arXiv:2301.07373v2 [math.AC] 1 May 2024

当每个有限生成理想都是S-主理想

MOHAMED CHHITI、SALAH EDDINE MAHDOU 和
MOUTU ABDOU SALAMMOUTUI

Abstract. 本文引入了 S-B´ezout 环的概念，将其作为 B´ezout 环的推广。我们研究了 S-B´ezout 环与其他相关环类之间的关系，并给出了 S-B´ezout 环的一些刻画。我们在交换环的多种构造中研究这一性质，包括直积、局部化、平凡环扩张和粘合环。我们的结果使我们能够构造具有各种环论性质的新型 S-B´ezout 环类。此外，我们引入了非幂零S-B´ezout 环的概念，并给出了一些刻画。

1. Introduction

本文中，所有环均假设为交换环，且具有非零单位元；所有模均为非零含幺模。在过去四十年间，乘法理想理论中使用的经典概念得到了许多扩展，人们也需要将包括 B´ezout 整环在内的许多性质推广到更广泛的背景中。B´ezout 环的概念在交换代数中占据核心地位，扩大这一类环的范围并构造新的原创例子也颇有意义。在 [3], Anderson 和 Zafrullah 将 B´ezout 整环推广如下：他们称整环为 A几乎 B´ezout 整环，如果对任意两个元素 a、$b \in A$，都存在一个整数 $n \geq 1$，使得 A 中的理想 (a^n, b^n) 是主理想。后来，Mah- dou、Mimouni 和 Moutui 将几乎 B´ezout 整环的概念推广到了带零因子的环。近年来，S-性质的概念在交换代数中占有重要地位，并引起了多位作者的关注。在 [4], Anderson 和 Dumitrescu 引入了 S-有限模的概念，其中 S 是一个乘法封闭子集，定义如下：若 R-模 M 满足存在 M 的有限生成 R-子模N 和 $s \in S$，使得 $sM \subseteq N.$，则称其为 S-有限模。此外，他们还引入了 S-Noether环的概念，定义如下：若环 R 的每个理想都是 S-有限的，则称 R 为 S-Noether环。最近，在 [13], Bennis 和 El Hajoui 研究了

2010 *Mathematics Subject Classification.* 13A15, 13B99, 13E15.
Key words and phrases. S-B´贝祖，局部化，直积，S-主理想，拉回，平凡环扩张，粘合。

S-有限表示模和凝聚模的对应推广，分别称为 S-有限表示模和 S-凝聚模。若存在一个 R-模正合列$0 \to K \to F \to M \to 0$，其中 F 是有限生成自由 R-模，且 K 是 S-有限 R-模，则称 M R-模为 S-有限表示模，其中 S 是 R 的一个乘法封闭子集。此外，若 M R-模是有限生成的，且其每个有限生成子模都是 S-有限表示的，则称该模 M 为S-凝聚模。他们证明， S-凝聚环具有与 Chase 对凝聚环给出的经典刻画类似的刻画（见 [13, 定理 3.8]）。任何凝聚环都是 S-凝聚的，任何S-Noether环都是 S-凝聚的。关于 S-Noether环和S-凝聚环的更多细节，请参阅 [4, 13]。

设 R 是一个环， M 是一个 R-模。那么， $R \propto M$，即 R 由 M 构成的平凡（环）扩张，是一个环，其加法结构为外直和 $R \oplus M$，乘法定义为 $(r_1, m_1)(r_2, m_2) := (r_1r_2, r_1m_2+r_2m_1)$，对所有 r_1、 $r_2 \in R$ 以及所有 m_1、 $m_2 \in M$ 均成立。这种构造也有其他称谓，例如理想化。参见例如 [19, 20]。平凡环扩张在交换环理论中占有重要地位，因为它们能有效地产生满足各种环论性质的新的环类示例和反例（例如参见 [1, 5, 19, 20, 21]）。

设 (A, B) 为一对环， J 为 B 的一个理想，且 $f\colon A \to B$ 是一个环同态。关于 f，沿着 J 将 A 与 B 粘合所得的环是 $A \times B$ 的如下子环:

$$A \bowtie^f J = \{(a, f(a) + j) / a \in A, j \in J\}.$$

作为 [17], 中重复化构造的自然推广，D'Anna、Finocchiaro 和 Fontana 在 [15] 中首次提出了粘合环。这种环扩张涵盖了若干环论构造，包括 $A + XB[X]$、 $A + XB[[X]]$ 和 $D + M$ 构造，以及若干经典构造，例如平凡环扩张和 CPI 扩张。关于粘合环的更多细节，请参阅 [15, 16, 17, 18]。

值得回顾的是， P 的素理想 R 是分裂的，当且仅当对于任意 $x \in R \setminus P$, $P \subseteq (x)$。若环 R 的每个素理想都是分裂的，则称 R为可分环。关于可分环及相关概念的更多细节，请参阅文献 [12]。Badawi 在 [6, 7, 8, 9, 11], 中广泛研究了以下一类环： $\mathcal{H} = \{R \mid R$ 是交换环，且 $Nil(R)$是 $R\}$的分裂素理想。注意，在 $R \in \mathcal{H}$的情况下， R 称为 ϕ-环。显然，每个整环都是 ϕ-环。若 R 的理想 I 满足 $I \nsubseteq Nil(R)$，则称其为非幂零理想。若 ϕ-环 R的理想 I是非幂零理想，则 $Nil(R) \subseteq I$。设环 R 的全商环为 T，且 $Nil(R)$是一个分裂

R的素理想。如文献 [7], 中那样，我们定义 ϕ： $T(R) \longrightarrow K := R_{Nil(R)}$ 满足 $\phi(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$，对每个 $a \in R$及每个 $b \in R \backslash Z(R)$均成立。于是， ϕ是从 $T(R)$到 K 的环同态；将 ϕ 限制在 R 上，也得到一个从 R 到 K 的环同态，其定义为对每个 $x \in R$， $\phi(x) = \frac{x}{1}$。注意，若 $R \in \mathcal{H}$，则 $\phi(R) \in \mathcal{H}$， $Ker(\phi) \subseteq Nil(R)$， $Nil(T(R)) = Nil(R)$， $Nil(R_{Nil(R)}) = \phi(Nil(R)) = Nil(\phi(R)) = Z(\phi(R))$， $T(\phi(R)) = R_{Nil(R)}$是局部环，其极大理想为 $Nil(\phi(R))$，而 $R_{Nil(R)}/Nil(\phi(R)) = T(\phi(R))/Nil(\phi(R))$ 是 $\phi(R)/Nil(\phi(R))$ 的商域。

本文提出了 S-B´ezout 环的概念，将其作为 B´ezout 环的推广。我们研究了 S-B´ezout 环与其他相关环类之间的关系，并给出了 S-B´ezout 环的一些刻画。我们在多种交换环的情形下研究这一性质，包括直积、局部化、平凡环扩张和粘合环。我们的结果使我们能够构造出具有各种环论性质的新型 S-B´ezout 环类。此外，我们引入了非幂零 S-B´ezout 环的概念，并给出了一些刻画。对于一个环 R，我们分别用 $Nil(R)$、 $U(R)$、 $Z(R)$ 表示 R 的所有幂零元构成的理想、R 的单位元乘法群以及 R 的零因子元素。对于一个整环 R，我们用 $qf(R)$ 表示 R 的商域。

