arXiv:2301.07259v1 [math.LO] 18 Jan 2023

索莱茨基二分定理与波斯纳-罗宾逊定理几乎等价

PATRICK LUTZ

摘要。描述集合理论中的索莱茨基二分定理与可计算性理论中的波斯纳-罗宾逊定理表面上颇为相似，有时也可用于证明相同的结果，但两者之间并无明显的直接关系。我们将给出两个定理略微弱化的版本，并证明结合决定性原理后，每个版本都能简洁地证明另一个定理，从而表明两者实际上存在这样的关系。这种关系对于索莱茨基二分定理和波斯纳-罗宾逊定理在博雷尔／超算术层级更高层次上的推广也成立。

1. 引言

本文探讨两个定理之间的关系：描述集合理论中的索莱茨基二分定理指出，每个定义在实数上的博雷尔函数，要么是连续函数的可数并，要么至少与图灵跳跃一样复杂 [12], ；而可计算性理论中的波斯纳-罗宾逊定理指出，每个实数要么是可计算的，要么相对于某个预言机看起来像 $0'$ [13]。稍后我们将给出这两个定理的正式表述。

表面上看，这些定理非常相似。回想一下，实数上的每个连续函数都相对于某个预言机可计算。因此，若稍作文学性的发挥，我们可以把这两个定理概括为：某类对象中的每个对象，要么是可计算的，要么至少与跳跃一样复杂。

然而，这种相似性是否不止于表面，并不显而易见。在索莱茨基二分定理中，所考虑的对象是二阶的——从实数到实数的函数；而在波斯纳-罗宾逊定理中，所考虑的对象是一阶的——单个实数。请注意，这种区别不同于这样一种观察：索莱茨基二分定理是一个“粗面”陈述，而波斯纳-罗宾逊定理则是一个“细面”陈述。此外，这种表面上的类比似乎暗示，索莱茨基二分定理只需断言每个函数要么是连续的（而不是连续函数的可数并），要么至少与跳跃一样复杂，但事实并非如此。

这种相似性背后可能有某种数学上的重要联系，一个迹象可见于 Kihara 的研究。首先，Kihara 指出 [6] ，索莱茨基二分定理可用于证明 Martin 猜想的一个特殊情形；这一情形此前由 Slaman 和 Steel [15] 利用波斯纳-罗宾逊定理证明。其次，Gregoriades、Kihara 和 Ng 的研究 [3] 利用波斯纳-罗宾逊定理的一个版本，证明了与可分解性猜想相关的结果；这些结果此前是利用索莱茨基二分定理证明的 [12, 11]。

本文旨在说明，这并非巧合——索莱茨基二分定理与波斯纳-罗宾逊定理之间存在有意义的技术联系。具体而言，我们将表述略微弱化的索莱茨基二分定理和波斯纳-罗宾逊定理[1] ，并说明每个定理都可用来简短地证明另一个定理[2]。这种做法之所以可行，以及证明中的具体细节，都支持这样一种观点：索莱茨基二分定理在本质上（虽非字面意义上）是波斯纳-罗宾逊定理的粗体版本。

[1]这两种方法都足以证明上述 Kihara 等人提到的结果。[2]不过，要证明其中一个方向——利用索莱茨基二分定理证明波斯纳-罗宾逊定理——我们需要用到 $\mathbf{\Pi}^1_1$确定性，而这无法在 ZFC 中证明。

索莱茨基二分定理和波斯纳-罗宾逊定理也有推广，可延伸到博雷尔／超算术层级的更高层次；我们的所有结果同样适用于这些推广，证明也基本无需改动。我们将在第 4 节进一步讨论这一点。

在引言余下部分，我们将介绍索莱茨基二分定理和 Posner-Robinson 定理，以及本文将要使用的弱化版本。我们还将简要讨论决定性原理，它们为我们的证明提供了主要的技术工具。

索莱茨基二分定理。通俗地说，索莱茨基二分定理指出，每个足够可定义的从实数到实数的函数，要么是可数个连续函数的并，要么至少与图灵跳跃[3]一样复杂。要正式陈述该定理，我们必须先准确说明“可数个连续函数的并”和“至少与图灵跳跃一样复杂”是什么意思。

定义 1.1。若存在 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 的一个划分，将 ω^ω 分成可数多个部分，使得对每个 n，$f\restriction_{A_n}$ 相对于 A_n 上的子空间拓扑是连续的，则函数 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是 σ-连续的 。

请注意，这里有一个细微之处：$f\restriction_{A_n}$ 相对于 A_n 上的子空间拓扑是连续的，并不意味着 $f\restriction_{A_n}$ 可以扩展为定义在整个 ω^ω上的连续函数。我们也将定义在其定义域上相对于子空间拓扑连续的部分函数称为部分连续函数。

定义 1.2. 若存在拓扑嵌入 φ、$\psi\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$，使得 $\psi\circ f = g\circ\varphi$，则函数 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 拓扑嵌入到函数 $g\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 中。换言之，下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \omega^\omega & \xrightarrow{\ g\ } & \omega^\omega \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ \omega^\omega & \xrightarrow{\ f\ } & \omega^\omega \end{array}$$

定义 1.3. 图灵跳跃是由下式定义的函数 $J\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$

$$J(x)(n) := \begin{cases} 0 & \text{if } \Phi_n^x(n)\uparrow \\ m+1 & \text{if } \Phi_n^x(n)\downarrow \text{ in exactly } m \text{ steps.} \end{cases}$$

请注意，我们对图灵跳跃的正式定义与标准定义略有不同；在标准定义中，$J(x)(n)$ 只表示 $\Phi_n^x(n)$ 是否收敛，而不表示它需要多少步才能收敛。这是定理 1.4所必需的，但在本文其他地方并不重要——换言之，在陈述定理 1.4之后，本文余下的全部内容都可以视作我们采用了通常的方式定义 J，而不是采用上文给出的定义。

