arXiv:2301.07387v1 [math.GT] 18 Jan 2023

格复双曲三角群的镜面稳定子

MARTIN DERAUX

Abstract. 对于每个格复双曲三角群，我们研究其复反射镜面各群轨道中一个代表元的福克斯群稳定子。我们给出这些稳定子的显式生成元，并按照福克斯群的意义计算其签名。对于其中一些三角群，我们还找到了显式的复直线对，使得它们的稳定子之并生成环境格。

1. Introduction

回顾一下，复双曲平面 $H^2_{\mathbb{C}}$ 是一个全纯截面曲率为常负值 -1的厄米对称空间。其真实截面曲率满足 $-1 \leq K_{sect} \leq -1/4$，其中上下界分别由全测地的 $H^1_{\mathbb{C}}$ （复直线）和 $H^2_{\mathbb{R}}$ （拉格朗日子空间）的切平面取得。其全纯等距变换群同构于 $G = PU(2,1)$（该群在包含反全纯变换的整个等距变换群中的指数为二）。

对于每条复直线 L，都有一个显然的嵌入，将 $U(1,1)$ 嵌入 $U(2,1)$，其像保持 L不变；这给出了 $Stab_G(L)$ 的一种描述：它是 $PU(1,1)$ 关于不动点稳定子的中心扩张，而不动点稳定子是固定 L的复反射所构成的子群。

每条复直线都是一单参数族等距变换的不动点集，这些变换称为复反射（注意，它们的阶可以是任意的）。如果子群 $\Gamma \subset G$ 由复反射生成，我们就称它为复反射群。可由 3 个复反射生成的复反射群称为复三角群。

如果子群 Γ 是 G 的离散子群，且商空间 $\Gamma\backslash H^2_{\mathbb{C}}$ 具有有限体积，我们就称 Γ 为格。从某种意义上说，离散性假设意味着 Γ 不能太大，而有限体积假设则意味着 Γ 不能太小.....这使得同时满足这两个条件的群很难找。不过，格确实存在，这要归功于 Borel [3]的非常一般的结果；其基本思路是采用“算术方法”，我们可以将其视为这样一个事实的强化版本： $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ 是离散的，且 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 具有有限勒贝格测度。

另一种构造格的重要（但困难）方法，是使用（经过非常谨慎挑选的）复反射群。Mostow [20] 采用这种方法构造了首批非算术格（无法通过算术构造得到的格）的例子。还有许多其他方法，运用了关于一致化的各种思路（例如参见 [1], [7], [5] ），但本文仅关注在

日期：2023年1月18日。

[14]中构造的群；后者可被视为对 Mostow 在 [20]中提出的基本思想的一种可能推广。

用于推广 Mostow 的构造的技术非常复杂，我们几乎不会涉及其中任何一种。我们将 [14] 中的结果直接作为黑箱使用，尽可能简略地处理技术细节。

为方便行文，我们将 [14] 中构造的格称为格复双曲三角群（这一术语可能略有误导，因为实际上可能还存在其他格复双曲三角群，但我们预计 [12] 中的搜索相当全面）。

关键在于，格复双曲三角群分为三族群

$$\mathcal{S}(p,\tau), \quad \mathcal{T}(p,\mathbf{T}), \quad \Gamma(p,t)$$

其中，$p\in\mathbb{N}$、$p\geq 2$、$\tau\in\mathbb{C}$、$\mathbf{T}\in\mathbb{C}^3$、$t\in\mathbb{Q}$ 是经过精心选择的参数（参见 [14] 的附录中的列表）。

格 Γ（p、t）是 Mostow 在 [20], 中研究过的那些格；由于它们已有许多其他描述（例如参见 [7], [22] ），本文不予讨论。

对于每个格复双曲三角群，读者都可以找到生成该群的显式矩阵、其在 $H^2_{\mathbb{C}}$ 上的作用的基本域描述，以及以生成元和关系表示的群表示（见 [14], [8]；关于较新的进展，另见 [9] ）。

下文中，令 Γ 表示一个格复双曲三角群，令 $X=\Gamma\backslash H^2_{\mathbb{C}}$ 表示其商空间。本文的主要目标是研究商映射 $H^2_{\mathbb{C}}\to X$的分支轨迹（其一维部分）的一些细节性质。事实上，根据 [14], 中的结果，可以提取出一份列表 A_1，.....，A_r，其中列出了群中复反射共轭类的代表元。对于每个 j，$Stab_\Gamma(A_j)$都是一个格 $F_j\subset PU(1,1)$的中心扩张。我们的目标是描述这些群 F_j；对于每个格复双曲三角群，我们列出镜像稳定子的群轨道，并对其中每一个，我们

- 求出一个显式生成集，并
- 确定相应福克斯群的签名、其迹域及其算术性

根据论文中的结果，可以写出镜面稳定子的显式表示（此类表示的一个例子见方程（7））。

我们希望我们的结果能为若干方面提供有用的信息。一个用途是尝试理解商空间 $X=\Gamma\backslash H^2_{\mathbb{C}}$ 以及商映射 $H^2_{\mathbb{C}}\to X$的分支行为；在某些情况下，商映射已得到完全理解（见 [11]和 [10]）。另一个用途是研究复双曲格三角群可能具有的混合结构（见 [23], [16]）；我们将在第 11 节给出一些具体例子。最后，这些信息有助于研究 $X=\Gamma\backslash H^2_{\mathbb{C}}$中反射于镜面上的闭测地线的计数与等分布性质，见 [15, §5。2],这也是撰写本文的初衷。

关于格复双曲三角群的福克斯群子群的部分分析由 Sun 在 [21]中完成。该文只讨论了部分群以及部分复反射的共轭类，但我们采用相同的方法。关于 Sun 列出的子群的算术性的信息，可见 Jiang、Wang 和 Yang 最近发表的一篇论文 [18]。

2. Basic complex hyperbolic geometry

设 V 是一个 (n+1) 维复向量空间，且 $h\colon V\times V\to\mathbb{C}$ 是一个签名为 $(n,1)$ 的厄米形式。我们将 $\langle X,Y\rangle$ 记为 $h(X,Y)$，将 $||X||^2$ 记为 $h(X,X)$（它是实数，但不一定为正）。用 V^-（分别为 V^0, V^+）表示满足 $X\in V$ 且 $||X||^2<0$（分别为 $=0,>0$）的向量集合。

该形式的等距变换群为

$$U(h)=\{A\in GL(V):\forall X,Y\in V, h(AX,AY)=h(X,Y)\},$$

我们将其视为实李群。根据西尔维斯特惯性定律，该李群与厄米形式的选取无关（在李群同构的意义下）。

考虑射影化映射 $\pi\colon V\setminus\{0\}\to\mathbb{P}(V)$，并定义 $H^2_{\mathbb{C}}=p(V^-)$，$\partial_\infty H^n_{\mathbb{C}}=p(V^0\setminus\{0\})$。一个标准事实是，$PU(h)$ 在 $H^n_{\mathbb{C}}$ 上传递作用，在 $\partial H^n_{\mathbb{C}}$ 上也传递作用（事实上，它还在 $p(V^+)$ 上传递作用）；这些齐性空间截然不同，因为只有在 $H^n_{\mathbb{C}}$ 的情形下，点的稳定子才是紧的。

众所周知，$H^n_{\mathbb{C}}$ 带有一个 $PU(h)$-不变黎曼度量（而 $\partial_\infty H^n_{\mathbb{C}}$ 则没有，$p(V^+)$ 也没有），因此它是一个厄米对称空间。感兴趣的读者可以例如在 [19] 中找到该度量的表达式。相应的积分距离公式很容易写出：

$$\cosh(\frac{1}{2}d(\mathbf{X},\mathbf{Y}))=\frac{|\langle X,Y\rangle|}{\sqrt{||X||^2||Y||^2}},\tag{1}$$

其中，$X\in V$（分别为 $Y\in V$）是 $\mathbf{X}\in H^n_{\mathbb{C}}$（分别为 $\mathbf{Y}\in H^n_{\mathbb{C}}$）的任意一个提升。加入因子 $\frac{1}{2}$ 是为了将度量缩放至全纯截面曲率恒等于 -1。

对于任意 $k\le n$，在 $H^n_{\mathbb{C}}$ 中都存在 $H^k_{\mathbb{C}}$ 的全测地子空间；其构造方法是选取一个 $(k+1)$ 维复子空间 $W\subset V$，使得 $h|_W$ 的签名为 $(k,1)$。类似地，取一个全实的 (k+1) 维子空间 $R\subset V$，也可得到 $H^k_{\mathbb{R}}$ 的全测地子空间；也就是说，$R\subset V$ 是由向量 v_0、……、v_k 张成的 $\mathbb{R}$ 空间，且对所有 j，k 都有 $\langle v_j, v_k\rangle\in\mathbb{R}$。众所周知，$H^n_{\mathbb{C}}$ 的每个完备全测地子流形都属于上述类型（参见 [4]第 2.5 节）。

注意，对于所有的 $n\ge 2$，$H^n_{\mathbb{C}}$ 的曲率都不是常数。更准确地说，我们有以下结论（参见 [4] 或 [17]）。

命题2.1。$H^n_{\mathbb{C}}$ 的实截面曲率包含于 $[-1,-1/4]$。曲率为 -1 的实二维平面是 $H^1_{\mathbb{C}}$全测地子空间的切平面，而曲率为 $-1/4$ 的实二维平面是$H^2_{\mathbb{R}}$全测地子空间的切平面。

由于 h 非退化，它在复k平面的格拉斯曼流形与（$n-k$）平面的格拉斯曼流形之间定义了一个双射，其中 W 与 $W^{\perp}=\{X\in V$对应： $\forall Y \in W, \langle X,Y\rangle=0\}$。作为一个重要的特例，当 $k=n-1$时，我们得到一个以正直线为参数的 $H^{n-1}_{\mathbb{C}}$ 全测地子空间参数化，即由 $p(V^{+})$参数化。对于 $X\in V^{+}$，我们常会滥用记号，用 $X^{\perp}$ 表示 $p(V^{-}\cap X^{\perp})$。

命题 2.2. 设 $X,Y\in V^{+}$。复超平面 $X^{\perp}$ 和 $Y^{\perp}$ 在 $H^{2}_{\mathbb{C}}$中相交，当且仅当

$$c:=\frac{|\langle X,Y\rangle|}{\sqrt{||X||^{2}||Y||^{2}}}<1.$$

若它们 在 $H^{2}_{\mathbb{C}}$中相交，则交角恒为 α，且有 $c=\cos(\alpha)$.

