arXiv:2301.07338v1 [math.GT] 18 Jan 2023

链式性与紧致性的推广及超拓扑

AJIT KUMAR GUPTA[a]* 和 SAIKAT MUKHERJEE[b]

Abstract. 我们研究度量空间子集的两种性质。其中一种是度量空间中链式性、有限链式性和 Menger 凸性的推广；另一种则是紧致性的推广。我们探讨与这两种性质相关的基本结果。此外，从这些性质的角度出发，我们考察 Hausdorff、Vietoris 和局部有限超拓扑之间的关系。

1. 引言 Introduction

给定度量空间 X，我们用 $C(X)$表示 X 的非空闭子集集合。假设空间 X 是全有界、紧、完备、Atsuji、可分、连通、局部连通或连续统，许多研究者都研究了 $C(X)$ 上的超拓扑及其相互关系（参见 [1, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 17,18, 19]）。对超拓扑的研究，很大程度上源于那些更关注优化、非线性分析、适定问题等，而非一般点集拓扑的人。在分析中研究逼近和/或扰动方法时，人们很快就需要研究闭集集合上的拓扑。这不仅是分析中的问题；超拓扑在概率论、统计学、数理经济学、博弈论等领域也有重要应用。参见 [5, 6, 7, 16]，可了解一些应用。

在 [1], Gerald Beer 研究了豪斯多夫度量拓扑及其与 Vietoris 拓扑的关系，并假设基空间 X 是 Atsuji。他发现，度量空间是 Atsuji，当且仅当豪斯多夫度量拓扑至少与 Vietoris 拓扑一样强。他还发现，豪斯多夫超空间是 Atsuji，当且仅当空间 X 要么是紧的，要么是一致离散的。由于 Atsuji 性弱于紧致性和一致离散性；在假设 X 为 Atsuji 的条件下，Gupta 和 Mekherjee 延续 Beer 的工作，研究了豪斯多夫超空间（见 [11]）。他们证明，如果 X 是 Atsuji，那么豪斯多夫超空间中存在某一类 Atsuji 子空间。此外，在 [3], 中，Beer 假设基空间是 Atsuji，研究了豪斯多夫度量拓扑与局部有限拓扑。他证明， X 是 Atsuji，当且仅当局部有限

2020 *Mathematics Subject Classification.* 54B20 .*Key words and phrases.* 链式性、超拓扑、Atsuji 空间、同胚。*通讯作者。

拓扑与豪斯多夫度量拓扑重合。他还证明，对于给定的度量空间 X，局部有限拓扑可度量化，当且仅当 X 承认一个 Atsuji 度量。Jain 和 Kundu 研究了在 X 的完备化为 Atsuji 时，近端拓扑、Vietoris 拓扑、豪斯多夫度量拓扑与局部有限拓扑之间的各种关联（见 [14]）。

Michael 在其奠基性论文中（见 [19]）证明，度量空间全有界，当且仅当 Vietoris 拓扑强于豪斯多夫度量拓扑。Beer等人（见 [4]）则证明了以下条件等价：（1） X 全有界；（2）近端拓扑可度量化；（3）近端拓扑与豪斯多夫度量拓扑一致；（4）Wijsman 拓扑与近端拓扑一致。

Garc´ıa-Ferreira 等人研究了空间 X中所有非平凡收敛序列 $S_c(X) \subset C(X)$ 构成的 Vietoris超空间。他们证明（见[10]），空间 $S_c(X)$ 连通，当且仅当 X 连通。他们还证明， $S_c(X)$ 的局部连通性等价于 X的局部连通性；并且 $S_c(X)$ 的道路连通性蕴含 X的道路连通性。

Mac´ıas 的工作完全致力于连续统空间及其各种超空间。他从多个方面对超空间进行了几何研究。我们建议读者阅读这些优秀的文章。

度量空间的链式性弱于连通性，而有限链式性弱于全有界性。赋范空间中的 Menger 凸性弱于凸性。本文考察度量空间子集的两种性质。其中一种称为性质 Q，对于度量空间而言，它弱于链式性、有限链式性和 Menger 凸性。另一种称为性质 I，它弱于紧致性。我们在第 3 节定义这两个概念，并推导相关的基本结果。第 4 节研究底空间具有性质 Q时的豪斯多夫超空间。我们还研究关于概念 Q 和 I的上/下Vietoris拓扑与上/下豪斯多夫度量拓扑之间的关系。第 5 节则研究上/下局部有限拓扑与上/下豪斯多夫度量拓扑之间的关系。