定理1.4 (索莱茨基二分定理)。对于每个博雷尔函数 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$，要么 f 是 σ-连续的，要么图灵跳跃在拓扑上嵌入到 f中。

定理1.4 最初由 Solecki 于 [16] 在 f 属于第一类贝尔函数的特殊情形下证明。Zapletal 于 [17] 将其推广到所有博雷尔函数；Pawlikowski 和 Sabok 于 [12]将其推广到所有解析函数。已知在决定性公理 [17]下，该定理对所有函数也成立。

现在我们将陈述索莱茨基二分定理的两个较弱版本，它们通过用函数之间较弱的可约性概念取代拓扑嵌入性而得出。

定义 1.5. 如果存在部分连续函数 $\varphi,\psi\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$，使得对于所有 $x\in\omega^\omega$，$f(x) = \psi(g(\varphi(x)))$，则函数 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 可归约[4] 到函数 $g\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$，记作 $f \leqslant g$。换言之，下面的图表可交换

[3]事实上，大多数已发表的索莱茨基二分定理表述都用一个称为“帕夫利科夫斯基函数”的函数来代替图灵跳跃，但不难看出，这两个版本的定理是等价的。[4]这种可约性概念也称为强连续魏拉赫可约性 [1] 和连续可约性 （Carroy[2]）。

$$\begin{array}{ccc} \omega^\omega & \xrightarrow{g} & \omega^\omega \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \omega^\omega & \xrightarrow{f} & \omega^\omega \end{array}$$

No请注意，这一定义意味着 φ 实际上是全函数，且 $\mathrm{range}(g \circ \varphi) \subseteq \mathrm{dom}(\psi)$。

定理 1.6 (索莱茨基二分定理，版本 2)。 对于每个博雷尔函数 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$，要么 f 是σ-连续的，要么 $J \leqslant f$。

注意，如果 f 拓扑嵌入到 g 中，那么 f 也可归约到 g：如果 φ 和 ψ 是拓扑嵌入，且 $\psi \circ f = g \circ \varphi$，那么根据定义，$\psi^{-1}$ 是部分连续函数，并且$f = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$。因此，上述索莱茨基二分定理的版本 2 确实是原始索莱茨基二分定理的弱化版本。

继续之前，我们先试着更深入地理解可约性的概念。假设f通过部分连续函数 φ和 ψ可归约到 g——也就是说，$f = \psi \circ g \circ \varphi$。那么，只需在一个点计算 g，再分别通过 φ 和 ψ进行连续的前处理和后处理，就能实现在给定点计算 f。

这种理解可约性的方式引出了另一种稍弱的概念：在后处理步骤中，为什么不允许 ψ 除了使用 $g(\varphi(x))$ 之外，也使用原始输入 x呢？采用这种弱化的可约性概念，就得到了索莱茨基二分定理的最终版本，也是本文后续将使用的版本。

定义 1.7. 函数 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$ 若 弱可约[5] 到函数 $g\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$，记作$f \leqslant_w g$，则存在部分连续函数 $\varphi\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$和 $\psi\colon\ \omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$，使得对所有$x \in \omega^\omega$，$f(x) = \psi(g(\varphi(x)),\ x)$。

定理 1.8 (索莱茨基二分定理，版本 3)。 对于每个博雷尔函数 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$，要么 f 是σ-连续的，要么 $J \leqslant_w f$。

波斯纳-罗宾逊定理。 非正式地说，波斯纳-罗宾逊定理指出，每个实数 x要么是可计算的，要么相对于某个实数 y“看起来像” $0'$。其正式表述如下。

定理 1.9 (波斯纳-罗宾逊定理)。 对于每个实数 x，x 要么是可计算的，要么存在某个实数 y，使得 $x \oplus y \geqslant_T y'$。

该定理最初由 Posner 和 Robinson 于 [13] 证明，随后由 Jockusch 和 Shore [4] 以及 Shore 和 Slaman [14]加以推广。照例，该定理也有一个相对化版本。

定理 1.10 (波斯纳-罗宾逊定理的相对化版本)。 对于每个实数 z 和每个实数 x，要么 $x \leqslant_T z$，要么存在某个实数 y，使得 $x \oplus y \oplus z \geqslant_T (y \oplus z)'$。

我们可以弱化波斯纳-罗宾逊定理的这个相对化版本：不要求结论对每个 z都成立，而只要求它对图灵度的某个锥中的所有 z 成立。

定义 1.11。 图灵度锥 是形如 $\{x \in \omega^\omega \mid x \geqslant_T y\}$ 的集合，其中某个固定的实数y称为该锥的基 。

定理 1.12 （Posner-Robinson定理，锥版本）。 存在一个图灵度锥 C，使得对于每个 $z \in C$ 和每个实数 x，要么 $x \leqslant_T z$，要么存在某个实数 y 使得 $x \oplus y \oplus z \geqslant_T (y \oplus z)'$。

决定性原理。 正如我们之前提到的，决定性原理是我们证明中的主要技术工具。在本节中，我们将陈述所需的关于决定性的主要定理，以及这些定理的一个有用推论。

回顾一下，决定性原理涉及以下形式的博弈：两名玩家，分别称为玩家 1 和玩家2，轮流出自然数。每位玩家都能看到另一位玩家之前的所有着法。最后，他们共同组成一个序列 $x \in \omega^\omega$。为了确定获胜者，我们有

[5]也称为 连续 *Weihrauch* 可约。

某个固定集合 $A \subseteq \omega^\omega$，称为 收益集。如果 $x \in A$，玩家 1 获胜；否则玩家2获胜。
收益集为 pa 的博弈 yoff 集合 A 有时记作 $G(A)$。

原则上，对于固定的收益集 A，可能两个玩家都没有获胜策略。当两个玩家中的一方拥有获胜策略时，博弈 $G(A)$ 称为具有确定性。决定性原理断言，当 A 具有足够强的可定义性时， $G(A)$ 必定具有确定性。例如，Martin 证明了，只要 A 是博雷尔集， $G(A)$ 就具有确定性[9]。