给定一个正向量 $U\in V$，容易看出，对于任意满足 $|\zeta|=1$ 的 $\zeta\in\mathbb{C}$，公式

$$R_{U,\zeta}(X)=X+(\zeta-1)\frac{\langle X,U\rangle}{\langle U,U\rangle}U, \tag{2}$$

定义了 $U(h)$中的一个元素。它逐点固定 $U^{\perp}$，并在与其不动点集正交的复方向上旋转 $\arg(\zeta)$。用线性代数的术语来说，它是一个可对角化的线性变换，其特征值为 $(\zeta,1,\dots,1)$，且 h 在 1- 特征子空间上的限制具有签名 $(n-1,1)$。

我们将相应的等距变换 $R_{U,\zeta}\in PU(h)$ 称为以 $U^{\perp}$ 为镜面的复反射。将 U 替换为 λU（其中 $\lambda\in\mathbb{C}$），不会改变 $R_{U,\zeta}$，因此不妨设 $\langle U,U\rangle=1$。复数 ζ 称为该复反射的乘子， $arg(\zeta)$ 称为旋转角。

若 U 是负向量，公式 (2) 仍有意义；此时我们将$R_{U,\zeta}$ 称为点上的复反射；在这种情况下， $p(U)$ 是它在 $H^{n}_{\mathbb{C}}$ 中唯一的不动点（特别地，当$\zeta=-1$时，我们得到只有一个不动点的等距对合）。

注释 2.3. 一个标准结论是，两个复反射 R_{U_1,ζ_1}, R_{U_2,ζ_2} 可交换，当且仅当 $U_1^{\perp}=U_2^{\perp}$ 或 $\langle U_1, U_2\rangle=0$。

我们采用 $PU(h)$等距变换的通常分类，将其分为椭圆元素、抛物型元素和双曲元素（见 [17]第 6.2 节）。在椭圆元素中，我们区分出正则元素，其矩阵代表元具有 $(n+1)$ 个互不相同的特征值。非正则椭圆元素有时也称为特殊椭圆元素。抛物型元素和双曲元素也有更细致的分类，但本文不需要用到这些分类。

从现在起，我们将讨论范围限制在 $n=2$的情形。在这种情形下，每个椭圆等距变换要么是正则椭圆变换，要么是复反射，要么是点上的复反射。

现在设 $A\in PU(h)$ 为正则椭圆变换。选取 V 的一组基 $\mathcal{E}=e_0,e_1,e_2$，使其将 A 对角化；将对应的（互异）特征值记为 ζ_0,ζ_1,ζ_2。由于 A 是椭圆型的，我们必须有 $|\zeta|=1$，对所有 $j=1$、2、3 均成立。此外，由于具有不同特征值的特征向量彼此正交， $\mathcal{E}$ 是 h-正交的；又由于 h 的签名，基向量中恰有一个是 h-负的。通过重新排列并缩放，我们不妨设 $||e_0||^{2}=-1$

且 $||e_1||^2 = ||e_2||^2 = 1$。那么，$\mathbf{e_0} = p(e_0)$ 是 A 在 $H^2_{\mathbb{C}}$ 中的孤立不动点。复 2-平面 $L_1 = \mathbb{C}\{e_0, e_1\}$ 和 $L_2 = \mathbb{C}\{e_0, e_2\}$ 投影到复直线 $\mathbf{L_1}$ 和 $\mathbf{L_2}$，二者均为 A-不变的（并且这是经过 $\mathbf{e_0}$ 的、 A-不变的仅有的复直线）。在 $\mathbf{L_j}$ 中， A 的作用表现为旋转 $arg(\zeta_j/\zeta_0)$。

反过来，设正向量 U_j 满足 $\mathbf{L_j} = p(V^- \cap U_j^{\perp})$。假设 $\mathbf{L_1}$ 和 $\mathbf{L_2}$ 正交，即 $\langle U_1, U_2\rangle = 0$（参见公式 (2.2)）。那么对于任意满足 $|\zeta_j| = 1$ 的 ζ_j，乘积

$$R_{U_1,\zeta_1} R_{U_2,\zeta_2}$$

由相互交换的复反射构成的乘积是椭圆型的。当且仅当 $\zeta_1 \neq \zeta_2$ 时，它是正则椭圆变换。

注意，若对于某个 $k \in \mathbb{N}^*$， A^k 是特殊椭圆元素，则 A^k 要么是点上的复反射，要么是复反射。后一种情况下， A^k 的镜像必定是 $\mathbf{L_1}$ 或 $\mathbf{L_2}$。

3. 格复双曲三角群

关于格 $\mathcal{S}(p,\tau)$ $\mathcal{T}(p, \mathbf{T})$ 的详细描述，请参阅 [14]。此外，读者也可以从 [9] 下载 Magma 格式的矩阵。

这里我们只给出 R_1, R_2, R_3 的显式生成元，它们属于 $\mathcal{T}(p, \mathbf{T})$，其中 $p \in \mathbb{N}^*$，且 $\mathbf{T} = (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3$（取 $\rho = \sigma = \tau$ 时，这些生成元便特化为 $\mathcal{S}(p,\tau)$ 的生成元）。

定义 3.1. 对于 $\mathbf{T} = (\rho, \sigma, \tau) \in \mathbb{C}^3$，群 $\mathcal{T}(p, \mathbf{T})$ 是 $U(H)$ 的子群，由 R_1, R_2 和 R_3 生成（见公式 (3) 和 (4)），其中 $u = e^{2pi/3p}$, $\alpha = 2 - u^3 - \bar{u}^3$, $\beta_1 = (\bar{u}^2 - u)\rho$, $\beta_2 = (\bar{u}^2 - u)\sigma$, $\beta_3 = (\bar{u}^2 - u)\tau$。

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta_1 & \overline{\beta}_3 \\ \overline{\beta}_1 & \alpha & \beta_2 \\ \beta_3 & \overline{\beta}_2 & \alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} u^2 & \rho & -u\overline{\tau} \\ 0 & \bar{u} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix};\ R_2 = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 \\ -u\bar{\rho} & u^2 & \sigma \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{pmatrix};\ R_3 = \begin{pmatrix} \bar{u} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{u} & 0 \\ \tau & -u\bar{\sigma} & u^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

注 3.2. (1) 若 e_1, e_2, e_3 表示 $\mathbb{C}^3$ 的标准基，则按照公式 (2) 的记号，我们有 $R_j = \bar{u} R_{e_j, u^3}$，因此可以根据 H 的数据轻松重构矩阵 R_j。

（2）加入因子 $\bar{u}$，是为了得到 $SU(H)$ 中的矩阵，而不只是 $U(H)$ 中的矩阵。

当 $\rho = \sigma = \tau$ 时，该映射

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $U(H)$ 中的一个三阶正则椭圆元，并且我们有

$$JR_1J^{-1} = R_2, \quad JR_2J^{-1} = R_3.$$

τ 或 T	p
$\sigma_1 = -1 + i\sqrt{2}$	3,4,6
$\bar{\sigma}_4 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$	3,4,5,6,8,12
$\sigma_5 = e^{-\pi i/9}\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{2}^2$	2,3,4
$\sigma_{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	3,4,5,10
$\mathbf{S_2} = (1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1, 1)$	3,4,5
$\mathbf{E_2} = (\sqrt{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \sqrt{2})$	3,4,6
$\mathbf{H_1} = (\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, e^{-4\pi i/7}, e^{-4\pi i/7})$	2
$\mathbf{H_2} = (-1 - e^{-2\pi i/5}, e^{4\pi i/5}, e^{4\pi i/5})$	2,3,5

TABLE 1. 已知格复双曲三角群的参数取值

定义3.3. 对于 $\tau \in \mathbb{C}$， $\mathcal{S}(p,\tau)$ 是由 R_1 和 J 生成的 $U(H)$ 的子群，其中 $u = e^{2pi/3p}$、$\alpha = 2 - u^3 - \bar{u}^3$、 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = (\bar{u}^2 - u)\tau$。

注记3.4. 对于参数 p 和 T 的任意选取，群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{T})$ 通常不是离散的；此外，由厄米矩阵H 给出的 $\mathbb{C}^3$ 上的厄米形式通常甚至不具有 (2,1) 签名。

我们将只考虑参数如表 3 所示的群，该表给出了所有已知为复双曲三角群的格的代表元，Mostow群除外。请注意，已知还有一些其他参数也能给出格（换言之，有些格可以有多种三角群描述，参见 [14]的第7节）。

4. BRAID RELATIONS BETWEEN COMPLEX REFLECTIONS

每个群的结构（以及其在 $H^2_{\mathbb{C}}$ 上作用的基本域）都可以通过生成元的适当共轭元之间的辫关系方便地编码。回顾一下，群中的两个元素 a、b 满足长度为 $n \in \mathbb{N}^*$ 的辫关系，当且仅当

$$(ab)^{n/2} = (ba)^{n/2}. \tag{5}$$

当 n 为奇数时，按惯例 $(ab)^{n/2} = a\cdot b\cdot a\cdot b\cdot a\cdots b\cdot a$（$n$ 个因子）。当等式 (5) 成立时，我们记作 $\mathrm{br}_n(a,b)$；若 n 是使 $\mathrm{br}_n(a,b)$ 成立的最小 n，则称 a 和 b 的辫长为 n，并记作 $\mathrm{br}(a,b) = n$。

我们只讨论复反射之间的辫关系。以下是一个重要结果（参见 [14] 中的命题 2.5）。

命题 4.1. 设 R_1 和 R_2 是 $PU(2,1)$ 中具有不同镜面的复反射，乘子分别为 $\zeta_1 = e^{2\pi i/p_1}$ 和 $\zeta_2 = e^{2\pi i/p_2}$（$p_j \in \mathbb{N}$, $p_j \geq 2$）。设对某些 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$，有 $\mathrm{br}_n(R_1, R_2)$。若 n 为奇数，则令 $Z = (R_1R_2)^n$；若 n 为偶数，则令 $Z = (R_1R_2)^{n/2}$。

(1) Z 与 R_1 和 R_2均可交换。(2) 如果 $\mathrm{br}_n(R_1, R_2)$ 中的 n 为奇数，那么 R_1 和 R_2 共轭，特别是 $p_1 = p_2$。

容易看出，按 4.1 中定义的 Z 具有一个重特征值，因此它必定是抛物型、复反射或点上的复反射（请回想我们使用的是 $H^2_{\mathbb{C}}$，所以齐次坐标位于三维复向量空间中）。通过考察 R_1 和 R_2的镜面在射影空间中的交点相对于 $H^2_{\mathbb{C}}$ 的位置，可以区分这三种情形。事实上，如果镜面相交于$H^2_{\mathbb{C}}$ （分别相交于 $\partial_\infty H^2_{\mathbb{C}}$、分别在 $\overline{H_{\mathbb{C}}}^2$之外），那么 Z 就是点上的复反射（分别为抛物型、复反射）。

令 $R_j = R_{U_j,\ \zeta_j}$ （见公式 (2)），这三种情况可以通过计算方便地刻画如下。考虑 $X = U_1 \boxtimes U_2$，它是$U_1^* H$ 和 $U_2^* H$ 的通常叉积；根据构造，$\langle X、\ U_1\rangle = \langle X、\ U_2\rangle = 0$，因此 $\mathbb{C}X$ 是射影平面中镜面的交点。于是有

命题 4.2。若 Z，则它是复反射；若 $||X||^2 > 0$，则它是抛物型；若 $||X||^2 = 0$，则它是点上的复反射。

当 Z 是复反射时，命题 4.1 的第 (1) 部分说明它与 R_1 和 R_2 都可交换，因此 Z 的镜面是 R_1 和 R_2 的镜面之间的公垂复直线。

第 3 节中各群对应的辫关系见 [14] 的附录。一个重要之处在于，这些关系只取决于 T，而不取决于 p。事实上，对于给定 T 值（但 p 值不同）的格，其基本区域几乎相同；它们仅在简单的截断过程上有所不同（见第 5 节的讨论）。

5. Sides of our fundamental domain

本节简要回顾 [14]中所述基本域各边的构造。

众所周知，$H^2_{\mathbb{C}}$ 中不存在全测地实超曲面（这可由其具有非恒定实截面曲率这一事实推出）。尤其是，[14] 中构造的基本域各边并非全测地的。

另一方面，其骨架的一部分是全测地的：具体而言，1-骨架仅由测地弧构成，而2-骨架中的一些面也全测地。

回想一下，我们的区域的每个侧面都构造在一个等分超曲面内，也就是到给定两点距离相等的点的轨迹。如今，等分超曲面（甚至等距面交集）的几何结构已得到充分理解，参见 [17]第5章。每个等分超曲面 $\mathcal{B}$ 在拓扑上都是一个3-球，并带有由复直线构成的叶状结构（称为$\mathcal{B}$的复切片），以及由实平面构成的奇异叶状结构（称为实切片）；这些实平面均交于 $H^2_{\mathbb{C}}$ 中的一条固定实测地线（称为 $\mathcal{B}$的实脊）。包含该实测地线的唯一复直线称为 $\mathcal{B}$的复脊。

如果 $\mathcal{B}$ 是等分超曲面，且 p、$q \in \mathcal{B}$，则经过 p 和 q 的实测地线包含在 $\mathcal{B}$ 中，当且仅当 p、q 位于 $\mathcal{B}$的实切片或复切片中。如果这两点之一位于实脊上，则这一条件总是成立。我们的区域采用后一种性质，即每个侧面都构造为等分超曲面 $\mathcal{B}$内的一个（可能经过截断的）测地锥，其底面是

锥体的底面是 $\mathcal{B}$的复切片中的一个多边形，其锥顶位于 $\mathcal{B}$ 的实脊上（参见 [14] 的图 4.2，以及 [14] 附录中的图片，其中展示了截锥的示例）。

包含锥体底部的复切片由三角群中精心选取的复反射镜面给出（事实上，它们是生成反射 R_1、 R_2 和 R_3 的适当共轭元）。底面多边形的顶点要么是反射镜面的交点，要么是在需要截断时与两面反射镜面的公垂线的交点（见第4节）。