2. Main Results

设 R 为一个环， S 为 R的乘法封闭子集。回顾一下，如果 R 的每个有限生成理想都是主理想，则称环 R 为 B´ezout 环。首先，我们以下述方式引入一种称为 S-B´ezout 环的 B´ezout 环的弱版本：

定义 2.1. 设 R 为环， S 为 R的乘法集。如果存在 $s \in S$ 使得对于某个 $r \in R$有 $sI \subseteq rR \subseteq I$，则称 R 的理想 I 为 S-主理想。若 R 的每个有限生成理想都是 S-主理想，则称 R 为 S-B´ezout 环。

值得注意的是，任何 B´ezout 环对于 R的每个乘法集 S 都是 S-B´ezout 环。然而，反之一般并不成立，以下示例说明了非 B´ezout 的 S-B´ezout 环。

例 2.2。设 $R := \mathbb{Z} \propto (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$ 是 $\mathbb{Z}$ 关于 $\mathbb{Z}$-模 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$ 的平凡环扩张，且 $S := \{2^n, 0)/n \in \mathbb{N}\}$ 是 R 的乘法闭集。则：

(1) R 是一个 S-B´佐特环。
(2) R 不是 B´佐特环。

证明。

(1) 设 J 是 R 的一个有限生成真理想，并令 $I := \{a \in \mathbb{Z}/(a,e) \in J$，其中 $e \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}\}$。于是有两种可能：情形 1. $I \neq 0$。

在这种情况下，设 $I = n\mathbb{Z}$，其中 $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$。令 $e \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$，使得 $(n,e) \in J$。因此，J是 S-主理想，因为

$$(2,0)J \subseteq R(n,e) \subseteq J$$

因为 (2, 0)$J = R(2n,0) = R(n,e)(2, 0) \subseteq R(n,e)$，如所需。情形 2 $I = 0$.

那么，J 也是 S-主理想，因为

$$(2,0)J \subseteq R(0,0) \subseteq J$$

因为 (2,0)$J \subseteq$ (2,0)$(0 \propto (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}) = R$(0, 0)，如所需。

(2) 设 (e, f) 是 $\mathbb{Z}$-模 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$ 的线性无关元素，并令 $J = R$(0, e) $+ R$(0, f)。显然，J不是 R 的主理想，正如所需。□

例2.3. 设 R_1 是一个 B ´ezout 环，R_2 是一个非 B ´ezout 环，R:=$R_1 \times R_2$ 并令 S:= {(1, 1), (1, 0)} 是 R 的一个乘法集。例如，取 $R_1 := K[x]$ 为系数取自域 K 的多项式环，并取 R_2 :=$F[X,Y]$ 为域 F 上以两个变量 X,Y 为变量的多项式环。众所周知，R_2 是一个非 B ´ezout 整环。那么：

(1) R 是一个 S-B ´ezout 环。
(2) R 是一个非 B ´ezout 环。

证明。

（1）我们断言，R 是一个 S-B´ezout 环。事实上，设 $I := I_1 \times I_2$ 是 $R := R_1 \times R_2$的有限生成理想。因此，I_1 是一个 B´ezout 环的有限生成理想 R_1，所以对于某个$a_1 \in R_1$有 $I_1 = R_1a_1$。因此，

$$(1,0)(I_1 \times I_2) \subseteq I_1 \times 0 (= R(a_1,0)) \subseteq I_1 \times I_2$$

从而 $I := I_1 \times I_2$ 是一个 S-主理想，得证。

（2） R:= $R_1 \times R_2$是一个非 B´ezout 环，因为 R_2是一个非 B´ezout 环。 □

回顾一下，如果环 R 的每个理想都是 S-主理想，即对于每个理想 I，都存在一个主理想 J 和 $s \in S$，使得$sI \subseteq J \subseteq I$，则称环 R 为 S-PIR。显然，对于 R的任意乘法封闭子集 S，任何 S-PIR 都是一个 S-B´ezout 环。

例 2.4。设 R为任意非 B ´ezout 整环，并令 S:= $R - \{0\}$ 为 R的一个乘法闭集。则：

(1) R 是 S-主理想环。特别地，R 是 S-B ´ezout 环。(2) R 不是 B ´ezout 环。

证明。

(1) 设 I 是 R 的一个真理想，并设 $s \in I - \{0\}$。因此， $sI \subseteq Rs \subseteq I$，所以 I 是 S-主理想，因为 Rs 是 R的一个主理想，证毕。

（2）根据假设。 □

回顾一下，如果理想 I 可以由 n 个元素生成，则称其为 n-生成的。众所周知，B´ezout 环是指其中每个 n-生成的（分别地，2-生成的理想）都是主理想的环。现在，我们将这一结果推广到 S-B´ezout 环。

命题 2.5. 设 R 是一个环， S 是 R的一个乘法集。那么R 是一个 S-B´ezout 环，当且仅当每个由 2 个元素生成的理想都是 S-主理想。

证明. 若 R是一个 S-B´ezout 环，则每个由 2 个元素生成的理想都是 S-主理想。反过来，假设每个由 2 个元素生成的理想都是 S-主理想。只需证明：若每个由 n个元素生成的理想都是 S-主理想，则每个由（$n+1$）个元素生成的理想都是 S-主理想。

假设每个由 n个元素生成的理想都是 S-主理想，并设 $I = \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i$是 R 的一个由（$n+1$）个元素生成的理想。那么存在 $s \in S$ 和 $a \in R$，使得

$$s\sum_{i=1}^{n} Ra_i \subseteq Ra \subseteq \sum_{i=1}^{n} Ra_i$$

根据假设，因为 $\sum_{i=1}^{n} Ra_i$ 是 R的一个由 n个元素生成的理想。利用 $sRa_{n+1} \subseteq Ra_{n+1}$这一事实，我们得到

$$s\sum_{i=1}^{n+1} Ra_i \subseteq s\sum_{i=1}^{n} Ra_i + Ra_{n+1} \subseteq Ra + Ra_{n+1} \subseteq \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i.$$

另一方面， $Ra + Ra_{n+1}$ 由 2 个元素生成，因此根据假设，存在 $s' \in S$ 和 $b \in R$，使得

$$s'(Ra + Ra_{n+1}) \subseteq Rb \subseteq Ra + Ra_{n+1}(\subseteq \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i).$$

但是，我们有 $ss' \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i \subseteq s'(Ra + Ra_{n+1})$。因此，

$$ss' \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i \subseteq Rb \subseteq \sum_{i=1}^{n+1} Ra_i$$