2. Preliminaries

给定度量空间 (X, d) 中的点 x 和子集 A，数值 $\inf\{d(x, y) : y \in A\}$ 记作 $d(x, A)$；对于子集 $B \subset X$，数值 $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ 记作 $d(A, B)$。我们用 $B_d(a, \epsilon)$ 表示以 a 为中心的开 ϵ-球，用 $B_d(A, \epsilon)$ 表示开球$B_d(a, \epsilon)$ 的并集，其中这些开球的中心 a 遍历集合 A；在度量空间上处理单个度量时，我们省略下标 d。 A 的闭包和 A 的所有极限点组成的集合分别记作 $\overline{A}$ 和 A'。我们用 $\tau_1 \vee \tau_2$ 表示集合 X 上两个拓扑 τ_1 和 τ_2 的上确界。

集合 A 在 X 中的补集记作 A^c 或 $X\backslash A$； X 的非空子集组成的集合记作 $P(X)$。

若度量空间 (X,d) 中的每个连续函数 $f: X \to \mathbb{R}$ 都是一致连续的，则称其为 Atsuji 空间。对于度量空间而言，Atsuji 性强于完备性。度量空间 (X,d) 中的非空子集 A 若其子空间 (A,d) 是 Atsuji 空间，则称该子集为 Atsuji 集。[14], Jain 和 Kundu 指出：度量空间 X 的完备化是 Atsuji 空间，当且仅当每个满足 $I(x_n) \to 0$ 的序列 $\{x_n\} \subset X$ 都有一个柯西子序列，其中 $I(x) = d(x, X\backslash\{x\})$。

定义 $C(X)$ 上的豪斯多夫度量 H 为： $H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{x\in B} d(x,A)\}$, $A, B \in C(X)$。由 H 诱导的拓扑记作 τ_H。给定子集 $\mathcal{B} \subset C(X)$, 记 $H(A,\mathcal{B})$ 为数 $\inf\{H(A,B): B \in \mathcal{B}\}$。 $C(X)$ 中的开球 $B_H(A,\epsilon)$ 是集合 $\{B \in C(X): H(A,B) < \epsilon\}$。

3. Notions More General than Chainability and Compactness

本节将定义一些比链式性、有限链式性、紧致性等更弱的性质，并研究与之相关的基本结果。

度量空间 (X,d) 中两点 x, y 之间长度为 n 的 ϵ-链，是指满足 $d(a_{i-1}, a_i) \leqslant \epsilon$（对所有 $i = 1, 2, ..., n$）的有限序列 $a_0 = x, a_1, a_2, ..., a_n = y$，其中各项均属于 X。如果度量空间 X 中任意一对点 x, y 对每个 $\epsilon > 0$ 都能用一条 ϵ-链连接起来，则称该空间具有链式性。如果对每个 $\epsilon > 0$，都存在有限个点 $p_1, p_2, ..., p_j \in X$ 以及 $m \in \mathbb{N}$，使得 X 中的每个点都能与某个 p_i, $1 \leqslant i \leqslant j$ 用一条长度为 m 的 ϵ-链连接起来，则称度量空间 X 具有有限链式性。链式性是连通性、Menger 凸性等概念的推广；有限链式性则是全有界性的推广。

在 [12], Gupta 和 Mukherjee 提出了一种度量空间的性质，它也是连通性、Menger 凸性等概念的一种推广。

定义 3.1. 若度量空间 (X,d) 对所有 $x \in X$ 以及所有满足 $0 < r < \sup\{d(x,y): y \in X\}$ 的 r，都存在一个$z \in X$ 使得 $d(x,z) = r$，则称其具有性质 P ([12])。

考虑度量空间 X 中两个不同的元素 x, y，它具有性质P。对于每个 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $p_n \in X$，使得 $d(x,p_n) = d(x,y)/n,$，这意味着 $x \in X'$。因此， $X = X'$。类似地，对于可链度量空间X，我们有 $X = X'$。注意，对于满足 $X = X'$ 的空间，对于所有 $\epsilon > 0$，集合 $I_\epsilon = \{x \in X: I(x) > \epsilon\}$ 都是空集，其中 $I(x) = d(x, X\backslash\{x\})$。根据有限可链度量空间中的 [15], 的命题 3.3，集合 I_ϵ 对所有 $\epsilon > 0$ 都是有限的。因此，这些空间具有一个共同性质，即对于所有 $\epsilon > 0$，集合I_ϵ 都是有限的。我们考虑一个泛函 $\gamma: P(X) \to \mathbb{R}$，定义为 $\gamma(A) = \inf\{\epsilon > 0 : $集合 $\{a \in A: d(a, A\backslash\{a\}) > \epsilon\}$ 是有限的$\}$；或者也可以定义为 $\gamma(A) = \sup\{\epsilon > 0 : $集合 $\{a \in A: d(a, A\backslash\{a\}) > \epsilon\}$ 是无限的$\}$

并且 $\gamma(A) = 0$，如果不存在使集合 $\{a \in A : d(a, A\backslash\{a\}) > \epsilon\}$ 无限的 ϵ。利用泛函 γ，我们为度量空间的子集定义一种性质。