例如，在图1中，我们重现了 [14] 附录中的一些图。令

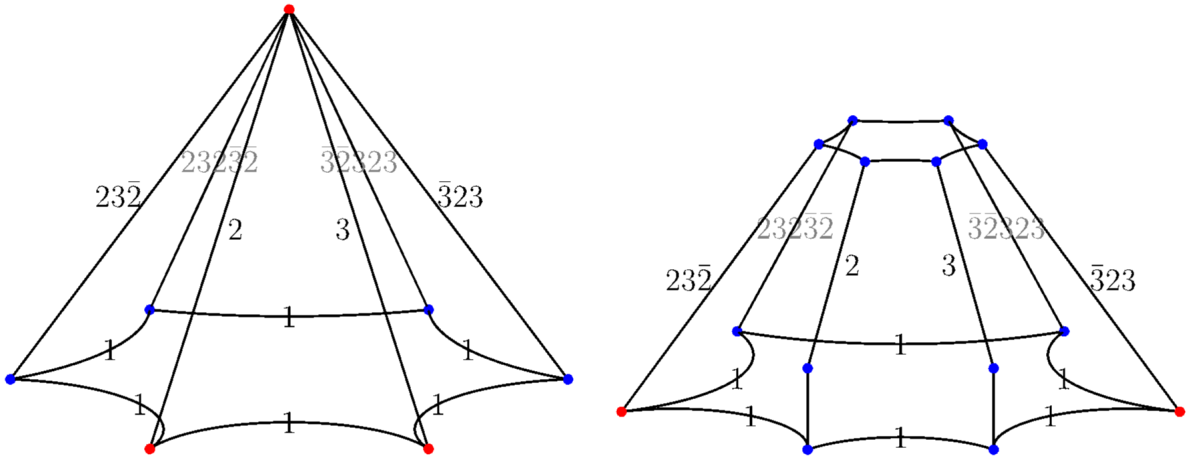

FIGURE 1. 我们关于 $\mathcal{S}(p,\sigma_1)$,$p=3$ （左侧）或 4（右侧）的基本域中若干边的图示

我们先来关注图的左半部分，它对应于 $p=3$ 的情形，即 $R_j = R_{e_j,\zeta_3}$，其中 $\zeta_3 = e^{2\pi i/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$。标签表明，底面是 R_1 的镜面（即 $e_1^{\perp}$）中的一个六边形，其顶点为

$$e_1 \boxtimes e_2, \quad e_1 \boxtimes e_3, \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}e_2, \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}R_2^{-1}e_3, \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}R_2^{-1}e_3, \quad e_1 \boxtimes R_2e_3.$$

例如请注意， $R_2R_3R_2^{-1}$的镜像是 R_2 作用于$R_3 = R_{e_3}$的镜像所得的像, ζ_3，所以它是 $R_2(e_3)^{\perp}$。锥体的锥顶由 $e_2 \boxtimes e_3$给出。

现在考虑情形 $p=4$ （图的右半部分），它对应于形式为$R_j = R_{e_j,\ i}$ ($i^2=-1$)的生成反射。相应的侧面类似（从组合意义上说，除截断外二者相同）。在这种情况下， $e_1^{\perp}$ 中的底面仍是一个六边形，但其顶点现在由下式给出

$$e_1 \boxtimes (e_1 \boxtimes e_2), \quad e_1 \boxtimes (e_1 \boxtimes e_3), \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}e_2, \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}R_2^{-1}e_3, \quad e_1 \boxtimes R_3^{-1}R_2^{-1}e_3, \quad e_1 \boxtimes R_2e_3.$$

第一个顶点对应于使用 $e_1^{\perp}$和 $e_2^{\perp}$的公垂线复直线进行的截断，该直线为 $(e_1 \boxtimes e_2)^{\perp}$。请注意，由于截断，还会多出一个顶点，它由 $e_2 \boxtimes (e_1 \boxtimes e_2)$给出。

图中（右半部分）还表明，锥体 $e_2 \boxtimes e_3$ 的锥顶不是该侧面的顶点；事实上，锥顶也需要截断。截断使用 $e_2^{\perp}$和 $e_3^{\perp}$的公垂线复直线进行，该直线为 $(e_2 \boxtimes e_3)^{\perp}$。于是，截断面是在该复直线上的一个六边形，其顶点由下列各项给出

$$m \boxtimes e_2, \quad m \boxtimes e_3, \quad m \boxtimes R_3^{-1} e_2, \quad m \boxtimes R_3^{-1} R_2^{-1} e_3, \quad m \boxtimes R_3^{-1} R_2^{-1} e_3, \quad m \boxtimes R_2 e_3,$$

其中 $m = e_2 \boxtimes e_3$。

若已知组合结构，便可由边的 0-骨架构造其 1-骨架，因为 1-骨架由测地弧组成。2-骨架的描述则更为复杂（详情见 [14] 的第 4.2 节）；这里仅指出，位于复直线上的 2-面只有锥体底部的面，以及替代锥顶的截断 2-面。

注意，对于图1中各图所对应的群 $\mathcal{S}(p, \sigma_1)$，我们有 $\mathbf{br}_6(R_2, R_3)$（这正是我们选择以六边形作为底面的原因，见 [14]）；而对于$p = 6$ $(R_2 R_3)^3$ 是一个不动点为顶部截断面的复反射。

为了提　　及边，我们将使用与 [14] 中相同的记号，并采用以下记号

$$[n]a; b, c$$

其中 a、 b 和 c 是满足 $\mathbf{br}_n(b, c)$ 的复反射。对于记作 $[n]a$ 的侧面， b、 c、 a 表示一个以底面为不动点的反射，而 b、 c 应视为定义锥体两条竖直边的记号。竖直边的完整列表由 b 和 c 唯一确定；列表中元素的数量由 n 给出，边的列表则由以下反射列表确定

$$\ldots, bcbc^{-1}b^{-1}, bcb^{-1}, b, c, c^{-1}bc, c^{-1}b^{-1}cbc, \ldots$$

鉴于这个看似无限的列表实际上是 n-周期的。

为了描述群中的一个反射，我们将使用词记号，用 1 表示R_1，2 表示 R_2，3 表示 R_3， $\bar{1}$ 表示 R_1^{-1}，$(123\bar{2})^3$ 表示 $(R_1 R_2 R_3 R_2^{-1})^3$，，等等。

例如，图1中描述的侧面可简写为 $[6]1; 2, 3$。

[14] 的附录中包含一幅图，展示了参数属于 3 的每个三角群的基本域所有侧面的（等距类型）。所有图的绘制方式都是：位于复直线中的 2-面均画在水平面上（或者作为侧面的底面，或者在顶部有截断时作为顶面）。底侧面总是由某个复反射不动（事实上，是由生成反射三元组之一的共轭不动）。顶面通常也由一个反射不动（见命题 4.1），但并非总是如此；在少数情况下，“反射”实际上退化为恒等变换。

为方便起见，我们重现 [14], 附录中的部分表格信息，参见表 2 和表 3。对于列表中的每个群族，我们都描述其侧代表元，并指出对应侧面存在顶部截断时生成反射的阶 p。

$\mathcal{S}(p,\sigma_1)$ 群

三角形	#(P-轨道)	顶部截断
$[6]\ 1;\ 2,\quad 3$	8	$p=4,6$
$[4]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	8	$p=6$
$[3]\ 23^{\bar{2}};\ 1,\quad 232\bar{3}\bar{2}$	8	
$[3]\ 232\bar{3}^{\bar{2}};\ 1,\quad \bar{3}\bar{2}323$	8	

$\mathcal{S}(p,\bar{\sigma}_4)$ 群

三角形	#(P-轨道)	顶部截断
$[4]\ 1;\ 2,\ 3$	7	$p=5,6,\ 8,\ 12$
$[3]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	7	$p=8,12$

$\mathcal{S}(p,\sigma_5)$ 群

三角形	#(P-orb)	顶部截断
$[4]\ 1;\ 2,\ 3$	30	
$[5]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	30	$p=4$
$[6]\ 2\bar{3}\bar{2}123^{\bar{2}};\ 2,\quad \bar{3}\bar{2}\bar{1}23\bar{2}123$	5	$p=4$

$\mathcal{S}(p,\sigma_{10})$ 群

三角形	#(P-轨道)	顶部截断
$[5]\ 1;\ 2,\quad 3$	5	$p=4,\ 5,\ 10$
$[3]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	5	$p=10$

TABLE 2. $\mathcal{S}(p,\tau)$群的侧代表元

6. Orbits of complex 2-facets

本节讨论如何列出表 3 中参数所对应的所有三角群里，复反射镜面的共轭类。

首先需要注意的是，可以从任意一个“合理的”基本域中读出该列表；事实上，设 Γ 为一个复双曲格，并设 Π 为 Γ的一个闭的、分片光滑的有限侧面基本域，特别地，

(1) $H^2_{\mathbb{C}} = \cup_{\gamma\in\Gamma}\gamma\Pi$ 以及(2) 对于每个 $\gamma\in\Gamma,\quad \gamma(\Pi^\circ)\cap\Pi^\circ=\emptyset$。

其中 Π° 表示 Π的内部。此外，我们假设 Π 在庞加莱多面体定理的意义下具有侧面配对（参见 [14], 第 4.3 节或 [13]第 3.2 节）。

现在假设 $R\in\Gamma$ 是一个镜像为 m的复反射。取 $x\in m$，并令 $\gamma\in\Gamma$满足 $\gamma(x)\in\Pi$ （参见条件 (1)）。将 R 替换为 $\gamma R\gamma^{-1}$后，我们可以假设$m\cap\Pi\neq\emptyset$。由 (2) 可知，必有 $m\cap\pi\subset\partial\Pi$。特别地，我们有如下结论。

命题 6.1. Γ 中的每个反射都共轭于一个不动 Π中某个复 2-面的反射。

$\mathcal{T}(p, \mathrm{S}_2)$ 群

三角形	#(P-orb)	顶部截断
$[3]\ 1;\ 2,\ 3$	5	
$[3]\ 23\bar{2};\ 1,\ 3$	5	
$[4]\ 3;\ 1,\quad 2$	5	$p=5$
$[5]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	5	$p=4,5$

$\mathcal{T}(p, \mathrm{E}_2)$ 群

三角形	#(P-轨道)	顶部截断
$[3]\ 1;\ 2,\ 3$	6	
$[4]\ 23\bar{2};\ 1,\quad 3$	6	$p=6$
$[4]\ 3;\ 1,\quad 2$	6	$p=6$
$[4]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	6	$p=6$
$[6]\ \bar{3}13;\ 12\quad \bar{1},\ 3$	3	$p=4,\ 6$

$\mathcal{T}(2, \mathrm{H}_1)$ 群

三角形	#(P-轨道)
$[3]\ 1;\ 2,\ 3$	42
$[3]\ 23\bar{2};\ 1,\ 3$	42
$[4]\ 3;\ 1,\ 2$	42
$[7]\ 2;\ 1,\ 23\bar{2}$	42
$[14]\ \bar{2}123\bar{2}\bar{1}2;\ \bar{2}12,\ \bar{3}12\bar{1}3$	3

$\mathcal{T}(p, \mathrm{H}_2)$ 群

三角形	#(P-轨道)	顶部截断
$[3]\ 1;\ 2,\ 3$	15	
$[3]\ 23\bar{2};\ 1,\ 3$	15	
$[5]\ 2;\ 1,\quad 23\bar{2}$	15	$p=5$
$[5]\ 3;\ 1,\quad 2$	15	$p=5$
$[10](123)^2\bar{2}12(\bar{3}2\bar{1})^2;\quad 121\bar{2}\bar{1},\quad 3$	3	$p=3,5$

TABLE 3. $\mathcal{T}(p, \mathrm{T})$ 群的侧代表元

此外，我们可以通过追踪庞加莱意义下的循环，轻松检查分别不动 Π 中两个不同复 2-面的反射是否在 Γ中共轭；而且，庞加莱多面体定理使我们能够确定 Γ 中每个面（尤其是复 2-面）的完整稳定子群。这是位于 [8] 的计算机程序系统执行的工作之一，结果汇总在随源代码提供的计算机输出文件中。

