arXiv:2301.07233v1 [quant-ph] 18 Jan 2023

通过对称化提升量子计算机性能

Andrii Maksymov,[1] Jason Nguyen,[1] Yunseong Nam,[1,2] 和 Igor Markov[1]*[1] IonQ, College Park, MD 20740, USA [2] Department of Physics, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA*(日期：2023年1月19日)

大型量子计算机有望解决一些否则无法解决的关键问题。然而，现代量子技术存在各种缺陷，例如控制误差和量子比特退相干，限制了其潜在用途。量子纠错的开销对于近期量子计算机而言过于庞大，而针对特定设备缺陷的误差缓解策略可能会随着设备改进而失去意义。为了提升具有高质量量子比特的量子计算机的性能，我们提出了一种基于 *symmetrization* 和非线性聚合的策略。在一台商用囚禁离子量子计算机上，该策略使多种实用算法的性能提升了100倍，且无需增加量子比特或门的开销。

I. 引言

量子计算机（QC）的能力正在迅速提升，但仍受量子噪声、退相干、串扰和量子门控制不准确的限制 [1–4]。每种量子比特技术都致力于抑制单个量子比特和量子门中的此类不规则性 [5–10]。然而，与大规模量子算法的需求相比，这些方法所实现的电路保真度仍差了好几个数量级。因此，有必要开发更高层次的策略，在算法层面观察并系统性地提升性能；我们的工作提出了此类技术。与传统计算机类似，量子计算机中的固件为特定设备硬件提供必要的底层控制，并协调硬件，使软件能够更有效、更高效地运行。固件可以实现量子纠错码（QECC），通过宽电路冗余，在数学上保证能够容忍足够小的不规则性。然而，对于近期的量子计算机而言，不规则性往往过大，导致这些编码无法正常工作 [11]。主流量子纠错码技术需要大量额外的量子比特、量子门、测量、低延迟经典控制互连，以及巨量的配套非量子计算。尽管量子纠错码最终有望带来显著优势，但现有量子计算机的规模实在太小，无法从量子纠错码和宽电路冗余中受益 [45]。

为了推动当今量子计算机的发展，研究人员开发了称为误差缓解的替代固件方法。在领先的超导量子计算机中，各个物理量子比特的质量差异足够大，以至于结果取决于逻辑量子比特到物理量子比特的映射。因此，研究人员尝试以最优方式映射量子比特 [12–14], 序量子门 [15], 并对电路映射进行集合平均，以尽可能减少开销，同时缓解相关误差的影响 [16]。一系列技术首先准确表征量子器件的不规则性和误差，然后通过调整控制脉冲 [17], 或应用额外量子门以概率方式抵消误差 [18–21], , 或利用机器学习处理量子计算输出 [18, 22], 从而抑制这些问题。另一项发现是，去相关噪声随量子门数量增加而累积的速率较低。因此，量子门级去相关 [23–27] 会通过增加量子门来降低噪声相关性，但需要付出一定开销；如果开销显著，也可能增加噪声。研究人员利用这一效应系统地放大噪声，从而将输出态外推至零噪声极限 [20, 28–31]。

为超导量子计算机开发并部署的主流误差缓解策略，主要针对随机噪声和物理量子比特质量不均的问题。要实现性能提升，超导量子计算机必须达到均衡且高的量子比特质量，并降低随机噪声。完成这些改进后，我们上文评述的误差缓解技术或许会失去意义。如今的囚禁离子量子计算机便可作为这类改进型技术的例证：其中几乎完全相同的量子比特具有较长的退相干时间和较低的随机噪声 [32–34]。剩余的不利影响源于缓慢漂移的控制误差 [5]。在本研究中，我们为离子阱量子计算机开发并验证了新型误差缓解技术，并期望其能更广泛地应用于当今及未来的量子计算机。

我们提出一种固件级误差缓解策略，称为对称化。为避免量子比特级和量子门级开销，该策略利用量子计算在物理实现的多个层面上具有某些对称性这一特征，区分理想的量子计算过程 [46]。我们的策略首先利用对称性生成不同的电路实现变体。这些变体在一台或多台量子计算机上运行，并通过线性或非线性技术汇总收集到的测量统计数据。随后，对称化处理可使确定性误差的影响大幅抵消，同时不会放大随机噪声。

我们在 IonQ Aria 商用量子计算机上，针对具有实际应用价值的量子算法验证了这一策略 [35–38]。对于量子机器学习（QML）电路 [36], , 线性聚合可带来 1.5 倍的2× 性能提升。投票这种非线性聚合可带来更显著的提升，但若使用不当，可能会扭曲结果。对于采用投票的 15 量子比特量子傅里叶变换（QFT）加法器电路 [35] , 我们观察到 100× 性能提升，且结果未失真。我们在第二节 B 部分探讨聚合方式的选择，并在讨论部分为未来的应用提供指南。

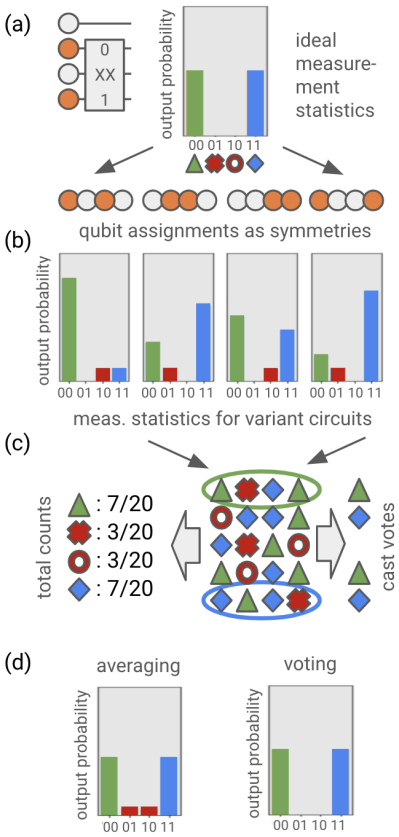


图 1：对称化电路执行：(a) 通过改变量子比特分配，将执行拆分为对称化变体；(b) 测量每个受个别不准确性影响的结果；(c) 汇总测量统计数据；(d) 比较平均结果与通过相对多数投票获得的结果之间的差异。首先，对于选定的四对量子比特，每个电路变体都会生成一个叠加态 $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$（目标量子比特以橙色标出）(a)。对于每对量子比特，在计算基中重新制备输出状态并测量五次 (b)。若按映射对测量结果分组，其统计数据会显著偏离理想值，但经过平均后会趋近理想值；残余错误计数以红色圆圈和叉号表示，全零态以绿色三角形表示，全一态以蓝色菱形表示 (c)。通过对各变体进行相对多数投票来汇总结果时，错误计数会被滤除；而逐分量平均则会保留所有计数 (d)。

