arXiv:2301.07404v1 [math.CO] 18 Jan 2023

大型单纯复形：普适性、随机性与丰富性

迈克尔·法伯

摘要。本文综述了关于大型单纯复形的几何、拓扑与组合性质的近期研究进展，主要聚焦于丰富性、连通性和普适性 [17], [20], [22]。本文第一部分重点讨论 r-富足单纯复形，它们是 r-e.c. 图的高维类比；这类图最初由 Erdős 和 Rényi 引入 [16], 另见 [7]。 r-富足复形有助于实际应用，因为这类复形允许以所有可能的方式扩展某些类型的子复形；此外， r-富足复形还具有显著的鲁棒性。我们讨论了 r-富足复形的存在性结果，并介绍了它们的概率构造和确定性构造。中间区域 [20]中的随机单纯复形对这一讨论十分重要，因为在一定范围内，这些复形是富足的。我们证明，中间区域中的随机单纯复形的拓扑复杂度满足 $\mathrm{TC}(X) \leq 4$，且随着 $n \to \infty$，该结论成立的概率趋于 1。可数顶点集上存在唯一一个（在同构意义下） ∞-富足复形（拉多复形）；本文第二部分综述了关于该复形的普适性、齐性、不可摧毁性及其他重要性质的研究成果。J.A. Barmak 撰写的附录讨论了锥形复形和富足复形的连通性。

1. 引言

网络科学使用大型单纯复形来建模由大量相互作用对象构成的复杂网络。成对相互作用可以用图来建模，而对象之间的高阶相互作用则需要借助单纯复形的语言来描述，见 [3]。

在本文综述中，我们讨论 r-富足单纯复形，它们代表“稳定且富有韧性”的网络，即对网络进行微小修改时，其全局性质（如连通性和高连通性）受到的影响有限。我们还讨论一个非凡的单纯复形 X （拉多复形），它在以下意义下是“完全不可摧毁的”：移除任意有限数量的单纯形 X 后，仍会留下一个与 X同构的单纯复形。该复形 X 具有无限（可数）个顶点，因而无法实际实现。 r-富足单纯复形可以看作拉多复形的有限近似，它们保留了有限程度的不可摧毁性。 r-丰富性的形式化定义要求：所有大小至多为 r的单纯子复形的所有可能扩展都存在。

日期：2023年1月19日。

一个相关的数学对象是中间区域随机单纯复形 [20], ，它以趋于一的概率具有 r-富足性。非正式地说，拉多复形可以看作中间区域随机单纯复形的极限。拉多复形的几何实现与无限维单纯形同胚，因此它是可缩的。已有证明表明， [20] 中间区域随机单纯复形是单连通的，并且在低于 $\log_2\log_2 n$. 的维数上贝蒂数均为零。基于这些原因，人们预期，对于足够大的 r，任何 r-富足单纯复形都是高度连通的。§6及附录中将讨论这一问题。

文献中已在组合学和数理逻辑领域研究了图、超图、竞赛图及其他结构中与 [17] 的富足性类似的性质，并使用了多种术语： r-存在完备性、 r-存在接近性，简称 r-e.c.（见 [11], [7]）；还有邻接公理 r （见 [4, 5]）、一种扩张性质 [23], 性质 $P(r)$ [6]。这一性质直观地意味着你想要什么就能得到什么，因此也被称为爱丽丝餐馆公理[35], [38]。

本文的主题是单纯复形领域中的普适性及其与随机性的关系。谈到普适性，当然应当提及乌雷松度量空间 $\mathcal{U}$，这是一个由 P.S. 乌雷松于20世纪20年代构造的非凡数学对象。该空间 $\mathcal{U}$ 具有普适性，因为它包含任意完备可分度量空间的一个等距副本。此外，乌雷松空间 $\mathcal{U}$ 具有齐性，即其有限子集之间的任意部分等距映射都可以扩张为整体等距映射。普适性和齐性这两种性质唯一确定了 $\mathcal{U}$ ，至多相差一个等距映射。A.M. 韦尔希克 [36]定义了随机度量空间的概念，并证明这类空间以概率1与乌雷松普适度量空间同构。

拉多图 Γ 是另一个著名的数学对象，也可以用其普适性和齐性来刻画，见 [9], [10]。该图 Γ 有可数多个顶点，并且它是普适的，即任何具有可数多个顶点的图都同构于 Γ的一个诱导子图。此外， Γ 的有限诱导子图之间的任何同构都可以扩展到整个 Γ （齐性）。普适性和齐性这两个性质唯一确定了 Γ （在同构意义下）。Erdős 和 Rényi [16]证明，具有可数多个顶点的随机图以概率 1 同构于 Γ ；这一结果解释了为什么 Γ 有时被称为“随机图”。拉多 [32]提出了一种 Γ 的确定性构造，其中顶点 $V(\Gamma)$ 用整数 $\mathbb{N}$ 标记，并且当且仅当 $m < n$ 所标记的两个顶点对应的 m在 n 的二进制展开中为 1 时，这两个顶点之间有一条边。这种图的构造也隐含地出现在 W. Ackermann [1], 较早发表的一篇论文中，他在该文中研究了集合论公理的一致性。

在 [22]中引入的拉多单纯复形 X 也可以用普适性和齐性来刻画；我们还知道，在某种情形下，具有可数多个顶点的随机单纯复形以概率 1 同构于 X 。人们发现 X具有一些有趣的性质，例如，若将 X 的顶点集划分为有限个部分，则至少有一个部分上诱导出的单纯复形同构

于 X。 X 中任意单纯形的链接都同构于 X。X 的一个关键性质是其不可摧毁性：移除任意有限个单纯形后，所得单纯复形仍同构于 X。

本综述的主要来源是论文 [17], [20], [22]。接下来我们将评论其他相关出版物。

R. Rado [32] 的定理 3 提出了一种构造固定维数 ℓ的通用均匀超图的方法。等价地，均匀超图可以理解为具有完备（$\ell-1$）维骨架的固定维数 ℓ 单纯复形。

在 [4] 中，Blass 和 Harary 研究了关于计数概率测度的固定维数 ℓ 单纯复形一阶语言的零一律。他们证明，典型的 ℓ维单纯复形具有完整的（$\ell-1$）骨架。在 [4], 中，作者引入了“公理 n”，它推广了拉多图的特征性质；这是我们所说的丰富性的一种特殊情形。

A. Brooke-Taylor 和 D. Tesla 的预印本 [8] 运用数理逻辑和模型论的方法研究单纯复形的几何性质。模型论中一种广为人知的一般构造是*Fraïssé* 极限，适用于具有某些融合性质的关系结构类，参见 [25]。将 Fraïssé 极限构造应用于所有有限单纯复形所成的类，会得到一个具有可数多个顶点的单纯复形 F，它是普适且齐性的，也就是说，它是一个拉多复形。因此， [8] 所采用的方法为拉多复形提供了一个别具一格的视角。在 [8] 中，作者研究了 F 的自同构群，并指出任意有限群的直极限以及任意可度量化的原有限群都嵌入 F的自同构群中。此外， [8] 中还包含一个证明，说明 F 的几何实现与无限维单纯形同胚。 [8] 的作者还考虑了一种概率方法，并声称一阶理论满足零一律。

2. 丰盛单纯复形

我们采用以下记号。符号 $V(X)$ 表示单纯复形 X 的顶点集合。如果 $U\subseteq V(X)$ 是一个子集，我们用 X_U 表示 U 上的诱导子复形，即，$V(X_U)=U$，并且 U 中的一个点集构成 X_U 中的单纯形，当且仅当它也是 X 中的单纯形。

从单纯复形 A 到 X 的嵌入是 A 与 X 的一个诱导子复形之间的同构。

单纯复形 X和 Y的连接记作 $X*Y$；回顾一下，连接的顶点集为 $V(X)\sqcup V(Y)$，其单纯形既包括复形X 和 Y中的单纯形，也包括形如 $\sigma\tau=\sigma*\tau$的单纯形，其中 σ 是 X 中的一个单纯形， τ是 Y中的一个单纯形。单纯形 $\sigma\tau=\sigma*\tau$的顶点集是 σ和 τ的顶点的并集。符号 CX 表示以 X为底的锥。对于顶点 $v\in V(X)$，符号

$\mathrm{Lk}_X(v)$表示 X中 v 的链接，即由所有不包含 v、但满足 $\sigma v = \sigma * v$ 是 X中的一个单纯形的单纯形 σ所构成的 X 的子复形。
此外，符号 $F(X)$ 表示 X 的所有单纯形的集合，而 $E(X)$ 表示 X 的所有外部单形的集合，也就是说，满足 $\sigma \notin X$ 和 $\partial\sigma \subset X$ 的单形。
以下定义引自 [17]:

定义 2.1。设 $r \geq 1$ 为一个整数。若非空单纯复形 X 满足以下条件，则称其为r-富足的：对于每个子集 $U \subseteq V(X)$，其中 $|U| \leq r$，以及每个子复形 $A \subseteq X_U$，都存在一个顶点 $v \in V(X) - U$，使得

$$\mathrm{Lk}_X(v) \cap X_U = A. \tag{1}$$

若 X 对每个 $r \geq 1$ 都是 r-富足的，则称其为富足的，或称为 ∞-富足的。

条件 (1) 等价地可表示为 $X_{U\cup\{v\}} = X_U \cup (v * A)$。图 1 展示了这一点。

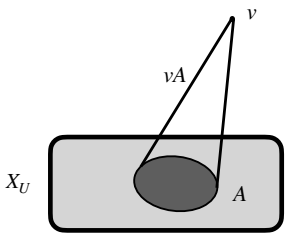


图 1。复形 $X_U \cup (vA)$。

显然， r-丰足性仅取决于 r 维骨架。
以下是 r-丰足性的另一种刻画，见 [17] 中的引理2.3：

引理 2.2。单纯复形 X 是 r-富足的，当且仅当对于每一对（A， B），其中A是单纯复形， B是 A的诱导子复形，且满足 $|V(A)| \leq r+1$；并且对于 B 到 X的每个嵌入 f_B，都存在一个将 f_B延拓的嵌入 f_A，把 A 嵌入 X。

2-丰足复形显然是连通的，而下面的例子表明，2-丰足复形未必是单连通的。

例2.3. 考虑一个二维单纯复形 X，它有13个顶点，标记为整数0、1、2、.....、12。当且仅当两个顶点 i和 j之差 $i-j$ 是模13平方数时，它们之间才有一条边，即 $i-j \equiv \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 4$ 模13。 X的1维骨架是一个著名的13阶帕雷图。接下来，我们添加13个三角形 $i,\ i+1,\ i+4$,

其中 $i=0$、1、.....、12。我们声称，所得复形 X 是2-丰复形。验证如下：对于任意两个顶点，都存在其他顶点，它们与这两个顶点均相邻、均不相邻、仅与其中一个相邻，以及仅与另一个相邻。此外，每条边都同时属于一个填充三角形和一个未填充三角形。事实上，边 $i,\ i+1$ 既属于三角形 $i,\ i+1,\ i+4$ （已填充），也属于三角形 $i-3,\ i,\ i+1$ （未填充）。直观地说，填充三角形可以用等式 $1+3=4$ 来刻画，而未填充三角形则可以用 $3+1=4$来刻画。

注意到， X 可由具有 13 个顶点、39 条边和 26 个三角形的三角剖分环面，删去 13 个类型为 $i,\ i+3,\ i+4$ 的白色三角形得到。从这一描述显然可见， X 可形变收缩到一个图。计算欧拉示性数可得$b_0(X)=1,\ b_1(X)=14$，以及 $b_2(X)=0$。因此，我们看到 X 不是单连通的。

注 2.4. r-富足单纯复形中一个顶点的链接是（$r-1$）-富足的。更一般地， r-富足复形中每个 k 维单纯形的链接都是（$r-k-1$）-富足的。

例 2.5. J.A. Barmak [2] 为每个 $n\geq 0$ 构造了一个无限的（$2n+1$）-富足单纯复形，它不是 n-连通的。特别是，这表明一个 3-富足复形可能不是单连通的。若能找到一个这类有限例子，将会很有意思。

[2] 的构造从复形 $K_0=S^0*S^0*\cdots*S^0$ 开始，它是 $n+1$ 个 S^0 的连接。显然， K_0 有 $2n+2$ 个顶点，且同胚于 n 维球面 S^n。对于每个 $i\geq 0$，复形 K_{i+1} 由 K_i 通过在每个至多含 $2n+1$ 个顶点的子复形 $L\subset K$ 上附加一个锥得到。复形 $K=\cup_{i\geq 0}K_i$ 显然是（ $2n+1$ ） - 富足的。证明 K 不是 n- 连通的，关键在于考察基本类 $[K_0]\in H_n(K_0)$，并注意到它在同态$H_n(K_0)\to H_n(K)$ 下的像非零。详情见 [2], 定理 1。

由引理 2.2 可知，一个 r-富足复形 X 满足：(a) 任意至多含 $r+1$ 个顶点的单纯复形都可嵌入 X；(b) $\dim X\geq r$。

一个 r-富足复形必须相当大。为了精确表述这一说法，我们用 $M'(r)$ 表示顶点取自集合 $\{1,2,\ldots,r\}$ 的单纯复形数量。数目 $M'(r)+1=M(r)$ 称为戴德金数，见 [27], 它等于含有 r 个变量的单调布尔函数数量，也有其他一些组合解释，例如，它等于含有 r 个元素的集合中反链的数量。约化“戴德金数” $M'(r)$ 的前几个值为 $M'(1)=2,\ M'(2)=5,M'(3)=19$。对于一般的 r，数目 $M'(r)$ 可估计为

$$\binom{r}{\lfloor r/2\rfloor}\leq \log_2(M'(r))\leq \binom{r}{\lfloor r/2\rfloor}\left(1+O\left(\frac{\log r}{r}\right)\right). \tag{2}$$

（2）中的下界很容易得到：只需统计具有完整$\lfloor n/2\rfloor$ 骨架的单纯复形；（2）中的上界已在 [27]中得到。利用斯特林公式

可得

$$\log_2 \log_2(M'(r)) = r - \frac{1}{2}\log_2 r + O(1). \tag{3}$$

推论 2.6. 一个 r-富足单纯复形至少包含

$$M'(r) + r \geq 2^{\binom{r}{\lfloor r/2 \rfloor}} + r$$

个顶点。

证明。 设 X 是一个 r-富足复形。我们可以将其嵌入到 X 一个具有 r 个顶点的（$r-1$）维单纯形Δ 中。根据定义 2.1，对于 Δ 的每个子复形 A，我们都能在 Δ 的补集内找到一个顶点 v_A，使得其与 Δ的交集的链接为 A。子复形 A 的数量为 M'（r），并且 Δ 还有 r 个顶点，由此可得该估计。□

3. 充足复形的存在性

定理 3.1. 对于每个 $r \geq 5$ 和每个 $n \geq r2^r 2^{2^r}$，都存在一个恰有 n 个顶点的 r-富足单纯复形。

这是在 [17] 的第 5 节中使用概率方法证明的。下面简要说明证明的主要步骤。

考虑标准单纯形 Δ_n 的一个随机子复形 X，其顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$，并具有如下概率函数：单纯复形 X 的概率等于

$$\mathbb{P}(X) = 2^{-H(X)}, \quad \text{where} \quad H(X) = |F(X)| + |E(X)|, \tag{4}$$

是 X 的单纯形总数 $|F(X)|$ 与其外部单形数目 $|E(X)|$ 之和。回想一下，外部单形 σ 满足 $\sigma \notin X$，但不满足 $\partial\sigma \subset X$。公式（4）是中间区制假设的一个特例；比较 [20]，中的公式（3），当.....时，该公式可化为（4）

$$p_\sigma = 1/2 \tag{5}$$

对所有单纯形 $\sigma \in \Delta_n$ 均成立。换言之，这是随机单纯形复形多参数模型的一个特例，其中每个单纯形以概率 $1/2$ 被选取。 [17] 中命题 5.1 的证明论证表明，随机子复形 $X \subset \Delta_n$ 非 r-富足的概率有如下上界：

$$n^r \cdot 2^{2^r}(1 - 2^{-2^r})^{n-r} \tag{6}$$

可以证明，对于 $n \geq r2^r 2^{2^r}$，数值 (6) 小于 1，这意味着存在 r-富足单纯复形。

定理 3.2。 对于任意固定的 $r \geq 1$，关于测度 *(4)* 的 n 个顶点上的随机单纯复形是 r-富足的概率随着 $n \to \infty$ 趋近于1 。

这是估计式 (6) 的一个推论，因为对于任意固定的 r，当 $n \to \infty$ 时，表达式 (6) 趋于 0。

4. 丰富复形的 Paley 型构造

本节简要介绍一种丰富复形 [17] 的显式构造，它推广了著名的帕雷图构造。

固定一个奇素数幂 n、一个整除 $n-1$ 的奇素数 p，以及有限域 $\mathbb{F}_n$ 中的一个本原元 g。子集 $Q_{n,\,p} \subset \mathbb{F}_n$ 定义如下

$$Q_{n,p} = \left\{ g^{\alpha} \;\middle|\; \alpha \equiv \beta^2 \bmod p,\ \text{for } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{F}_n.$$

