，使其不与 C相交。将 Dyck 路径的左侧分为两段，第一段长度为 a，第二段长度为 b。将长度为 a 的部分分成 $a-1$ 条等长线段，并将 C' 的端点置于这些线段的中点。同样，将长度为 b 的部分分成 $b+1$ 条等长线段，并将 C' 的端点置于这些线段的中点。然后在右侧进行同样的操作。这样，我们便在 C每一对相邻端点之间都确定了 C' 的一个端点，包括两侧 C 最上方端点的上方，但不包括两侧最下方端点的下方。我们可以将 C' 绘制成不相交的连接方式。

最后，假设 b 为正而 c 为负。同样，基本上可以采用相同的思路。□

由于 $\mathcal{D}$ 中的相邻点彼此相容，我们现在看到，任何其 g-向量位于 C 中的半砖，都可以分解为来自 $\mathcal{D}$的砖的直和。这意味着 $\mathcal{D}$ 涵盖了 V中砖的所有 g-向量。

现在我们来验证， $\mathcal{D}$ 中的点恰好是 C 中满足 $\gcd(a+b,b+c)=1$的点。根据引理 6.11， C 中的任意格点都可以表示为$pv+q(-1,1,-1,$为正且 q 为非负。该格点满足定理陈述中的条件，当且仅当 pv 满足该条件；显然， pv 满足定理条件，当且仅当 $p=1$，这恰好给出了所需的条件。□

7. 示例：Christoffel 情形（n = 3）

在这个扩展示例中，我们考虑 $n=3$ 这种情形。

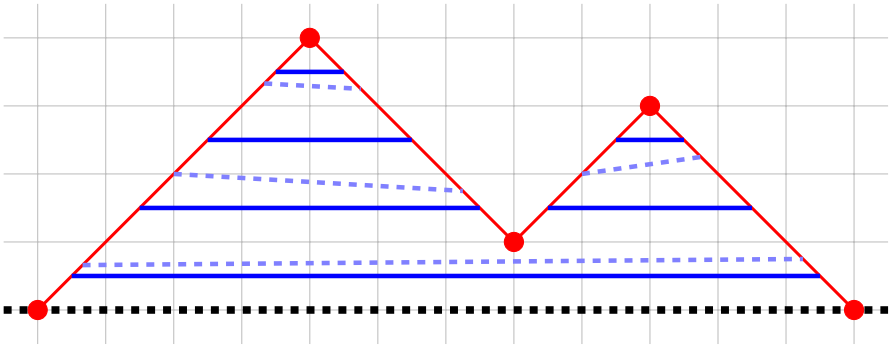
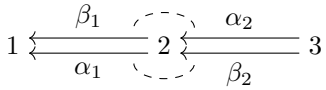


FIGURE 16. g-向量（−4,3, −2,3）对应的曲面，其中相应的弧以蓝色绘出，并将（−3,2, −1,2）的弧以虚线叠加绘出，如证明中的第三种情形所示

7.1. 温和代数。 Q_3 是以下箭图：



Q_3 中的路径如下：有三条惰性路径（每个顶点各一条）、四条长度为 1 的路径（即箭），以及四条长度为 2 的路径： $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\beta_2, \beta_1\alpha_2, \beta_1\beta_2$。这十一条路径构成路径代数 kQ_3的一组基。

集合 R_3 由两条路径 $\alpha_1\beta_2$ 和 $\beta_1\alpha_2$ 组成（图中以虚线标出），理想 I_3 由这两条路径的线性组合构成。

那么（Q_3, R_3）是一个温和箭图。我们定义代数 $\Lambda_3 = kQ_3/I_3$。

7.2. 剖分曲面。 对于 Λ_3 ，其剖分曲面由两个四边形P_1和P_2, 组成，边按图 17所示识别。

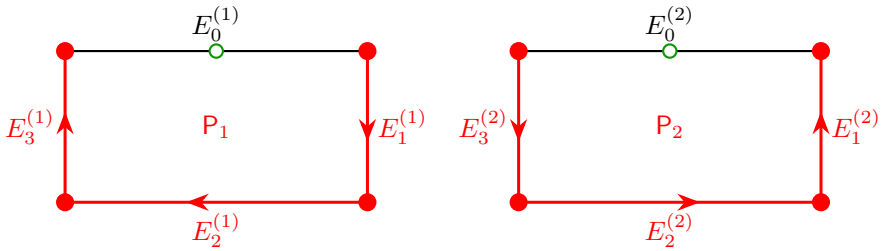


FIGURE 17. 表示与 Λ_3 相关联的剖分曲面的两个 4–边形。

如果可以为曲面上的闭曲线确定一个方向，使得曲线在 P_1 上的线段从右向左延伸，而在 P_2 上的线段从左向右延伸，那么这条闭曲线就是一条闭合回旋。简单闭斜滑线对应带砖。简单闭多斜线对应带半砖。