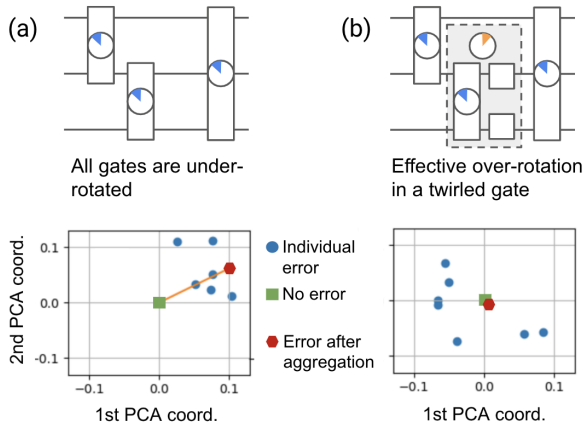


图 2：对称化四量子比特电路（在八个离子上）的模拟结果，其中所有量子比特对均存在平均欠旋转。(a) 面板展示了将量子比特重新映射用作对称性的做法，(b) 面板则展示了量子比特重新映射与门随机化的组合用法。顶部对比了相似的量子电路模块。带有蓝色扇区的圆圈表示欠旋转的量子门，带有橙色扇区的圆圈表示过旋转的量子门。底部绘制了偏差相对于理想直方图在前两个主成分空间中的聚合误差，其中分别采用了有偏差的 (a) 或对称化的 (b) 不准确性。图中还展示了随机电路在八个量子比特上、针对八种映射进行模拟时的各个输出误差；欠旋转按每个双量子比特门分别指定。

II. 结果

A. 对称化策略

我们考虑一组 n 量子比特计算 $\mathfrak{U}_n$，每项计算均包含态初始化、来自 $SU(2^n)$ 的某个算子，以及最终测量。令 $\mathfrak{R}_n$ 为一组实现（涵盖 $\mathfrak{U}_n$ 中的所有量子计算），这些实现对应于门级量子电路，并包含量子比特分配、初始化、测量、后处理，以及可能的实现……化细节，例如指定的脉冲序列。我们定义函数 $\pi: \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{U}_n$，它用于找出给定具体实现 r 所执行的计算 u。我们将 的一般对称性定义为函数 $\gamma: \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{R}_n$ 的集合，记作 $\Gamma(\mathfrak{U}_n)$，这些函数满足

$$\pi \circ \gamma = \pi. \tag{1}$$

也就是说，当且仅当对于所有 $r \in \mathfrak{R}_n$，只要 $\pi(r) = u$，就有 $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{U}_n)$ $\pi(\gamma(r)) = u$。换言之，将 γ 应用于任何一种实现，都会产生相同的量子计算。我们还将计算特定对称性定义为满足 $\pi(\gamma(r)) = \pi(r)$ 的一类函数 $\gamma: \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{R}_n$，其中 $\Gamma(\mathfrak{U}_n, r)$，且针对特定的 r。例如，一般对称性可以是通过量子比特排列对门级电路进行共轭（在群作用意义上）。具体而言，初始态被替换为其排列后的状态，量子门作用于排列后的量子比特上，再将测量结果排列回原来的顺序。计算特定对称性的例子包括量子门分解、对易门的排列、添加保持给定状态的量子门（例如在测量前），以及通过调整后处理来补偿量子门和测量的变化。当 $\mathfrak{R}_n$ 指定脉冲序列时，对称变换可以用物理上等价的脉冲序列替换它们。

通过将计算分配到多个对称变换上，我们可以抵消控制误差的影响，同时不放大随机误差。该过程的步骤如图 1 所示：

1. 定义对称性 Γ 并采样 $\Gamma' \subset \Gamma$。
2. 为 Γ'生成电路变体。
3. 在量子计算硬件上执行每个变体。
4. 汇总所有测量统计数据。

B. 对称性与汇总方式的选择

现在我们来探讨对称化为何有效。设 不精确的实现 $\tilde{r}_u$ 由物理系统的瞬时参数决定，使得 $\pi(\tilde{r}_u) = u+\delta u$。一个关键示例是特定量子门 [5]的幺正欠旋转或过旋转。

为减轻不准确性的影响，我们考虑对多个 $\gamma \in \Gamma = \Gamma(\mathfrak{U}_n, r_u)$ 进行$\gamma(\tilde{r}_u)$，以便对 $\pi(\gamma(\tilde{r}_u)) = u + \delta u_{\Gamma\text{-inv}} + \delta u_\gamma$ 中的误差项进行对称化。在不存在误差的情况下，u 的所有实现 r_u 都会执行相同的计算。在存在误差的情况下，我们依靠对多个 $\gamma \in \Gamma$ 进行对称化，以产生一种计算 $u + \delta u_{\Gamma\text{-inv}} + \langle \delta u_\gamma \rangle_\Gamma$。只要我们选择一个不相关的 γ，$|| \langle \delta u_\gamma \rangle_\Gamma || \ll \langle ||\delta u_\gamma|| \rangle_\Gamma$，非-Γ-不变误差的累积影响就会大幅减小。