注意，$H = \langle g^p \rangle \subset \mathbb{F}_n^{\times} = \langle g \rangle$ 是一个指数为 p 的乘法子群，因为 $p \mid (n-1)$，并且存在一个群同构 $\mathbb{F}_n^{\times}/H \to (\mathbb{F}_p,\ +)$，它将 $gH \mapsto 1$ 映到相应元素。集合 $Q_{n,\,p}$ 是对应于模 p 的二次剩余的 H-陪集之并；它包含域中约一半的元素，更精确地说

$$|Q_{n,p}| \;=\; \frac{p+1}{2p}\,(n-1).$$

定义 4.1。迭代 *Paley* 单纯复形 $X_{n,\,p}$ 以 $\mathbb{F}_n$ 为其顶点集，且非空子集 $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\} \subset \mathbb{F}_n$ 构成一个单纯形，当且仅当对于每个子集 $\{x_{s_1}, x_{s_2}, \ldots, x_{s_k}\} \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$，都有

$$\prod_{1 \le i < j \le k} \left(x_{s_i} - x_{s_j} \right) \;\in\; Q_{n,p}.$$

注意，由于 p 是奇数，$(-1) = g^{(n-1)/2}$，且 $(n-1)/2 \equiv 0$ 模 p，因此 $(-1) \in H = \langle g^p \rangle$。所以，$X_{n,p}$ 定义中的条件不依赖顶点 $x_1, x_2, \ldots, x_t$ 的顺序。还需注意，所有 n 单点集 $\{x\}$ 都是超边，因为$1 = g^0 \in Q_{n,p}$。

$Q_{n,p}$ 的定义，进而 $X_{n,p}$ 的定义，取决于本原元 $g \in \mathbb{F}_n$ 的选择。如果 α 是模 p 的二次剩余，任何其他本原元 $h = g^{\alpha} \in \mathbb{F}_n$ 都会给出相同的构造；否则则会给出不同的构造。一般而言，这两种构造并不同构。下面的结果适用于任一种选择。

定理 4.2。设 $r \in \mathbb{N}$。每个满足 $p > 2^{2^r+2r}$ 和 $n > r^2 p^{2r}$ 的迭代 *Paley* 单纯复形 $X_{n,p}$ 都是 r-富足的。

证明及进一步的评注参见 [17] 。

请注意，定理 3.1 的概率构造生成的丰富复形，其顶点数少于定理 4.2 所生成的复形。

5. 丰富复形的韧性

[17] 的第 3 节给出了刻画 r-富足单纯复形“韧性”的结果：对复形进行小扰动会以可控的方式降低其丰富性，因此许多重要的几何性质仍然成立。

我们所考虑的扰动如下。设 X 是一个单纯复形， $\mathcal{F}$ 是 X的一个有限单纯形集合，可以考虑从 X中移除 $\mathcal{F}$ 的所有单纯形，以及所有具有属于 $\mathcal{F}$的面的单纯形后得到的单纯复形 Y。我们称 Y 是从 X 移除单纯形集合 $\mathcal{F}$后得到的。

我们用两个数来刻画 $\mathcal{F}$ 的大小：$|\mathcal{F}|$（ $\mathcal{F}$ 的基数）和 $\dim(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{F}}\dim\ \sigma$（“”的总维数）。

定理 5.1. 设 X 是一个 r-富足单纯复形，并设 Y 是从 X 中移除一组 $\mathcal{F}$ 单纯形后得到的。那么，只要满足以下条件， Y 就是 $(r-k)$-富足的：

$$|\mathcal{F}| + \dim(\mathcal{F}) < M'(k) + k. \tag{7}$$

特别地，考虑到 *(2)*，当满足以下条件时，复形 Y 是 $(r-k)$-富足的：

$$|\mathcal{F}| + \dim(\mathcal{F}) < 2^{\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}} + k. \tag{8}$$

为说明这一一般性结果，设 X 是 r-富足的，其中 $r \geq 3$ ，且 Y 是从 X 中移除 a_0 个顶点和 a_1 条边后得到的。只要它是 2-富足的，复形 Y 就是连通的。将 $k = r-2$ 代入定理 5.1，我们得到不等式

$$a_0 + 2a_1 < M'(r-2) + r - 2 \tag{9}$$

保证了 Y 的 2-充足性，从而保证其连通性。下面这个更明确的不等式

$$a_0 + 2a_1 < 2^{\binom{r-2}{\lfloor r/2\rfloor - 1}} + r - 2. \tag{10}$$

由（2）可得（9）。

定理 *5.1* 的证明。不失一般性，可以假设 $\mathcal{F}$ 构成一个反链，即 $\mathcal{F}$ 中没有任何单纯形是 $\mathcal{F}$ 中另一个单纯形的真面。事实上，如果 $\sigma_1 \subset \sigma_2$，其中 $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{F}$，我们可以从 $\mathcal{F}$ 中移除 σ_2，而不影响复形 Y。

考虑顶点 $v \in V$（Y）及其在 Y 和 X 中的链接 Lk_Y（v）和 Lk_X（v）。记 $\mathcal{F}_v$ 为满足 $\sigma \in \mathcal{F}$ 或 $v\sigma \in \mathcal{F}$ 的单纯形 $\sigma \subset \mathrm{Lk}_X$（$v$）的集合。根据定义可直接得出，$\mathrm{Lk}_Y$（$v$）可由 Lk_X（v）移除单纯形集合 $\mathcal{F}_v$后得到。

将 $\mathcal{F}$ 表示为不交并

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \sqcup \mathcal{F}_1,$$

其中 $\mathcal{F}_0$ 是 $\mathcal{F}$ 中零维单纯形的集合， $\mathcal{F}_1$ 是 $\mathcal{F}$ 中维数为 ≥ 1 的单纯形集合。记

$$W_0 = \cup_{\sigma\in\mathcal{F}_0} V(\sigma) \quad \text{and} \quad W_1 = \cup_{\sigma\in\mathcal{F}_1} V(\sigma)$$

$\mathcal{F}$ 中零维单纯形的集合以及正维单纯形的顶点集合。注意，由于我们的反链假设，$W_0 \cap W_1 = \emptyset$。此外，$V(Y) = V(X) - W_0$，因此 $W_1 \subset V(Y)$。

设 $U \subset V(Y)$ 为一个子集，并设 $v \in V(Y)$ 为一个顶点，使得：(a) $v \notin W_1$ 且 (b) 集合 $\mathrm{Lk}_X(v) \cap X_U$ 是 Y_U 的子复形。Then

$$\mathrm{Lk}_Y(v) \cap Y_U = \mathrm{Lk}_X(v) \cap X_U. \tag{11}$$

事实上，由于假设 (a)，我们有 $\mathrm{Lk}_X(v) \cap Y_U = \mathrm{Lk}_Y(v) \cap Y_U$；又由于 (b)，我们有 $\mathrm{Lk}_X(v) \cap Y_U = \mathrm{Lk}_X(v) \cap X_U$。

设 k 是满足 (7) 的整数，并设 $U \subset V(Y)$ 是一个满足 $|U| \le r - k$ 的子集。给定一个子复形 $A \subset Y_U$，我们要证明存在一个顶点 $v \in V(Y) - U$，使得

$$\mathrm{Lk}_Y(v) \cap Y_U = A. \tag{12}$$

这意味着我们的复形 Y 是 $(r-k)$-富足的。

考虑诱导子复形 X_U，它显然包含 A 作为子复形。再考虑抽象单纯复形

$$K = X_U \cup (A * \Delta),$$

其中 Δ 是一个以 k 个顶点构成的抽象满单纯形。注意，K 至多有 r 个顶点，X_U 是 K 的诱导子复形，并且自然嵌入到 X 中。利用 X 是 r-富足的假设，并应用引理 2.2，我们可以找到一个将 K 嵌入 X、且将 X_U 上的恒等映射延拓的嵌入。换言之，我们可以找到 k 个顶点 $v_1, \ldots, v_k \in V(X) - U$，使得对于 X_U 的一个单纯形 τ 以及任意子集

$$\tau' \subset \{v_1, \ldots, v_k\} = U'$$

当且仅当 $\tau \in A$ 时，$\tau\tau' \in X$ 成立。如果这些顶点 v_i 中有一个属于 $V(Y) - W_1$，那么（使用（11））

$$\mathrm{Lk}_Y(v_i) \cap Y_U = \mathrm{Lk}_X(v_i) \cap X_U = A$$

这样就完成了证明。因此，不失一般性，我们可以假设

$$U' \subset W_0 \cup W_1. \tag{13}$$

令 $Z \subset \Delta$ 为任意一个单纯子复形。我们可以利用 X 的 r-丰富性，并将定义 2.1 应用于 $X_{U \cup U'}$ 的子复形 $A \sqcup Z$。由此得到一个顶点 $v_Z \in V(X) - (U \cup U')$，满足

$$\mathrm{Lk}_X(v_Z) \cap X_{U \cup U'} = A \sqcup Z$$

尤其是，

$$\mathrm{Lk}_X(v_Z) \cap X_U = A. \tag{14}$$

对于不同的子复形 $Z, Z' \subset \Delta$，点 v_Z 和 $v_{Z'}$ 不同，集合 $\{v_Z;\ Z \subset \Delta\}$ 的基数等于 $M'(k)$。注意到 (14) 是 $Y_U \subset X_U$ 的一个子复形，并且