定义 3.2. 度量空间中的子集 A 称具有性质Q，如果 $\gamma(A) = 0$。

从上述讨论可以清楚看出，度量空间的性质 Q 是以下概念的推广：

(1) 性质 P，(2) 链式性，
以及 (3) 有限链式性。

有理数空间 $\mathbb{Q}$ 具有性质 Q，但不具有性质 P。子空间 $(0,1) \cup (2, 3) \subset \mathbb{R}$ 具有性质 Q，但它不是链式可达的。赋范空间具有性质 Q，但它不是有限链可达的。

可以验证，子集 A 具有性质 Q，当且仅当对于每个由互不相同的项构成的序列 $\{x_n\} \subset A$，序列$I_A(x_n)$ 收敛于 0，其中$I_A(x_n) = d(x_n, A\backslash\{x_n\})$。关于 Atsuji 性的一个已知结果是：度量空间是 Atsuji 空间，当且仅当每个满足 $I(x_n) \to 0$ 的序列 $\{x_n\}$ 都有收敛子列。因此，子集是紧的，当且仅当它是 Atsuji 空间并满足性质 Q。

注意，对于每个包含集合 I_ϵ 的开集 $U \subset X$，我们有 $\inf\{d(a, U^c) : a \in I_\epsilon\} > 0$。这表明度量空间的子集具有某种性质。

定义 3.3. 度量空间 (X, d) 中的非空子集 A，若对于每个满足 $A \subset U$ 的开子集 U，集合 $\{d(a, U^c) : a \in A\}$ 的下确界为正，则称其满足性质 I。

有些情况下，度量空间的子集具有性质 I。
(1) 若对于度量空间 (X, d) 中满足 $A \subset U$ 的一对开子集 U 和子集 A，有 $\inf\{d(a, U^c) : a \in A\} = 0$，则下确界 0 不可能在 A 的任何点处取得。因此，在度量空间中，每个非空紧子集都满足性质 I。度量空间本身显然具有性质 I。(2) 在度量空间中，具有性质 Q 的 Atsuji 子集满足性质 I。(3) $(C(X), H)$ 中的每个孤立点都在 X 中具有性质 I。正如我们将在定理 4.1 的证明中看到的，$H(A, C(X)\backslash\{A\}) > \epsilon > 0$ 蕴含着对所有 $a \in A$ 都有 $I(a) \geqslant \epsilon$。

3.1. 与性质 Q 和 I相关的结果。这里我们讨论与性质 Q 和 I相关的基本结果。具体而言，我们将研究一个子集的变换后的状态保留概念 Q和 I的条件。

度量空间中的 Atsuji 子集可能不具有性质 I，基于这一事实，我们有如下观察。

观察 3.4。Atsuji 空间在一致连续映射下的像未必是 Atsuji 空间；甚至未必是完备的。
事实上，给定度量空间 X 中的非空子集 A，以及满足 $A \subset U$ 的开子集U，可以验证：$\inf\{d(a,U^c)\colon a \in A\}$ 为正，当且仅当存在一个 $\epsilon > 0$ 使得 $B(A, \epsilon) \subset U$。现在考虑赋予欧几里得度量 d 的空间 $X = \mathbb{R}^2$。子集 $A = \{(n,0)\colon n \in \mathbb{N}\}$ of$X$ 是 Atsuji 空间，而开集 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B((n,0),1/n)$ 包含 A。如果 A 在取值于度量空间的每个一致连续映射下的像都是 Atsuji 空间或完备的，那么集合 $R = \{d(a,U^c)\colon a \in A\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中完备，因此 R 包含其下确界。由于下确界为正，存在一个 $\epsilon > 0$ 使得 $B(A,\epsilon) \subset U$，矛盾。

然而，双一致连续映射保留 Atsuji 性、Q 和 I。

定理 3.5. 设 $f\colon X \to Y$ 是两个度量空间 X 和 Y 之间的一致同胚。那么有以下结论：
(1) $A \subset X$ 具有性质 I，当且仅当 $f(A)$ 具有性质 I；(2) $A \subset X$ 具有性质 Q，当且仅当 $f(A)$ 具有性质 Q；(3) X 的完备化是 Atsuji 空间，当且仅当 Y 的完备化是 Atsuji 空间。

证明。(1) 设 $(X、d)$ 和 $(Y、\rho)$ 分别是给定的度量空间，且 X 的子集 A 具有性质 I。设 $V \subset Y$ 是一个满足 $f(A) \subset V$ 的开子集。任取两个序列 $\{b_n\} \subset f(A)$ 和 $\{v_n\} \subset V^c$。那么，存在序列 $\{a_n\} \subset A$ 和 $\{u_n\} \subset [f^{-1}(V)]^c$，使得对所有 n，都有 $f(a_n) = b_n$ 和 $f(u_n) = v_n$。由于 $A \subset f^{-1}(V)$ 且 $f^{-1}(V)$ 是开集，因此当 $n \to \infty$ 时，$d(a_n、u_n) \nrightarrow 0$。由 f^{-1} 的一致连续性可得 $\rho(b_n、v_n) \nrightarrow 0$。因此，$f(A)$ 具有性质 I。同理可证逆向结论。