在实践中，我们不聚合所有 $\pi(\gamma(\tilde{r}_u))$，而是考虑由 $\pi(\gamma(\tilde{r}_u))$ 产生的输出态，并聚合其测量统计数据（例如，相干地叠加两个量子态需要额外的量子比特）。不准确性对理想分布 $\mathbf{h_u} \in \mathbb{R}^+(2^n)$ 的影响可表示为$\mathbf{h_u} + \delta h_{\Gamma\text{-inv}} + \delta h_\gamma$。聚合测量统计数据可以“增强”目标输出态与错误观测态之间的对比度。误差项可能相互抵消，但更常见的情况是它们彼此不相关。例如，如果 $\mathbf{h_u} = (0, \ldots, 1_k, \ldots, 0_{2^n})$ 并且$\Gamma = S_{2^n}$，那么对称化后的结果将是

$$\mathbf{h_u} + \delta h_{\Gamma\text{-inv}} + \langle \delta h_\gamma \rangle_\Gamma = \mathbf{h_u} + \delta h_{\Gamma\text{-inv}} = \\ = \left(\frac{\varepsilon}{2^n - 1}, \ldots, (1-\varepsilon)_k, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n - 1} \right) \quad (2)$$

其中，ε 是 k 上的平均误差，且 Γ 足够大。输出 k 的概率并没有改善，但其他概率（理想情况下应为 0）会变得不那么显著。这降低了因偶然因素而反复观测到错误输出的概率，并有助于用更少的样本找到预期输出。

式 2 中的 $\delta h_{\Gamma\text{-inv}}$ 表示剩余的完全退极化误差通道，即非相干误差 [39] 的影响。这种残余误差可以通过聚合技术（例如相对多数投票）来降低，例如对于$\mathbf{h_u}$ 输出态 l 的频率为 $\frac{1}{l}$，如果 $\varepsilon < 1 - l/2^n$，这一点已在补充材料中得到证明。

作为一个具体示例，我们展示了对映射到八个离子的4量子比特电路进行对称化的效果。这些电路包含六个作用于不同量子比特对的双量子比特门，以及随机单量子比特门（见方法）。我们将量子门校准误差建模为多个双量子比特门的随机欠旋转，并假设每个量子比特对上的欠旋转固定。我们假设所有量子比特对上的平均欠旋转会对所有变体造成相似的误差（图 2a）。对称性 Γ 由八种随机量子比特分配 γ表示。对于每种量子比特分配，我们模拟相应的不精确实现，以获得向量 $\mathbf{h_u} + \delta h_{\Gamma\text{-inv}} + \delta h_\gamma$。在图 2 中，我们通过绘制理想结果、单个结果和对称化结果中最大的两个主成分，展示了 256 维向量（最初对 $\{\delta h_{\Gamma\text{-inv}} + \delta h_\gamma\}$ 向量进行了主成分分析（PCA））。在第一种情况下，由于所有量子门平均都存在一定程度的欠旋转，这些变体仅探索量子比特分配对称性，因此无法对误差进行对称化。因此，如图 2a 所示，聚合后仍存在误差效应$\delta h_{\Gamma\text{-inv}}$。在第二个示例中（图 2b），我们使用量子门分解的其他对称性，将 $\delta h_{\Gamma\text{-inv}}$归零。为了解决完全纠缠 XX门中的欠旋转效应，我们采用另一种实现方式：将相位翻转的 XX^{-1} 门与成对的 X门组合，从而实现相同的理想酉算子，同时反转欠旋转的影响。

测量统计数据的聚合策略，是一种将同一计算的多个实现所产生的测量统计数据合并起来的过程。没有误差时，在极限情况下（重复次数无限），所有实现都应产生相同的统计数据。如果给定一组相同类型的统计数据，某种聚合策略能够产生另一份相同的统计数据副本，那么对于该类型的统计数据而言，这种策略就被认为是稳定的。对于任何类型的统计数据，按分量逐项平均进行聚合都显然是稳定的，但按投票进行聚合则并非如此。对于概率分布 $(1-\varepsilon, \varepsilon)$，基于投票的聚合会使其更接近 $(1, 0)$，这一点可以由 $\varepsilon < 1/2$ 看出。聚合策略的用途在于：(*i*) 将任意统计数据转化为所需类型的统计数据；(*ii*) 从原始统计数据的多个含误差变体中提炼出原始统计数据。为此，人们对包括 Shor 和 Grover 算法在内的许多量子算法的输出概率分布进行了解析刻画。聚合方式的选择取决于给定量子算法的输出概率分布类型。

为获得最佳性能，我们建议，对于理想测量统计数据由频率为 $\frac{1}{l}$ 的 l 个输出组成的量子算法，采用相对多数投票进行聚合。这类算法存在零频率输出，且需要确定目标输出的一个子集。对于测量统计数据不同的算法，可以采用平均进行聚合，以避免失真。

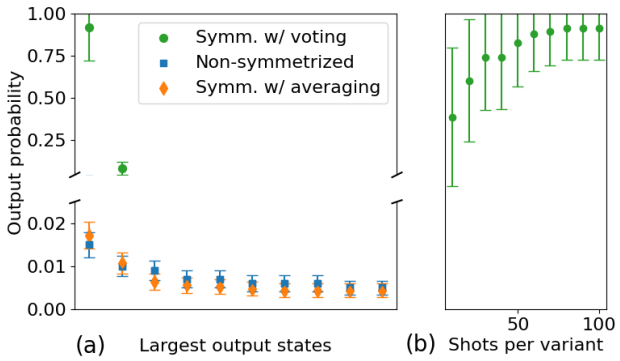


图 3：通过相对多数投票聚合，对 13 量子比特单输出 QFT 加法器电路进行对称化，可提高成功概率。 (a) 我们比较了未经对称化的结果，以及采用逐分量平均或相对多数投票进行对称化的结果。蓝色方块表示未对称化的结果，使用一次实现并进行了 2500 次重复测量（三种情况下的实验总数相同）。橙色菱形表示对这次执行进行对称化的结果，共有 25 次实现，每个变体重复测量 100 次，并通过逐分量平均进行聚合。绿色圆圈采用与橙色数据点相同的实现，但通过相对多数投票生成对称化直方图。由于各变体之间结果不匹配的情况被过滤掉，这提高了目标结果的概率。在这种情况下，对称化结果在每个变体重复测量约 80 次之前持续改善 (b)。

C. 实验

我们通过实验比较未经对称化的运行结果与采用逐分量平均和相对多数投票的对称化运行结果，评估对称化及聚合策略选择的影响。这些实验使用 IonQ Aria 囚禁离子量子计算机，并将其配置为使用 20 个可寻址量子比特。实验详情请参阅方法部分。