比较 (11)、(12)、(14)，我们看到，只要知道顶点 v_Z 至少属于某个子复形 Z 对应的 $V(Y)$ $-W_1$，我们的陈述便可得出。
反设不然，即对于每个子复形 $Z \subset \Delta$， $v_Z \in (W_0 \cup W_1) - U'$。集合 $\{v_Z\}$的基数等于 $M'(k)$，而集合 $(W_0 \cup W_1) - U'$的基数等于 $|\mathcal{F}| + \dim \mathcal{F} - k$，这与我们的假设 (7) 矛盾。

证明至此完成。 □

6. 充足复形的连通性

我们在上文指出，2-丰足复形是连通的，而 3-丰足复形可能不是单连通的。然而，4-丰足复形必定是单连通的：

命题 6.1. 对于 $r \geq 4$，任意 r-丰足单纯复形 Y 都是单连通的。此外，任意单纯闭路 $\alpha : S^1 \to Y$若在一个 r-丰足复形 Y中有 n 个顶点，则它围成一个单纯圆盘 β： $D^2 \to Y$ 其中 D^2 是该圆盘的一个三角剖分，具有 n 个边界顶点、至多 $\lceil \frac{n-3}{r-3} \rceil$ 个内部顶点，以及至多 $\lceil \frac{n-3}{r-3} \rceil \cdot (r-1) + 1$ 个三角形。

证明。 如果 $n \leq r$，我们只需应用 r-富足的定义，并找到一个扩张β： $D^2 \to Y$，其中只有一个内部顶点。如果 $n > r$，我们可以将 r-富足的定义应用于由 r 个顶点组成的任意弧，见图 2。这会将环路的长度缩短 $r-3$，执行 $\lceil \frac{n-r}{r-3} \rceil$ 次这样的操作后，我们得到一个长度为 $\leq r$ 的环路，它可以由单个顶点填充。有界圆盘的内部顶点数将为 $\lceil \frac{n-r}{r-3} \rceil + 1 = \lceil \frac{n-3}{r-3} \rceil$.。为了估算三角形的数量，我们注意到在每个中间

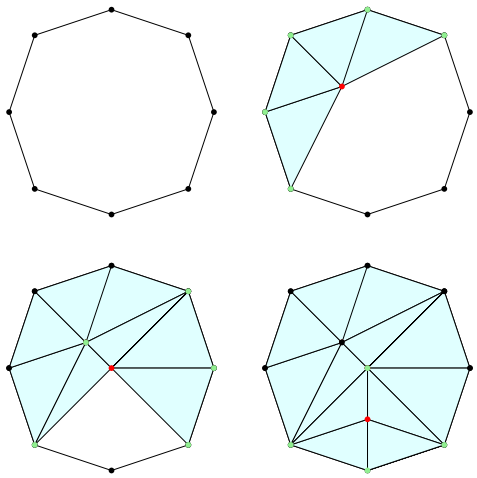


图 2。在 5-富足复形中构造有界圆盘的过程

在上述过程中，每一步添加 $r-1$ 个三角形，而在最后一步最多可添加 r 个三角形。这给出了上界 $\lceil \frac{n-r}{r-3} \rceil \cdot (r-1) + r = \lceil \frac{n-3}{r-3} \rceil \cdot (r-1) + 1$。□

接下来，我们陈述一个关于丰富复形连通性的普遍结果：

定理 6.2。 一个 r-富足复形是 $(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1)$-连通的。

这可由 J. A. Barmak 证明的定理 6.4 推出，参见附录。

在论文 [2] 中，J.A. Barmak 引入了锥形单纯复形的概念。锥形复形包含丰富复形这一类，并且在研究连通性问题时更为方便。

定义 6.3。 对于一个整数 $r \geq 0$，若单纯复形 K 中的每个至多含有 r 个顶点的子复形 $L \subset K$ 都包含于某个顶点$v \in K$的闭星 $\mathrm{St}_K(v)$ 中，则称其为 r-锥形。

注意，0-锥性和1-锥性的概念等价于复形 K 非空。

定理 6.4。 [J.A. Barmak] 对于 $r \geq 2$ 任意 r-锥形单纯复形，它都是$(\lfloor r/2 \rfloor - 1)$-连通的。

例 6.5。 考虑（$r+1$）重单纯连接 $S^0 * S^0 * \cdots * S^0$，它与球面 S^r 同胚，并且显然是（$2r+1$）-锥形的。这个例子表明，一般来说，（$2r+1$）-锥形性并不蕴含 r-连通性。换言之，定理 6.4 的结论是尖锐的。

7. 中间区域中的随机单纯复形

在 §3 中，我们简要提到过一类特殊的中间区域中的随机单纯复形，文献 [20] 对其进行了研究。这些是标准单纯形 Δ_n 的随机子复形，其概率测度由式（4）给出。我们关注这些复形在 $n \to \infty$ 时的渐近性质。当某个几何或拓扑性质成立的概率在 $n \to \infty$ 时趋于 1，我们就称随机单纯复形渐近几乎必然（a.a.s.）具有该性质。

我们强调，测度 (4) 是 [12], [13], [14], [15], 中研究的多参数概率测度的一个特例，其中将 $p_\sigma = 1/2$设为所有单纯形 σ的概率参数。

[20] 在假设 (5) 下的主要结果可概括如下。我们将使用记号 $\beta(n) = \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \ln n$。

定理 7.1. 任取 $\epsilon_0 > 0$ 和 $\delta_0 > 0$。则：

(a) 中间区域内随机复形 X 的维数满足

$$\lfloor \beta(n) \rfloor - 1 \leq \dim X \leq \beta(n) - 1 + \epsilon_0,$$

几乎必然渐近地成立。

(b) 随机复形 X 几乎必然是连通且单连通的。

(c) 贝蒂数 $b_j(X)$ 对所有 $0 < j \leq \log_2\log_2 n - 1 - \delta_0$ 几乎必然为零。

利用定理 6.2，可以加强上述结论：

定理 7.2。 设 $r = r(n)$ 是一个取整数值的函数，满足

$$r \leq \log_2 \log_2 n - \epsilon, \quad where \quad \epsilon > 0. \tag{15}$$

那么：

(1) 中间区域内的随机复形 X 几乎必然是 r-富足的。

(2) 特别地， X 几乎必然是$(\lfloor r/2 \rfloor - 1)$-连通的。

为证明第一个结论，注意到在假设 (15) 下，表达式 (6) 当 $n \to \infty$ 时趋于 0。事实上，以 e 为底的 (6) 的对数有如下上界：

$$r \cdot \ln n + \ln 2 \cdot 2^r - n\left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot 2^{-2^r}. \tag{16}$$

利用 (15) 可得 $n \cdot 2^{-2^r} \geq n^{1-2^{-\epsilon}}$，又由于 $r/n \to 0$，因此有

$$n\left(1 - \frac{r}{n}\right) \cdot 2^{-2^r} \geq \frac{1}{2} \cdot n^{1-2^{-\epsilon}}. \tag{17}$$

另一方面，

$$\begin{aligned} r \cdot \ln n + \ln 2 \cdot 2^r &\leq r \cdot \ln 2 \cdot \log_2 n + \ln 2 \cdot 2^{-\epsilon} \cdot \log_2 n \\ &\leq \ln 2 \cdot \log_2 n \cdot (\log_2 \log_2 n - \epsilon + 2^{-\epsilon}) \end{aligned} \tag{18}$$

比较 (17) 和 (18) 可知，(16) 趋于 $-\infty$，从而随机复形不是 r-富足的概率 (6) 趋于 0。这就证明了 (1)。

陈述（2）通过应用定理 6.2 可由（1）推出。

注 7.3。 我们看到，中间区域随机单纯复形是 $(\lfloor \frac{1}{2}\log_2\log_2 n \rfloor - 1)$-连通的，这大约是其贝蒂数消失所对应维数的一半，参见定理 7.1 (c)。因此，一个重要问题仍未解决：对于区间 $\frac{1}{2}\log_2\log_2 n \leq j < \log_2\log_2 n - 1$.内的维数$j$，整系数同调群 $H_j(X)$是否可能非平凡（因而是有限的）？