一个细微之处在于，我们在 [14] 中构造的区域并非基本域，而只是相对于由正则椭圆元生成的有限循环

群的陪集分解基本域（对于 $\mathcal{S}(p,\tau)$ 群为 $P = R_1J$，对于 $\mathcal{T}(p,\mathrm{T})$ 群为 $Q = R_1R_2R_3$）。接下来的几段中，我们只讨论 $\mathcal{S}$ 群的情形；对于 $\mathcal{T}$ 群，只要将 P 替换为 Q，所有论证同样成立。）

[14]中使用的区域具有如下形式

$$\cup_{j=0}^{n} P^j(\Pi),$$

其中，Π 是一个真正的基本域，n 是 P的阶。为便于后文引用，我们记作$\Pi^{(P)} = \cup_{j=0}^{n} P^j(\Pi)$。

当 P 的所有幂都是正则椭圆变换时，这无关紧要；但当某个幂是复反射时，我们需要加入额外的复反射共轭类。

命题 6.2. 格 $\Gamma = \mathcal{S}(p,\tau)$中的每个反射都共轭于以下两者之一：不动 $\Pi^{(P)}$ 的某个复二维面的反射，或不动 P的某个复反射幂的镜像的反射（对于群 $\mathcal{T}(p,\mathrm{T})$，将 P替换为 Q时，结论也类似）。

由前几段（以及第5节的讨论）可知，群中每个复反射的镜像都可以通过某个适当的群元素映射到以下三个族之一中的一个镜像。

- 包含各侧底面多边形的复直线（这些都是三个生成反射的共轭元的镜面）；
- 包含截断顶点各侧顶部 2-面的复直线；
- 由 $P = R_1J$ （对于$\mathcal{S}$-族中的群）或 $Q = R_1R_2R_3$ （对于 $\mathcal{T}$-族中的群）的幂得到的复反射的镜面，这些幂本身是复反射。

我们将这三个族中相应的复 2-面分别称为底部 2-面、顶部 2-面和中心二维面。底部/顶部/中心面的列表可以很容易地从 [14]附录中的表格和图片推导出来。

侧面之间存在一些显而易见的对应关系，它们来自

- 侧面配对映射；这些都是固定底侧面的复反射 .
- $P = R_1J$ 的作用（对于 $\mathcal{S}$ 群）或 $Q = R_1R_2R_3$ 的作用（对于 $\mathcal{T}$ 群）。

因此，[14] 附录中的列表对于配对侧面的每个 P-轨道（分别为 Q-轨道）只列出一个代表元。

定义 6.3. 为便于后文引用，我们将 [14] 附录中针对给定的 $\Gamma = \mathcal{T}(p,\mathrm{T})$ 列出的侧面称为 Γ 的侧代表元。

此外，当 s_1 和 s_2 出现在 [14], 附录中时，s_1 与 s_2 之间唯一可能发生的识别是在它们的边界上（此处，侧面 s_j 的边界包含于等分超曲面 $\mathcal{B}$中，意指相对于由 $H^2_{\mathbb{C}}$上的拓扑诱导的 $\mathcal{B}$ 上的拓扑而言的边界）。边界上的识别可通过追踪所有边配对变换的轨道读出。

由于群的数量众多，且每个多胞体都包含许多面，因此很难将细节写在纸面上。我们仅在命题 6.4 中概述要点（该命题通过逐案分析得出，并系统地追踪了所有基本域中 2-面的循环）。

命题 6.4。(1) 设 r_1 和 r_2 是（可能不同的）侧代表元的不同底部或顶部复 2-面，且 x_j 位于由 r_j 的内部给出的开胞腔中。那么 x_1 和 x_2 不属于同一个 Γ- 轨道。(2) 设 r 是侧代表元 S 的一个底部或顶部 2-面。假设 S 在任意非平凡幂 P^j（对于 $\mathcal{S}$ 群）或 Q^j（对于 $\mathcal{T}$ 群）的作用下都不保持不变，且 x_1、x_2 是由 r 的内部给出的开胞腔中的不同点。那么 x_1 和 x_2 不属于同一个 Γ-轨道。(3) 设 r 是包含于等分超曲面 $\mathcal{B}$ 中的侧代表元 S 的一个底部或顶部 2-面。假设 S 在 $R = P^j$ 或 Q^j 的作用下保持不变（并令 $j > 0$ 为具有此性质的最小元素）；那么 R 是一个复反射，其镜像是 $\mathcal{B}$ 的复脊。r 中的点在 Γ 下等价，当且仅当它们在由 R 生成的循环群作用下保持不变。

我们将这些结论视为说明商映射在若干（并集的）复 2-面上具有单射性。第 (2) 点指出，底部和顶部 2-面的内部在商映射下是单射的，除非该侧面在 P（或 Q）的某个幂作用下保持不变。第 (3) 点指出，如果该侧面在 P（或 Q）的某个幂作用下保持不变，那么该侧面就是旋转对称的，并且存在一个扇形（其角度由 P^j 的旋转角给出），在商映射下具有单射性。

与第 (3) 点中的单射性结论相对应的例外，确实会出现在我们于 [14], 处理的某些群中：只需列出其 P-轨道所含元素个数少于 Ord(P) 的边，即可发现这些例外（见 $\mathcal{S}$-群对应的、标题为 #($P - orb$) 的列；对于 $\mathcal{T}$ 群，将 P 替换为 Q 即可，参见表 2 和表 3）。例如，边 $2\bar{3}\bar{2}123\bar{2}$; $2, Q^{-1}23\bar{2}Q$ 如图 2 所示；该旋转作用的一个基本域是角度为 $\pi/3$ 的扇形。

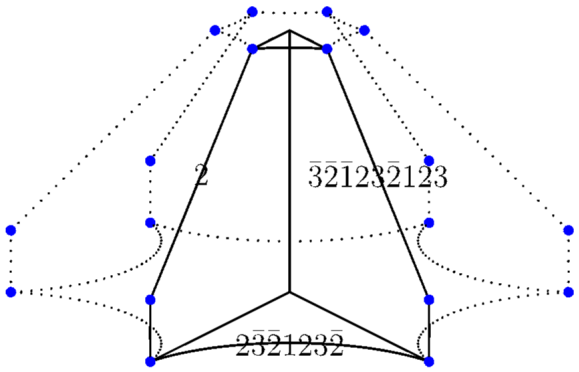

FIGURE 2. $\mathcal{S}(p, \sigma_5)$ 的一个边在 P^5 作用下保持不变，具有角度为 $\pi/3$ 的旋转对称性。

7. TILING MIRRORS WITH IMAGES OF COMPLEX 2-FACETS

本节中，我们研究 Π 的每个轨道中一个代表元所对应的复二维面的镜面稳定子，以及 P 或 Q 的复反射幂的镜面（如果存在）。

命题 6.2 表明，这将给出所有复反射的镜面在共轭意义下的列表。

基本观察如下。

定理 7.1. 若 m 是 Γ 中任意一个 R 的镜像，则 $Stab_\Gamma(m)$ 是 $Stab_{PU(H)}(m)$ 中的一个格。

证明： m 上的每一点都可以通过 Γ 的某个适当元素映射到 $\partial\Pi$，因此 m 被 $\partial\Pi$ 中复 2-面的 Γ-像铺砌。若 π 的一个复 2-面为 s，且 $\gamma_1(s)$ 和 $\gamma_2(s)$ 都包含于 m，则 $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in Stab_\Gamma(m)$； Π 有有限个复 2-面，且每个面的面积有限，因此 $Stab_\Gamma(m)\backslash m$ 的面积有限。□

我们的目标是明确给出 $PU(1,1)$ 中相应的格。定理的证明提示了一种明确给出稳定子的方法；我们将列出 Π 中属于同一群轨道的复 2-面，并将它们映射到同一条复直线 m 上，使得它们在 m 中的像能够恰当地拼接起来，从而得到 $PU(1,1)$ 中某个格的基本域，并具有明确规定的边配对。

需要注意的是，难点在于找到显式的边配对；这些像构成稳定子群作用下的（可能不连通的）基本域这一点则是自动成立的（参见命题 6.4 和定理 7.1 的证明）。

现在我们给出一组显式映射，将复 2-面映回同一条复直线。对于顶部和中心复二面，其稳定子都是三角群，因此很容易得到一个由两个相邻三角形组成的基本域。

对于表 3 所列各族群，我们逐案分析生成集中的反射 R_1, R_2, R_3 所对应的镜面（在固定的群族 $\mathcal{T}(p, \mathrm{T})$ 内，映射公式对于 p 的不同取值相同，尽管这些面本身可能会通过截断而依赖于 p ）。

对于 $\mathcal{S}(p,\tau)$ 群，我们有 $JR_jJ^{-1} = R_{j+1}$，因此只需处理 R_1 的镜像。对于大多数群 $\mathcal{T}(p,\mathrm{T})$， R_1、 R_2 和 R_3 的镜面仍然是彼此在适当群元素作用下的像，因为 $\mathrm{br}_n(a,b)$ 中 n 为奇数意味着 a 和 b 共轭，因为

$$b = (ab)^{-\frac{n-1}{2}} a (ab)^{\frac{n-1}{2}},$$

另请参见命题 4.1(2)。

事实上，表 3 所列的族中，只有 $\mathcal{T}(p, \mathrm{E_2})$ 群这一族满足所有与$j \neq k$ 的辫长 $\mathrm{br}(R_j, R_k)$ 均为偶数（生成反射之间的辫子长度也请参见表 3）。对于这一族，我们将同时处理 R_1 和R_2的镜面。

我们以图示形式列出图3–8中的结果。请注意，这些图示仅用于呈现组合结构，而非度量结构（但实际顶点/边的坐标/参数化可根据图示上的标签恢复）。

8. Side-pairing and fundamental domains

我们的目标是检查第7节中描述的拼图片如何组合在一起，构成稳定子的基本域，并找出一个明确的边配对；由此，我们

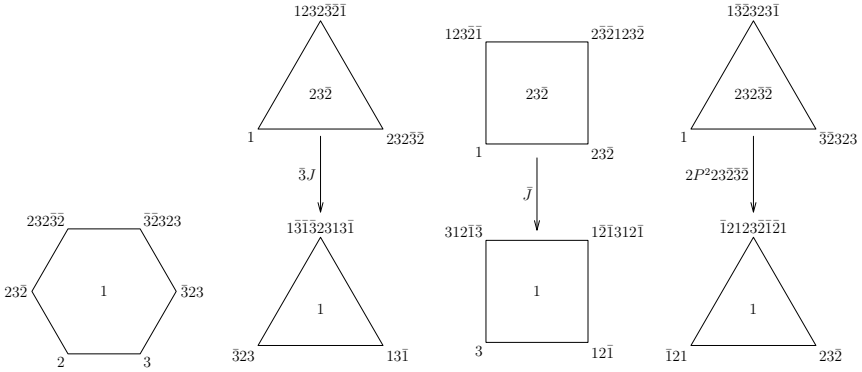

FIGURE 3. 映射到群 R_1 ($\mathcal{S}$,p) 的镜像 σ_1

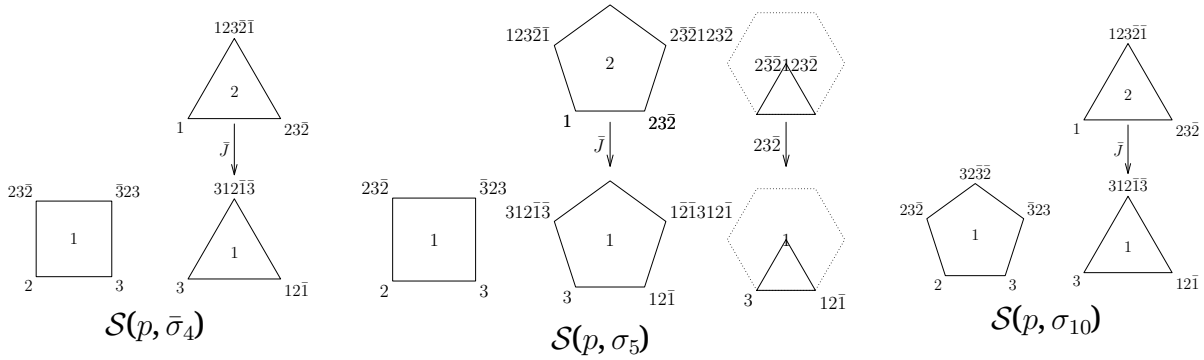

FIGURE 4. 映射到群 R_1 ($\mathcal{S}$,p)、 $\bar{\sigma}_4$($\mathcal{S}$,p) 和 σ_5($\mathcal{S}$,p) 的镜像 σ_{10}