定理 1.13 (博雷尔确定性)。 对于每个博雷尔集 $A \subseteq \omega^\omega$， $G(A)$ 都具有确定性 $d.$

对于非博雷尔集，决定性原理通常无法在 ZFC 中证明。不过，它们通常可以由大基数原理证明。例如，Martin 证明了，如果存在一个可测基数，那么所有具有 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 收益集的博弈都具有确定性 [10]。

定理 1.14 (解析确定性)。 假设存在一个可测基数。那么对于每个$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集 $A \subseteq \omega^\omega$, $G(A)$ 都具有确定性。

另有一个公理，称为确定性公理，简称 AD。它断言，对于所有 集合 $A \subseteq \omega^\omega$, $G(A)$ 都具有确定性。该公理与选择公理不相容，但与 ZF [5]相容。

定理 1.15。 假设ZF + “存在无穷多个伍丁基数”是一致的，那么ZF + 决定性公理也一致。

Martin 还证明了一个决定性推论，它在可计算性理论中常常很有用，我们将在下文中用到。要陈述它，我们还需要给出几个定义。

定义 1.16。 集合 $A \subseteq \omega^\omega$ 在图灵度中共终（有时也简称共终），当且仅当对每个$x \in \omega^\omega$，都存在某个 $y \in A$ 使得 $y \geqslant_T x$。

注意，如果集合 $A \subseteq \omega^\omega$ 不包含图灵度锥，那么它的补集必定是共终的（反之亦然）。

定义 1.17。 带指针的完美树是一个定义在 ω 上的树 T，满足
(1) T 没有死端——也就是说，每个节点至少有一个子节点。(2) $[T]$ 没有孤立路径——也就是说，每个节点都有不可比较的后代。(3) 每条路径 $x \in [T]$ 都能计算出 T。

不难证明，如果 T 是一棵带指针的完美树，那么 $[T]$ 在图灵度中共终。Martin 证明，确定性蕴含这一命题的部分逆命题：如果 A 是共终的，那么存在一棵带指针的完美树 T，使得 $[T] \subseteq A$ [8, 15]。此外，证明这一点所需的确定性强度与 A 的复杂度相匹配。

定理 1.18。 假设 $A \subseteq \omega^\omega$ 在图灵度中共终。那么：
- 若 A 是博雷尔集，则 A 包含某个带指针的完美树 T的 $[T]$。
- 若 $\mathbf{\Pi}^1_1$-确定性成立，且 A 是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，则 A 包含某个带指针的完美树 T的 $[T]$。
- 若 决定性公理 成立，且 A 是任意集合，则 A 包含某个带指针的完美树 T的 $[T]$。

有一个简单的观察可以得出此定理的一个有用强化。具体而言，假设$\{A_n\}_{n\in\omega}$ 是 ω^ω 的一个可数子集序列，且其并集在图灵度中共终。那么必定存在某个 n，使得 A_n 在图灵度中共终。因此我们得到以下定理。

定理 1.19。 假设 $\langle A_n \rangle_{n\in\omega}$ 是一个可数序列，且 $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ 在图灵度中共终。那么：

- 如果每个 A_n 都是博雷尔集，那么存在某个 n 和带指针的完美树 T，使得 A_n 包含 $[T]$。
- 如果 $\mathbf{\Pi}^1_1$- 确定性成立，并且每个 A_n 都是 $\mathbf{\Pi}^1_1$，那么存在某个 n 和带指针的完美树 T，使得 A_n 包含 $[T]$。
- 如果决定性公理 成立，那么存在某个 n 和带指针的完美树 T，使得 A_n 包含 $[T]$。

2. 波斯纳-罗宾逊 $\Longrightarrow$ Solecki

在本节中，我们将假设波斯纳-罗宾逊定理的一个版本（具体而言，即定理 1.12），并利用它证明索莱茨基二分定理的一个版本（具体而言，即定理 1.8）。下面简要概述证明过程。首先，对于任意函数 f, $g\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$，我们将引入一个博弈 $G(f,g)$，并证明玩家2在该博弈中拥有获胜策略，当且仅当 $f \leqslant_w g$。然后，我们将证明，在博弈 $G(J,f)$这一特殊情形下，玩家 1 拥有获胜策略，当且仅当 f是 σ-连续的。正是在这一步中，我们将使用波斯纳-罗宾逊定理。最后，根据 $G(f,g)$ 的定义可以清楚看出，只要 f和 g 都是博雷尔函数，那么 $G(f,g)$的收益集也同样是博雷尔集。因此，根据博雷尔确定性，如果 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是博雷尔集，那么玩家 1 要么赢得 $G(J,f)$，要么玩家2获胜。在第一种情况下，f 是 σ-连续的；在第二种情况下，$J \leqslant_w f$，于是我们得到了定理 1.8 陈述中的二分定理。

博弈 $G(f,\ g)$ 按如下方式进行：玩家2首先为一个三元图灵泛函 $e \in \omega$ 写下一段代码[6]。在博弈的其余过程中，玩家 1 写出一个实数 x，玩家2写出两个实数，y 和 z。每一回合，玩家 1 都会多写出实数 x 的一位数字，而玩家 2 会多写出实数 z 的一位数字，并且会多写出实数 y 的零位或一位数字。如果玩家2最终写出了 y 的所有数字（换句话说，玩家2可以在写出 y 的一位数字与下一位数字之间任意延迟，但若一直延迟下去，就会输掉博弈），并且 $f(x) = \Phi_e(g(y),\ x,\ z)$，则玩家2获胜。否则，玩家 1 获胜。这个博弈可以图示如下。

player 1	x_0		x_1		$\dots$	x_n		$\dots$
player 2	e	y_0, z_0		z_1	$\dots$		y_1, z_n	$\dots$