由于 $ss' \in S$，证毕。 □

下一个定理给出了 S-B´ezout 环的另一种刻画。

定理 2.6. 设 R 是一个环， S 是 R 的一个乘法集。那么， R 是 S-B´ezout 环，当且仅当 R 的每个 S-有限理想都是 S-主理想。

证明. 若 R 的每个 S-有限理想都是 S-主理想，则显然 R 是 S-B´ezout。反之，假设 R 是 S-B´ezout，并设 R 的一个 S-有限理想为 I。那么，存在 R 的一个有限生成理想 J 和 $s \in S$，使得:

$$sI \subseteq J \subseteq I.$$

因此， J 是 S-主理想，故存在 $s' \in S$ 和 $a \in R$ 使得

$$s'J \subseteq Ra \subseteq J.$$

因此,

$$ss'I \subseteq s'J \subseteq Ra \subseteq J \subseteq I$$

因此， I 是 S-主理想，证毕。 □

接下来，我们研究 S-B´ezout 环性质在局部化下的稳定性。

命题2.7. 设 R 是一个环，且 $S \subseteq R$ 是 R的一个乘法集。那么:

(1) 如果 R 是一个 S-B´ezout 环，那么 $S^{-1}R$ 是一个 B´ezout 环。(2) 假设 R 是 S-Noether 环（不一定是 Noether 环）。那么，当且仅当 $S^{-1}R$ 是一个 B´ezout 环时，R 才是一个 S-B´ezout 环。

证明。(1) 假设 R 是 S-B´ezout 环，并令 J 为 $S^{-1}R$ 的一个有限生成理想。存在 R 的一个有限生成理想 I，使得 $J = S^{-1}I$。于是， I 是 S-主理想，因此 $J := S^{-1}I$ 是主理想，证毕。

(2) 如果 R 是一个 S-B´ezout 环，那么由上面的断言 (1)， $S^{-1}R$ 是一个 B´ezout 环。反之，假设 $S^{-1}R$ 是一个 B´ezout 环，并且 R 是 S-Noether环（不一定是 Noether环）。那么 $S^{-1}R$ 是一个主理想环。因此，根据 [4, 命题2(g)]， R 是一个 S-主理想环。于是， R 是一个 S-B´ezout 环，证毕。□

与命题2.7相反，下面的命题表明，我们并非总是需要“S-Noether环”这一假设。

命题2.8. 设 R 是一个环， $S \subseteq U(R)$是R的一个乘法集。那么， R 是 S-B´ezout环，当且仅当 $S^{-1}R$ 是B´ezout环。

若取 $S \subseteq U(R)$，则可得到下面这个已知的推论。

推论2.9. 每个Noether环B´ezout环都是主理想环。

对于 R的一个素理想 P，若 R是$(R-P)$-B´ezout环，则称 R为 P-B´ezout。我们给出半局部环的如下刻画。

定理2.10. 对于半局部环 R，以下命题等价:

(1) R 是一个 B´贝祖环。

(2) 对于 R 的所有素理想 P， R 都是一个 P-B´贝祖环。(
3) 对于 R 的所有极大理想 M， R 都是一个 M-B´贝祖环。

证明。 (1) ⇒(2) 显然。
(2) ⇒(3) 显然。(3) ⇒(4) 我们可以使用与 [4, 命题 12] 中相同的证明。 □

下一个命题考察同态像下的 S-B´ezout 环性质。

命题 2.11。设 R 是一个环， I 是 R 的有限生成理想，且 S 是 R 的乘法闭集。若 R 是一个 S-B´ezout 环，则 R/I 是一个 $(S+I)$-B´ezout 环。若存在 $s_0 \in S$ 使得$s_0 I = 0$，则逆命题也成立。

证明。假设 R 是 S-B´ezout。令 J/I 为 R/I的一个有限生成理想，其中 J 是 R 的一个有限生成理想。那么存在 $s \in S$ 和 $a \in R$， 使得

$$sJ \subseteq Ra \subseteq J$$

因为 R 是一个 B´ezout 环。因此，我们有

$$(s+I)(J/I) \subseteq (R/I)(a+I) \subseteq J/I$$

因此 J/I 是 $(S+I)$-主理想。因此， R/I 是 $(S+I)$-B´ezout。反过来，假设 R/I 是 $(S+I)$-B´ezout，且存在 $s_0 \in S$ 使得 $s_0 I = 0$。考虑 R的一个有限生成理想 J。那么 $((J+I)/I)$ 是 $(S+I)$-B´ezout 环 R/I的一个有限生成理想。因此，存在 $s \in S$和$a \in R$， 使得:

$$(s+I)((J+I)/I) \subseteq (R/I)(a+I) \subseteq (J+I)/I.$$

将上式乘以 s_0， 并且由于 $s_0 I = 0$，我们得到:

$$ss_0 J \subseteq R(s_0 a) \subseteq s_0 J \subseteq J,$$

因此 J 是 S-主理想。由此， R 是一个 S-B´贝祖环，证明完毕。□

现在我们研究 S-B´贝祖性质在同态下的稳定性。设 A 和 B 是两个环， $f: A \to B$ 是一个环同态，且 I 是 A的一个理想。我们用 I^e表示 I 的扩张，它定义为由 $f(I)$生成的B的理想；用 J^c表示 J的收缩，它定义为 $f(A)$ 中元素的原像集合 $\cap J$，即 $J^c = \{a \in A | f(a) \in J\}$。

命题 2.12. 设 (A, B) 是一对环， $f: A \to B$ 是一个环同态，且 S 是 A 的乘法集，使得对于 B 的每个理想 I， J^c 是 A 的有限生成理想；并且对于 B 的每个有限生成理想 J， A 是一个 S-B´ezout 环，则 B 是一个 $f(S)$-B´ezout 环。

证明。假设 A 是一个 S-B´ezout 环。设 J 是 B 的一个有限生成理想。由假设，J^c 是 A 的一个有限生成理想，而 A 是 S-B´ezout 环。因此，J^c 是 S-主理想，从而存在 $s \in S$ 和 $a \in A$ 使得 $sJ^c \subseteq aA \subseteq J^c$。于是 $f(s)J = f(s)J^{ce} \subseteq (aA)^e \subseteq J^{ce} = J$。因此，$f(s)J \subseteq f(a)B \subseteq J$，从而 J 是 B 的一个 $f(S)$-主理想。最后，B 是一个 $f(S)$-B´ezout 环，证毕。□

显然，若 S_1、...、S_n 分别是环 R_1、...、R_n 的乘法集，则 $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ 是 $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ 的乘法集。接下来，我们研究 S- 贝祖性质在直积下的稳定性。

命题 2.13. 设 S_1、...、S_n 分别是环 R_1、...、R_n 的乘法集。令 $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$，并设 $S = \prod_{i=1}^{n} S_i$ 是 R 的乘法封闭子集。以下陈述等价:

(1) R 是一个 S-B´ezout 环。(2) 对所有 $i = 1$、...、n，R_i 都是一个 S_i-B´ezout 环。

证明。只需证明 $n = 2$ 的情形即可。
假设 $R_1 \times R_2$ 是一个 $(S_1 \times S_2)$-B´ezout 环，并令 I_i 为 R_i 的有限生成理想，其中 $i = 1$，2。于是，$I_1 \times I_2$ 是 $(S_1 \times S_2)$-B´ezout 环 $R_1 \times R_2$ 的有限生成理想。因此，存在 $s_i \in S_i$ 和 $a_i \in R_i$，使得

$$(s_1, s_2)(I_1 \times I_2) \subseteq (R_1 \times R_2)(a_1, a_2) \subseteq I_1 \times I_2,$$