性能通过海林格保真度来衡量，它定义为实际输出统计与理想结果之间的统计重叠；理想结果通过无误差模拟器计算得出。海林格保真度的取值范围为 0 到 1，其中 0 表示概率分布彼此不重叠，1 则表示两个分布完全相同。海林格保真度也称为巴塔恰里亚系数，常用于衡量概率分布之间的差异，并且与量子态保真度的定义一致。

我们展示了对称化对一个 13 量子比特、单输出的基于量子傅里叶变换的加法器电路的影响 [35]。在图 3a 中，我们比较了 2^{13} 中最大的输出概率，分别对应未经对称化的直方图、经逐分量平均对称化的直方图，以及经相对多数投票对称化的直方图。第一个也是最大的数值对应理想概率为 1 的比特串，其余比特串的输出概率应为 0。图 3b 展示了误差棒随采样次数的变化。我们观察到，采用逐分量平均进行对称化并不会提高目标比特串的概率，但会降低次高概率，从而使相对多数投票后目标态的概率大幅提升（从 1.5% 提高到 95%）。对于 15 量子比特的基于量子傅里叶变换的加法器，提升幅度超过 100×。

接下来，我们考察图4所示若干应用场景中对称化的性能。所有任务均进行了 2500 次采样，其输出概率分布中具有非零概率的正确输出态数量各不相同，因此从不同聚合策略中受益的程度也不同。在图4a中，我们评估了基于量子傅里叶变换的加法器、相位估计和振幅估计的结果，这些电路均只有一个输出态。我们发现，相对多数投票的对称化显著提高了保真度，而采用逐分量平均的对称化运行则没有改善。在图4b中，我们比较了振幅估计和蒙特卡洛采样电路在对辅助量子比特进行偏迹之前的结果。相对多数投票的对称化仍带来最显著的保真度提升，但逐分量平均也优于不进行对称化，因为它能将误差均匀分散到四个目标态上。在图4c中，我们评估了变分量子本征求解器（VQE）和量子机器学习（QML）电路的对称化效果。这些电路的输出分布更宽、更不规则，因此逐分量平均的对称化效果最好，而相对多数投票可能会使结果产生偏差。输出概率分布更集中的电路通常更能从相对多数投票的聚合方式中受益（见方法部分）。

III. 讨论

为了提升当今量子计算机的性能，科学家和工程师投入大量精力寻找并缓解误差来源。然而，即使经过艰苦的改进，设备不准确性和计算误差往往依然存在。尤其是，相干误差——通常由无意的校准偏差引起，并可能随时间漂移——会显著降低性能（正如 [39] 中通过下界证明的那样，误差缓解技术在处理非相干误差时会遇到局限）。即使不改进硬件，我们的策略也能提升量子计算机的性能，因为系统误差在某些对称实现之间有所不同。对称化是指在特定硬件上创建量子计算的不同变体实现，以减少误差（图 2b）并提升量子计算机的性能。具体而言，我们将给定次数的量子电路执行分成多个批次，并让每个批次采用不同的实现；根据对称性，在不存在不准确性的情况下，这些实现应产生相同的结果。为了汇总对称化运行的测量统计数据，我们证明，采用恰当选择的技术可在商用量子计算机上显著提升性能。

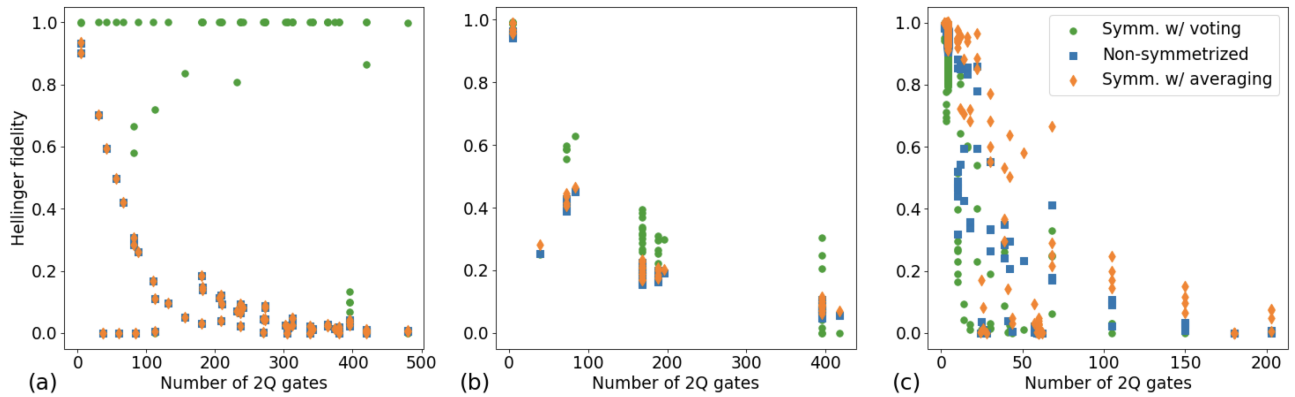


图4：比较各算法在有无对称化时保真度的提升情况：(a) 具有一个输出态的算法（基于量子傅里叶变换的加法器、相位估计和振幅估计），(b) 具有四个输出态的算法（振幅估计和蒙特卡洛采样），或 (c) 具有多个输出态的算法（变分量子本征求解器和量子机器学习）。图中显示海林格保真度（见正文）随电路深度的变化，电路深度以双量子比特（2Q）MS（Mølmer-Sørensen）量子门的数量表示。将未对称化结果（绿色圆圈）与经过对称化并分别通过相对多数投票（蓝色方块）和逐分量平均（橙色菱形）汇总的结果进行比较。未对称化和对称化结果均来自同一组实验，每组实验包含 25 次实现，每种变体重复 100 次。未对称化保真度是对每种变体的 25 个单独保真度取平均得到的，因此，对于具有一个输出态的算法，这些数值与通过逐分量平均汇总的对称化结果完全一致 (a)。