给定曲面上的一条闭合回旋，它按以下方式对应箭图 Λ 上的一条游走。从 P_1 上回旋位于 P_1 的线段右端点处开始。如果回旋连接 $E_{i_0}^{(1)}$ 和 $E_{i_1}^{(1)}$（因此根据假设，$i_1 > i_0$），则沿标记为 β 的箭，从顶点 i_0 走到顶点 i_1（方向与箭头相反）。然后，继续沿着 P_2 上的回旋前进。如果它从 $E_{i_1}^{(2)}$ 延伸到 $E_{i_2}^{(2)}$（根据之字形条件，必有 $i_1 > i_2$），那么就沿标记为 α 的箭，从顶点 i_1 朝顶点 i_2 正向行进。接着回到 P_1，以同样的方式继续前进，直到最终回到起点，此时游走也会在初始顶点 i_0 处闭合。这样的游走w 对应一族带表示 $B_{w,\mathbf{1},\lambda}$，其中 $\lambda \in k^\times$，如第 2.3 节所述。

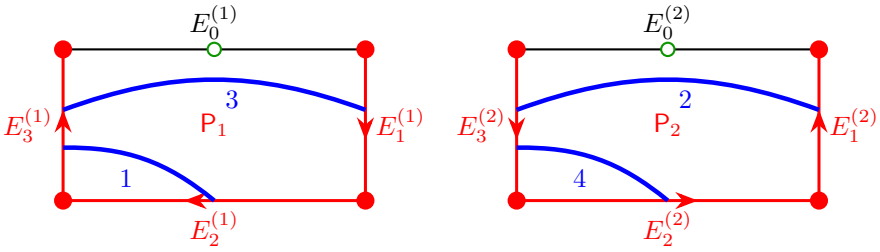


FIGURE 18. 一个回旋，其边的可能跟随顺序已标出

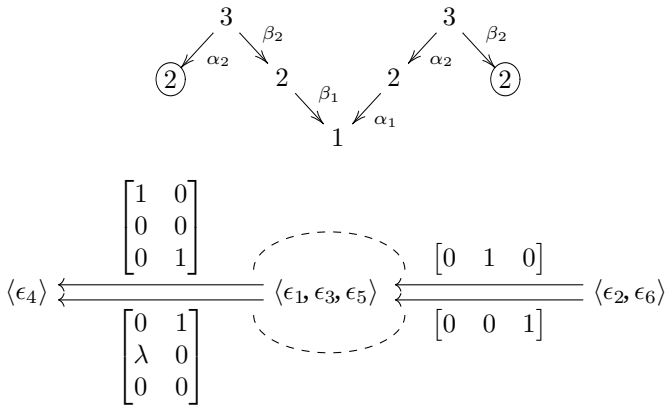


FIGURE 19. 上：与图中回旋相对应的带游走 18。下：与之相关的带表示（在同构意义下），构造方式与例 2.2 相同。

例如，图18 中的回旋对应于图19所示的游走，进而对应于下面的表示：

与闭合回旋对应的表示是带砖，前提是它为单对象，即可以绘制成没有自交点的形式。图 18 中的上述回旋没有自交点，因此相应的表示是砖。

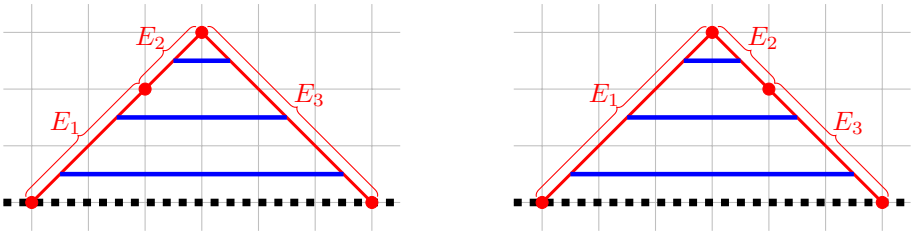


FIGURE 20. 左：适配于带有 g-向量 $(-2,-1,3)$ 的回旋线的多边形，以及对应的回旋线。右：适配于带有 g-向量 $(-3,1,2)$ 的回旋线的多边形，以及对应的回旋线。

这一事实也可以直接用第 3.5 节的判据来验证：该游走不存在同时出现在顶部和底部的子串，因此这个模的自同态只有恒等映射的倍数。

7.3. g-向量。闭合单对象多重回旋线可能的 g-向量，是形如 $(-a,-b,a+b)$ 的整数向量，其中 $a,b\geq 0$；或者是形如 $(-a-b,a,b)$ 的整数向量，其中$a,b\geq 0$。