因此 $s_1 I_1 \subseteq R_1 a_1 \subseteq I_1$ 和 $s_2 I_2 \subseteq R_2 a_2 \subseteq I_2$。于是，$R_i$ 是一个 S_i-B´ezout 环，正如所需。反过来，假设对每个 $i = 1$，2，R_i 都是一个 S_i-B´ezout 环，并令 $I_1 \times I_2$ 为 $R_1 \times R_2$ 的有限生成理想。因此，存在 $s_i \in S_i$ 和 $a_i \in R_i$，使得 $s_1 I_1 \subseteq R_1 a_1 \subseteq I_1$ 且 $s_2 I_2 \subseteq R_2 a_2 \subseteq I_2$，所以我们有

$$(s_1, s_2)(I_1 \times I_2) \subseteq (R_1 \times R_2)(a_1, a_2) \subseteq I_1 \times I_2.$$

因此，$R_1 \times R_2$ 是一个（$S_1 \times S_2$）-B´ezout 环，从而完成了证明。 □

下一个命题研究环扩张 $A \subseteq B$ 下的 S-B´ezout 性质，其中（A，B）是一对环。

命题 2.14. 设 $A \subseteq B$ 是一个环扩张，使得对 A 的每个理想 I 和每个乘法集 $S \subseteq A$，都有 $IB \cap A = I$。若 B 是一个 S-B´ezout 环，则 A 也如此。

证明。设 I 是 A的有限生成理想。由于 B 是一个 S-B´ezout 环，因此存在 $s \in S$ 和 $b \in B$，使得 $sIB \subseteq bB \subseteq IB$。显然，$b \in IB$，所以可以从 I中选取。因此，$sI = sIB \cap A \subseteq bB \cap A \subseteq bA \subseteq I$，这使得 I 成为 A的 S-主理想。由此，A 是一个 S-B´ezout 环，证毕。□

设 $R := A \propto E$ 是环 A 通过一个 A-模E得到的平凡环扩张。注意，若 S 是 R的一个乘法集，则 $S_0 = \{a \in A/(a, e) \in S$对某个 $e \in E\}$ 是 A 的一个乘法集。反过来，若 S_0 是 A的一个乘法集，则对于满足 $S_0N \subseteq N$的 E 的任意子模 N， $S := S_0 \propto N$ 都是 R 的一个乘法集。特别地， $S_0 \propto 0$ 和 $S_0 \propto E$是 R的乘法集。接下来的结果将在特殊情形下考察平凡环扩张中 S-B´ezout 性质的传递，其中 E 是一个有限生成 A-模。

定理 2.15. 设 A 是一个环， E 是一个有限生成的 A-模， S_0 是 A 的乘法封闭子集， $R := A \propto E$ 是由 A 和 E 构成的平凡环扩张，且 $S := S_0 \propto E$ 是 R 的乘法封闭子集。若 R 是一个 S-B´主理想环，则 A 是一个 S_0-B´主理想环，并且 E 的每个有限生成子模 F 都是 S-循环的（特别地， E 是 S-循环的）。若 R 的每个理想都是齐次的，则逆命题也成立。

在证明前面的定理之前，我们先建立以下引理。

引理 2.16. 设 A 是一个环， E 是一个 A-模， F 是 E 的子模，且 S 是 A 的乘法封闭子集。则 F 是 S-循环的，当且仅当 $0 \propto F$ 是 $A \propto E$ 的一个 $S \propto E$-主理想。

证明。假设 F 是 S-循环的。那么存在 $s \in S$ 和 $e \in F$，使得

$$sF \subseteq Ae \subseteq F,$$

因此

$$0 \propto sF \subseteq 0 \propto Ae \subseteq 0 \propto F,$$

因此，

$$(s, 0)0 \propto F \subseteq A \propto E(0, e) \subseteq 0 \propto F.$$

因此， $0 \propto F$ 是 $A \propto E$的 $S \propto E$-主理想。反过来，假设 $0 \propto F$ 是 $A \propto E$的 $S \propto E$-主理想。那么存在 $(s, e) \in S \propto E$，使得

$$(s, e)0 \propto F \subseteq A \propto E(a, e') \subseteq 0 \propto F, \text{ for some } (a, e') \in A \propto E,$$

因此

$$0 \propto sF \subseteq Aa \propto (Ae' + aE) \subseteq 0 \propto F$$

因此，

$$0 \propto sF \subseteq 0 \propto Ae' \subseteq 0 \propto F.$$

因此， $sF \subseteq Ae' \subseteq F$. 最后， F 是 S循环的，证毕。 □

定理 2.15 的证明。假设 R 是一个 S-B´ezout 环。设 F 是 E 的有限生成子模。那么根据定理 2(1)， $0 \propto F$ 是 R 的有限生成理想，因此也是 S-主的。因此，根据引理 2.16， F 是 S-循环的。另一方面，考虑 A 的一个有限生成理想 I。根据定理 7(1)， $I \propto IE$ 是 R 的有限生成理想。因此，存在 $(s, e) \in S$ 和 $(a, e') \in I \propto IE$，使得

$$(s,e)I \propto IE \subseteq A \propto E(a,e') \subseteq I \propto IE,$$

so,

$$sI \subseteq Aa \subseteq I.$$

因此， I 是 S_0-主的，从而使 A 成为一个 S_0-B´ezout 环。反过来，假设 R 的每个理想都是齐次的（回顾 [5], ： R 的齐次理想具有如下形式： $I \propto F$ ，其中 I 是 A 的某个理想， F 是 E 的某个子模，且 $IE \subseteq F$）。设 R 的一个有限生成理想为 $I \propto F$ 。根据定理 9(1)， I 是 A 的有限生成理想，且 F 是 E 的有限生成子模。因此，存在 $(s, s') \in S_0^2$ 、 $a \in I$ 和 $e \in F$，使得

$$sI \subseteq Aa \subseteq I,$$

and

$$s'F \subseteq Ae \subseteq F.$$

令 $t = ss' \in S$，则

$$tI \subseteq Aa \subseteq I$$

and

$$tF \subseteq Ae \subseteq Ae + aE \subseteq F,$$

因此

$$tI \propto tF \subseteq Aa \propto (Ae + aE) \subseteq I \propto F,$$

因此,

$$(t, 0)I \propto F \subseteq A \propto E(a, e) \subseteq I \propto F.$$

故 $I \propto F$ 是 $S_0 \propto E$-主理想。最后， R 是一个 S-B´ezout 环，证毕。□

以下定理探讨了在各种平凡环扩张情形下 S-B´ezout 环性质的传递。

定理 2.17. 设 A 是一个环， E 是一个 A–模， S_0 是 A 的乘法封闭子集， $R := A \propto E$ 是由 A 和 E 构成的平凡环扩张，且 $S := S_0 \propto E$ 是 R 的乘法封闭子集。则以下结论成立:

(1) 若 R 是一个 S-B´ezout 环，则 A 是一个 S_0-B´ezout 环。(2) 假设 A 是一个非域的整环， $K = qf(A)$，且 $R := A \propto K$ 是由 A 和 K 构成的平凡环扩张。则 R 是一个 S-B´ezout 环，当且仅当 A 是一个 S_0-B´ezout 整环。(3) 假设 (A, M) 是一个局部环，且 E 是一个 A–模，使得 $ME = 0$且 $S_0 \nsubseteq U(R)(= R - (M \propto E)$。则 R 是一个 S-B´ezout 环，当且仅当 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