逐分量平均适用于任何类型测量统计数据的聚合，且具有稳定性。我们使用这种方法证明，量子机器学习和变分量子本征求解器算法的保真度可提升 $2\times$；这些算法只产生少量低频输出。对于零频率输出很多的算法（基于量子傅里叶变换的加法器、振幅估计、相位估计、蒙特卡洛采样），其输出结果编码在一小组目标输出态中；由于逐分量平均无法恢复零频率输出，因此几乎没有提升，甚至毫无提升。多数投票对这类测量统计数据具有稳定性，并在我们的 20 量子比特商用量子计算机 [37] 上实现了高达 $100\times$ 的性能提升。我们的误差缓解策略似乎适用于多种量子比特技术，并且兼容以往的误差缓解策略。

IV. 方法

这里，我们进一步介绍对称化的两个步骤：对称性采样和测量统计数据的聚合。我们还概述了这两个步骤在可扩展性方面的若干考量。此外，我们也介绍了实验和模拟的详细信息。

A. 对称性采样

由于对给定的量子计算使用所有可能的对称性并不现实，我们需要从这些对称性中进行抽样。对于无误差的量子计算，仅使用恒等对称性就足够了。假设存在一种已知类型的不准确性，那么只需很少的种对称性即可满足要求，无论不准确性的程度如何，也无论量子比特的数量多少。随着误差空间维度的增加，必须抽取更多对称性。

我们对称性采样 γ 以最小化 $\langle \delta u_\gamma \rangle$。选择彼此不同的对称性（而非随机的 [39]）可以降低偏差，并消除不同变体之间不准确性的相关性。如果对称性 Γ 是量子比特分配，则可以针对给定设备特定连接性，选择在物理量子比特之间共享较少量子门的分配方案。

B. 聚合策略

延续第 II.B 节的讨论，我们比较了两种测量统计数据的聚合策略：一种用频率分布表示测量统计数据，另一种则用原始输出样本表示。

逐分量平均。 我们的第一种策略是对给定直方图中的频率进行逐分量平均 [16]。这种方法适用于理想概率分布中零值较少或没有零值的计算，例如变分量子本征求解器或量子机器学习电路。图 2b 用向量表示每个变体的直方图与理想直方图之间的差异。通过适当的对称性采样，这些向量会相互抵消；随着变体数量增加，它们的和会收敛到理想直方图。逐分量平均无法恢复理想输出分布中的零频率。直观而言，平均与集合并运算相关，而集合交运算则启发了不同的聚合方法。具体来说，基于投票的方法可以筛除低频输出并恢复零频率。

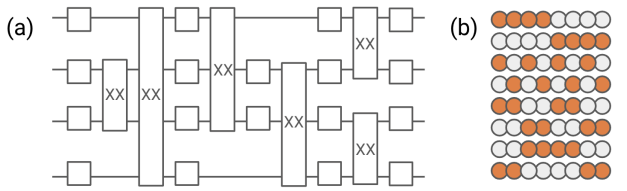


图 5：由 XX门和随机单量子比特门组成的模拟4量子比特小型随机电路 (a)，按照橙色圆圈标出的分配方式映射到八个量子比特上 (b)。

相对多数投票。 为了说明如何通过相对多数投票进行聚合，我们将每个电路变体的测量结果表示为一组比特串，每次采样对应一个比特串。由于每个变体的采样次数相同，因此每次采样都可以用数量相同的变体比特串表示（见图 1c）。获胜比特串由相对多数投票确定，并且还必须超过指定阈值。由于比特串的顺序无关紧要，因此会对每个变体中的比特串进行多次随机排序，并重复进行逐次采样投票。如果没有找到获胜比特串，则将阈值降低一。如果阈值为二时仍没有获胜者，则返回各变体直方图的逐分量平均值（这在分布较为分散，和/或可用样本缺乏统计显著性时很常见）。累计所有获胜比特串的计数后，将最终直方图归一化。投票阈值由针对给定量子计算架构的训练运行确定。对一组输出已知的电路执行训练运行，还有助于确定最优的变体数量、重复次数、门分解等。这些超参数适用于多个电路。

由于投票具有非线性，对于具有 l 个等概率输出和 $r-l$ 个零频次的理想输出概率而言，它是一种稳定的聚合策略（证明见补充材料）。相关电路包括基于量子傅里叶变换的加法器、相位估计和振幅估计算法，以及一些蒙特卡罗算法。

C. 可扩展性方面的考量

对称性采样。均匀随机选择 [41] 提供了一种计算上可扩展的采样方法，因为选择下一个 γ时无需记住此前选取的所有对称性。由于 k均匀随机的对称性会产生均匀随机的 δu_γ集合，因此我们有 $\langle \delta u_\gamma \rangle \propto 1/\sqrt{k}$ [39]。选择彼此差异较大的对称性可以降低期望值 $\langle \delta u_\gamma \rangle$，正如低差异序列 [42–44] 优于随机样本一样。为了避免针对每项计算专门设计对称性选择我们针对整类计算来设计这种方法，而不是针对每项计算，尽管这可能会带来适度的次优性。例如，类似的变分量子本征求解器电路（量子比特数量相同）可以视为同一类。

测量统计数据的聚合。运行时间和内存复杂度取决于观测到的输出态数量，而非所有可能的状态数量。对于逐分量平均，后处理只需对输出计数进行简单合并或加权合并（零频次为隐含项）。相对多数投票在小组输出中进行，不需要大量内存。

D. 实验细节

我们使用 IonQ Aria [37] 离子阱量子计算机，该设备利用由 355 纳米光脉冲单独寻址的受阱镱离子。这些脉冲可经过调控，在离子之间产生 Mølmer-Sørensen纠缠门，也可实现单量子比特旋转/量子门。Aria 系统使用 22 个此类离子作为量子比特来执行量子信息处理。在这里，我们将实验分为 25 种不同的物理量子比特与计算量子比特之间的映射（变体），每种变体运行 100 次实验采样，总计 2500 次实验重复。对于超过六个量子比特的电路，我们在一组物理量子比特上生成排列；否则，则使用另外两个物理量子比特，以增加映射的多样性。所有变体均在相似条件下进行测量。为此，我们的大多数实验都在一个校准周期内执行。若无法做到这一点（例如，由于离子链损失），则会仔细复现校准参数。