(2) 假设 A 具有性质 Q。考虑一个由不同项组成的序列 $\{y_n\} \subset f(A)$。因此，子空间 $(A$ 中存在一个由不同项组成的序列 $\{x_n\}$，$d)$，且 $I_A(x_n) \to 0$ 作为 $n \to \infty$，其中对所有 n，都有 $f(x_n) = y_n$。这意味着存在一个序列 $\{p_n\} \subset A$，使得 $d(x_n, p_n) \to 0$。根据 f 的一致连续性，我们有 $\rho(y_n, f(p_n)) \to 0$。因此，$f(A)$ 具有性质 Q。反过来同样可以证明。
(3) 假设 X 的一个完备化是 Atsuji，且 $\{y_n\} \subset Y$ 是满足 $I(y_n) \to 0$ 的序列。于是，根据 f^{-1} 的一致连续性，存在一个序列 $\{x_n\} \subset X$，使得 $I(x_n) \to 0$，其中对所有 n，$f(x_n) = y_n$。根据 X 的 Atsuji 完备化，序列 $\{x_n\}$ 有一个柯西子序列，记作 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$；因此，根据 f 的一致连续性，子序列 $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是柯西序列。由此，Y 的一个完备化是 Atsuji。反向结论可用同样的方法证明。□

由上述定理的 (3)，我们还可得：给定一个一致同胚 $f\colon X \to Y$，X 是 Atsuji，当且仅当 Y 是 Atsuji。

同胚不会保留性质 Q、I、Atsuji 完备化或 Atsuji 性。例如，考虑集合 $N = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$，分别赋予 $\mathbb{R}$ 上的通常度量 d_1 和离散度量 d_2。d_1与 d_2等价。集合 $\{1/2n : n \in \mathbb{N}\}$ 在 d_2中具有性质 I，但在 d_1中不具有该性质。集合 N 本身在 d_1中具有性质 Q，但在 d_2中不具有该性质。空间 (N, d_2) 是 Atsuji 空间，而 (N, d_1) 不是。现在考虑同胚 $\tan x$：$(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$。$(-\pi/2, \pi/2)$ 的完备化是 Atsuji 空间，但 $\mathbb{R}$ 不是。

若集合 X 上的两个度量 d 和 ρ 满足以下条件，则称它们一致等价：对所有 $\epsilon > 0$，都存在 $\alpha, \beta > 0$，使得对所有 $x \in X$，有$B_d(x, \alpha) \subset B_\rho(x, \epsilon)$ 且 $B_\rho(x, \beta) \subset B_d(x, \epsilon)$。

定理 3.6. 设集合 X 上有等价度量 d 和 ρ。那么，下列条件等价：

(1) d 和 ρ 一致等价；(2) d 和 ρ 诱导出具有性质 I 的相同子集；(3) d 和 ρ 诱导出具有性质 I 的相同闭子集。

证明。我们先证明 (1) 和 (2) 等价。

(1) $\implies$ (2)。由定理 3.5 的 (1) 可得。

(2) $\implies$ (1)。由于单点集满足性质 I，因此，d 和 ρ 一致等价，当且仅当对于每个 $\epsilon > 0$ $\exists \alpha$，都有 $\beta > 0$，使得对于所有 $A \in I^d(X) \cap I^\rho(X)$，我们有 $B_d(A, \alpha) \subset B_\rho(A, \epsilon)$ 和 $B_\rho(A, \beta) \subset B_d(A, \epsilon)$，其中 $I^d(X)$ 表示度量空间 (X, d) 中所有具有性质 I 的非空子集所成的集合。现在考虑 $A \in I^d(X)$。由于 $B_\rho(A, \epsilon)$ 在 (X, d) 中是开集，因此存在一个 $r > 0$，使得 $B_d(A, r) \subset B_\rho(A, \epsilon)$。类似地，对于一个 $A \in I^\rho(X)$，存在一个 $s > 0$，使得 $B_\rho(A, s) \subset B_d(A, \epsilon)$。证毕。

由于度量空间中的单点集都是闭集，我们可以像上面那样证明 (1) 和 (3) 等价。□

推论 3.7. 可度量化空间 X 是紧的，当且仅当具有性质 I 的非空闭子集集合对所有相容度量都保持不变。

定理 3.8. 若度量空间 X 中的非空子集 A 具有性质Q，则 $\overline{A}$ 也具有该性质。若 X' 是紧的，则逆命题也成立。

证明。设 A 具有性质 Q。对于 $x \in A'$，我们有 $d(x, \overline{A}\backslash\{x\}) = 0$；并且 $\{x \in A : d(x, \overline{A}\backslash\{x\}) > \epsilon\} \subset \{x \in A : d(x, A\backslash\{x\}) > \epsilon\}$ 对所有 $\epsilon > 0$ 都成立。因此，$\overline{A}$ 具有性质 Q。