$x = x_0x_1x_2\dots$

$y = y_0y_1y_2\dots, \quad z = z_0z_1z_2\dots$

我们可以这样理解这个博弈。首先回想一下，$f \leqslant_w g$ 意味着存在部分连续函数 φ和 ψ，使得对于所有 x，$f(x) = \psi(g(\varphi(x)),\ x)$。此外，回想一下，连续函数就是相对于某个预言机可计算的函数。因此，存在某个图灵泛函的代码 $e \in \omega$，以及某个 $z \in \omega^\omega$，$\psi(x,\ y) = \Phi_e(x,\ y,\ z)$。

在博弈 $G(f,\ g)$中，玩家2试图说服玩家 1，使其相信 $f \leqslant_w g$。玩家2下出的自然数 e和实数 z 应被视为指定了连续函数 ψ。玩家 1 的行动包括为 f 提供一个挑战输入 x，而玩家2下出的实数 y 对应于$\varphi(x)$。玩家2的获胜条件——下出 y 的无限多个数字，并且$f(x) = \Phi_e(g(y),\ x,\ z)$——对应于玩家2隐式指定的归约过程在输入 x上成功运行。

引理 2.1. 当且仅当 $f \leqslant_w g$ 时，玩家2在 $G(f,g)$ 中获胜。

证明。 ($\Longrightarrow$) 假设玩家2通过策略 τ 在 $G(f,g)$ 中获胜。那么，以下两个过程分别描述了部分连续函数 $\omega^\omega \to \omega^\omega$ 和 $\omega^\omega \times \omega^\omega \to \omega^\omega$。

(1) 给定 x 作为输入：进行博弈 $G(f,g)$，将 x 的数字作为玩家 1 的行动，并使用τ 生成玩家2的行动。输出玩家2所下的两个实数中的第一个（即上文对该博弈的描述中称为 y 的实数）。

(2) 给定 w 和 x 作为输入：进行博弈 $G(f,g)$，将 x 的数字作为玩家 1 的行动，并使用 τ 生成玩家2的行动。令 e 为 τ 在博弈第一步所下的数，令 z 为玩家2所下两个实数中的第二个。输出 $\Phi_e(w,x,z)$。

分别令 φ 和 ψ表示这两个连续函数。接着，τ 是博弈 $G(f,g)$ 中玩家2的获胜策略，这一事实保证了对于所有 x, $f(x) = \psi(g(\varphi(x)),x)$。

($\Longleftarrow$) 假设 $f \leqslant_w g$ 可通过部分连续函数 φ 和 ψ。设 $e \in \omega$ 和 $z \in \omega^\omega$ 满足：ψ 由以 z为预言机的 e^{th} 图灵泛函计算得出。那么，在博弈 $G(f,\ g)$中，以下是玩家2的获胜策略。第一回合，出数字 e。之后每回合，再出 z的一个数字。此外，在这些回合中，如果玩家 1 已经出足够多的 x数字，足以确定 $\varphi(x)$的下一个数字，就也出这个数字。□

[6]这里我们使用术语图灵泛函 来表示定义在实数上的部分可计算函数。

现在我们来讨论玩家 1 获胜且博弈形式为 $G(J,\ f)$（其中 f）的情况。我们将证明，在这种情况下，f 必定是 σ-连续的。为此，我们首先需要关于 σ-连续性的以下观察。

观察 2.2. 函数 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是 σ-连续的，当且仅当存在某个实数 z，使得对所有 x，$f(x) \leqslant_T x \oplus z$，

证明。 如果 f 是 σ-连续的，那么它可以写成可数个部分连续函数的并。定义在 ω^ω 上的每个部分连续函数都是相对于某个预言机的部分可计算函数，因此我们可以找到图灵泛函 $\{e_n\}_{n\in\omega}$ 和预言机 $\{z_n\}_{n\in\omega}$ 的一个可数代码序列，使得对每个 x, $f(x) = \Phi_{e_n}(x,\ z_n)$ 对于某个 n成立。因此，若取 $z = \bigoplus_{n\in\omega} z_n$，那么对每个 x, $f(x) \leqslant_T x \oplus z$。

反过来，假设存在某个 z，使得对所有 x, $f(x) \leqslant_T x \oplus z$成立。对于每个 n，定义 $A_n = \{x \mid f(x) = \Phi_n(x,\ z)\}$。那么 $\{A_n\}_{n\in\omega}$是一个可数集合序列，其并覆盖ω^ω。此外，对每个 n，$f\restriction_{A_n}$ 都可以通过 Φ_n 相对于 z 计算，因此是连续的。所以 f 是σ-连续的。□

引理2.3。 当且仅当 f 是 σ-连续的，玩家 *1* 才能赢得 $G(J, f)$。

证明。 ($\Longrightarrow$) 假设玩家 1 通过策略 $G(J, f)$ 获胜。取 σ为一个锥的基，使得定理 1.12 的结论适用（即波斯纳-罗宾逊定理相对于每个计算出 w 的实数都成立）。

我们声称，对每个 y, $f(y) \leqslant_T y \oplus \sigma \oplus w$，因此 f是 σ-连续的，这由观察 2.2 得出。为证明这一点，我们将证明，若非如此，则 σ 实际上并不是玩家 1 的获胜策略。因此，假设存在某个 y使得 $f(y) \not\leqslant_T y \oplus \sigma \oplus w$。由于波斯纳-罗宾逊定理相对于 $y \oplus \sigma \oplus w$ 成立，我们可以找到某个实数 v使得 $f(y) \oplus v \oplus y \oplus \sigma \oplus w \geqslant_T (v \oplus y \oplus \sigma \oplus w)'$。