8. 中间区域中随机单纯复形的拓扑复杂度

首先回顾拓扑复杂度 TC(X) 的概念（见 [18], [19]），其中 X 是一个道路连通拓扑空间。直观地说，整数 TC(X) 衡量了将 X 视为系统构形空间时的导航复杂度。为给出精确定义，考虑路径空间 X^I，即由所有连续映射 $I = [0,1] \to X$构成、赋予紧开拓扑的空间，以及纤维化

$$\pi : X^I \to X \times X, \quad \alpha \mapsto (\alpha(0), \alpha(1)). \tag{19}$$

X 的拓扑复杂度 TC(X)定义为纤维化 (19) 的截面范畴。换言之，TC(X) 是满足下述条件的最小整数 $k \geq 0$： 存在一个开覆盖

$$X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_k$$

其基数为 k，且每个开集 U_i 都允许纤维化 (19) 存在一个开截面，参见 [18]。

纤维化 (19) 的一个截面可以视为机器人运动规划算法，而拓扑复杂度 TC(X) 描述了这类算法的奇点 [19]。

有关 TC(X) 概念的最新发展，请参阅 [24]。

作为一个说明性示例，考虑空间 $F(\mathbb{R}^d, n)$，即 n 个两两不同的点在 $\mathbb{R}^d$ 中的构形空间；该空间已在 [19], §4.7 中进行分析。空间 $F(\mathbb{R}^d, n)$ 描述了 n 个机器人在 $\mathbb{R}^d$ 中避开碰撞的运动。该空间的拓扑复杂度为

$$\mathsf{TC}(F(\mathbb{R}^d, n)) = \begin{cases} 2n-2 & \text{for} \quad d \text{ odd}, \\ 2n-3 & \text{for} \quad d \text{ even}. \end{cases}$$

这里我们采用拓扑复杂度的归一化版本，与 [18], [19] 的概念相比，其值小 1。

上述示例表明，拓扑复杂度可以任意大。

本节将研究单纯复形 X 为随机复形的情形。更具体地说，我们假设 X 是由中间区域模型（4）生成的标准单纯形 Δ_n 的随机子复形，其顶点集为 $\{1, 2, \ldots, n\}$。令人惊讶的是，在这些假设下，当 $n \to \infty$ 较大时，拓扑复杂度 TC(X) 以趋于 1 的概率取较小值：

定理 8.1。 设 $X \subset \Delta_n$ 是一个处于中间区域的随机单纯复形。那么，当 $n \to \infty$趋于1 时，其成立的概率趋于 *1*：

$$\mathsf{TC}(X) \leq 4.$$

证明。 根据定理 4.16， [19] 一个 r连通的单纯复形 X 的拓扑复杂度满足以下不等式

$$\mathsf{TC}(X) < \frac{2\dim X + 1}{r+1}. \tag{20}$$

若 $X \subset \Delta_n$ 是中间区域的随机复形，那么根据定理 7.1，

$$\dim X \leq \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \ln n$$

当 $n \to \infty$ 时，以趋于 1 的概率成立。另一方面，根据定理 7.2，随机复形 X 是 r-连通的，其中 $r = \frac{1}{2}\log_2 \log_2 n - 3$，当$n \to \infty$时，以趋于 1 的概率成立。因此，

$$\frac{2\dim X + 1}{r+1} \leq 4 \cdot \frac{\log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \ln n}{\log_2 \log_2 n - 4} \leq 4.5$$

fo当 r 足够大时 n，由 (20) 可得 TC(X) ≤ 4，渐近几乎必然成立 ly. □

注 8.2。 我认为，定理 8.1 的陈述有可能加强为：对于中间区域中的随机单纯复形 X，TC(X) $= 2$ 以趋于 1 的概率成立。要实现这一点，需要改进定理 7.2 中的连通阈值，参见注 7.3。

9. ∞-富足拉多复形

本节中，我们将遵循 [22]，并考虑对任意 $r \geq 1$ 都是 r-富足的单纯复形；我们称它们为 ∞-富足。

定理 9.1。 *(a)* 存在一个 ∞-富足复形，其顶点集可数。*(b)* 任意两个顶点集可数的 ∞-富足复形都是同构的。

定理 9.1 中的单纯复形被称为拉多复形，以纪念发明了拉多图的理查德·拉多。拉多图是拉多复形 R 的一维骨架，参见 [9]。

定理 *9.1 (a)* 的证明。 为证明 (a)，我们按如下方式构造所需的复形 X。令 X_0 为一个点，并令每个复形 X_{n+1} （其中 $n \geq 0$）由 X_n 得到：首先添加一个有限顶点集 $v(A)$，其顶点以所有子复形 $A \subset X_n$（包括 $A = \emptyset$）为标签；然后考虑锥 $v(A) * A$，其顶点为 $v(A)$，底面为 A，并将每个这样的锥沿底面 A 粘接到 X_n 上。因此，

$$X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_A (v(A) * A),$$

并且我们有有限子复形的无限链 $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots$。该复形

$$X = \cup_{n \geq 1} X_n$$

是 ∞-富足的。事实上，任意有限顶点集 $U \subset V(X)$ 都包含于某个 n 的 $V(X_n)$ 中。诱导子复形 X_U 与 $(X_n)_U$ 一致，因此，对于任意子复形 $A \subset X_U$，顶点 $v = v(A)$ 满足定义 2.1 中的富足性。□

在 (b) 的证明中，我们将使用下文陈述的引理 9.2。

引理 9.2。设 X 是一个 ∞-富足复形，$L' \subset L$ 是由有限单纯复形 L 和诱导子复形 L' 组成的一对。设 $f' \colon L' \to X_{U'}$ 是单纯复形的一个同构，其中 $U' \subset V(X)$ 是一个有限子集。那么存在一个包含 U' 的有限子集 $U \subset V(X)$，以及一个同构 $f \colon L \to X_U$，使得 $f|L' = f'$。

引理 *9.2* 的证明。只需在附加假设 L 只有一个额外顶点的情况下证明此陈述，即 $|V(L) | - |V(L')| = 1$。此时，L 是通过附加一个锥 wA 从 L' 得到的，其中 $w \in V(L) - V(L')$ 表示新顶点，而 $A \subset L'$ 是一个子复形（锥底）。将富足复形的定义性质应用于子集 $U' \subset V(X)$ 和子复形 $f'(A) \subset X_{U'}$，我们可找到一个顶点 $v \in V(X) - U'$，使得 链接$_X(v) \cap X_{U'} = f(A)$。令 $U = U' \cup \{v\}$，并通过令 $f(w) = v$ 将 f' 扩展为同构 $f \colon L \to X_U$。□

定理 *9.1*（*b*）的证明。证明采用众所周知的来回论证。设X和 X'是两个 ∞-富足复形。将它们的顶点分别枚举为 $V(X) = \{v_1, v_2, \dots\}$和$V(X') = \{v'_1, v'_2, \dots\}$，并令 $U_1 = \{v_1\}$ 和 $U'_1 = \{v'_1\}$。同构 $f_1 \colon X_{U_1} \to X'_{U'_1}$由 $f_1(v_1) = v'_1$给出。

接下来，我们定义有限子集序列 $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset V(X)$ 和 $U'_1 \subset U'_2 \subset \cdots \subset V(X')$，使其满足 $\cup U_n = V(X)$ 和 $\cup U'_n = V(X')$，并定义同构 $f_n \colon X_{U_n} \to X'_{U'_n}$ with$f_n|_{X_{U_{n-1}}} = f_{n-1}$。整个集合族 $\{f_n\}$ 由此定义了一个同构 $f \colon X \to X'$。

通过归纳法，假设集合 U_i 和 U'_i 以及对所有 $i \le n$ 的同构 f_i 均已构造完成。若 n 为奇数，我们将寻找满足 $v_i \notin U_n$ 的最小索引 i，并令 $U_{n+1} = U_n \cup \{v_i\}$；然后应用引理 9.2，可以找到一个顶点 $v'_j \in V(X') - U'_n$ 以及一个同构 $f_{n+1} \colon X_{U_{n+1}} \to X'_{U'_{n+1}}$，其扩展了 f_n，其中 $U'_{n+1} = U'_n \cup \{v'_j\}$。

若 n 为偶数，我们将寻找满足 $v'_r \notin U'_n$ 的最小索引 r，并令 $U'_{n+1} = U'_n \cup \{v_r\}$，然后根据引理 9.2，可以找到一个顶点 $v_s \in V(X) - U_n$ 以及一个同构 $f_{n+1} \colon X_{U_{n+1}} \to X'_{U'_{n+1}}$，扩展了 f_n，其中 $U_{n+1} = U_n \cup \{v_s\}$。□

定理 9.3。*(a)* 拉多复形 R 是普适的，也就是说，每个可数单纯复形都同构于 R的一个诱导子复形。*(b)* 拉多复形 R是齐性的，也就是说，对于任意两个有限诱导子复形 R_U, $R_{U'} \subset R$以及任意同构 $f \colon R_U \to R_{U'}$，都存在一个同构 $F \colon R \to R$，使得 $F|R_U = f$。*(c)* 每个普适且齐性的可数单纯复形都同构于 R。

证明。 (a) 设 X 是一个顶点集为 $V(X) = \{v_1, v_2, \dots\}$ 的单纯复形。利用 R 的 ∞-丰富性性质，我们可以依次找到一列顶点 $W = \{w_1, w_2, \dots\} \subset V(R)$ 以及一列同构 f_n：$X_{U_n} \to R_{W_n}$，其中 $U_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ 且 $W_n = \{w_1, \dots, w_n\}$，使得 f_n 扩展 f_{n-1}。这给出了 X 与诱导子复形 R_W 之间的一个同构。

(b) 的证明采用了与引理 9.2 的证明类似的论证 .