对于逆命题，已知 X' 是紧的。假设 A 不具有性质 Q。那么，对于某个 $\epsilon > 0$，存在序列 $\{x_n\}$，其属于 A 并满足$d(x_m, x_n) > \epsilon \; \forall m \neq n$ 以及 $B(x_n, \epsilon) \cap A = \{x_n\}$，对所有 n均成立。所有 x_n都不属于 A'。我们声称存在一个 $\epsilon' > 0$，使得 $B(x_n, \epsilon') \cap A' = \varnothing$ 对所有

n。若非如此，则对所有 $p\in\mathbb{N}$，都存在$x_{n_p}\in\{x_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，以及满足 $y_p\in B(x_{n_p},1/p)\cap A'$,的 $y_p\in A'$，这意味着$d(x_{n_p},y_p)\to 0$，因为 $p\to\infty$。由于 A'是紧的，序列 $\{y_p\}$ 和$\{x_{n_p}\}$ 有一个共同的极限点，这与 $d(x_m,x_n)>\epsilon\ \forall m\neq n$矛盾。现在，考虑 $\epsilon_1=\min\{\epsilon,\epsilon'\}$。于是，$d(x_n,\overline{A}\backslash\{x_n\})>\frac{\epsilon_1}{2}\ \forall n$，这意味着 $\overline{A}$ 不具有性质Q。证毕。□

定理 3.9。如果 X 的每个非空闭子集都具有性质 I，那么 X 是完备的。

证明。若不然，假设 $\{x_n\}$ 是 X 中一个不收敛的柯西序列。因此，集合 $S=\{x_{2n-1}:\ n\in\mathbb{N}\}$ 和 $T=\{x_{2n}:\ n\in\mathbb{N}\}$ 互不相交且为闭集。现在，由于度量空间是正规空间，存在互不相交的开集 U、V，使得 $S\subset U$ 和 $T\subset V$。根据 I 对 S 和 T 均成立这一性质，存在 ϵ、$\epsilon'>0$，使得 $B(S、\epsilon)\subset U$ 且 $B(T、\epsilon')\subset V$。这意味着 $\{x_n\}$ 不是柯西序列，矛盾。□

4. Hausdorff Metric and Vietoris Topologies

度量空间及其 Hausdorff 超空间有一些共同的概念，例如全有界性、完备性、紧致性等（见 [2], 第 87 页）。这里我们还将看到它们也共享性质Q。

定理 4.1. 度量空间 X 具有性质 Q，当且仅当超空间 $(C(X),H)$ 具有性质 Q。

证明. 反设 $C(X)$ 不具有性质 Q。这意味着，对于某个 $\epsilon>0$，集合 $\mathcal{S}=\{A\in C(X):\ I(A)>\epsilon\}$ 是无限的，其中 $I(A)=H(A,C(X)\backslash\{A\})$。于是，集合 $\bigcup_{A\in\mathcal{S}}A$ 是无限的。由不等式 $I(A)>\epsilon$，我们断言，对所有 $a\in A$，都有 $I(a)\geqslant\epsilon$。事实上，假设对某个 $a\in A$，有 $I(a)<\epsilon$。这意味着，$\exists\, x\in X\backslash\{a\}$，其中 $d(a,x)<\epsilon$。若 $x\notin A$，则 $0<H(A,A\cup\{x\})<\epsilon$。若 $x\in A$，考虑非空闭集$C=A\backslash B(x,\epsilon)\cup\{x\}$。由于 $a\notin C$，因此我们有 $0<H(A,C)\leqslant\epsilon$。于是得到 $I(A)\leqslant\epsilon$，矛盾。因此，对所有 $A\in\mathcal{S}$ 以及所有 $a\in A$，都有$I(a)\geqslant\epsilon$；这意味着 X 不具有性质 Q。

反过来，设 $C(X)$ 具有性质 Q。这意味着，对于所有 $\epsilon>0$，集合 $\{\{x\}\in C(X):\ I(\{x\})>\epsilon\}$ 是有限的。我们证明，对于所有 $x\in X$，$I(\{x\})\geqslant I(x)$ ^。若 $I(\{x\})<I(x)$，则存在 $C(X)$ 中的 $\exists\, B\neq\{x\}$，使得 $H(B,\{x\})<I(x)$，这意味着 $\exists\, b(\neq x)\in B$，其中 $d(b,x)<I(x)$。因此得到 $I(x)<I(x)$，矛盾。于是，对于所有 $\epsilon>0$，我们有 $\{\{x\}:\ I(x)>\epsilon\}\subset\{\{x\}:\ I(\{x\})>\epsilon\}$，证毕。□