E. 模拟详情

我们展示了对一个 4 量子比特随机电路（图 5a）进行对称化的效果。该电路有八种实现方式，分别采用将量子比特分配到八个离子上的不同方案（图 5b）。我们将量子门校准误差建模为多个双量子比特门的随机欠旋转，并对每个离子对固定其误差。我们假设所有量子比特对的平均欠旋转相同，从而使所有变体产生相似的误差（图 2a）。对称性 Γ 由八种随机量子比特分配 γ表示。对于每种量子比特分配，我们模拟了相应的不精确实现，以获得向量 $\mathbf{h_u} + \delta h_{\Gamma\text{-inv}} + \delta h_\gamma$。

在第一种情形（图 2a）中，我们仅在不同实现之间改变量子比特的分配（图 5b）；而在另一种情形（图 2b）中，我们还将每第四个 XX门替换为相位翻转的 XX^{-1} 门，并配以成对的 X门，从而实现相同的理想酉算子，但反转欠旋转的影响（图 2b）。

[1] A. Erhard, J. J. Wallman, L. Postler, M. Meth, R. Stricker, E. A. Martinez, P. Schindler, T. Monz, J. Emerson, and R. Blatt, 《Nature Communications》10（2019），网址：https://doi.org/10.1038/s41467-019-13068-7。[2]K. Wright, K. M. Beck, S. Debnath, J. M. Amini, Y. Nam, N. Grzesiak, J.-S. Chen, N. C. Pisenti, M. Chmielewski, C. Collins, 等, 《Nature Communications》10，1（2019），ISSN 2041-1723，网址：http://dx.doi.org/10.1038/s41467-019-13534-2。[3] D. Zhu, Z. P. Cian, C. Noel, A. Risinger, D. Biswas, L. Egan, Y. Zhu, A. M. Green, C. H. Alderete, N. H. Nguyen, 等, 《Nature Communications》13（2022），网址：https://doi.org/10.1038/s41467-022-34279-5。[4] T. Tomesh, P. Gokhale, V. Omole, G. S. Ravi, K. N. Smith, J. Viszlai, X.-C. Wu, N. Hardavellas, M. R. Martonosi, and F. T. Chong, *Supermarq: A scalable quantum benchmark suite*（2022），网址：https://arxiv.org/abs/2202.11045。[5] A. O. Maksymov, J. Nguyen, V. Chaplin, Y. Nam, and I. L. Markov，载于 *28th IEEE International Symposium on High-Performance Computer Architecture*（2021），2108.03708。[6] R. Blumel, N. Grzesiak, and Y. Nam, *Power-optimal, sta-bilized entangling gate between trapped-ion qubits*（2019），1905.09292。[7] R. Bl¨umel, N. Grzesiak, N. H. Nguyen, A. M. Green, M. Li, A. Maksymov, N. M. Linke, and Y. Nam, 《Phys. Rev. Lett.》126，220503（2021），网址：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.220503。[8] C. J. Ballance, T. P. Harty, N. M. Linke, M. A. Sepiol, and D. M. Lucas, 《Phys. Rev. Lett.》117，060504（2016）。[9] S. S. Elder, C. S. Wang, P. Reinhold, C. T. Hann, K. S. Chou, B. J. Lester, S. Rosenblum, L. Frunzio, L. Jiang, and R. J. Schoelkopf, 《Physical Review X》10（2020），网址：https://doi.org/10.1103/physrevx.10.011001。[10] L. Lao, P. Murali, M. Martonosi, and D. Browne，2021年 ACM/IEEE 第48届年度国际计算机体系结构研讨会（ISCA）（2021），网址：http://dx.doi.org/10.1109/ISCA52012.2021.00071。[11]M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* 2011 10 （剑桥大学出版社，美国），第版，ISBN 1107002176。[12]P. Murali, J. M. Baker, A. J. Abhari, F. T. Chong, and M. Martonosi, *Noise-adaptive compiler mappings for noisy intermediate-scale quantum computers*（2019），1901.11054。[13]S. S. Tannu and M. K. Qureshi，载于 *Proceedings of the Twenty-Fourth International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Oper-ating Systems*（计算机协会，纽约，美国，2019），ASPLOS '19，第987–999页，ISBN 9781450362405，网址：https://doi.org/10.1145/3297858.3304007。[14] A. Maksymov, P. Niroula, and Y. Nam, 《Quantum Science and Technology》6，034009（2021），网址：https://doi.org/10.1088/2058-9565/abf718。[15] S. Nishio, Y. Pan, T. Satoh, H. Amano, and R. V. Meter, 《J. Emerg. Technol. Comput. Syst.》16（2020），ISSN 1550-4832，网址：https://doi.org/10.1145/3386162。

[16] S. S. Tannu 和 M. Qureshi，载于 *Proceedings of the 52nd Annual IEEE/ACM International Symposium on Microarchitecture*（计算机协会，纽约，纽约州，美国，2019年），MICRO '52，第 253–265 页，ISBN 9781450369381，网址 https://doi.org/10.1145/ 3352460.3358257。[17] J. Sun、X. Yuan、T. Tsunoda、V. Vedral、S. C. Benjamin 和 S. Endo，《Physical Review Applied》15（2021年），ISSN 2331-7019，网址 http://dx.doi.org/ 10.1103/PhysRevApplied.15.034026。[18] A. Strikis、D. Qin、Y. Chen、S. C. Benjamin 和 Y. Li, *Learning-based quantum error mitigation*（2021年），2005.07601。[19] Y. Suzuki、S. Endo、K. Fujii 和 Y. Tokunaga, *Quantum error mitigation for fault-tolerant quantum computing* 2021 2010 03887 （），。。

[20] K. Temme、S. Bravyi 和 J. M. Gambetta，《Physical Review Letters》119（2017年），ISSN 1079-7114，网址 http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180509。[21] C. Piveteau、D. Sutter、S. Bravyi、J. M. Gambetta 和 K. Temme, *Error mitigation for universal gates on encoded qubits* 2021 2103 04915 （），。。