(c) 假设 X 是普适且齐性的。设 $U \subset V(X)$ 是一个有限子集，且设 $A \subset X_U$ 是诱导复形的一个子复形。考虑一个抽象单纯复形 $L = X_U \cup wA$，它由 X_U 添加一个以 w 为顶点、以 A 为底面的锥 wA 得到，其中 $X_U \cap wA = A$。显然，$V(L) = U \cup \{w\}$，根据普适性，我们可以找到一个子集 $U' \subset V(X)$ 以及一个同构 $g\colon L \to X_{U'}$。记 $w_1 = g(w)$、$A_1 = g(A)$ 和 $U_1 = g(U)$，则有 $X_{U'} = X_{U_1} \cup w_1 A_1.$。显然，$g$ 限制为一个同构 $g|X_U\colon X_U \to X_{U_1}$。根据齐性性质，我们可以找到一个同构 $F\colon X \to X$，使得 $F|X_U = g|X_U$。记 $v = F^{-1}(w_1)$，则有 $X_{U\cup\{v\}} = X_U \cup vA$，如所需。因此，对于任意 $r \geq 0$，X 都是 r-富足的。□

10. 拉多复形的不可摧毁性

本节的主要结果是推论 10.2，它展示了拉多单纯复形的“不可摧毁性或韧性”。

引理 10.1. 设 X 是一个拉多复形，$U \subset V(X)$ 是一个有限集，$A \subset X_U$ 是一个子复形。令 $Z_{U,A} \subset V(X)$ 表示满足链接$_X(v) \cap X_U = A$的顶点 $v \in V(X) - U$ 所成的集合。则集合 $Z_{U,A}$ 是无限的，并且由 $Z_{U,A}$ 诱导的复形也是一个拉多复形。

证明。 考虑这样一个顶点的有限集 $\{v_1, \dots, v_N\} \subset Z_{U,A}$。可以对集合 $U_1 = U \cup \{v_1, \dots, v_N\}$ 和子复形 $A \subset X_{U_1}$ 应用丰富性性质，从而找到另一个满足 (1) 的顶点 v_{N+1}，即 $v_{N+1} \in Z_{U,A}$。这表明 $Z_{U,A}$ 必定是无限的。

令 $Y \subset X$ 表示由 $Z_{U、A}$ 诱导的子复形。考虑有限子集 $U' \subset Z_{U、A} = V(Y)$ 和子复形 $A' \subset X_{U'} = Y_{U'}$。对集合 $W = U \cup U' \subset V(X)$ 和子复形 $A \sqcup A'$ 应用富足性，我们可找到一个顶点 $z \in V(X) - W$，使得

$$\mathrm{Lk}_X(z) \cap X_W = A \cup A'. \tag{21}$$

由于 $X_W \supset X_U \cup X_{U'}$，方程 (21) 意味着 $\mathrm{Lk}_X(z) \cap X_U = A$，即 $z \in Z_{U,\,A}$。将 (21) 两边与 $X_{U'} = Y_{U'}$ 相交，并利用 $\mathrm{Lk}_Y(z) = \mathrm{Lk}_X(z) \cap Y$（因为 Y 是一个诱导子复形），我们得到 $\mathrm{Lk}_Y(z) \cap Y_{U'} = A'$，这意味着 Y 是拉多复形。□

推论 10.2. 设 X 是一个拉多复形，并设 Y 是通过从 X 中选取有限个单纯形 $F \subset F(X)$，再删除所有包含 F 中单纯形作为其面的单纯形 $\sigma \in F(X)$ 而得到的。那么 Y 也是一个拉多复形。

证明。设 $U \subset V(Y)$ 是一个有限子集，且 $A \subset Y_U$ 是一个子复形。我们也可以将 U 视为 $V(X)$ 的子集，此时 A 就成为 X_U 的子复形，因为 $Y_U \subset X_U$。满足 $\mathrm{Lk}_X(v) \cap X_U = A$ 的顶点集 $v \in V(X)$ 是无限的（由引理 10.1），因此我们可以找到一个顶点 $v \in V(X)$，它不与族 F 中的任何单纯形相接。于是 $\mathrm{Lk}_Y(v) = \mathrm{Lk}_X(v) \cap Y$，从而得到 $\mathrm{Lk}_Y(v) \cap Y_U = A$。□

推论 10.3。设 X 是一个拉多复形。如果顶点集 $V(X)$ 被划分为有限多个部分，那么至少有一个部分上的诱导子复形是拉多复形。

证明。只需证明该命题对划分为两部分的情形成立。设 $V(X) = V_1 \sqcup V_2$是一个划分；记由 X 分别在 V_1 和 V_2上诱导的子复形为 X^1 和 X^2 。假设子复形 X^1 和 X^2 都不是拉多复形。那么对每个 $i = 1, 2$，都存在一个有限子集 $U_i \subset V_i$ 和一个子复形 $A_i \subset X^i_{U_i}$，使得不存在顶点 $v \in V_i$ 满足 $\mathrm{Lk}_{X^i}(v) \cap X^i_{U_i} = A_i$。考虑子集 $U = U_1 \sqcup U_2 \subset V(X)$和一个子复形 $A = A_1 \sqcup A_2 \subset X_U$。由于 X 是拉多复形，我们可以找到一个顶点 $v \in V(X)$，满足 $\mathrm{Lk}_X \cap X_U = A$. 于是 v 属于 V_1 或 V_2，从而得到矛盾，因为 $\mathrm{Lk}_{X^i}(v) \cap X^i_{U_i} = A_i$. □

引理 10.4. 在拉多复形 X 中，每个单纯形的链接都是拉多复形。

证明。设 $Y = \mathrm{Lk}_X(\sigma)$ 是单纯形 $\sigma \in X$ 的链接。为证明 Y 是拉多复形，取一个子集 $U \subset V(Y)$，并取一个子复形 $A \subset Y_U$。我们可以将拉多复形的定义性质（即丰富性）应用于子集 $U' = U \cup V(\sigma) \subset V(X)$ 和子复形 $A \sqcup \bar{\sigma} \subset X_{U'}$；此处 $\bar{\sigma}$ 表示包含单纯形 σ 及其所有面的子复形。由此得到一个顶点 $w \in V(X) - U'$，使得 $\mathrm{Lk}_X(w) \cap X_{U'} = A \sqcup \bar{\sigma}$，或等价地，$X_{U' \cup w} = X_{U'} \cup wA$。注意，$w \in Y = \mathrm{Lk}_X(\sigma)$，因为单纯形 $w\sigma$ 属于 X。此外，$Y_{U \cup w} = Y_U \cup wA$。因此我们看到，链接 Y 也是拉多复形。□

11. 拉多复形 R 是“随机的”。

本节论证，“一个具有可数顶点集的典型单纯复形同构于“具有可数顶点集的单纯复形 R”。我们将对此陈述给出两种形式化论证。首先，我们证明，同构于 R 的单纯复形在所有具有可数顶点的单纯复形所构成的空间中是余剩的，即其补集是可数个无处稠密集的可数并。其次，我们在可数单纯复形的集合上赋予一个概率测度，并证明同构于 R 的单纯复形集合的测度为 1。

令 $\Delta_{\mathbb{N}}$ 表示顶点集为 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, \}$、且以 $\mathbb{N}$ 的所有有限非空子集为单纯形的单纯复形。我们将考察 $X \subset \Delta_{\mathbb{N}}$ 的所有单纯子复形构成的集合 Ω。我们将 Ω 视为所有可数单纯复形的集合。