运用与上述定理证明类似的技巧，我们得到如下结论。

推论 4.2. 度量空间 X 中的孤立点数量有限，当且仅当 $(C(X),H)$ 中的孤立点数量有限。

观察 4.3. 从上述讨论中，我们还观察到以下结论：

(1) 若 X 中孤立点的数量为 n，则 $(C(X), H)$ 中孤立点的数量恰为 $2^n - 1$。(2) 若 $(C(X), H)$ 中仅有的孤立点为 $A_1, A_2, ..., A_n$，则每个 A_i，$i = 1, 2, ..., n$ 都是有限集，且 X 的孤立点集等于 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。(3) 若 $(C(X), H)$ 中孤立点的数量为 n，则存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $n = 2^m - 1$。并且，这些孤立点之并的基数为 m。(4) $X = X'$ 当且仅当 $C(X) = [C(X)]'$。

现在我们来探讨概念 Q、I 与超拓扑之间的关系。

对于度量空间 X 的非空子集 A，定义 $A^+ = \{C \in C(X) : C \subset A\}$ 和 $A^- = \{C \in C(X) : C \cap A \neq \varnothing\}$。

$C(X)$ 上的上 Vietoris 拓扑 τ_{V^+} 的一个基是由所有形如 U^+ 的集合组成的族，其中 U 是 X 的非空开子集；而下 Vietoris 拓扑 τ_{V^-} 的一个子基是由所有形如 U^- 的集合组成的族，其中 U 是 X 的非空开子集。$C(X)$ 上的 Vietoris 拓扑 τ_V 是 τ_{V^+} 和 τ_{V^-} 的上确界。τ_V 的一个基 $\mathcal{B}_V$ 是由所有形如 $\langle U_1, U_2, ..., U_n \rangle = \left\{A \in C(X) : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ 和 } A \cap U_i \neq \varnothing \ \forall i\right\}$, 的集合组成的集合，其中 U_i 是 X 和 $n \in \mathbb{N}$ 的开子集。

在 τ_{H^+} $C(X)$ 上的上 Hausdorff 度量拓扑中，$A \in C(X)$ 处的局部基是由所有形如 $B_{H^+}(A, \epsilon) = \{C \in C(X) : C \subset B(A, \epsilon)\}$ 的集合构成，其中 $\epsilon > 0$；而在 τ_{H^-} $C(X)$ 上的下 Hausdorff 度量拓扑中，A 处的局部基是由所有形如 $B_{H^-}(A, \epsilon) = \{C \in C(X) : A \subset B(C, \epsilon)\}$ 的集合构成，其中 $\epsilon > 0$。Hausdorff 度量拓扑 τ_H 是 τ_{H^+} 和 τ_{H^-}的上确界。

对于任意度量空间，都有包含关系 $\tau_{H^+} \subset \tau_{V^+}$ 和 $\tau_{V^-} \subset \tau_{H^-}$。

定理 4.4. 设 X 为一个度量空间。那么，$\tau_{V^+} \subset \tau_{H^+}$ 当且仅当 X 的每个非空闭子集都具有性质 I。

证明。只需证明：给定一个开集 $O \subset X$, $\{U^+ : \text{U 是开集且 } U \subset O\} \subset \tau_{H^+}$，当且仅当每个 $C \in O^+$ 都具有性质I。设 $C \in O^+$，并令 $V \subset X$ 为一个满足 $C \subset V$的开集。显然，$C \in (O \cap V)^+$。因此，存在某个 $\epsilon > 0$, $B_{H^+}(C, \epsilon) \subset (O \cap V)^+$，这意味着$B(C, \epsilon) \subset O \cap V$。

反过来，设 U 是包含于 O中的开集。设 $C \in U^+$。根据 C的性质 I，存在一个 $\epsilon > 0$，使得 $B_{H^+}(C, \epsilon) \subset U^+$。□

定理 4.5. 若局部基 $\{B_{H^-}(A, \epsilon) : \epsilon > 0\} \subset \tau_{V^-}$，则每个$C \in A^+$ 都具有性质 Q。

证明。反设存在一个 $C \in C(X)$，满足 $C \subset A$，但不具有性质 Q。那么，对于某个 $\epsilon > 0$，集合 $P = \{x \in C : d(x, C \backslash \{x\}) > \epsilon\}$