证明。(1) 假设 R S-B´ezout 环，并令 I 为由 $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ 生成的 A 的有限生成真理想。那么该有限生成

理想 J 是由 $(a_i,0)_{i=1,\ldots,n}$ 生成的 R 的 S-主理想，也就是说，存在 $(s_0, f) \in S$ 和 $(a, e) \in R$，使得

$$(s_0, f)J \subseteq R(a, e) \subseteq J$$

因此

$$s_0 I \subseteq Aa \subseteq I.$$

因此，I 是一个 S_0-主理想，所以 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

(2) 若 R 是一个 S-B´ezout 环，则由上面的断言 (1)，A是一个 S_0-B´ezout 整环。反之，设 R的一个有限生成真理想为 J。令$I := \{a \in A/(a, e) \in J$，其中 $e \in K\}$。于是有两种可能：情形 1。$I = 0$。

必然有 $J = 0 \propto (1/b)L$，其中 $b \neq 0 \in A$ 以及 A的某个有限生成真理想 L。因此，L 是一个 S_0-主理想，因为 A 是一个 S_0-B´ezout 环，所以存在 $s_0 \in S_0$ 和 $a \in A$，使得

$$s_0 L \subseteq Aa \subseteq L$$

并且我们有

$$(s_0, 0)J \subseteq R(0, a/b) \subseteq J.$$

因此，J 是 R的一个 S-主理想，正如所需。

情形 2. $I \neq 0$。

设 $(a, e) \in J$使得 $a \neq 0$。那么 $(a, e)(0 \propto K) = 0 \propto K \subseteq J$；等价地，$J = I \propto IK = I \propto K$，其中 I 是一个 S_0-B´ezout 环 A的有限生成理想。因此，存在 $s_0 \in S_0$ 和 $a \in A$ 使得

$$s_0 I \subseteq Aa \subseteq I,$$

因此我们有

$$(s_0, 0)J \subseteq R(a, 0) \subseteq J.$$

因此，J 是一个 S-主理想，正如所需。

(3) 若 R 是 S-B´ezout 环，则由上文断言（1），A 是 S_0-B´ezout 环。反过来，假设 A 是 S_0-B´ezout 环，且 $S_0 \nsubseteq U(R)(=R - (M \propto E)$，并令 J 为 R 的一个有限生成理想。取 $I := \{a \in A$，使得 $(a, e) \in J$，其中 $e \in E\}$ 是 A 的一个有限生成理想。由于 A 是 S_0-B´ezout 环，因此存在 $s_0 \in S_0$ 和 $a \in A$，使得

$$s_0 I \subseteq Aa \subseteq I.$$

将上式两边乘以一个元素 $s \in S_0 \cap M$，我们可以假设 $s_0 \in M$（因为我们有 $ss_0 I \subseteq Asa \subseteq sI \subseteq I$）。另一方面，存在 $e \in E$ 使得 $(a, e) \in J$，因为 $a \in I$。因此，$(as_0, 0) = (a, e)(s_0, 0) \in J$，于是我们有

$$(s_0 s_0, 0)J \subseteq R(s_0, 0)(a, e) = R(s_0 a, 0) \subseteq J.$$

因此，J 是 R的 S-主理想，证明完毕。 □

接下来，我们利用平凡环扩张中 S-B´ezout性质的传递，给出一些新的 S-B´ezout环的原创例子，而这些环并非B´ezout环。

例 2.18. 设 (A, P) 是一个局部 B´ezout 整环，$E = A/P$ 是一个 A-模，满足 $Dim_{\frac{A}{P}}(E) \neq 1$；再设 S_0 是 A 的一个乘法封闭子集，满足 $S_0 \cap P \neq \emptyset$。考虑由 E 对 A 作平凡环扩张 $R := A \propto E$，并设 $S := S_0 \propto E$ 是 R 的一个乘法封闭子集。那么：

(1) R 是一个 S-B´ezout 环。

(2) R 不是 B´ezout 环。

证明。(1) 注意到 $PE = 0$ 和 $S_0 \not\subseteq U(R)$。根据定理 2.17 的断言 (3)，R 是一个 S-B´ezout 环（因为 A 是一个 S_0-B´ezout 环）。
（2）反设 R 是一个 B´ezout 环。由于 $Dim_{\frac{A}{P}}(E) \neq 1$，因此 $Dim_{\frac{A}{P}}(E) \geq 2$。取两个元素 h、$k \in E$，使得 {h,k} 是 A/P-线性无关集，并考虑 R 的有限生成理想 $J := R(0, h) + R(0, k)$。容易验证 J 不是主理想，这就产生了矛盾。因此，R 不是 B´ezout 环。□

我们将 H 在其商域中的整闭包记为 $\overline{H}$。回顾 [3]，整环 H 是几乎 B´ezout 的，当且仅当 H 的整闭包 $\overline{H}$ 是具有挠类群的 Pr¨ufer 域，且 $H \subseteq \overline{H}$ 是根扩张。现在，我们展示如何通过整环与其商域上的向量空间的平凡环扩张，构造一个 S-B´ezout 的几乎 B´ezout 环，而它不是 B´ezout 环，如下所示。

例 2.19. 设 F 是特征为 $p > 0$ 的域，且 $F \subseteq L$ 是一个纯不可分域扩张。考虑整环 $H = F + XL[X]$, $K := qf(A)$，其中 $R := H \propto K$ 是由 H 和 K 构成的平凡环扩张，且 $S := S_0 \propto E$ 是 R 的一个乘法封闭子集，其中 $S_0 := H - \{0\}$ 是 H 的一个乘法封闭子集。则：

(1) R 是一个 S-B´ezout 环。

(2) R 是一个几乎 B´ezout 环。

(3) R 不是一个 B´ezout 环。

证明。
(1) 根据定理 2.17 的断言 (2)，由于 H 是一个 S_0-B´ezout 环，因此 R 是一个 S-B´ezout 环。(2) 注意，$\overline{H} = L[X]$ 是一个具有挠类群的 Prüfer 整环，并且对每个 $Q \in L[X]$，都存在 $n \geq 0$ 使得 $Q^{p^n} \in H$.。因此，$H \subset \overline{H}$ 是一个根扩张。根据推论 4.8(1)，H 是一个几乎 B´ezout 整环，定理 3.1(2) 也说明 R [22，如此。
(3) R 不是 B´ezout 环，因为 H 是 R 的同态像，而后者不是 B´ezout（因为 H 不是整闭的）。□

定理 2.17 给出了一个新的 S-B´ezout 环的例子，它不是 B´ezout，如下所示。

例 2.20. 设 A 是一个非 B´ezout 整环，且不是域，$K = qf(A)$，并且 $R := A \propto K$ 是由 A 和 K构成的平凡环扩张。令 $S_0 = A - \{0\}$ 和 $S := S_0 \propto E$。那么，根据定理 2.17 的断言 (2)， R 是一个非 B´ezout S-B´ezout 环（因为 A是一个非 B´ezout S_0-B´ezout 环）。