可以在 Ω 上引入一个度量，使其成为紧致度量空间。对于非负整数 $n \geq 1$，顶点集为 $\{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ 的单纯形 Δ_n 是一个子复形$\Delta_n \subset \Delta_{\mathbb{N}}$。令 Ω_n 表示 Δ_n 的所有单纯子复形组成的集合。对于 $X \in \Omega$，令X_n 表示有限单纯复形 $X_n = X \cap \Delta_n$。对于 $X, Y \in \Omega$，定义 $h(X, Y) = \max\{n; X_n = Y_n\}$。那么

$$d(X, Y) = \exp(-h(X, Y)) \tag{22}$$

是 Ω 上的一个度量（满足超度量三角不等式）。该度量所确定的拓扑与逆极限的拓扑一致

$$\Omega = \varprojlim \Omega_n,$$

其中每个 Ω_n 都赋予离散拓扑。由于 Ω_n 是有限集（因而是紧致的），我们可知 Ω 是紧致的贝尔空间。Ω 与康托尔集同胚。

我们将 $\mathcal{R} \subset \Omega$ 表示为与拉多复形同构的单纯复形的集合。复形 $X \in \mathcal{R}$ 既可以用 ∞-丰富性来刻画，也可以用定理 9.3 中描述的普适性和齐性来刻画。

定理 11.1. 集合 $\mathcal{R} \subset \Omega$ 是余剩的，因此在Ω中稠密。

证明.令 $U_n \subset \Omega$ 为所有满足以下条件的单纯复形 $X \in \Omega$ 构成的集合：对于每个子复形 $A \subset X_n$，都存在一个顶点 $v_A \in V(X) - \{1, 2, \dots, n\}$，使得

$$\mathrm{Lk}_X(v_A) \cap X_n = A. \tag{23}$$

回忆一下，X_n 表示 $X \cap \Delta_n$。显然，$\mathcal{R} = \cap_{n \geq 1} U_n$，只要证明每个 U_n 在 Ω 中都是开且稠密的，定理便得证。

为了证明 U_n 是开的，假设 $X \in U_n$。考虑与所有子复形 $A \subset X_n$ 相对应的所有顶点 v_A（如 (23) 中所述）构成的集合。该集合是有限集，因此我们可以找到 $m > n$，使得所有这些顶点 v_A 都属于 X_m。集合 $\{Y \in \Omega; Y_m = X_m\}$ 包含于 U_n 中，并且是 X 的一个开邻域。因此，U_n 是开的。

为了证明 U_n 是稠密的，考虑任意一个单纯复形 $X \in \Omega$和任意一个$\epsilon > 0$。取 $m > \max\{\ln(\epsilon^{-1}), n\}$，并找出一个满足 $X_m = Y_m$的复形 $Y \in U_n$。这表明 $Y \in U_n$ 且 $d(X, Y) < \epsilon$，也就是说，U_n 在 Ω 中是稠密的。□

接下来我们描述 Ω 上的一个概率测度。对于子复形 $Y \subset \Delta_n$，定义

$$Z(Y, n) = \{X \in \Omega; X \cap \Delta_n = Y\}.$$

具有各种 (Y,n) 的集合 $Z(Y,\ n)$ 构成一个半环 $\mathcal{A}$，见 [28],，我们用 $\mathcal{A}'$ 表示由 $\mathcal{A}'$ 生成的 σ-代数。可在 $\mathcal{A}$ 上定义可加测度 μ，定义如下

$$\mu(Z(Y,n))=2^{-H(Y,n)}\quad \text{where}\quad H(Y,n)=|F(Y)|+|E(Y|\Delta_n)|, \tag{24}$$

与（4）比较。这里 $E(Y|\Delta_n)$ 表示所有满足 $\sigma\in\Delta_n$ 且外部于 Y 的单纯形的集合，即 $\sigma\notin Y$ 但 $\partial\sigma\in Y$。这是 [22] 第 6、7 节中所讨论的测度的一个特例。[28] 中的定理 1.53 表明，μ 可延拓为由 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数 $\mathcal{A}'$ 上的概率测度。

定理 11.2。集合 $\mathcal{R}\subset\Omega$ 属于 σ-代数 $\mathcal{A}'$，且具有满测度，即 $\mu(\mathcal{R})=1$。

证明。对于有限子集 $U\subset\mathbb{N}$，以及单纯形 Δ_U 的单纯子复形 $A\subset\Delta_U$，考虑集合

$$\Omega^{U,L}=\{X\in\Omega;X_U=L\}. \tag{25}$$

该集合属于 σ-代数 $\mathcal{A}'$，并且具有由（24）给出的正测度。另考虑子集 $\Omega^{U,\ L,\ A,\ v}\subset\Omega^{U,\ L}$，它由所有满足 $X_{U\cup v}=L\cup vA$ 的子复形 $X\in\Omega$ 构成。这里 $A\subset L$ 是一个子复形，且 $v\in\mathbb{N}-U$。条件概率等于

$$\mu(\Omega^{U,L,A,v}|\Omega^{U,L})=2^{-|F(A)|-|E(A|L)|-1}>0,$$

由（24）可知。注意，对于不同的 v，在给定 $\Omega^{U,L}$ 的条件下，事件 $\Omega^{U,L,A,v}$ 相互独立，且其概率之和为 ∞。因此，我们可以应用博雷尔-坎泰利引理（见 [28], 第 51 页），得出这样的复形集合 $X\in\Omega^{U,L}$：满足 $X_{U\cup v}=L\cup vA$ 对无穷多个顶点 v 成立的复形，在 $\Omega^{U,L}$ 中构成满测度集。

对所有可能的子复形 $A\subset L$ 取有限交，这意味着这样的单纯复形集合 $\Omega_*^{U\,L}\subset\Omega^{U,L}$：对于任意子复形 $A\subset L$，都存在无穷多个顶点 v 使得 $X_{U\cup v}=L\cup vA$ 成立；该集合在 $\Omega^{U,L}$ 中具有满测度。由于 $\Omega=\cap_U\cup_{L\subset\Delta_U}\Omega^{U,L}$（其中 $U\subset\mathbb{N}$ 遍历所有有限子集），我们得到集合 $\cap_U\cup_{L\subset\Delta_U}\Omega_*^{U\,L,}$ 在 Ω 中的测度为 1。但后一个集合 $\cap_U\cup_{L\subset\Delta_U}\Omega_*^{U\,L,}$ 恰好是所有拉多复形 $\mathcal{R}$ 的集合。□

12. 拉多复形的几何实现

对于一个单纯复形 X，其几何实现 $|X|$ 是由所有满足以下条件的函数组成的集合：$\alpha:V(X)\to[0,1]$，其支撑 $\mathrm{supp}(\alpha)=\{v;\alpha(v)\neq0\}$ 是 X 的一个单纯形（因而是有限的），且 $\sum_{v\in X}\alpha(v)=1$，参见 [34]。对于单纯形 $\sigma\in F(X)$，符号 $|\sigma|$ 表示所有满足 $\mathrm{supp}(\alpha)\subset\sigma$ 的 $\alpha\in|X|$ 所组成的集合。集合 $|\sigma|$ 带有自然拓扑，并且同胚于欧几里得空间中的仿射单纯形。

在几何实现 $|X|$ 上的弱拓扑，其开集是满足以下条件的子集 $U\subset|X|$：对于任意单纯形 σ，$U\cap|\sigma|$ 在 $|\sigma|$ 中是开集。

定理 12.1。 拉多复形同构于单纯形 $\Delta_{\mathbb{N}}$的一个三角剖分。特别地，拉多复形的几何实现 $|X|$ 与无限维单纯形 $|\Delta_{\mathbb{N}}|$的几何实现同胚。

定理 12.1 的结论也在预印本 [8] 中陈述。

[22] 中给出的定理 12.1 的证明使用了以下引理:

引理 12.2. 设 X 是一个拉多复形。则存在一列有限子集$U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset V(X)$，使得 $\cup U_n = V(X)$，并且对于任意 $n = 0$、1、2、.....，诱导单纯复形 X_{U_n} 同构于标准单纯形 Δ_{n+1} 的一个三角剖分 L_n，其维数为 n。此外，对于任意 n，复形 L_n 自然是 L_{n+1} 的一个诱导子复形，并且同构 $f_n : X_{U_n} \to L_n$ 满足 $f_{n+1}|X_{U_n} = f_n$。

注意，拉多复形 X 的几何实现 $|X|$ （赋予弱拓扑）不满足第一可数公理，因此不可度量化。这是因为 X 不是局部有限的。参见定理 3.2.8。 [34],

单纯复形的几何实现还具有另一种自然拓扑，度量拓扑，参见 [34], 第 111 页。赋予度量拓扑的 X 的几何实现记为 $|X|_d$。对于有限单纯复形，空间 $|X|$ 与 $|X|_d$ 同胚；但对于无限复形，一般而言并非如此。对于拉多复形 X，空间 $|X|$ 与 $|X|_d$ 不同胚。此外，一般而言，度量拓扑在细分下并不保持不变，参见 [31], ，其中对此问题有详细讨论。