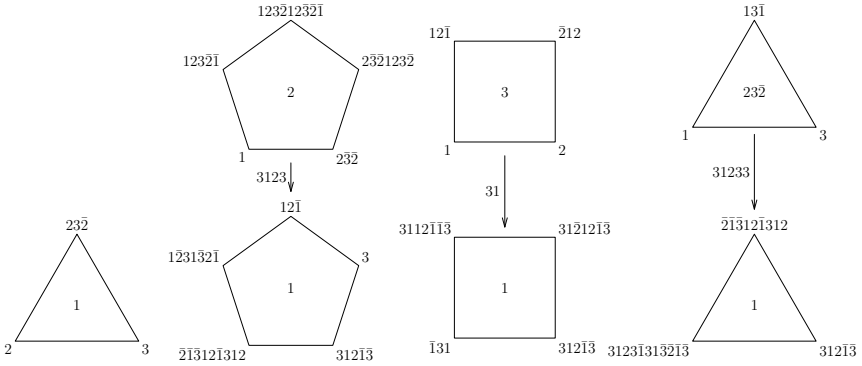

FIGURE 5. 映射到群 $\mathcal{T}(p, \mathbf{S_2})$ 的 R_1 镜像

可以轻易推导出一个表示（通过应用庞加莱多面体定理），以及福克斯群的签名。

我们仅对基面的镜像进行此操作，其他情况则容易得多（事实上，对于顶部和中心复 2-面，拼图只有两块）。一个基本

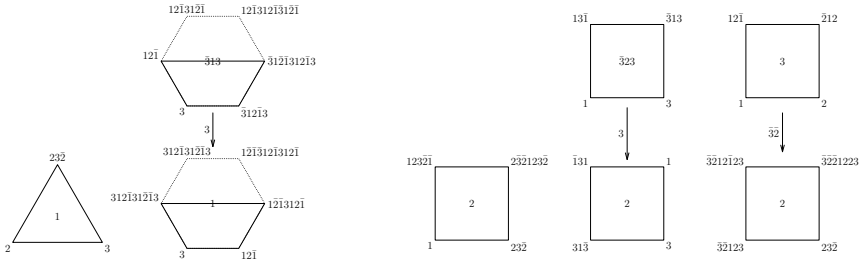

FIGURE 6. 映射到群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{S_2})$ 的镜像 R_1

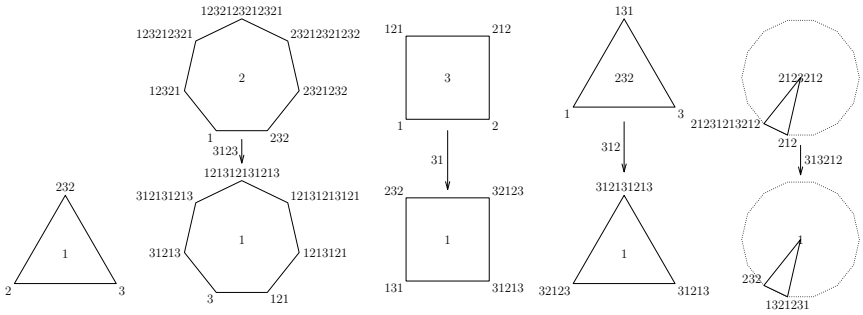

FIGURE 7. 映射到群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{H_1})$ 的镜像 R_1

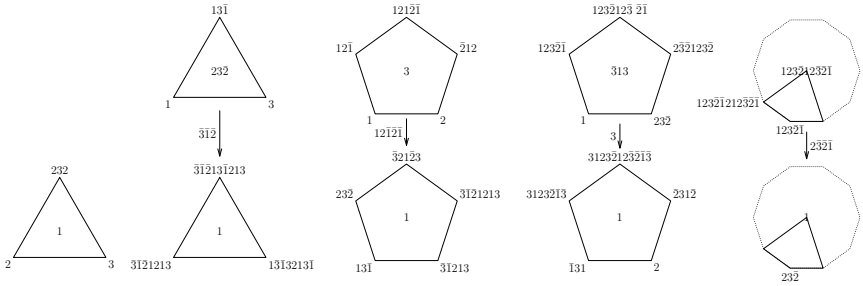

FIGURE 8. 映射到群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{H_2})$ 的镜像 R_1

域（以及边配对变换）在图 9–17 中给出了表 3 中各个群的相关内容。

在给定的族 $\mathcal{S}(p, \tau)$ 中，固定 τ 时，图形非常相似。请注意，标签并未说明多胞体是否在该顶点处被截断。例如，对于群 $\mathcal{S}(p, \sigma_1)$，由 $(R_1 R_2)^3$ 不动的顶点要么是 $e_1 \boxtimes e_2$（对于 $p = 3$），要么是 $e_1 \boxtimes (e_1 \boxtimes e_2)$（对于 $p = 4$ 或 6）；参见第5节。

9. 应用庞加莱多面体定理

为了确定镜像的稳定子（限制在镜像上），我们使用庞加莱多面体定理；实际上，只需用到该定理的二维特殊情形（关于这一特殊情形的清晰讲解，参见 [6]；另见 [2]）。

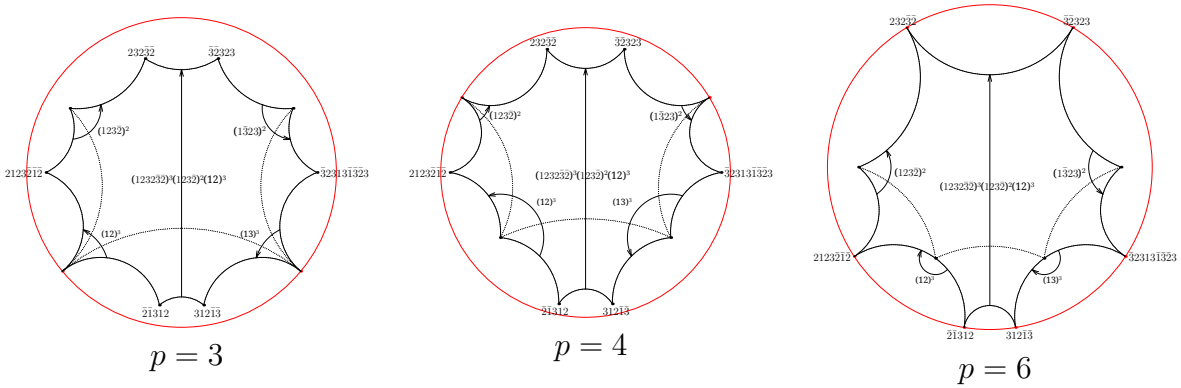

FIGURE 9. $\mathcal{S}(p,\sigma_1)$ 群中 R_1 镜像稳定子的配对。

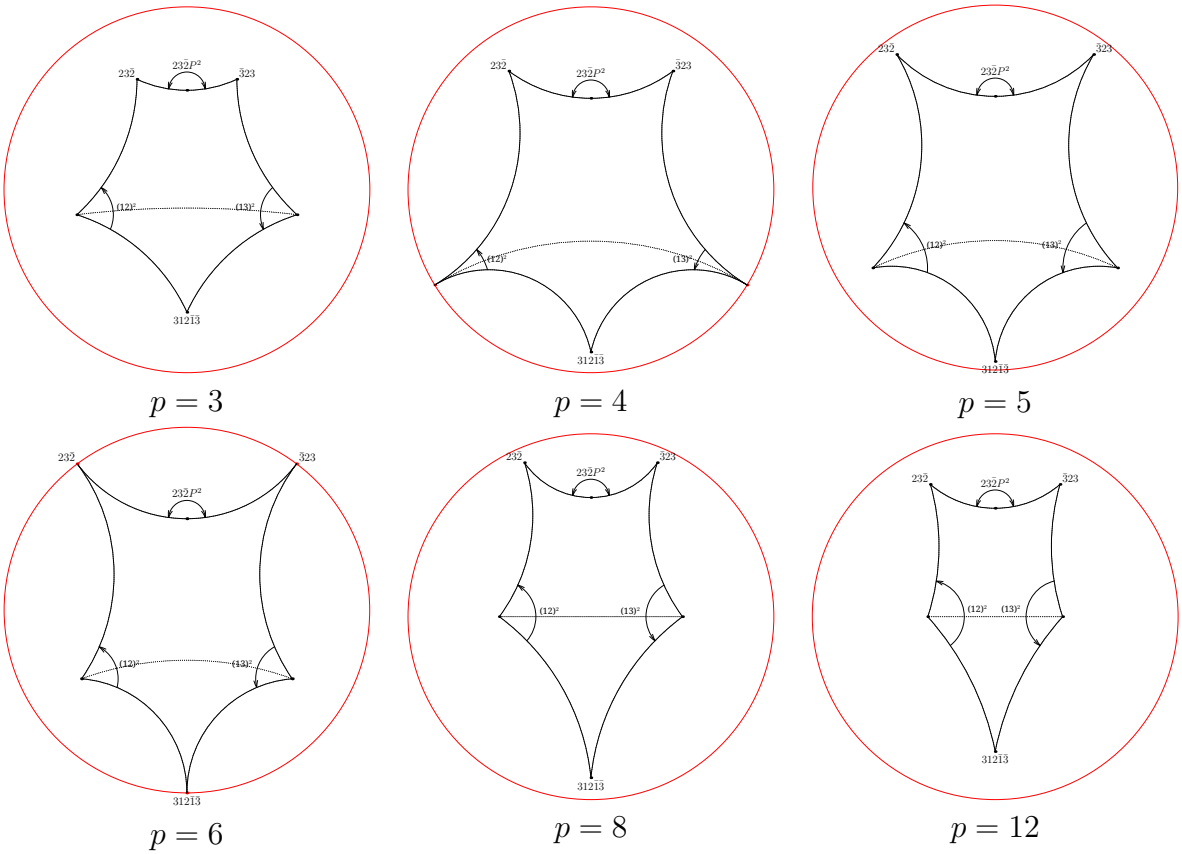

FIGURE 10. $\mathcal{S}(p,\bar{\sigma}_4)$ 群中 R_1 镜像的稳定子的配对 .

我们将详细分析一个基本例子；接下来几段要证明的结论见命题 9.1。本节末尾，我们将简要谈谈处理其他情形时遇到的具体困难。

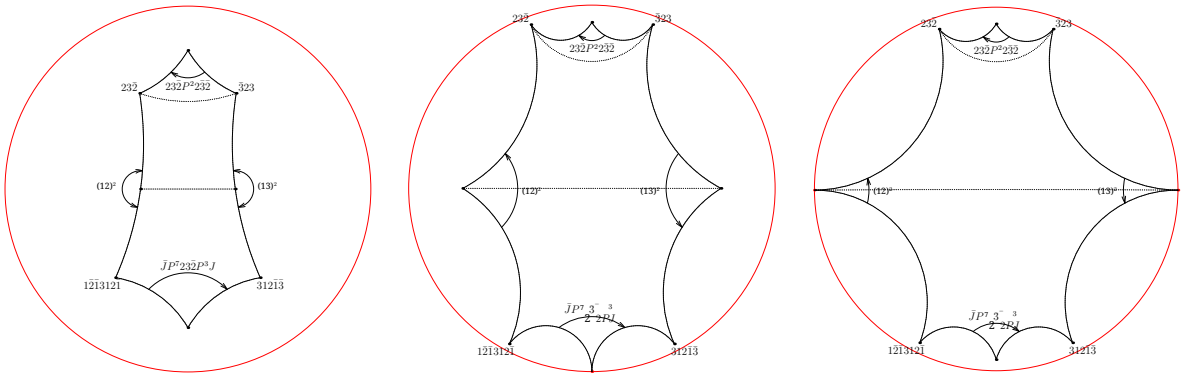

FIGURE 11. R_1的镜像稳定子配对，适用于 $\mathcal{S}(p,\sigma_5)$群 .