是无限集。因此，存在一个序列 $\{x_n\}$，属于 P，且满足 $d(x_m, x_n) > \epsilon \ \forall m \neq n$。由于 $B_{H^-}(A, \epsilon/2) \in \tau_{V^-}$,，所以存在开集 $V_1, V_2, ..., V_k$，属于X，使得 $A \in V_1^- \cap V_2^- \cap ... \cap V_k^- \subset B_{H^-}(A, \epsilon/2)$。考虑 $a_i \in A \cap V_i$。于是，$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \subset B(\{a_1, a_2, ..., a_k\}, \epsilon/2)$,，这意味着该序列 $\{x_n\}$ 中至少有两项（记作 x_i, x_j）属于某个 $1 \leqslant r \leqslant k$ 的 $B(a_r, \epsilon/2)$。因此，我们有 $d(x_i, x_j) < \epsilon$，矛盾。□

推论 4.6. 若 $\tau_{H^-} \subset \tau_{V^-}$，则 X 的每个非空闭子集都具有性质 Q。

注 4.7. 将超拓扑推广到 $N(X)$（拓扑空间 X 的非空子集集合）时，它们不具备良好的分离性质。例如，$(N(X), \tau_V)$ 是 T_1 空间，当且仅当 X 是离散空间。这里我们指出另一个将超拓扑研究限制在 $C(X)$ 的原因。定理 4.4 的证明中所用的辅助结果可以从 $C(X)$ 推广到 $N(X)$，因此，在 $N(X)$ 上，Vietoris 拓扑弱于豪斯多夫度量拓扑，当且仅当 X 是离散度量空间。

5. Locally Finite and Hausdorff Metric Topologies

性质 I 导出了上/下局部有限拓扑与上/下豪斯多夫度量拓扑之间的关系，我们将在本节讨论这一点。

对于 X的非空子集族 $\mathcal{A}$，定义 $\mathcal{A}^- = \{C \in C(X) : C \cap A \neq \varnothing \ \forall A \in \mathcal{A}\}$。

在 $C(X)$ 上的上局部有限拓扑τ_{lf^+} 的子基由所有形如 U^+的集合组成，其中 U 是 X的开子集；而下局部有限拓扑τ_{lf^-} 的子基由所有形如 $\mathcal{U}^-$的集合组成，其中 $\mathcal{U}$ 是 X的开子集的局部有限集族。局部有限拓扑 $\tau_{lf} = \tau_{lf^-} \vee \tau_{lf^+}$。

若 X 是可度量化空间，则τ_{lf} =sup$\{\tau_{H_d} : d$ 是X$\}$上的相容度量，其中 H_d 是由度量 d诱导的豪斯多夫度量，而τ_{H_d}是由 H_d诱导的拓扑。因此，对任意度量空间，都有包含关系$\tau_H \subset \tau_{lf}$。

定理 5.1. 如果度量空间的每个非空闭子集都具有性质 I，那么 $\tau_{lf^-} \subset \tau_{H^-}$。

证明。我们将证明，对于所有局部有限开集族$\mathcal{U} = \{U_i : i \in \Lambda\}$，$\mathcal{U}^- \in \tau_{H^-}$，其中 Λ 是一个指标集。考虑一个 $A \in \mathcal{U}^-$。对每个i，选取一个 $a_i \in A \cap U_i$；于是，由于 $\mathcal{U}$ 是局部有限的，集合$B = \{a_i : i \in \Lambda\}$ 在 X中没有极限点。现在，对每个 $i \in \Lambda$，存在一个$\epsilon_i > 0$，使得开球 $B(a_i, \epsilon_i) \subset U_i$。我们断言 $\inf_{i \in \Lambda} \epsilon_i = \epsilon > 0$。事实上，若 $\inf_{i \in \Lambda} \epsilon_i = 0$，则存在序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足$x_n \in X \backslash U_n$，使得 $d(a_n, x_n) \to 0$ 当 $n \to \infty$时成立，其中 $\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{U}$ 是一个序列。因此，存在一个开集 $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(a_n, d(a_n, x_n)/2)$

它包含闭集 $P = \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\}$，且 $\inf_{n\in\mathbb{N}} d(a_n, \ O^c) = 0$，矛盾。现在，考虑一个元素 $C \in B_{H^-}(A, \ \epsilon)$；那么，对每个 $i \in \Lambda$，存在 $c_i \in C$ 使得 $d(a_i, \ c_i) < \epsilon$。这意味着，对所有 $i \in \Lambda$，$C \cap U_i \neq \varnothing$，即 $C \in \mathcal{U}^-$。因此，$\mathcal{U}^- \in \tau_{H^-}$。□

定理 5.2。设 X 是一个度量空间。那么，$\tau_{lf} \subset \tau_H$ 当且仅当 X 的每个非空闭子集都具有性质 I。

证明。由 $\tau_{lf} \subset \tau_H$ 可得，对于所有在 X 中开集的 V，都有 $V^+ \in \tau_H$。设 A 是 X 的一个非空闭子集，且 U 是一个满足 $A \subset U$ 的开子集。由于 $A \in U^+$，因此 $B_H(A、\epsilon) \subset U^+$，其中某个 $\epsilon > 0$。现在，考虑一个满足 $B \subset B(A、\epsilon/2)$ 的非空闭子集 B。这意味着 $H(A、A \cup B) \leqslant \epsilon/2,$，因此 $A \cup B \in B_H(A、\epsilon)$。由于 $B_H(A、\epsilon) \subset U^+$，所以 $B \in U^+$。于是我们有 $B(A、\epsilon/2) \subset U,$，这意味着 A 具有性质 I。