现在我们将说明，如何以玩家2的身份对抗策略 σ，并在 $G(J,\ f)$ 中获胜。我们的玩法如下：首先，我们选择一个数 $e \in \omega$，稍后会说明如何选择。然后，我们完全不理会玩家 1 的着法，直接出实数 y 和 $z = v \oplus y \oplus \sigma \oplus w$。注意，根据 z，我们可以计算出玩家 1 的着法，因为 z 既计算玩家 1 的策略 σ，也计算玩家2的所有着法。换句话说，如果 x 是玩家 1 出的实数，那么 $x \leqslant_T z$。因此，根据我们对 z 的选择，我们有

$$x' \leqslant_T z' \leqslant_T f(y) \oplus z.$$

这几乎就是我们想要的结果，但有一个问题：要让玩家2获胜，我们需要的不只是$f(y) \oplus z$ 计算出 x'，还需要它通过玩家2指定的图灵泛函来完成计算。唯一的问题在于，从 $f(y)$ 和 z 计算出 x' 的图灵泛函取决于玩家2所出的代码 e。不过，我们可以利用递归定理来解决这个问题。

更确切地说，请注意，虽然从 $f(y)\oplus z$计算 x'取决于 e的值（因为 x 的值本身取决于 e），但这种依赖对于 e[7]是一致的。换句话说，存在某个$a \in \omega$，使得对于所有 e,

$$\Phi_a(f(y), z, e) = (\sigma * (e, y, z))'$$

其中，$(\sigma * (e,\ y,\ z))$ 表示策略 σ针对玩家2出 e，并结合实数 y 和 z所出的实数。因此，根据递归定理，我们可以找到某个 e，使得

$$\Phi_e(f(y), z) = \Phi_a(f(y), z, e) = (\sigma * (e, y, z))'.$$

因此，通过出 出这个 e 作为玩家2的第一步（然后出 y 和 z） ，我们可以击败

σ.($\Longleftarrow$) 假设 f 是 σ-连续的。因此，根据我们的观察，存在某个 w，使得对于所有x，$f(x) \leqslant_T x \oplus w$。考虑玩家 1 在博弈 $G(J,\ f)$中的以下策略：交替进行 w 的数字，并复制玩家2所采取的行动。我们可以如下描绘这一策略。

player 1	w_0		$\langle y_0, z_0\rangle$		w_1		$\langle z_1\rangle$	$\ldots$
player 2	e	y_0, z_0		z_1		y_1, z_2		$\ldots$

[7]这是因为从 $f(y) \oplus z$ 计算 z' 不依赖于 e，而从 z计算 x 也不依赖于 e，因此从 z' 计算 x' 对于 e是一致的。

我们声称这是玩家 1 的获胜策略。为了解原因，假设玩家 1 遵循此策略，而玩家2出 $e \in \omega$和 y， $z \in \omega^\omega$。那么玩家 1 所出的实数 x将计算出 $w \oplus y \oplus z$。只有当 $\Phi_e(f(y),\ x,\ z) = J(x)$时，玩家2才能获胜，但这是不可能的，因为我们有

$$f(y) \leqslant_T y \oplus w \leqslant_T x$$

因此 $\Phi_e(f(y),\ x,\ z) \leqslant_T x$，但 $J(x) \not\leqslant_T x$。 □

We 现在我们可以利用波斯纳-罗宾逊定理完成索莱茨基二分定理的证明 .

由定理 *1.8* 和定理 *1.12* 得出证明。设 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是一个博雷尔函数，并考虑博弈$G(J,\ f)$。根据博雷尔确定性，对于这个博弈，玩家 1 或玩家2有获胜策略。若是前者， f 是 σ-连续的（引理 2.3）。若是后者，$J \leqslant_w f$ 根据引理 2.1。 □

本节的结果引出了一个显而易见的问题。也就是说，能否利用波斯纳-罗宾逊定理证明完整的索莱茨基二分定理（即定理 1.4 或定理 1.6）？ 我们来谈谈一种可能的证明途径。本节中，我们描述了一个博弈 $G(f,\ g)$，可用来刻画 f 到 g 的弱可约性；这个博弈也是我们证明定理 1.8的关键。似乎可以通过寻找一个刻画 f 到 g可约性（而非弱可约性）的博弈，来证明定理1.6。寻找这样的博弈或许本身也有独立的研究价值。

问题 2.4。能否结合波斯纳-罗宾逊定理与博雷尔确定性来证明定理 *1.4* 或定理 *1.6*?

问题 2.5。是否存在一种刻画可约性的博弈，正如上述博弈 $G(f, g)$ 刻画弱可约性那样?

3. Solecki $\Longrightarrow$ Posner-Robinson

本节中，我们将假设索莱茨基二分定理的一个版本（具体而言，定理1.8），并利用它证明波斯纳-罗宾逊定理的一个版本（具体而言，定理1.12）。我们将通过证明其逆否命题来实现这一点：我们将证明，若定理1.12 不成立，那么定理1.8也不成立。此外，正如引言中所提到的，我们的证明是在假设 $\mathbf{\Pi}^1_1$-确定性的前提下进行的；这一命题无法在ZFC中证明，但可以从ZFC 加上可测基数存在这一假设推出。

证明的核心思想非常简单——本质上只是注意到，如果 f 是一个函数，它将每个实数 x 映射到一个见证，表明相对于 x 波斯纳-罗宾逊定理不成立，那么 f 就不满足索莱茨基二分定理的结论。不过，由于必须确保 f 是博雷尔函数（否则我们无法援引定理 1.8），这个简单的想法便复杂了起来。证明的大部分细节都将用于克服这一障碍。

现在我们来详细说明证明过程。假设定理1.12 不成立。换言之，集合

$$A = \{x \in \omega^\omega \mid \text{the Posner-Robinson theorem holds relative to } x\}$$

不包含任何图灵度锥。因此，它的补集——集合

$$B = \{x \in \omega^\omega \mid \text{the Posner-Robinson theorem fails relative to } x\},$$