[22] P. Czarnik、A. Arrasmith、P. J. Coles 和 L. Cincio, *Error mitigation with clifford quantum-circuit data*（2021年），2005.10189。[23] E. Campbell, 《Physical Review A》95（2017年），ISSN 2469-9934，网址 http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.95.042306。[24] O. Kern、G. Alber 和 D. L. Shepelyansky, 《欧洲物理学杂志 D》32，153–156（2005年），ISSN 1434-6079，网址 http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2004-00196-9。[25]J. J. Wallman 和 J. Emerson, 《Physical Review A》94（2016年），ISSN 2469-9934，网址 http://dx.doi.org/ 10.1103/PhysRevA.94.052325。[26]Z. Cai、X. Xu 和 S. C. Benjamin, 《npj Quantum Information》6（2020年），ISSN 2056-6387，网址 http://dx.doi.org/10.1038/s41534-019-0233-0。[27]A. Hashim、R. K. Naik、A. Morvan、J.-L. Ville、B. Mitchell、J. M. Kreikebaum、M. Davis、E. Smith、C. Iancu 等, *Randomized compiling for scalable quantum computing on a noisy superconducting quantum processor* 2020 2010 00215 （），。。

[28] Z. Cai, *Multi-exponential error extrapolation and combining error mitigation techniques for nisq applications*（2021年），2007.01265。[29] A. Kandala、K. Temme、A. D. C´orcoles、A. Mezzacapo、J. M. Chow 和 J. M. Gambetta，《Nature》567，491–495（2019年），ISSN 1476-4687，网址 http://dx.doi.org/10.1038/s41586-019-1040-7。[30] S. Endo、S. C. Benjamin 和 Y. Li, 《Physical Review X》8（2018年），ISSN 2160-3308，网址 http://dx.doi.org/ 10.1103/PhysRevX.8.031027。[31] C. Song、J. Cui、H. Wang、J. Hao、H. Feng 和 Y. Li, 《Science Advances》5（2019年），网址 https://doi.org/10.1126/sciadv.aaw5686。[32] P. Wang、C.-Y. Luan、M. Qiao、M. Um、J. Zhang、Y. Wang、X. Yuan、M. Gu、J. Zhang 和 K. Kim, 《Nature Communications》12（2021年），ISSN 2041-1723，网址 http://dx.doi.org/10.1038/s41467-020-20330-w。[33] A. C. Lee、J. Smith、P. Richerme、B. Neyenhuis,

P. W. Hess、J. Zhang 和 C. Monroe，《物理评论A》94，042308（2016年），网址 https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.042308。[34] D. Kielpinski、C. Monroe 和 D. J. Wineland，《Nature》417，709（2002年），网址 https://doi.org/10.1038/ nature00784。[35] T. Lubinski、S. Johri、P. Varosy、J. Coleman、L. Zhao、J. Necaise、C. H. Baldwin、K. Mayer 和 T. Proctor，*Application-oriented performance benchmarks for quantum computing* 2021 2110 03137 （），。。

[36] D. Zhu、W. Shen、A. Giani、S. R. Majumder、B. Nec-ulaes 和 S. Johri，*Copula-based risk aggregation with trapped ion quantum computers*（2022年），网址 https: // arxiv.org/abs/2206.11937。[37]IonQ，*Ionq announces first quarter 2022 finan-cial results*（2022年），（访问日期：2022年3月31日），网址 https://www.businesswire.com/news/home/20220516005952/en/IonQ-Announces-First-Quarter-2022-Financial-Results。[38]IonQ，*Ionq aria achieves record 20 algorithmicqubits*（2022年），（访问日期：2022年2月25日），网址 https://thequantuminsider.com/2022/02/25/ionq-aria-achieves-record-20-algorithmic-qubits/。[39] R. Takagi、S. Endo、S. Minagawa 和 M. Gu，《npj Quantum Information》8（2022年），网址 https://doi.org/ 10.1038/s41534-022-00618-z。[40] A. Bhattacharyya，《加尔各答数学学会通报》35，99（1943年）。[41] T. Patel 和 D. Tiwari，载于 *SC20: International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*（IEEE，2020年），网址 https:// doi.org/10.1109/sc41405.2020.00019。[42] J. H. Halton，《数值数学》2，84（1960年），网址 https://doi.org/10.1007/bf01386213。[43] I. Sobol'，《苏联计算数学与数学物理》7，86（1967年），网址 https://doi.org/ 10.1016/0041-5553(67)90144-9。[44] R. A. Fisher 和 F. Yates，*Statistical tables for biolog-ical, agricultural and medical research*（朗文，伦敦，英格兰，1974年），第6版。[45] 量子纠错码的开销通常是量子比特数量的 5–7 倍。对于拥有 50–70 个量子比特的含噪声中等规模量子系统，可用于量子计算的逻辑量子比特寥寥无几。[46] 例如量子比特映射、电路编译、门分解、脉冲序列等。

V. 致谢

我们感谢 John Gamble 提出的深刻见解和宝贵建议。

VI. 贡献

I.M. 和 Y.N. 提出了项目构想并负责协调。I.M. 提出了该策略的构想，并与 A.M. 一同设计了方法。J.N. 进行了实验，A.M. 编写并执行了模拟及数据处理。所有作者均参与了论文的撰写。

附录 A：补充信息——相对多数投票的有效性与效能

如正文所详述，相对多数投票是一种强大的聚合策略，因为它具有非线性 特性，并且能够显著抑制某些电路中的误差。不过，如果用于其他电路，也可能降低性能。本文对相对多数投票程序的性质进行了形式化分析，并详细说明了要使其发挥效益所需满足的条件。

我们先考虑一种简单情形：不存在有限样本效应、没有误差，且有 r 个可能的有效输出状态。我们考虑 m 个变体，其测量状态 i 的概率为 h_i。将每个输出态测量指定次数 $\{x_1,\ldots,x_r\}=\mathbf{x}^r$ 的概率（满足 $\sum_{k=1}^{r} x_k = m$ ）可用多项式系数表示为

$$\gamma(m,\mathbf{x}^r)=\binom{m}{x_1,\ldots,x_r}\prod_{j=1}^{r}h_j^{x_j}, \tag{A1}$$