现在，我们将注意力转向 S-B´ezout 环性质向环的粘合 $R := A \bowtie^f J$ 的传递。值得注意的是，若 S'是 R的乘法封闭子集，则对于某个 $j \in J\}$ ，$S_0 = \{a \in A/(a, f(a) + j) \in S'$是 A的乘法封闭子集。反过来，若 S_0 是 A的乘法集，则 $S' := S_0 \bowtie^f 0$ 和 $S_0 \bowtie^f J$ 是 R的乘法集。

定理 2.21. 设 A 和 B 是两个环， J 是 B 的一个理想，且设 $f : A \longrightarrow B$ 是一个环同态。那么：

(1) 若 $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，则 A 是一个 S_0-B´ezout 环。(2) 假设 $f(S_0) \cap J \neq \emptyset$。那么， $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，当且仅当 A 是一个 S_0-B´ezout 环。(3) 假设 $f(S_0) \cap J = \emptyset$, $J := ann(f(S_0))$，且 $A \bowtie^f J$ 的每个真理想都是齐次的。那么， $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，当且仅当 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

证明。（1）假设 $R := A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，并设 I 是由（a_i）$_{i=1, ..., n}$生成的 A 的有限生成真理想。则由（$a_i, f(a_i)$）$_{i=1, ..., n}$ 生成的 R的有限生成理想 J是 S-主理想，即存在（$s_0, f(s_0) + j$） $\in S$和（$a, f(a) + j'$） $\in R$，使得

$$(s_0, f(s_0) + j)J \subseteq R(a, f(a) + j') \subseteq J$$

因此

$$s_0 I \subseteq Aa \subseteq I.$$

因此， I 是 S_0-主理想，进而 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

（2）假设 $f(S_0) \cap J \neq \emptyset$。若 $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，则根据上面的断言（1）， A 是一个 S_0-B´ezout 环。反过来，假设A 是 S_0-B´ezout。设 $A \bowtie^f J$的一个有限生成理想为 L 。考虑理想 $I := \{a \in A/(a, f(a) + j) \in L$, 其中 $j \in J\}$属于 A。由于L 是 $A \bowtie^f J$的有限生成真理想，因此容易看出 I 是 A的有限生成真理想。利用 A 是一个 S_0-B´ezout 环这一事实，可知 I 是 A 的 S_0-主理想。因此，存在$s_0 \in S_0$ 和 $a \in A$ ，使得 $s_0 I \subseteq aA \subseteq I$。根据假设，存在$t \in S_0$使得 $f(t) \in J$。注意到 $ts_0 I \subseteq atA \subseteq tI \subseteq I$。因此， （$ts_0, 0$） $L \subseteq ts_0 I \times 0 \subseteq atA \times 0 \subseteq$ （$a, f(a)$） $tA \times 0 \subseteq$ （$a, f(a)$） $A \bowtie^f J \subseteq L$，因为 $f(t) \in J$且 $a \in I$。于是， L是 $A \bowtie^f J$的 S'-主理想，从而 $A \bowtie^f J$是一个 S'-B´ezout 环。

(3) 假设 $f(S_0) \cap J = \emptyset$, $J := ann(f(S_0))$，且每个真理想

$A \bowtie^f J$ 的每个理想都是齐次的。若 $A \bowtie^f J$ 是一个 S-B´ezout 环，则由上面的断言 (1)， A 是一个 S_0-B´ezout 环。反过来，假设 A 是一个 S_0-B´ezout 环。设 L 是 $A \bowtie^f J$的一个有限生成真理想。根据假设，对于某个有限生成真理想 I，有 $L:= I \bowtie^f J$ 。由于 A 是一个 S_0-B´ezout 环，因此存在 $s_0 \in S_0$ 和 $a \in A$，使得 $s_0 I \subseteq aA \subseteq I$。我们断言 $(s_0, f(s_0))L \subseteq (a, f(a))$ $A \bowtie^f J \subseteq L$。事实上，设 $(i, f(i) + k) \in L$。那么对于某个 $r \in A$，有 $s_0 i = ar$。因此，$(s_0, f(s_0))(i, f(i)+k) = (s_0 i, f(s_0 i)+kf(s_0)) = (s_0 i, f(s_0 i)) = (ar, f(ar)) = (a, f(a))(r, f(r)) \in (a, f(a))A \bowtie^f J \subseteq L$。因此可知， $I \bowtie^f J$是 $A \bowtie^f J$的一个 S'-主理想。最后， $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环，证毕。□

接下来，设 I 是 A 的一个真理想。 A 沿着 I 的（粘合）重复化是一种特殊的粘合，定义为

$$A \bowtie I := A \bowtie^{id_A} I = \{(a, a + i)/a \in A, i \in I\}.$$

下面的推论可由定理 2.21 直接推出，该定理讨论了 S-B´ezout 性质向重复化的传递。

推论 2.22。设 A 是一个环， I 是 A 的一个理想。则:

(1) 若 $A \bowtie I$ 是一个 S'-B´ezout 环，则 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

(2) 假设 $S_0 \cap I \neq \emptyset$。则 $A \bowtie I$ 是一个 S'-B´ezout 环，当且仅当 A 也是一个 S_0-B´ezout 环。(3) 假设 $S_0 \cap I = \emptyset$, $I := Ann(f(S_0))$，且 $A \bowtie I$ 的每个真理想都是齐次的。则 $A \bowtie I$ 是 S'-B´ezout，当且仅当 A 是一个 S_0-B´ezout 环。

定理 2.21 为现有文献增添了一类全新的、非 B´ezout 的 S-B´ezout 环。以下示例展示了如何构造这类环。

例 2.23. 设 A 是任意一个非 B´ezout 的 S-B´ezout 环（例如，取 $A:= B \propto E$ 为 B 关于 E 的平凡环扩张， $B := \mathbb{Z}$ 为整数环， $E := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\infty}$ 为一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-向量空间，参见例 2.2）。考虑满射环同态 $f : A \to B$ ，并设 $S_0 := \{(2^n, 0)/n \in \mathbb{N}\}$ 是 A 的一个乘法集，且 $J := 2\mathbb{Z}$ 是 B 的一个理想。那么:

(1) $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环。(2) $A \bowtie^f J$ 不是 B´ezout 环。

证明。(1) 首先，注意到 $f(S_0) \cap J \neq \emptyset$。由于 A 是一个 S_0-B´ezout 环（由例 2.2 可知），根据定理 2.21 的断言 (2)，可得 $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环。

(2) 我们声称， $A \bowtie^f J$ 不是 Bézout 环。事实上， A 是 $A \bowtie^f J$ 的同态像，因此不是 Bézout 环；又由于 Bézout 性质在商环下保持不变，所以 $A \bowtie^f J$ 不是 Bézout