在图灵度中是共终的。

现在假设我们可以找到一个函数 $f\colon B \to \omega^\omega$，使得对于每个属于 B 的 x， $f(x)$ 都是一个见证，表明相对于 x 的波斯纳-罗宾逊定理不成立——也就是说， $f(x) \not\leqslant_T x$ ，并且不存在满足 $f(x) \oplus y \oplus x \geqslant_T (y \oplus x)'$ 的 y 。通过对所有 $x \notin B$ 令 $f(x) = 0$，将 f 扩展为定义在 ω^ω 上的全函数。注意，这个修改后的 f 具有以下两个性质。

(1) 对于共终多个 x, $f(x) \not\leqslant_T x$。**(2)** 对于所有 x，不存在满足 $f(x) \oplus y \oplus x \geqslant_T (y \oplus x)'$ 的 y。

当 $x \in B$ 时，这是由假设得出的；当 $x \notin B$ 时，这是因为 $f(x)$ 是可计算的。

接下来的两个 这些引理表明，这些性质意味着 f 是 Soleck
i 二分定理的一个反例。

引理 3.1. 假设 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是一个函数，对于一组在图灵度中共终的 x， $f(x) \not\leqslant_T x$。那么 f 不是 σ-连续的。

证明。 反设 f 是 σ-连续的。根据观察2.2，必定存在某个 z 使得对于每个 x， $f(x) \leqslant_T x \oplus z$。根据假设，我们可以找到某个 $x \geqslant_T z$ 使得 $f(x) \not\leqslant_T x$。但由于 $x \equiv_T x \oplus z$，这意味着 $f(x) \not\leqslant_T x \oplus z$，这与我们对 z的选择矛盾。 □

引理 3.2. 假设 $f\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ 是一个函数，并且对于所有 x，不存在满足$f(x) \oplus y \oplus x \geqslant_T (y \oplus x)'$的 y 。那么 $J \not\leqslant_w f$。

证明。 为导出矛盾，假设 $J \leqslant_w f$。因此存在部分连续函数 φ 和 ψ，使得对所有 x， $J(x) = \psi(f(\varphi(x)),\ x)$。令 z为一个预言机，相对于它， ψ和 φ是可计算的。令 $x = \varphi(z)$。根据假设，不存在满足 $f(x) \oplus y \oplus x \geqslant_T (y \oplus x)'$的 y。我们声称，取 $y = z$即可导出矛盾。

要理解其中缘由，请注意，由于 φ 和 ψ 相对于 z是可计算的，我们有

$$x = \varphi(z) \leqslant_T z \qquad \text{and} \qquad \psi(f(x), z) \leqslant_T f(x) \oplus z$$

根据我们对 φ 和 ψ 的选择，我们有

$$z' = \psi(f(\varphi(z)), z) = \psi(f(x), z).$$

因此我们得到

$$(z \oplus x)' \equiv_T z' = \psi(f(x), z) \leqslant_T f(x) \oplus z \leqslant_T f(x) \oplus z \oplus x.$$

这就导出了矛盾。 □

现在剩下的问题是，如何找到某个 $f\colon\ B \to \omega^\omega$，使其具有上述性质。当然，利用选择公理很容易找到这样的一个 f，但没有理由相信如此选出的函数会是博雷尔的，因此我们无法应用定理1.8。我们可以不使用选择公理，而尝试借助描述集合论中的一致化定理。然而，我们需要进行一致化的关系，即

$$\{(x, y) \mid y \not\leqslant_T x \text{ and } \forall z\, (y \oplus z \oplus x \not\geqslant_T (z \oplus x)')\},$$

是 Π^1_1，因此也过于复杂，任何标准的一致化定理都无法给出博雷尔——甚至解析的——一致化函数。

现在我们来看看如何找到某个 f，使其具有所需性质且为博雷尔函数（事实上，是第一类贝尔函数）。关键步骤是下面这个引理。

引理 3.3。 假设对于共终多个 x，波斯纳-罗宾逊定理相对于 x 不成立。那么对于共终多个 x，存在某个 $y \leqslant_T x'$ 可以见证这一失败——即满足 $y \not\leqslant_T x$，并且不存在满足 $y \oplus z \oplus x \geqslant_T (z \oplus x)'$ 的 z。

证明。 任取 $w \in \omega^\omega$。我们需要证明存在某个 $x \geqslant_T w$，使得波斯纳-罗宾逊定理相对于 x 不成立，且这一失败由某个 $y \leqslant_T x'$ 见证。如有必要，增大 w （并利用我们的假设，即波斯纳-罗宾逊定理在共终多个位置不成立），我们可以假设波斯纳-罗宾逊定理相对于 w 不成立。令 y 为波斯纳-罗宾逊定理相对于 w 不成立的一个见证。

关键的观察是，只需找到某个 $x \geqslant_T w$，使得 x' 计算出 y，但 x 并不能。假设我们能找到这样的 x。我们声称，波斯纳-罗宾逊定理相对于 x不成立，而这一失败由 y见证。否则，我们就能找到某个 z，使得 $y \oplus z \oplus x \geqslant_T (z \oplus x)'$。但由于 $x \geqslant_T w$，这就给出了

$$y \oplus z \oplus x \oplus w \equiv_T y \oplus z \oplus x \geqslant_T (z \oplus x)' \equiv_T (z \oplus x \oplus w)'$$

因此， y 并不是相对于 w而言，波斯纳-罗宾逊定理失效的一个见证。

现在我们将说明如何构造 x_0。事实上，我们将构造一个实数 x_0，使得$(x_0 \oplus w)'$能够计算出 y，但 $x_0 \oplus w$ 不能，然后令 $x = x_0 \oplus w$。该构造与弗里德伯格跳跃反演的证明类似。我们将通过有限初始段来构造 x_0。在构造的第 e 步，我们将确保 $\Phi_e^{x_0 \oplus w}$不能正确计算出 y，然后再对 y编码一位。