接着，我们可以通过对 $\mathbf{x}^r$ 中除带有前缀 x_i （表示约束 $\sum_{k=1}^{r} x_k = m$ ）的变量以外的所有变量求和，来写出在 m 个变体中恰好 x_i 次找到状态 i 的概率，其中对 $\gamma(m,\mathbf{x}^r)$ 使用带撇号的求和符号，表示

$$\gamma_i(m,x_i)=\sum_{\mathbf{x}^r\setminus x_i=0}{}'\binom{m}{x_1,\ldots,x_r}\prod_{j=1}^{r}h_j^{x_j}, \tag{A2}$$

测得状态 i 是测量频率最高的状态，并且在 m 个变体中至少出现 t 次的概率，可表示为对 $\gamma(m,\ x_i)$求和，同时附加约束，要求任何 $x_k\in\mathbf{x}^r\setminus x_i$ 都小于 x_i:

$$G_i(m,t)=\sum_{x_i=t}^{m}\ \sum_{\mathbf{x}^r\setminus x_i=0}^{x_i-1}{}'\binom{m}{x_1,\ldots,x_r}\prod_{j=1}^{r}h_j^{x_j} \tag{A3}$$

聚合结果中状态 i 的输出概率，可通过归一化的 $G_i(m,\ t)$表示

$$g_i(m,t)=\frac{G_i(m,t)}{\sum_j G_j(m,t)} \tag{A4}$$

定理 A.1. 对于任意理想输出概率分布 $\{h_1,\ldots,h_r\}$ 和任意两个状态 $1\le i\ne j\le r$，相应的聚合输出概率 g_i、g_j满足 $g_i/g_j<h_i/h_j$，若 $h_i<h_j\notin\{0,1\}$。

证明。考虑一个具有 l 个非零输出态的输出概率分布。 $G_i(m,\ t)$ 可写为

$$G_i(m,t)=\sum_{x_i=t}^{m}\ \sum_{x_j=0}^{\min(x_i-1,\ m-x_i)} h_i^{x_i}h_j^{x_j}f_{ij}^{m}(x_i,x_j), \tag{A5}$$

其中

$$f_{ij}^{m}(x_i,x_j)=\sum_{\mathbf{x}^r\setminus x_i\setminus x_j=0}^{x_i-1}{}'\prod_{k=1}^{l}h_k^{x_k}\binom{m}{x_1,\ldots,x_l} \tag{A6}$$

将对 $t\le x_i\le m$ 和 $0\le x_j\le \min(x_i-1,m-x_i)$ 的求和改为对 $q=x_i+x_j$ 和 $u=x_i-x_j$ 求和，其中 $1\le u\le m$ 且 $\max(u,2t-u)\le q\le m$，这可以通过几何方法验证，因此

$$G_i(m,t)=\sum_{u=1}^{m}h_i^u\sum_{q=\max(u,\atop 2t-u)}^{m}(h_ih_j)^{\frac{q-u}{2}}f_{ij}^{m}(\tfrac{q+u}{2},\tfrac{q-u}{2})=$$

$$=\sum_{u=1}^{m}h_i^u\phi_{ij}(m,t,u), \tag{A7}$$

其中 $\phi_{ij}^{m}(t,u)=\sum_{q=\max(t,u)}^{m}(h_ih_j)^{\frac{q-u}{2}}f_{ij}^{m}(\frac{q+u}{2},\frac{q-u}{2})$。聚合输出概率之间的比率可以表示为

$$\frac{g_i(m,t)}{g_j(m,t)}=\frac{G_i(m,t)}{G_j(m,t)}=\frac{h_i}{h_j}\frac{\sum_{u=1}^{m}h_i^{u-1}\phi_{ij}^{m}(t,u)}{\sum_{u=1}^{m}h_j^{u-1}\phi_{ij}^{m}(t,u)} \tag{A8}$$

逐项比较这些和，由于 $h_i<h_j$，对于 $u\ge 1$，$h_i^{u-1}\le h_j^{u-1}$，因此 $\frac{g_i(m,t)}{g_j(m,t)}<\frac{h_i}{h_j}$。 □

推论 A.1.1. 若 $h_i=0,\quad g_i(m,t)=\alpha G_i(m,t)=\alpha\sum_{u=1}^{m}h_i^u\phi_{ij}(m,t,u)=0$。

推论 A.1.2. 若 $h_i=1,\quad h_{k\ne i}=g_{k\ne i}=0,\quad g_i=1$。

推论 A.1.3。对于任意输出概率分布 $\{h_1,\ldots,h_r\}$，若对于 $1\le l\le r$ 个状态有 $h_i=1/l$，而对于其余状态有 $h_i=0$，则 $g_i(m,t)=h_i$。

$$g_i(m,t)=\begin{cases}0, & h_i=0\\ \frac{G_i(m,t)}{\sum^{l}G_j(m,t)}=\frac{G_i(m,t)}{lG_i(m,t)}=\frac{1}{l}, & h_i=1/l\end{cases} \tag{A9}$$

推论 A.1.4. 如果概率为 $1/l$ 的状态与概率为0的状态之间存在不平衡 d，使得 $h_i=\frac{1}{l}-d$ 且 $h_j=d$，$\frac{g_i(m,t)}{g_j(m,t)}>\frac{h_i}{h_j}$，条件是 $h_i>h_j$ 或 $0<d<\frac{1}{2l}$。

推论 A.1.5. 如果两个概率为 $1/l$ 的状态之间存在不平衡 d，使得 $h_i=\frac{1}{l}-d$ 且 $h_j=\frac{1}{l}+d$，$\frac{g_i(m,t)}{g_j(m,t)}>\frac{h_i}{h_j}$，条件是 $h_i>h_j$ 或 $0<d<\frac{1}{l}$。

由定理 A.1 及其推论可知，对于具有 $1\le l\le r$ 个等概率输出和 $r-l$ 个零频率的理想输出概率，相对多数投票是一种稳定的聚合策略。如果非零输出概率各不相同，那么较小的概率在聚合结果中会进一步降低，而较大的概率则会增大。这一特性有助于在零频率输出被错误测量时，降低其聚合概率。