第一种情况下，将多边形重新绘制，使边 1 和边 2 平行，会更方便。如果将边长选为与 g-向量中对应分量的绝对值一致，那么多重回旋线就可以绘制成间距相等的水平线。示例见图20 （左）。在这种情况下，同一幅图既适用于P_1 和P_2;

同样，在第二种情况下，将边 2 和边 3 画成平行会比较方便。示例见图20 （右图）。

这两个回旋族之间存在一个双射，它将一个回旋映射为其镜像（在每个 P_i 上）。

请注意，同时属于这两类的回旋恰好只有一个：它由每个 P_1 和 P_2 上连接 E_1 与 E_3 的单条曲线组成。该回旋在这个双射下保持不变。

7.4. Christoffel词。当字母表只有两个字母时，同时也是 Lyndon词的完美聚类词称为下Christoffel词。例如， $A=\{a<b\}$、 a、b、ab、aab、$aabab$、$ababb$ 是下Christoffel词。等价地，取任意本原完美聚类词，并在其共轭类中选出字典序最小的元素：这就是下Christoffel词（选取最大的元素则得到上Christoffel词）。

单词的斜率 w 在 $\{a<b\}^*$ 中是比值 $|w|_b/|w|_a$，其中 $|w|_x$ 表示字母 x 在 w中出现的次数；斜率是 $\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$中的一个元素。事实证明，对于任意两个下 Christoffel 单词 u， v，有 $u<_{lex}v$ 当且仅当 u 的斜率小于 v (此结果由 Borel 和 Laubie 得出；参见 [23] 命题 13.1.1)。例如， $aabab<_{lex}ababb$ 它们的斜率分别为 $2/3$ 和 $3/2$。

其 g-向量为 $(-a-b,a,b)$ 形式的带砖单参数族，通过将定理 5.12 限制到 $n=3$ 情形，与 Christoffel词一一对应。字母 a 出现 x 次且字母 b

字母 y出现 g次对应于向量为 $(-a-b,a,b)$ 的带砖。特别地，我们看到，当且仅当 a 和 b 互质时，存在向量为 $(-a-b,a,b)$ 且满足 $a,b\geq 0$ 的带砖。

其 g-向量具有 $(-a,-b,a+b)$ 形式的带砖，也与 Christoffel词一一对应：首先应用上文提到的、将 g-向量为 $(-a,-b,a+b)$ 的带砖族映射到 $(-a-b,a,b)$ 的双射，然后再应用映射到 Christoffel词的双射。

7.5. 欧拉形式。 欧拉形式（见第 3.6节）定义在 g-向量上如下：

$$\langle (a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\rangle = a_1b_1+2a_1b_2+2a_1b_3+a_2b_2+2a_2b_3+a_3b_3$$

设 v 和 w 是两个 Christoffel词。考虑定理 5.12中的对应关系所对应的表示，其 g-向量为$g_v=(-|v|_x-|v|_y,\ |v|_x,\ |v|_y)$ 和 $g_w=(-|w|_x-|w|_y,\ |w|_x,\ |w|_y)$，分别如此。将这些代入欧拉形式，得到：

$$\begin{aligned}\langle g_v,g_w\rangle &= (|v|_x+|v|_y)(|w|_x+|w|_y)-2(|v|_x+|v|_y)|w|_x-2(|v|_x+|v|_y)|w|_y\\ &\quad +|v|_x|w|_x+2|v|_x|w|_y+|v|_y|w|_y\\ &= |v|_x|w|_y-|v|_y|w|_x\end{aligned}$$

这个表达式众所周知，在 Christoffel词组合学中发挥着重要作用。

7.6. 相容砖。 两个不同的砖的单参数族永远不相容。这是定理 6.7 的一个特例。它也可由上述欧拉形式公式推出，该公式表明，当 $\langle g_v,\ g_w\rangle$ 非零时，条件是 v 和 w具有不同的斜率，而每个可能的斜率只对应一个砖的单参数族。