反向结论由定理 5.1 和 4.4 得出。□

注 5.3. 对于 Atsuji 空间 X，集合 X' 必然是紧的。因此，利用 [3] 中的定理 2.2 和定理 3.8，我们得出如下结论。假设度量空间 X 中的每个非空闭子集都具有性质 I。那么，$A \subset X$ 具有性质 Q，当且仅当 $\overline{A}$ 具有性质 Q。

推论 5.4. 如果度量空间中的每个非空闭子集都具有性质 I，那么，$\tau_H = \tau_{lf} = \tau_{H^+} \vee \tau_{lf^-}$。

证明。证明由定理 5.2 和 4.4 得出。□

References

[1] G. Beer，《具有一致连续连续函数和豪斯多夫距离的度量空间》，*Proc. Ame. Math. Soc.*，第95卷，653–658页，1985年。[2] G. Beer，《闭集与闭凸集上的拓扑》，*Kluwer Academic Publishers* 1993，多德雷赫特，。

[3] G. A. Beer、C. J. Himmelberg、K. Prikry 和 F. S. Van Vleck，《2^X上的局部有限拓扑》，*Proc. Amer. Math. Soc.*，第101卷，168–172页，1987年。[4] G. Beer、A. Lechicki、S. Levi、S. Naimpally，《距离泛函与超空间拓扑的上确界》，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)*，第162卷，367–381页，1992年。[5] G. Beer、R. Lucchetti，《凸优化与上图距离拓扑》，*Trans.*，第–卷。[6] *Amer. Math. Soc.* 327, 795 813, 1991
G. Beer、R. Lucchetti，《上图距离拓扑：连续性与稳定性结果及其在凸极小化问题中的应用》，*Math. Oper. Res.*，第17卷，715–726页，1992年。[7] G. Beer、R. Lucchetti，《适定优化问题与度量空间闭子集的一种新拓扑》，*Rocky Mountain J. Math.*，第23卷，1197–1220页，1993–。[8] J. Chaber、R. Pol，《关于完全可度量化空间的 Wijsman 超空间的注记》，*Boll. Unione Mat. Ital.*，第5–B卷，827–832页，2002年。[9] C. Costantini，《相对于波兰空间的每个 Wijsman 拓扑都是波兰的》，*Proc.*，第–卷。*Amer. Math. Soc.* 123, 2569 2574, 1995
[10] S. Garc´ıa-Ferreira、R. Rojas-Hern´andez，《收敛序列超空间上的类似连通性的性质》，*Topology Appl.*，第230卷，639–647页，2017年。

[11] A. Gupta、S. Mukherjee，《诱导同胚与 Atsuji 超空间》，即将在 *Russian Math.*发表，
2022 10 48550 2205 11842 。已接收。
[12]
https://doi.org/ 。/arXiv. 。A. Gupta、S. Mukherjee，《勒贝格数与全有界性》。https://doi.org/
10 48550 2205 11855 。/arXiv. 。J. Henrikson，《豪斯多夫度量的完备
[13]
性与全有界性》，
Undergrad. J. Math. 1, 69 80, 1999 ，第–卷。[14]
T. Jain 和 S. Kundu，《Atsuji 完备化与超空间》， *Math. Slovaca*，第58卷，497–508页，2008年。
[15] S. Kundu、M. Aggarwal、S. Hazra，《有限链可达且全有界的度量空间：等价刻画》，
Topology Appl.，第216卷，59–73页，2017年。[16] R. Lucchetti，《超拓扑及其应用。载于：适定
变分问题的新进展》， *Math. Appl.*，施普林格，多德雷赫特，第331卷，193–209页，1995–。[17]
S. Mac ´ $C_n(X)$ X 109, ıas,
237 256, 2001
《关于连续统的超空间》， *Topology Appl.*，第–卷。[18] S. Mac´ıas，《连续统的 n 重超空间悬挂》，
Topology Appl.，第138卷，125–138页，2004年。[19] E. Michael，《子集空间上的拓扑》，
Trans. Amer. Math. Soc.，第71卷，152–182页，1951–。

[a]Department of Mathematics, National Institute of Technology Meghalaya, Shillong 793003, India
Email address: ajitkumar.gupta@nitm.ac.in

[b]Department of Mathematics, National Institute of Technology Meghalaya, Shillong 793003, India
Email address: saikat.mukherjee@nitm.ac.in