环。 □

例 2.24。设 $A := A_1 \times A_2$ 是一个环（例如 $A := \mathbb{Z} \times K[X,Y]$，其中 $\mathbb{Z}$ 是整数环，而 $K[X,Y]$ 是域 K 上以 X、Y 为变量的二元多项式环）。考虑乘法集 $S_1 := \{3^n / n \in \mathbb{N}\}$ 和 $S_2 := K[X,Y] - \{0\}$，分别属于 $\mathbb{Z}$ 和 $K[X,Y]$；满射环同态 $f\colon \mathbb{Z} \times K[X,Y] \to \mathbb{Z}$ 定义为 $f((a,P)) = a$，以及 $\mathbb{Z}$ 的理想 $J := 3\mathbb{Z}$。设 $S = S_1 \times S_2$ 是 A 的一个乘法集，且 $S' := S \bowtie^f 0$ 是 $A \bowtie^f J$ 的一个乘法集。那么：

(1) $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´Bézout 环。

(2) $A \bowtie^f J$ 不是 Bézout 环。

证明。(1) 首先注意到 $A := \mathbb{Z} \times K[X,Y]$ 是一个 $S_1 \times S_2$-B´ezout 环（根据命题 2.13，因为 $\mathbb{Z}$ 是一个 S_1-B´ezout 环，且 $K[X,Y]$ 是一个 S_2-B´ezout 环）。另一方面，$f(S) \cap J = S_1 \cap J \neq \emptyset$。因此，根据定理 2.21 的断言 (2)，$A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环。

(2) $A \bowtie^f J$ 不是一个 B´ezout 环，因为 A 不是一个 B´ezout 环（因为 $K[X,Y]$ 不是一个 B´ezout 整环）。□

下面的例子表明，S-B´ezout 环类与几乎 B´ezout 环类通常并不相同；我们将利用定理 2.21 构造一个新的、原始的 S-B´ezout 环类，其中的环并非几乎 B´ezout。

例 2.25. 设 A 是一个非域整环，$f = id_A$ 是恒等环同态，且 $J := m$ 是 A 的一个极大理想。考虑 A 的乘法封闭子集 $S_0 := A - \{0\}$。则：

(1) $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环。

(2) $A \bowtie^f J$ 不是一个几乎 B´ezout 环。

证明。(1) 运用与例 2.4 中类似的论证，可得 A 是一个 S'-B´ezout 环。另一方面，$f(S_0) = f(A - \{0\}) \cap J = A - \{0\} \cap m \neq \emptyset$。因此，由定理 2.21 的断言 (2) 可得 $A \bowtie^f J$ 是一个 S'-B´ezout 环。

(2) 根据 [23, 推论 2.5]，$A \bowtie^f J$ 不是一个几乎 B´ézout 环，因为$J \neq 0$。□

现在，我们引入非幂零 S-B´ézout 环的概念。

定义 2.26. 设 $A \in \mathcal{H}$ 是一个环，$S \subseteq A$ 是一个乘法集。若对于 A的每个非幂零有限生成理想 I，都有 I 是 A的一个 S-主理想，则称 A为非幂零 S-B´ézout 环。

接下来，我们给出非幂零 S-B´ezout 性质的一个刻画。对于环 A的每个乘法集 S，令 $S' = \overset{S}{Nil}_{(A)} = \{s + Nil(A) \mid \overline{s} \in S\}$。容易看出，$S'$ 是 $\overset{A}{Nil}_{(A)}$的一个乘法集。

定理 2.27. 设 $A \in \mathcal{H}$ 是一个环，$S \subseteq A$ 是一个乘法集。那么，A是一个非幂零 S-B´ezout 环，当且仅当 $Nil^{A}(A)$ 是一个 S'-B´ezout 整环。

证明。假设 A 是一个非幂零 S-B´ezout 环，且 $Nil^{I}(A)$ 是 $Nil^{A}(A)$ 的有限生成理想。我们要证明 $Nil^{I}(A)$ 是 $Nil^{A}(A)$ 的一个 S'-主理想。不妨设 $Nil^{I}(A) \neq 0$。因此，I 是 A 的一个非幂零理想。根据 [10, 引理 2.4]，I 是非幂零 S-B´ezout 环 A 的有限生成理想，因为 $Nil^{I}(A)$ 是 $Nil^{A}(A)$ 的有限生成理想。因此，I 是 A 的一个 S-主理想。于是，存在 $s \in S$，使得对某个 $a \in A$，$sI \subseteq aA \subseteq I$ 成立。由此可得，存在 $s' \in S'$ 和 $\bar{a} \in Nil^{A}(A)$，使得对某个 $s \in S$，$s' Nil^{I}(A) \subseteq \bar{a} Nil^{A}(A) \subseteq Nil^{I}(A)$，其中 $s' = \overline{s + Nil(A)}$。因此，对某个 $b \in A$，$\bar{a} Nil^{A}(A) = (ab + Nil(A))$。于是，$Nil^{I}(A)$ 是 $Nil^{A}(A)$ 的一个 S'-主理想，从而 $Nil^{A}(A)$ 是一个 S'-B´ezout 整环。反过来，假设 $Nil^{A}(A)$ 是一个 S'-B´ezout 整环，且 I 是 A 的一个有限生成非幂零理想。根据 [10, 引理 2.4]，$Nil^{I}(A)$ 是 S'-B´ezout 环 $Nil^{A}(A)$ 的一个非零有限生成理想。因此，$Nil^{I}(A)$ 是 $Nil^{A}(A)$ 的一个 S'-主理想。于是，存在 $s' \in S'$ 和 $\bar{a} \in Nil^{A}(A)$，使得对某个 $s \in S$，$s' Nil^{I}(A) \subseteq \bar{a} Nil^{A}(A) \subseteq Nil^{I}(A)$，其中 $s' = s + Nil(A)$。因此，对某个 $b \in A$，$\bar{a} Nil^{A}(A) = (ab + Nil(A))$。我们有 $\bar{a} Nil^{A}(A) \cong Nil^{J}(A)$。我们要证明 J 是由 a 生成的 A 的主理想。取 J 中的一个非幂零元 x。那么，对某个 b 属于 A，在 $Nil^{A}(A)$ 中有 $x + Nil(A) = ab + Nil(A)$。因此，存在 $w \in Nil(A)$，使得 $x + w = ab$ 属于 A。由于 x 是非幂零元，对某个 $k \in Nil(A)$，有 $w = xk$。因此，$x + w = x + xk = x(1 + k) = ab$。利用 $k \in Nil(A)$ 这一事实，从而 $1 + k \in U(A)$，可得 $x \in aA$，因此 J 是由 a 生成的 A 的主理想。容易验证 $sI \subseteq aA = J \subseteq I$，所以 I 是 A 的一个 S-主理想。因此，A 是一个非幂零 S-B´ezout 环，证毕。□

作为定理 2.27 的推论，我们得出非零幂零元 S-B´ezout 环的如下刻画。

推论 2.28. 设 $A \in \mathcal{H}$ 是一个环，$S \subseteq A$ 是一个乘法集。那么，A 是一个非零幂零元 S-B´ezout 环，当且仅当 $\phi(A)$ 是一个非零幂零元 $\phi(S)$-B´ezout 环。