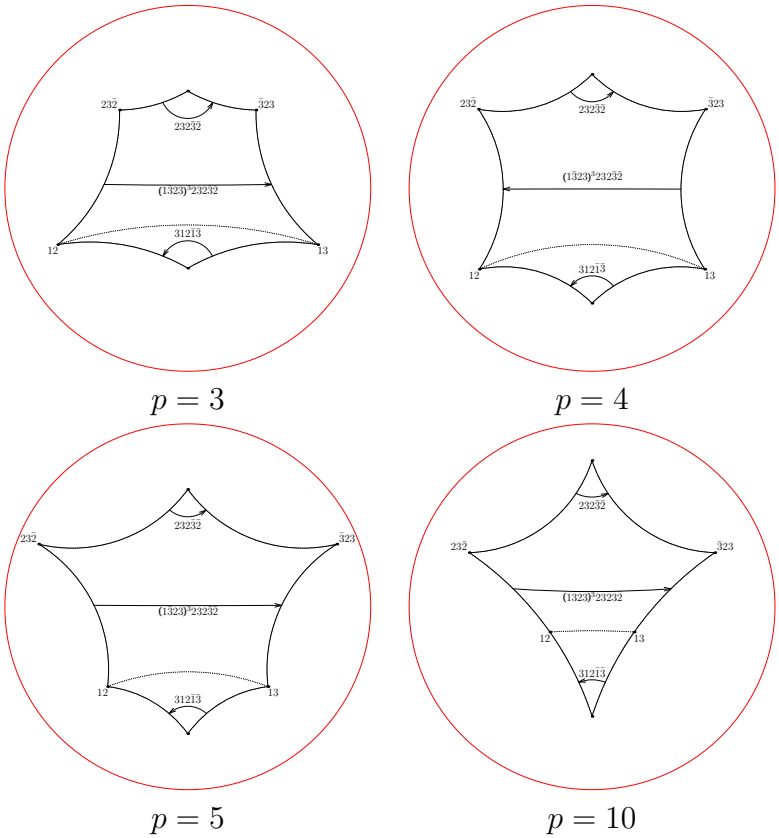

FIGURE 12. R_1 群中 $\mathcal{S}(p,\sigma_{10})$ 的镜像稳定子群的配对 .

命题 9.1。 $\mathcal{S}(p,\sigma_1)$ 中 R_1 的镜像稳定子是一个签名为 $(0;\ \frac{p}{p-3},\frac{p}{p-3},\frac{2p}{|p-4|},\frac{2p}{|p-4|},\frac{2p}{|p-6|},\frac{2p}{|p-6|})$ 的福克斯群的中心扩张，其中心的阶为 p（由 R_1 生成）。

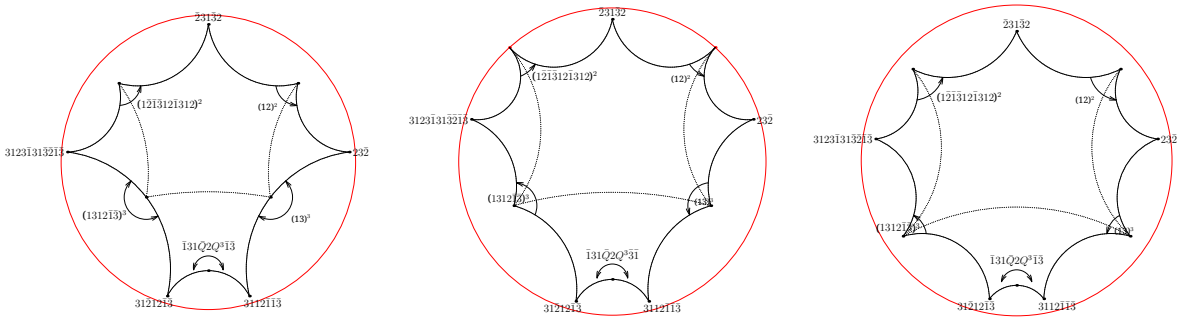

FIGURE 13. R_1 镜像稳定子的配对，适用于 $\mathcal{T}(p, \mathbf{S_2})$ 群 .

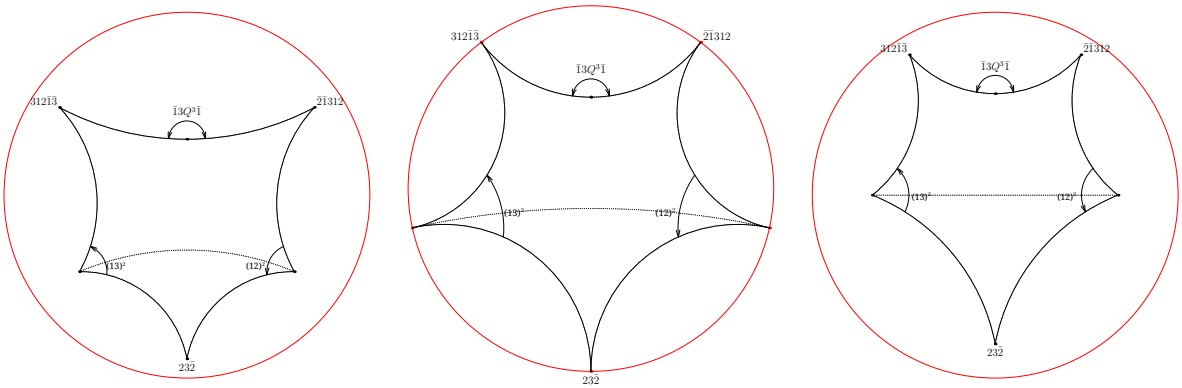

FIGURE 14. $\mathcal{T}(p, \mathbf{E_2})$群中 R_1镜像稳定子的配对 .

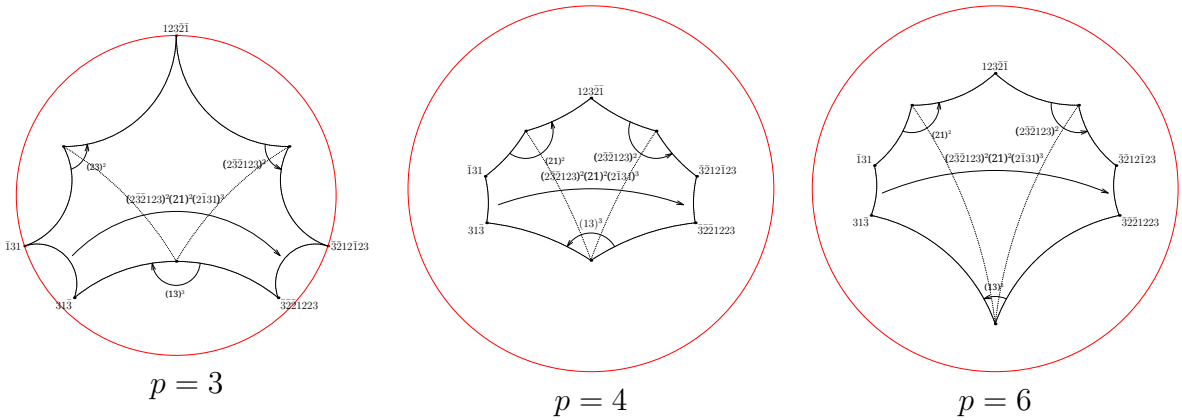

FIGURE 15. $\mathcal{T}(p, \mathbf{E_2})$群中 R_2镜像的稳定子配对。

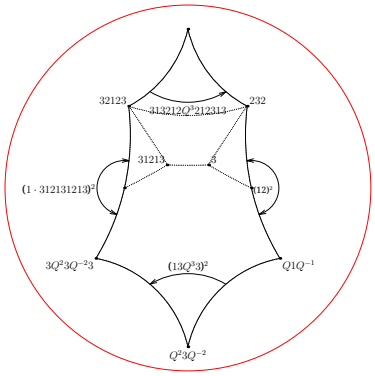

FIGURE 16. $\mathcal{T}(2, H_1)$ 的镜像稳定子的配对。

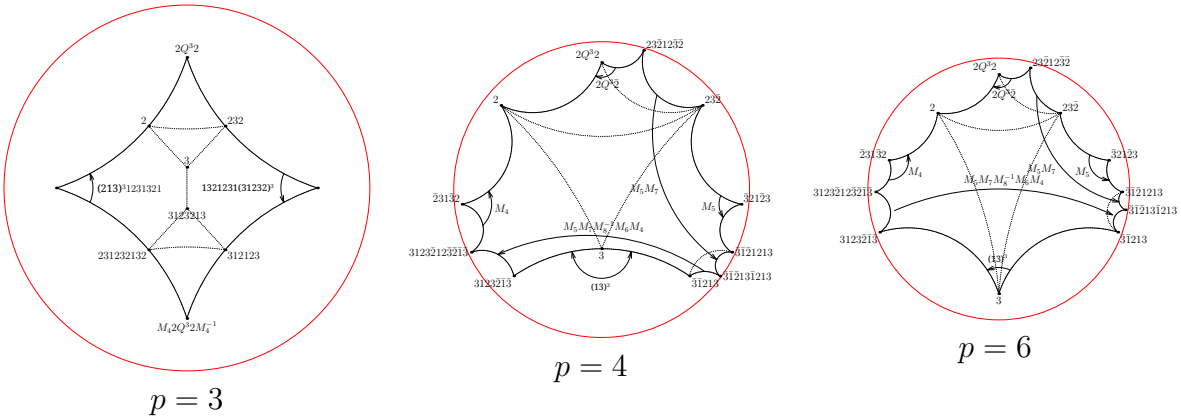

FIGURE 17. $\mathcal{T}(p, H_2)$ 群中 R_1 的镜像稳定子的配对。

请回想，关于签名的陈述意味着，镜像的商空间在拓扑上是一个亏格 0 的紧复曲线（即 $P^1_{\mathbb{C}}$ 的一个副本），具有 6 个圆锥点，其重数分别由 $\frac{p}{p-3}$、$\frac{p}{p-3}$、$\frac{2p}{|p-4|}$、$\frac{2p}{|p-4|}$、$\frac{2p}{|p-6|}$、$\frac{2p}{|p-6|}$ 给出。之所以这些数是（或者是 ∞）整数，是因为满足了针对 $\mathcal{S}(p, \sigma_1)$ 的庞加莱多面体定理的条件（见 [14]）。还需注意，重数为 ∞ 的圆锥点实际上应该移除，才能得到一个带穿孔的 $P^1_{\mathbb{C}}$。

证明：（命题 9.1）

请读者参阅图 9（第 17 页）。对于每个相关的p值，图中展示了一个测地十边形，其顶点可以很容易地明确写出（参见第5节的讨论，尤其是关于截断的问题）。

图中的箭头表示该多边形的显式边配对；于是，R_1 的镜像在其稳定子群作用下的商空间，就是由边配对的识别所生成的等价关系下的十边形商空间。

十边形各边上的一般点仅与另一条边上的唯一一点相识别，但顶点通常会与两个以上的顶点相识别；要明确这些识别，需要追踪顶点循环。

从图 9 中的识别关系很容易看出， R_1 的镜像稳定子群的基本域给出了商空间中该镜像像的胞腔分解，其中有 6 个顶点、5 条边和 1 个二维胞腔，因此我们得到该镜像像的拓扑欧拉示性数（当某些顶点为尖点时，可能需要将其紧化）：

$$6-5+1=2,$$

因此，该像的亏格为 0，且它与 $P^1_{\mathbb{C}}$同构。要确定相应福克斯群的签名，我们需要计算多边形所有顶点的顶点稳定子的阶。

例如，我们来说明如何处理标记为 21312 的顶点。回想一下，它的齐次坐标为 $e_1 \boxtimes R_2^{-1}R_1^{-1}e_3$ （在 $p=6$ 的情况下，这是一个零向量）。它的循环如下所示：

$$1,\bar{2}\bar{3}1312 \xrightarrow{(12)^3} 1,2123\bar{2}\bar{1}\bar{2} \xrightarrow{(123\bar{2})^2} 1,232\bar{3}\bar{2} \xrightarrow{((123\bar{2}\bar{3}\bar{2})^3(123\bar{2})^2(12)^3)^{-1}} 1,\bar{2}\bar{3}1312 \tag{6}$$

因此，该顶点处的循环变换为

$$(12)^{-3}(123\bar{2})^{-2}(1232\bar{3}\bar{2})^{-3}(123\bar{2})^2(12)^3,$$

它共轭于

$$(1232\bar{3}\bar{2})^{-3},$$

若 $p=3$ （分别为 4），则后者是阶为 2（分别为 4）的点上的复反射；若 $p=6$，则后者是抛物型元素。它在镜像上作用为旋转，旋转角为 π （分别为 $\pi/2$），若$p=3$ （分别为 $p=4$）。