假设我们正在进行构造的第 e 步，而目前构造出的 x_0 初始段为 σ_e。需要考虑两种情况。

(1) 存在某个 $n \in \omega$ 和字符串 τ_0，τ_1，使得 $\Phi_e^{\sigma_e \frown \tau_0 \oplus w}(n) \downarrow \neq \Phi_e^{\sigma_e \frown \tau_1 \oplus w}(n) \downarrow$。在这种情况下，这两个值中必有一个与 $y(n)$ 不同。令 $\langle n, \tau_0, \tau_1 \rangle$ 为某个 w-可计算搜索中发现的第一个这样的三元组，并设 $\sigma_{e+1} = \sigma_e \frown \tau_i \frown \langle y(e) \rangle$，其中 τ_i 等于 τ_0，τ_1 中导致 $\Phi_e^{x_0 \oplus w}(n)$ 与 $y(n)$ 不同的那个值。(2) 对每个 $n \in \omega$，在所有字符串 τ 上，至多只有一个 $\Phi_e^{\sigma_e \frown \tau \oplus w}(n)$ 的值可以得到。根据标准论证，如果 x_0 扩展 σ_e，那么 $\Phi_e^{x_0 \oplus w}$ 要么不是全函数，要么计算出一个可由 w 单独计算的实数。无论哪种情况，$\Phi_e^{x_0 \oplus w}$ 都不可能等于 y，因此我们只需令 $\sigma_{e+1} = \sigma_e \frown \langle y(e) \rangle$。

根据构造显然可知，$x_0 \oplus w$ 不能计算 y。要看出 $(x_0 \oplus w)'$ 计算y，只需注意到 $(x_0 \oplus w)'$ 能够弄清上述构造的每一步发生了什么（也就是说，它可以检查每一步属于哪种情况，并且在第一种情况下恢复三元组 $\langle n, \tau_0, \tau_1 \rangle$），因而能够恢复构造过程中编码的 y 的数字。□

We 现在可以证明定理1.12。如上所述，我们的证明使用 $\mathbf{\Pi}^1_1$-确定性 y.

由定理*1.8* 证明定理*1.12*。假设定理1.12 不成立。那么正如我们上面所看到的，
set

$$B = \{x \in \omega^\omega \mid \text{the Posner-Robinson theorem fails relative to } x\}$$

在图灵度中是共终的，因此根据引理3.3，下面的集合也是共终的

$$C = \{x \in \omega^\omega \mid \exists y \leqslant_T x' \, (y \text{ witnesses the failure of the Posner-Robinson theorem relative to } x)\}.$$

现在对每个 $e \in \omega$，定义

$$C_e = \{x \in \omega^\omega \mid \Phi_e(x') \text{ is total and witnesses the failure of the Posner-Robinson theorem relative to } x\}$$

并注意到 $C = \bigcup_{e \in \omega} C_e$。因此根据定理1.19，存在某个带指针的完美树 T 和 $e \in \omega$，使得 $[T] \subseteq C_e$。

定义 $f\colon\ \omega^\omega \to \omega^\omega$ 为

$$f(x) = \begin{cases} \Phi_e(x') & \text{if } x \in [T] \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

现在来对 f 做一些观察。

（1） f 显然是博雷尔的——事实上，它实际上是第一类贝尔函数。（2）对于每个 $x \in [T]$，$f(x)$ 都是一个见证，表明相对于x，波斯纳-罗宾逊定理不成立。（3）特别地，对于任意 $x \in [T]$，$f(x) \nleqslant_T x$。由于 $[T]$ 是图灵度中的一个共终集，f满足引理 3.1的假设。（4）对于任意 $x \in \omega^\omega$，不存在 y使得 $f(x) \oplus y \oplus x \geqslant_T (y \oplus x)'$。若 $x \in [T]$，这是因为$f(x)$ 是一个见证，表明相对于 x，波斯纳-罗宾逊定理不成立。若 $x \notin [T]$，这是因为 $f(x)$ 是可计算的。因此 f 满足引理 3.2的假设。

因此，根据引理 3.1 和 3.2，f 是定理 1.8的反例。 □

4. 推广

最近，Marks 和 Montalbán 将索莱茨基二分定理（具体而言，定理 1.6）推广到了博雷尔层级的更高层次 [7]。为了陈述他们的结果，我们必须再引入一些定义。首先，我们必须推广 σ连续性。回忆一下，对于任意可数序数 α，函数f是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$可测的，当且仅当对于每个开集 U， $f^{-1}(U)$都属于 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$。

定义 4.1. 对于任意可数序数 α，

- Dec_α 表示函数 f的集合： $\omega^\omega \to \omega^\omega$ 其中存在 ω^ω的一个分割 $\{A_n\}_{n\in\omega}$，将其分成可数多个部分，使得对于每个 n， $f\restriction_{A_n}$ 相对于 A_n上的子空间拓扑是 $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-可测的。
- $\mathrm{Dec}_{<\alpha}$ 表示函数 f 的集合： $\omega^\omega \to \omega^\omega$ 其中存在 ω^ω的一个分割 $\{A_n\}_{n\in\omega}$，将其分成可数多个部分，使得对于每个 n， $f\restriction_{A_n}$ 对于某个 $\beta < \alpha$是 $\mathbf{\Sigma}^0_\beta$-可测的（注意， β 可能取决于 n）。

注意， $\mathbf{\Sigma}^0_1$-可测与连续是同一概念，因此函数 f 是 σ-连续，当且仅当它属于 Dec_1 =$\mathrm{Dec}_{<2}$。

提醒读者注意，该领域的记号尚未标准化，我们使用的记号与此前使用的记号并不完全一致。尤其是，Dec_α 有时记作 $\mathrm{Dec}(\mathbf{\Sigma}^0_\alpha)$（例如见 [3]）。我们选择记号 Dec_α，是为了与我们为 $\mathrm{Dec}_{<\alpha}$选用的记号保持一致；后者似乎目前尚无任何标准记号，但要准确表述 Marks 和 Montalbán 对索莱茨基二分定理在博雷尔层级极限层级上的推广，却离不开它。

对于每个可数序数 $\alpha \geqslant 1$，我们用 J_α： $\omega^\omega \to \omega^\omega$ 表示 α^{th} 图灵跳跃——即$J_\alpha(x) = x^{(\alpha)}$。需要注意的是，严格来说， J_α 取决于 α的表示方式。不过，通过为 α 选择不同表示方式得到的 J_α 版本彼此都可归约（按照定义1.5的意义），因此这一细微之处对我们并不重要。

我们可以 现在陈述 Marks 和 Montalbán 提出的定理1.6 的相应推广 .