证明。假设 A 是一个非幂零 S-B´ezout 环。根据定理 2.27，$Nil^{A}(A)$ 是一个 S'-B´ezout 整环，且 $S' = Nil^{S}(A)$。由 [11, 引理 2.1] 可知，$Nil^{A}(A) \cong_{\phi(A)} Nil(\phi(A))$，因此 $\phi(A)\, Nil(\phi(A))$ 是一个 $\phi(S)\, Nil(\phi(S))$-B´ezout 整环。因此，根据定理 2.27，$\phi(A)$ 是一个非幂零 $\phi(S)$-B´ezout 环。反向结论可用与前面类似的论证得到。□

下面的例子通过构造一类新的非幂零 S-B´ezout 环（该环不是 B´ezout 环），阐明了定理 2.27。

例 2.29. 设 A 是任意一个非 B´ezout S-B´ezout 整环，它不是域，商域为 K，且 $S \subseteq A$ 是一个乘法集。设 K 是 A 的商域。那么 $A \propto K$ 是一个非幂零 S-B´ezout 环，但不是 B´ezout 环。

证明。令 $R = A \propto K$。首先，$Nil(R) = 0 \propto K$ 是 R 的分裂素理想。事实上，设 $(0, e) \in Nil(R)$ 且 $(a, f) \in R \setminus Nil(R)$。那么 $(0, e) = (a, f)(0, \frac{e}{a})$，因此 $R \in \mathcal{H}$。由于 $\overset{R}{Nil}(R)$ 与 $\overline{A \text{ 环}}$同构，故根据定理 2.27，R 是一个非幂零 S-B´ezout 环。此外，R 不是 B´ezout 环。□

下面的定理在一种特殊的拉回情形下，给出了非幂零 S-B´ezout 环的刻画。

定理 2.30. 设 $A \in \mathcal{H}$ 和 $S \subseteq A$ 为乘法集。那么，A 是非幂零 S-B´ezout 环，当且仅当 $\phi(A) \cong R$，其中 R 由下列拉回图得到：

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \longrightarrow & T/M \end{array}$$

其中，T 是极大理想为 M的零维拟局部环，$B := R/M$ 是 T/M 的 S_1-B´ezout 子环，且满足 $S_1 = \alpha(\phi(S))/M$，其中 α是从 $\phi(A)$ 到 R的环同构，竖直箭头是通常的包含映射，水平箭头是通常的满射。

证明。假设 $\phi(A) \cong R$ 由给定的图得到。那么 $R \in \mathcal{H}$且 $Nil(R) = Z(R) = M$。由于 R/M是一个 S_1-B´ezout 整环，根据定理 2.27，R 是非幂零 S_2-B´ezout 环，其中 $S_2 = \alpha(\phi(S))$，因此 $\phi(A)$是非幂零 $\phi(S)$-B´ezout 环。于是，A 是非幂零 S-B´ezout 环。反过来，假设 A 是非幂零 S-B´ezout 环。令 $T = A_{Nil(A)}$，$M = Nil(A_{Nil(A)})$，而 $R = \phi(A)$给出所需的拉回图。□

3. Conflict of Interest

代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

References

[1] Ali, M. M.（2006） *Idealization and Theorem of D. D. Anderson*。Commun. Algebra。34，4479-4501。

[2] Anderson, D.F., Badawi, A. (2004). *On ϕ-Prüfer and ϕ-Bézout rings*.《休斯敦数学杂志》30 (2004), no. 2, 331-343. [3] Anderson D.D., Zafrullah M. (
1991 *Almost Bezout domains* 142, 2,). .《代数杂志》285 309
no. - .[4] Anderson, D.D., Dumitrescu, T. (
2002 *S-Noetherian rings* 30,). .
4407 4416
Commun. Algebra - .[5] Anderson, D.D., Winders, M. (2009). *Idealization of a module*.《交换代数杂志》1(1), 3-56. [6] Badawi, A. (1995). *On divided rings and ϕ-pseudo-valuation rings*. 交换环理论, 57–67,《纯数学讲义》, 185, Dekker, 纽约, 1997. [7] Badawi, A. (1999).
On ϕ-pseudo-valuation rings,《纯数学讲义》205, 101-110, Marcel Dekker, 纽约/巴塞尔. [8] Badawi, A. (2001). *On ϕ-chained rings and ϕ-pseudo-valuation rings*.《休斯敦数学杂志》27, no. 4, 725-736. [9] Badawi, A. (2000). *On ϕ-pseudo-valuation rings II*.《休斯敦数学杂志》26, no. 3, 473- 480.[10] Badawi, A. (2005). *Factoring nonnil ideals into prime and invertible ideals*.《伦敦数学会通报》37, no. 5, 665-672. [11] Badawi, A. (2003). *On nonnil-Noetherian rings*. Commun. Algebra 31 no. 4, 1669- 1677.[12] Badawi, A. (1999). *On divided commutative rings*. Commun. Algebra 27, 1465-1474. [13] Bennis, D., El Hajoui, M. (2018). *On S-coherence*.《韩国数学会杂志》55(6), 1499- 1512.[14] Chhiti, M., Mahdou, S. E. (2023).
When every regular ideal is S-finite.《数学问题》published online, DOI: 10.2989/16073606.2023.2248550. [15] D'Anna, M., Finocchiaro, C.A., Fontana, M. (
2010 *Properties of chains of prime*). .《纯粹与应
ideals in amalgamated algebras along an ideal 214, 1633
用代数杂志》- 1641.[16] D'Anna, M. (2006). *A construction of Gorenstein rings*.《代数杂志》306 (6), 507–519. [17] D'Anna, M., Fontana, M. (
2007 *An amalgamated duplication of a ring along an*). .《代数及其
ideal: the basic properties 6 3 443 459
应用杂志》( ), - . [18] El Khalfi, A., Kim, H., Mahdou, N. (
2022 *Amalgamation extension in commutative*). .《摩洛哥代
ring theory : a survey
数与应用几何杂志》1(1), 139-182. [19] Glaz, G. (1989). *Commutative Coherent Rings*.《数学讲义》, 1371, Springer-Verlag, 柏林 . [20] Huckaba, J.A. (1988). *Commutative Rings with Zero Divisors*. Dekker, 纽约. [21] Kabbaj, S., Mahdou, N. (2004).
Trivial extensions defined by coherent-like conditions. Commun. Algebra 32(1), 3937-3953. [22] Mahdou N., Mimouni A. and M. A. S. Moutui (
2015 *On almost valuation and almost*). . Co
Bézout rings 43 2015 4534 4548
mmun. Algebra ( ), - . [23] Moutui, M. A. S., Ouled Azaiez, N. (
2020 *Some commutative ring extensions defined*). . Hacet. J.
by almost Bézout condition 49 , 1, 371 379
Math. Stat. no. - .

Mohamed Chhiti, Laboratory of Modelling and Mathematical Structures, Faculty of Economics and Social Sciences of Fez University S.M. Ben Abdel- , , lah Fez Morocco.

$E-mail\ address$： chhiti.med@hotmail.com

Salah Eddine Mahdou Laboratory of Modelling and Mathematical Structures Faculty of Science and Technology of Fez Box 2202 University S. M. Ben Abdellah Fez, Morocco.

$E-mail\ address:$ $salahmahdoulmtiri@gmail.com$

Moutu Abdou Salam Moutui Division of Science Technology and Mathematics American University of Afghanistan Doha Qatar.
Email address: mmoutui@auaf.edu.af