对于这个多边形，还有一个性质相同的循环（由格的自同构 (1,2,3) $\mapsto$ (1,3,2) 诱导得到，该自同构由 phism），以及四个仅由单个点组成的循环，分别对应 1,2、1,3、1,232 和 1,323。

映射 $(12)^3$ 和 $(13)^3$ 的阶相同；当 $p=3$ 时它们是抛物型，而当 $p=4$ （分别为 $p=6$）时，它们的阶为 4（分别为 2）。映射 $(123\bar{2})^2$ 和 $(1\bar{3}23)^2$ 的阶相同；当 $p=4$ 时它们是抛物型，而当 $p=4$ 或 6 时，它们的阶为 6。

对于 $p=3$，我们得到一个签名为（0；2、2、6、6、 ∞、 ∞）的福克斯群；更一般地， p 的其他取值（以及镜面的其他群轨道）的签名列于第 24 页的表格中。□

根据上述讨论，我们还可以得到该稳定子的一个表示，它是相应的 $PU(1,1)$ 子群的中心扩张（中心的阶为 p）。 $\mathcal{S}(p,\sigma_1)$ 中镜面 R_1 的稳定子的表示见方程（7）：

$$\begin{aligned}\langle\ z, a_{(12)^3}, a_{(13)^3}, a_{(123\bar{2})^2}, a_{(1\bar{3}\bar{2}3)^2}, a_{(1232\bar{3}\bar{2})^3}, a_{(1\bar{3}\bar{2}323)^3} \mid z \text{ central }, z^p,\\ a_{(12)^3}^{\frac{p}{p-3}}, a_{(13)^3}^{\frac{p}{p-3}}, a_{(123\bar{2})^2}^{\frac{2p}{p-4}}, a_{(1\bar{3}23)^2}^{\frac{2p}{p-4}}, a_{(1232\bar{3}\bar{2})^2}^{\frac{2p}{p-6}}, z a_{(1\bar{3}\bar{2}323)^2}^{\frac{2p}{p-6}}\ \rangle\end{aligned} \tag{7}$$

注意，表示中出现的指数写成分数形式，而当 p 取某些值时，该分数的分母会变为零；此时，

相应的指数应视为无穷大，并应从表示中删去相应的关系。还要注意，当这些分数有限时，它们实际上定义了整数，因为庞加莱多面体定理的假设成立（更多详情见 [14] ）。

现在，我们简要概述在处理其他群族时需要克服的困难。一般方法如下，其中 Γ 指给定的格三角群（见 3）， m 是给定反射 a的镜像。我们列出若干可用资源，以寻找能够为多边形定义良好边配对的映射。对于最简单的情形，资源（1）就足够了（例如上文讨论的例子）。

(1) 找出固定多边形各顶点的显然复反射（对于 a 的镜像和标记为 b的顶点，考虑 $(ab)^k$ ，其中 $k \in \mathbb{N}^*$ 取满足 $(ab)^k$ 与 a 和 b均交换的最小值，见命题 4.1）。(2) 对多边形的每个顶点 v ，通过追踪 Γ的基本多胞体中的顶点循环，找出 $Stab_\Gamma(v)$；该基本多胞体在 $[14]$, 中描述。然后，取稳定 m的 $Stab_\Gamma(v)$的子群，推出 $Stab_{Stab_\Gamma(m)}(v)$。(3) 与前一项资源相同，只是将 v 替换为多边形的一条边 e 。在某些情况下， $Stab_\Gamma(e)$包含一个翻转，即一个阶为 2、交换 e的边的元素。在这种情况下，将边 e 细分，并在其中点添加一个额外顶点。(4) 如果以上方法仍不能得到良好的边配对，我们就考虑由 P 的某个幂次或 Q的某个幂次的复反射所稳定的侧面（如命题 6.4），并将相应的复 2-面替换为扇形。

接下来的几段中，我们概述表 3 中每个群族各自面临的具体困难。

- 对于群 $\mathcal{S}(p, \sigma_1)$，资源（1）给出了边配对变换 $(12)_3$、$(13)_3$、$(123\bar{2})_2$、$(1\bar{3}23)^2$；反射 $(123\bar{2}3\bar{2})_3$、$(1\bar{3}\bar{2}323)_3$、$(1\bar{2}\bar{1}312)_3$、$(1312\bar{1}\bar{3})^3$并未直接用作边配对变换，因为对于这些复反射，多边形的像与原多边形仅在一个顶点处相交。然而，边配对变换 $(123\bar{2}3\bar{2})^4(123\bar{2})^2(12)_3$ 是由上述精心挑选的复反射相乘而成，它是通过猜测得出的（猜测依据是明确计算与绘图的结合）。

- 对于群 $\mathcal{S}(p, \bar{\sigma}_4)$，资源（1）给出 $(12)^2$ 和 $(13)_2$、$(123\bar{2})_3$、$(1\bar{3}23)_3$、$(1312\bar{1}\bar{3})^3$。前两个给出边配对变换，而后三个不是（多边形的像与该多边形仅交于一点）。资源（3）给出元素 $23\bar{2}P^2$，因此我们将图10中的上边细分。
  - 对于群 $\mathcal{S}(p, \sigma_5)$，资源（1）给出 $(12)^2$ 和 $(13)^2$；资源（4）给出$23\bar{2}P^2 23\bar{2}$，而 $J^{-1}P^7 23\bar{2}P^3 J$ 是通过组合（2）和（4）得到的。
  - 对于群 $\mathcal{S}(p, \sigma_{10})$，我们使用资源（1），并组合复反射，通过 $(1\bar{3}23)^2 23\bar{2}3\bar{2}$ 来识别垂直边。

- 对于群 $\mathcal{T}(p, S_2)$，我们使用 (1) 和 (2)（这给出了底边的边配对变换）。

- 对于群 $\mathcal{T}(p,\mathrm{E}_2)$ 的镜像，我们使用 (1) 和 (2)（这给出了上边的边配对变换）。对于 R_2 的镜像，我们使用 (1)，并以复杂的方式组合相应的复反射。
- 对于群 $\mathcal{T}(2,\mathrm{H}_1)$，我们使用 (1)、(2) 和 (4)。
- 对于群 $\mathcal{T}(p,\mathrm{H}_2)$，这些群处理起来要复杂得多，因此我们使用所有资源。

10. Summary of the results

本节汇总格复双曲三角群中所有复反射共轭类的镜面稳定子信息。对于每个群以及每个复反射镜面的轨道，我们列出

- 稳定子的生成元;
- 镜像的不动点稳定子的阶（参见标题为“Order fix ptstab”的列）;
- 对应福克斯群子群的签名、其轨形欧拉示性数及面积;
- 由福克斯群中的 γ 的 $\mathrm{tr}(\gamma^2)$ 生成的域 $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$（将其视为 $SU(1,1)$ 的子群）;
- 福克斯群的算术性（A= 表示算术，NA $=$ 表示非算术）。

请注意，对于 R_1 的镜面（或对于群 $\mathcal{T}(p,\mathrm{E}_2)$ 的 R_2），迹域 $\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$ 与环境格的伴随迹域相同，并且（非）算术性继承自环境格。

例如，使用 [18]中说明的方法，通过逐案分析即可轻松验证这一点。

群 $\mathcal{S}(p,\sigma_1)$

反射	阶为 p 的值	生成元
1	3,4,6	$(12)^3, (13)^3, (123\bar{2})^2, (1\bar{3}\,23)^2, (1232\bar{3}\,\bar{2})^3, (1\bar{3}\bar{2}323)^3$
$(12)^3$	4,6	$1, 2$
$(123\bar{2})^2$	6	$\bar{1}, 232$

$R = R$的镜像 ^{1}

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	$(0; 2, 2, 6, 6, \infty, \infty)$	$-8/3$	$16\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	NA
4	4	$(0; 4, 4, 4, 4, \infty, \infty)$	-3	6π	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	NA
6	6	$(0; 2, 2, 6, 6, \infty, \infty)$	$-8/3$	$16\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	NA

$R =(R_1R_2)$的镜像^3

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
4	4	$(0; 3, 4, 4)$	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A
6	2	$(0; 3, 6, 6)$	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})^2$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
6	6	$(0; 2, 6, 6)$	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

11. Hybrids

利用第10节的结果，我们可以将列表中的一些格描述为混合群（按 [23], [16]的意义）。这意味着，我们找到了 Γ 的两个正交的 $\mathbb{C}$-福克斯群子群 Σ_1 和 Σ_2，使得 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 生成 Γ。这里，“正交”是指这些群保持不变的复直线彼此正交。

本文不讨论复双曲格三角群的福克斯群子群的算术性或可公度性问题，但确实展示了几对正交的 $\mathbb{C}$-福克斯群子群，它们生成环境格。

定理11.1. 对于 $p = 8$ 和12，群 $\mathcal{S}(p,\bar{\sigma}_4)$由两个镜面稳定子的并生成；可以取以下几对反射：

- R_1 和$(123\bar{2})_3$,
- R_1 和$(1\bar{3}23)_3$,
- R_1 和$(1312\bar{1}\bar{3})^3$。

证明：根据第25页的表格，第一条结论是 $\mathcal{S}(p,\bar{\sigma}_4)$由1、$23\bar{2}$、$(12)^3, (13)^3, (1\bar{3}23)^2$、 $23\bar{2}(1J)^2$ 生成。可以使用计算群论软件（GAP或Magma），通过计算子群指数的命令来验证这一点。

第二个陈述类似。

第三个略有不同，但也类似；我们验证 1, $312\bar{1}\bar{3}$, $(12)^2$,$(13)^2$, $(123\bar{2})^2$, $(1\bar{3}23)^2$ and $23\bar{2}(1J)^2$ 生成 $\mathcal{S}(p,\bar{\sigma}_4)$。我们再次使用 Magma 进行验证。

群 $\mathcal{S}(p,\ \overline{\sigma_4})$

反射	阶为 p 的值	生成元
1	3、4、5、6、8、12	$(12)^2, (13)^2, (123\bar{2})^3, (1\bar{3}23)^3, 23\bar{2}P^2$
$(12)^2$	5,6,8,12	$1, 2$
$(123\bar{2})^2$	8,12	$\bar{1}, 232$

$R = R_1$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	$(0; 2, 6, 6, 6)$	-1	2π	$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$	A
4	4	$(0; 4, 8, \infty, \infty)$	$-13/8$	$13\pi/4$	$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$	NA
5	5	$(0;\ 10, 10, 10, 10)$	$-8/5$	$16\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{14}})$	NA
6	6	$(0;\ 6, 6, 12, \infty)$	$-19/12$	$19\pi/6$	$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$	NA
8	8	$(0;\ 4, 4, 8, 16)$	$-21/16$	$21\pi/8$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$	NA
12	12	$(0;\ 3,\ 3,\ 4,\ 24)$	$-25/24$	$25\pi/12$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$	NA

$R =(R_1R_2)^2$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
5	10	$(0;\ 2、5、5)$	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
6	6	$(0; 2, 6, 6)$	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A
8	4	$(0; 2, 8, 8)$	$-1/4$	$\pi/2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	A
12	3	$(0;\ 2,\ 12,\ 12)$	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})^3$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
8	8	$(0;\ 2,\ 3,\ 8)$	$-1/24$	$\pi/12$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	A
12	4	$(0;\ 2,\ 3,\ 12)$	$-1/12$	$\pi/6$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	A

注意，这些生成结论对于 $p = 3$,4,5,6 也成立，但在这些情况下，元素 $(123\bar{2})^3$, $(1\bar{3}23)^3$, $(1312\bar{1}\bar{3})^3$ are 是关于点而非直线的复反射。□

通过类似的证明，我们得到以下生成结果。

定理 11.2。群 $\mathcal{S}(2, \sigma_5)$ 由 P^5 和 $2\bar{3}\bar{2}123\bar{2}$的镜面的稳定子群之并生成。对于 $p = 4$, 它也由以下几对反射的稳定子群之并生成：

- R_1 和 $(123\bar{2})^5$;
- R_1 和 $(1\bar{3}23)^5$;
- R_1 和 $(12\bar{1}312)^5$;
- R_1 和 $(1312\bar{1}\bar{3})^5$;