定理 4.2（广义 Solecki 二分法）。对于每个可数序数 $\alpha \geqslant 1$ 以及每个博雷尔函数 f： $\omega^\omega \to \omega^\omega$，要么 f 属于$\mathrm{Dec}_{<(1+\alpha)}$，要么 $J_\alpha \leqslant f$。

Slaman 和 Shore [14] 还将 Posner-Robinson 定理推广到了超算术层级的更高层。

定理 4.3 (广义波斯纳-罗宾逊定理)。对于所有可计算序数 α 和所有实数x，要么存在某个 $\beta < \alpha$ 使得 $x \leqslant_T 0^{(\beta)}$，要么存在某个实数 y 使得 $x \oplus y \geqslant_T y^{(\alpha)}$。

照例，也有一个相对化版本。

定理 4.4. 对于所有实数 z、所有相对于 z 可计算的序数 α 以及所有实数 x，要么存在某个 $\beta < \alpha$ 使得 $x \leqslant_T z^{(\beta)}$，要么存在某个实数 y 使得 $x \oplus y \oplus z \geqslant_T (y \oplus z)^{(\alpha)}$。

本文的主要结果也适用于索莱茨基二分定理和波斯纳-罗宾逊定理的这些推广。特别是，我们可以引入定理 4.2和 4.4的弱化版本：

定理 4.5. 对于每个可数序数 $\alpha \geqslant 1$ 和每个博雷尔函数 f： $\omega^\omega \to \omega^\omega$，要么 f 属于 $\mathrm{Dec}_{<(1+\alpha)}$，要么 $J_\alpha \leqslant_w f$。

定理 4.6. 对于每个可数序数 α，都存在一个图灵度锥 C，使得对所有 $z \in C$ 和所有实数 x， α 都相对于 z 可计算，并且要么对于某个 $\beta < \alpha$ 有 $x \leqslant_T z^{(\beta)}$，要么存在某个实数 y，使得 $x \oplus y \oplus z \geqslant_T (y \oplus z)^{(\alpha)}$。

第 2 节和第 3 节中的证明几乎无需修改，就能说明上述两个定理等价。

致谢

感谢 Andrew Marks 和 Ted Slaman 的有益交流与建议。

参考文献

[1] Vasco Brattka 和 Guido Gherardi。Weihrauch度、全知原理与弱可计算性。《符号逻辑杂志》，76(1):143–176，2011。[2] Raphaël Carroy。连续函数上的一种拟序。《符号逻辑杂志》，78(2):633–648，2013。[3] Vassilios Gregoriades、Takayuki Kihara 和 Keng Meng Ng。波兰空间中的图灵度与博雷尔函数的可分解性。《数理逻辑杂志》，21(1):论文编号2050021，共41页，2021。[4] Carl G. Jockusch, Jr. 和 Richard A. Shore。REA算子、递归可枚举度与极小覆盖。载于《递归论》（伊萨卡，纽约州，1982），《纯数学专题讨论会论文集》第42卷，第3–11页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1985。[5] Peter Koellner 和 W Hugh Woodin。由确定性得到的大基数。载于《集合论手册》，第1951–2119页。Springer，2010。[6] Patrick Lutz。关于Martin猜想的结果 [论文摘要]。《符号逻辑通报》，27(2):219–220，2021。[7] Andrew Marks 和 Antonio Montalbán。 σ-贝尔第一类 α 函数的二分定理。加州理工学院逻辑学讨论会报告，2021。[8] Donald A. Martin。确定性公理与解析层级中的约化原理。《美国数学会通报》，74(4):687–689，1968年7月。[9] Donald A. Martin。博雷尔确定性的纯归纳证明。载于《递归论》（伊萨卡，纽约州，1982），《纯数学专题讨论会论文集》第42卷，第303–308页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1985。[10] Donald A Martin。可测基数与解析博弈。载于《20世纪数理逻辑》，第264–268页。World Scientific，2003。[11] Luca Motto Ros。有限层级与 ω-可分解博雷尔函数的结构。《符号逻辑杂志》，78(4):1257–1287，2013。[12] Janusz Pawlikowski 和 Marcin Sabok。博雷尔函数的分解与贝尔层级有限层级中的结构。《纯粹与应用逻辑年刊》，163(12):1748–1764，2012。[13] David B. Posner 和 Robert W. Robinson。与 $\mathbf{0}'$联结的度。《符号逻辑杂志》，46(4):714–722，1981。[14] Richard A. Shore 和 Theodore A. Slaman。图灵跳跃的定义。《数学研究快报》，6(5-6):711–722，1999。[15] Theodore A. Slaman 和 John R. Steel。度上的可定义函数。载于 Alexander S. Kechris、Donald A. Martin 和 John R. Steel 编，《Cabal研讨会81–85》，第37–55页，柏林、海德堡，1988。Springer Berlin Heidelberg。[16] Sławomir Solecki。博雷尔集与函数的分解，以及贝尔第一类函数的结构。《美国数学会杂志》，11(3):521–550，1998。[17] Jindřich Zapletal。描述集合论与可定义迫。《美国数学会回忆录》，167(793):viii+141，2004。

加利福尼亚大学洛杉矶分校电子邮箱地址：
pglutz@ucla.edu