References

[1] 易卜拉欣·阿塞姆、Thomas Br¨ustle、加布里埃尔·沙博诺-茹安和 Pierre-Guy Plamondon, *Gentle algebras arising from surface triangulations*, 《代数与数论》4（2010），第 2 期，201–229。3，9[2] 易卜拉欣·阿塞姆、Daniel Simson 和 Andrzej Skowro´nski，*Elements of the representation theory of associative algebras* 2006 16, 17《剑桥大学出版社》，剑桥，。[3] 卡琳·鲍尔和 Raquel Coelho Sim˜oes，*A geometric model for the module category of a gentle algebra* **2021** 2019 15, 11357 11392 3, 9,《International Mathematics Research Notices》（），第 – 期。11[4] 让·贝尔斯特尔、亚伦·劳夫、Christophe Reutenauer 和弗朗科·萨利奥拉，*Combinatorics on words: Christoffel words and repetitions in words*，《美国数学学会》，普罗维登斯，2008。2[5] 迈克尔·伯罗斯、戴维·惠勒，*A block sorting data compression algorithm*，技术报告，数字系统研究中心，1994。23[6] 迈克尔·巴特勒和克劳斯·迈克尔·林格尔，*Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras* **15** 1987 1 2, 145 179 ，《代数通讯》（），第 - – 期。3，5[7] 文森特·科尔、安东尼·贾昆托和科尔顿·马格南特，*Meander graphs and Frobenius Seaweed Lie algebras* **5** 2011 ，《广义李理论与应用杂志》（），文章编号 G110103，7。4，30[8] 威廉·克劳利-博维，*Maps between representations of zero-relation algebras*，《代数杂志》126（1989），第 2 期，259–263。14[9] 本森·法布和丹·马格利特，*A primer on mapping class groups*，普林斯顿数学丛书，第 49 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2012。13

[10] Christof Geiß、Daniel Labardini-Fragoso 和 Jan Schr¨oer，*Schemes of modules over gentle algebras and laminations of surfaces*，《Selecta Mathematica》（新系列），**28**（2022），第 8 号论文，78 页。1，4，21，28[11] Ira Gessel 和 Christophe Reutenauer，*Counting permutations with given cycle structure and descent set*，《组合理论杂志 A》，**64**（1993），189–215，24，25。[12] Ira Gessel、Christophe Reutenauer 和 Antonio Restivo，*A bijection between words and multisets of necklaces*，《European Journal of Combinatorics》，**33**（2012），1537–1546，24，25。[13] Christophe Hohlweg、Vincent Pilaud 和 Salvatore Stella，*Polytopal realizations of finite type g-vector fans*，《数学进展》，328（2018），713–749，20。[14] *Maps between tree and band modules* Henning Krause，《代数杂志》137（1991），第 1 期，186–194。14，15[15] Serge Lang，*Algebra*。Addison–Wesley，马萨诸塞州雷丁，1993。29[16] M´elodie Lapointe，*Number of orbits of discrete interval exchanges*，《理论计算机科学》21（2019），第 3 期，第 17 号论文。[17] M´elodie Lapointe，*Combinatoire des mots : mots parfaitement amassants triplets de Markoff et graphes chenilles*，《学位论文》，蒙特利尔（加拿大魁北克），魁北克大学蒙特利尔分校，2020。2，3，29[18] Sabrina Mantaci、Antonio Restivo、Giovanna Rosone 和 Marinella Sciortino，*An extension of the Burrows–Wheeler Transform*，《理论计算机科学》，**387**（2007），298–312，。[19] Sebastian Opper、Pierre-Guy Plamondon 和 Sibylle Schroll，*A geometric model for the derived category of gentle algebras*，arXiv：1801.09659，3，9，11。[20] Yann Palu、Vincent Pilaud 和 Pierre-Guy Plamondon，*Non-kissing and non-crossing complexes for locally gentle algebras*，《Journal of Combinatorial Algebra》，**3**（2019），4，401–438，。[21] Dominique Perrin 和 Antonio Restivo，《词》，*Handbook of Enumerative Combinatorics*，第 8 章，CRC Press，2015。25[22] Pierre-Guy Plamondon、Toshiya Yurikusa，*Tame algebras have dense g-vector fans*，附录由 Bernhard Keller 撰写，《International Mathematics Research Notices》，2021，rnab105。21，28[23] Christophe Reutenauer，*From Markoff numbers to Christoffel words*，牛津大学出版社，2019。24，35[24] Jamie Simpson 和 Simon J. Puglisi，*Words with simple Burrows-Wheeler transforms*，《电子组合学杂志》15（2008），研究论文 83。2，27

（B. Dequ Département de mathématiquesène）LaCIM, Université du Québec à Montréal*Email address*: dequene.benjamin@courrier.uqam.ca（M. Lapointe）Département de mathématiques et de statistique, Université de Monc-ton, Canada*Email address*: melodie.lapointe@umoncton.ca（Y. Palu）Laboratoire Amienois de Mathématique fondamentale et appliquée, UPJV, Amiens, France*Email address*: yann.palu@u-picardie.fr（P.-G. Plamondon）Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ, CNRS, Uni-versité Paris-Saclay, Institut universitaire de France (IUF)*Email address*: pierre-guy.plamondon@uvsq.fr（C. Reutenauer）Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal *Email address*: Reutenauer.Christophe@uqam.ca（H. Thomas）Département de mathématiques, Université du Québec à Montréal*Email address*: thomas.hugh_r@uqam.ca