定理 11.3。对于 $p = 4$、5 和 10，由以下镜面的稳定子群之并生成的群 $\mathcal{S}(p, \sigma_{10})$

群 $\mathcal{S}(p,\sigma_5)$

反射	阶为 p 的值	生成元
1	2,3,4	$(12)^2, (13)^2, 23\bar{2}P^5 2\bar{3}\bar{2}, J^{-1}P^7 23\bar{2}P^3 J$
$(123\bar{2})^5$	4	$\bar{1}, 232$
P^5	2,3,4	$P^7, {}_{2321232}$

$R = R$的镜像 ^{1}

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
2	2	$(0;\ 2,\ 2,\ 6,\ 6)$	$-2/3$	$4\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
3	3	$(0; 6, 6, 6, 6, \infty)$	$-7/3$	$14\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	NA
4	4	$(0;\ 4, 6, 12, \infty, \infty)$	$-5/2$	5π	$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$	NA

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})^5$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
4	4	$(0; 2, 4, 5)$	$-1/20$	$\pi/10$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$R = P^5$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
2	6	$(0;\ 2,\ 5,\ 6)$	$-2/15$	$4\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
3	6	$(0; 3, 5, \infty)$	$-7/15$	$14\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	NA
4	6	$(0; 4, 5, 12)$	$-7/15$	$14\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$	NA

- R_1 和 $(12)^5$;
- R_1 和 $(13)^5$。

对于 $p = 10$，它也由以下对象的稳定子生成:

- R_1 和 $(123\bar{2})^3$;
- R_1 和 $(1\bar{3}23)^3$。

定理 11.4。对于 $p = 4$ 或 5，群 $\mathcal{T}(p,S_2)$ 由 R_1 和 $(123\bar{2})^5$ 的稳定子之并生成。

References

[1] Gottfried Barthel、FriedrichHirzebruch 和 Thomas H¨ofer。《直线构形与代数曲 ¨面》，Aspects Math. 第 D4 卷。施普林格，威斯巴登，1987年。[2] Alan F. Beardon。《离散群的几何》，Grad. Texts Math. 第 91 卷。施普林格，纽约，1983年。[3] Armand Borel。《算术群导论》。巴黎：Hermann & Cie，1969年。[4] S. S. Chen 和 L. Greenberg。《双曲空间》。载于《分析文集：献给 Lipman Bers 的论文集》，49–87 页（1974年），1974年。[5] W. Couwenberg、G. Heckman 和 E. Looijenga。《射影´构形补集上的几何结构》。高等科学研究所数学出版物，101：69–161，2005年。[6] Georges de Rham。《福克斯群生成多边形》。Enseign. Math. (2)，17：49–61，1971年。

群 $\mathcal{S}(p, \sigma_{10})$

反射	p 阶的取值	生成元
1	3,4,5,10	$312\bar{1}\bar{3}, 232\bar{3}\bar{2}, (123\bar{2})^3, (1\bar{3}23)^3$
$(12)^5$	4,5,10	$1, 2$
$(123\bar{2})^3$	10	$^{-1}_{232}$,

$R = R$的镜像 ^{1}

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	(0; 2, 3, 3, 6)	$-2/3$	$4\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
4	4	(0; 4, 4, 4, 4)	-1	2π	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
5	5	(0; 2, 5, 5, 10)	-1	2π	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
10	10	(0; 5, 10, 10)	$-3/5$	$6\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$R =(R_1R_2)$的镜像^{5}

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
4	4	(0; 2, 4, 5)	$-1/20$	$\pi/10$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
5	2	(0; 2、5、5)	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
10	1	(0; 2, 5, 10)	$-1/5$	$2\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})^3$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
10	5	(0; 2, 3, 10)	$-1/15$	$2\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

[7] P. Deligne 和 G. D. Mostow。《超几何函数的单值化与非格整数单′值化》。高等科学研究所数学出版物，63：5–89，1986年。[8] M. Deraux。Spocheck。https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02398953，2019年。[9] Martin Deraux。GitLab 整齐子群项目。https://plmlab.math.cnrs.fr/deraux/neat-subs。[10] Martin Deraux。《阿贝尔曲面上椭圆曲线构形产生的非算术球商》。《瑞士数学评论》，93(3)：533–554，2018年。[11] Martin Deraux。《非算术格与克莱因四次曲线》。《数学杂志》，754：253–279，2019年。[12] Martin Deraux、John R. Parker 和 Julien Paupert。《复双曲稀有三角群目录》。《实验数学》，20(4)：467–486，2011年。[13] Martin Deraux、John R. Parker 和 Julien Paupert。《新的非算术复双曲格》。《数学发明》，203(3)：681–771，2016年。[14] Martin Deraux、John R. Parker 和 Julien Paupert。《新的非算术复双曲格 II》。《密歇根数学杂志》，70(1)：133–205，2021年。[15] V. Erlandsson、J. Parkkonen、F. Paulin 和 J. Souto。《负曲率下互反闭测地线的计数与等分布》。准备中。[16] Elisha Falbel 和 Irene Pasquinelli。《复双曲轨形与 Lefschetz 纤维化》。预印本，2020年，arXiv:2003.06466。[17] William M. Goldman。《复双曲几何》。牛津：Clarendon Press，1999年。[18] Yueping Jiang、Jieyian Wang 和 Fang Yang。《某些非算术格的 ℂ福克斯群子群的算术性》。预印本，2022年，https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2366924/v1。

群 $\mathcal{T}(p, S_2)$

反射	阶为 p 的取值	生成元
1	3,4,5	$(131\bar{2}12\bar{1}\bar{3})^5, (13112\bar{1}\bar{1}\bar{3})^5, (1312\bar{1}\bar{3})^3, (13)^3,$ $(13123\bar{1}31\bar{3}\bar{2}\bar{1}\bar{3})^5, (123\bar{2})^5, (1\bar{2}\bar{1}\bar{3}12\bar{1}312)^2, (12)^2$
$(12)^2$	5	$1, 2$
$(123\bar{2})^5$	4,5	$^{-1},$ $_{232}$

$R = R_1$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	(0; 2, 2, 2, 6, 6, 6)	-2	4π	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
4	4	$(0; 2, 4, 4, 4, \infty, \infty)$	$-11/4$	$11\pi/2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$	NA
5	5	(0; 2, 2, 10, 10, 10, 10)	$-13/5$	$26\pi/5$	$\mathbb{Q}$(余弦 $\frac{2\pi}{15}$)	NA

$R =(R_1R_2)$的镜像^2

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
5	10	(0; 2、5、5)	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})$的镜像^5

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
4	4	(0; 2, 4, 5)	$-1/20$	$\pi/10$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
5	2	(0; 2、5、5)	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

[19] Shoshichi Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。《微分几何基础》，第二卷，《纯粹与应用数学丛书》卷15。Interscience Publishers，纽约，1969年。[20] G. D. Mostow。复双曲空间中一类非凡多面体。Pacific J. Math.，86:171–276，1980年。[21] Lijie Sun。某些非算术格的 C-Fuchsian 子群。Korean J. Math.，30(2):315–333，2022年。[22] William P. Thurston。多面体的形状与球面的三角剖分。载于《爱泼斯坦生日文集》（为庆祝 David Epstein 60 岁生日而作），第511–549页。华威：华威大学数学研究所，1998年。[23] Joseph Wells。PU(2,1)中的非算术混合格。Geom. Dedicata，208:1–11，2020年。

Martin Deraux, Univ. Grenoble Alpes, CNRS, IF, 38000 Grenoble, France; SorbonneUniversité and Université de Paris, CNRS, INRIA, IMJ-PRG, Ouragan, F-75005 Paris,France电子邮箱地址：martin.deraux@univ-grenoble-alpes.fr

群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{E}_2)$

反射	阶 p的值	生成元
1	3,4,6	$(13)^2, (12)^2, (1312\bar{1}\bar{3})^2, (1\bar{2}\bar{1}312)^2$
2	3,4,6	$(21)^2, (2\bar{3}\bar{2}123)^2, (2\bar{1}31)^3, (23)^3$
$(12)^2$	6	$1, 2$
$(13)^2$	6	$1, 3$
$(123\bar{2})^2$	6	$\bar{}_{1,\,232}$
$(312\bar{1})^3$	4,6	$\bar{}_{3,\,121}$
Q^3	3,4,6	$Q, Q^{-1}2\bar{3}\bar{2}123\bar{2}$

$R = R$的镜像 $_1$

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	(0; 2, 6, 6, 6)	-1	2π	$\mathbb{Q}$	A
4	4	$(0; 2, \infty, \infty, \infty)$	$-3/2$	3π	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	NA
6	6	(0; 2, 6, 6, 6)	-1	2π	$\mathbb{Q}$	A

$R = R$ 的镜像 $_2$

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	$(0; 2, 6, 6, 6, \infty)$	-2	4π	$\mathbb{Q}$	A
4	4	$(0; 4, 4, \infty, \infty, \infty)$	$-5/2$	5π	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	NA
6	6	$(0; 2, 6, 6, 6, \infty)$	-2	4π	$\mathbb{Q}$	A

$R =$$(R_1R_2)^2$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
6	4	(0; 2, 6, 6)	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

$R =$ 的镜像$(R_1R_3)^2$

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
6	4	(0; 2, 6, 6)	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})$ 的镜像^2

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
6	6	(0; 2, 6, 6)	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

$(R_3R_1R_2R_1^{-1})^3$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
4	4	(0; 3, 4, 4)	$-1/6$	$\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A
6	2	(0; 3, 6, 6)	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

Q^3的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	2	$(0; 3, 3, \infty)$	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A
4	2	(0; 3, 4, 12)	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	A
6	2	(0; 3, 6, 6)	$-1/3$	$2\pi/3$	$\mathbb{Q}$	A

群 $\mathcal{T}(p, \mathrm{H}_1)$

反射	p 阶的值	生成元
1	2	$(12)^2, (1312131213)^2, 313212Q^3212313, (13Q^33)^2$
Q^3	2	$Q, 2Q^32$

$R = R$的镜像 $_1$

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
2	2	(0; 2, 2, 14, 14)	$-6/7$	$12\pi/7$	$\mathbb{Q}$(余弦 $\frac{2\pi}{7}$)	A

Q^3的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}$(迹Γ^2)	A/NA
2	14	(0; 2, 3, 14)	$-2/21$	$4\pi/21$	$\mathbb{Q}$(余弦 $\frac{2\pi}{7}$)	A

群 $\mathcal{T}$（p, $\mathbf{H_2}$）

反射	阶数值 p	生成元
1	2,3,5	$(1\bar{2}31\bar{3}2)^5, (1\bar{3}21\bar{2}3)^5, (13)^3, (123\bar{2})^5, (12)^5, 2Q^3\bar{2}$
$(12)^5$	5	$\bar{}^{1,\,232}$
$(123\bar{2})^5$	5	$\bar{}^{1,\,232}$
$(3121\bar{2}\bar{1})^5$	3,5	$\bar{\bar{}}^{3,\,12121}$
Q^3	2	$Q^{-2}\bar{2}\bar{1}2, 123\bar{2}12\bar{3}\bar{2}\bar{1}$

$R = R_1$的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
2	2	(0; 5, 10, 10)	$-8/5$	$16\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
3	3	(0; 2, 2, 5, 6, 6, 15, 15)	$-10/3$	$20\pi/3$	$\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{15})$	NA
5	5	(0; 2, 2, 5, 5, 5, 10, 10)	$-16/5$	$32\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	A

$(R_1R_2)^5$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
5	2	(0; 2、5、5)	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$(R_1R_2R_3R_2^{-1})^5$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
5	2	(0; 2、5、5)	$-1/10$	$\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

$(R_3R_1R_2R_1R_2^{-1}R_1^{-1})^5$ 的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
3	3	(0; 3, 3, 5)	$-2/15$	$4\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
5	1	(0; 5, 5, 5)	$-2/5$	$4\pi/5$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A

Q^3的镜像

p	阶固定点稳定子	签名	χ^{orb}	Area	$\mathbb{Q}(\mathrm{Tr}\Gamma^2)$	A/NA
2	14	(0; 2, 3, 10)	$-1/15$	$2\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A
3	14	(0; 3, 3, 15)	$-4/15$	$8\pi/15$	$\mathbb{Q}(余弦\frac{2\pi}{15})$	A
5	14	(0; 3, 5, 5)	$-4/15$	$8\pi/15$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	A