乌雷松度量空间 [36]是一个著名的泛数学对象；探究它与拉多单纯复形之间的关系颇有趣味。乌雷松普适度量空间 U 由以下性质刻画（在等距意义下唯一）：(1)U 是完备且可分的；(2) U 包含每个可分度量空间的一个等距副本；(3) U 的任意两个有限子集之间的等距映射，都可以延拓为 U 到自身的一个等距映射。这与定理 9.3 给出的拉多复形的刻画颇为相似。

V. Uspenskij [37] 证明了 $\mathcal{U}$ 与希尔伯特空间 ℓ^2同胚。

我们或许可以问：是否存在一种自然的度量，使拉多复形 X 成为乌雷松度量空间 $\mathcal{U}$的一个模型? 作为提示，我们可以提出以下观察。 X 的顶点集合 $V(X)$ 带有如下度量 δ：对于 x, $y \in V(X)$，若 $x \neq y$，则定义 $\delta(x, y) = 1$，当且仅当 x 和 y之间有一条边；否则 [1] $\delta(x, y) = 2$。所得度量空间（$V(X)$ δ）类似于乌雷松普适度量空间，但仅限于距离函数取值为 1 和 2 的可数度量空间。这类度量空间与可数图一一对应，而我们的观察

[1]提醒 读者注意，在拉多复形 X 中，任意两个顶点都有一个共同邻点，即从任意顶点 A 出发，沿着一条或两条边跳转，就能到达任意顶点 B 。

则源于拉多图的普适性；拉多图是拉多复形 X的一维骨架。

作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] W. Ackermann, 《一般集合论的无矛盾性》, 《数学年刊》114（1937）, 305–315。[2] J.A. Barmak, 《丰裕、圆锥及随机单纯复形的连通性》, 《国际数学研究通知》,
2022 10 1093 030； https://doi.org/ . /
[3]
imrn/rnac F. Battiston 等, 《超越成对相互作用的网络：结构与动力学》, 《物理学报告》第874卷, 2020年8月25日, 1–92页。[4] A. Blass 和 F. Harary, 《几乎所有图和复形的性质》。《图论杂志》3（1979）, 第3期, 225–240。[5] A. Blass、G. Exoo、F. Harary: 《帕雷图满足所有一阶邻接公理》。《图论杂志》5(4), 435–439（1981）。[6] B. Bollobas, 《随机图》, 剑桥大学出版社, 2001。[7] A. Bonato, 《对 n-e.c. 图的探索》。《离散数学贡献》4（2009）, 第1期, 40–53页。
[8] 1308 5517 1 A.
[9] 333 351,
Brooke-Taylor 和 D. Testa, 《无限随机单纯复形》, arXiv: . v P. Cameron, 《随机图》, 《保罗·厄尔多斯的数学》II, 《算法与组合学》14, 施普林格, 柏林, 1997。[10] P. Cameron, 《再论随机图》。《欧洲数学大会》第一卷（巴塞罗那, 2000）, 267–274, 《数学进展》201, 比克豪泽, 巴塞尔, 2001。[11] G.L. Cherlin, 《与有限齐性相关的组合问题》。载于: Bokut'、L.A. 等（编）, 《国际代数会议论文集》第三部分。《当代数学》第131卷, 3–30页（1992）。[12] A. Costa 和 M. Farber, 《随机单纯复形》, 《构形空间》, 129–153, 施普林格 INdAM 丛书14, 施普林格, 2016。[13] A. Costa 和 M. Farber, 《大型随机单纯复形 I》, 《拓扑与分析杂志》8（2016）, 第3期, 399–429。[14] A. Costa 和 M. Farber, 《大型随机单纯复形 II: 基本群》。《拓扑与分析杂志》9（2017）, 第3期, 441–483。[15] A. Costa 和 M. Farber, 《大型随机单纯复形 III: 临界维数》。《纽结理论及其分支》
26 2017 2, 1740010 （）, 第 P. Erdős 和 A. Rényi, 《非对称图》, 《匈
[16]
牙利科学院数学学报》第14卷（1963）, 295–315。[17] C. Even-Zohar、M. Farber、L. Mead, 《丰盛单纯复形》。《欧洲数学杂志》8（2022）, 第1期, 1–32。[18] M. Farber, 《运动规划的拓扑复杂度》, 《离散与计算几何》29（2003）, 211–221。[19] M. Farber, 《拓扑机器人学导论》。苏黎世高等数学讲座。欧洲数学会（EMS）, 苏黎世, 2008。[20] M. Farber、L. Mead, 《中间区域中的随机单纯复形》。《拓扑学及其应用》272（2020）, 107065, 22页。[21] M. Farber、L. Mead 和 T. Nowik, 《随机单纯复形、对偶性与临界维数》, 《拓扑与分析杂志》14（2022）, 第1期, 1–31页。[22] M. Farber、L. Mead 和 L. Strauss, 《拉多单纯复形》, 《应用与计算拓扑杂志》 5 （ 2021 ）, 第 2 期, 339–356。

[23] R. Fagin，有限模型上的概率，《符号逻辑杂志》41(1)，50–58（1976）。[24] M. Grant、G. Lupton、L. Vandembroucq，拓扑复杂性及相关主题，《当代数学》702，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018。[25] W. Hodges，模型论，剑桥大学出版社，1993。[26] S. Janson、T. Luczak、A. Rucinski，随机图，2000。[27] D. Kleitman、G. Markowsky，关于戴德金问题：保序布尔函数的数量。*II*。《美国数学会汇刊》213（1975），373–390。[28] A. Klenke，概率论，施普林格，2013。[29] N. Linial 和 R. Meshulam，随机二复形的同调连通性，《组合数学》**26**（2006），475–487。[30] R. Meshulam 和 N. Wallach，随机 *k* 复形的同调连通性，《随机结构与算法》**34**（2009），408–417。[31] K. Mine 和 K. Sakai，保持度量拓扑的单纯复形细分，《加拿大数学通报》55（2012），第1期，157–163。[32] R. Rado，通用图与通用函数，《算术学报》**9**（1964），393–407。[33] B. Rotman，关于拉多若干通用图定理的评论。《伦敦数学会杂志》（2）4（1971），123–126。[34] E. Spanier，代数拓扑，1971。[35] J. Spencer，具有可变概率的零一律。《符号逻辑杂志》58(1)，1–14（1993）42。[36] A. M. Vershik，随机度量空间与普适性。（俄文）《数学科学进展》59（2004），第2期（356），65–104；译文见《俄罗斯数学评论》59（2004），第2期，259–295。[37] V. Uspenskij，乌雷松普适度量空间与希尔伯特空间同胚。《拓扑学及其应用》139（2004），第1–3期，145–149。[38] P. Winkler，随机结构与零一律。载于：Sauer、N.W. 等（编），《集合与逻辑中的有限组合学和无限组合学》。北约高级科学研究所丛书 C：数学与物理科学，第411卷，399–420页。克卢维尔，多德雷赫特（1993）。

附录：论锥形复形的连通性

作者：Jonathan Ariel Barmak [2]

设 $r \in \mathbb{Z}$。若每个至多含有 r 个顶点的子复形 $L \leqslant K$ 都包含于某个单纯锥中，或者等价地，包含于某个顶点 $v \in K$ 的闭星 $\mathrm{St}_K(v)$ 中，则称单纯复形 K 为 r-锥形。注意，0-锥性与 1-锥性的概念相同，且它们等价于复形非空。若 $r \leq -1$，则每个复形都是 r-锥形。

已在 [1, 定理 12], 中证明，若复形 K 是 5^n-锥的，则它是 n-连通的。证明利用了 S^n 的一列三角剖分 $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$，以及一个单纯逼近 $\varphi\colon\ L_k \to K$，还运用了一种思路来减少L_k 中的顶点数量，并将 φ 变形为一个同伦映射。另一方面，0 维球面的连接表明，一个（$2n+1$）-锥复形未必是 n-连通的（[1, 例 6]）。神经引理 [2, 定理 10.6] 可用于给出一个简单证明，说明（$2n+2$）-锥性已足以推出 n-连通性。该证明由 Kahle 在 [3, 定理 3.1] 中给出，其依据是 Meshulam 的一项类似结果 [4, 命题 3.1]。事实上，Meshulam 的结果只涉及

[2]大学 布宜诺斯艾利斯。精确与自然科学学院。
数学 。阿根廷布宜诺斯艾利斯。jbarmak@dm.uba.ar

同调连通性，但在更强的假设下给出了更好的界。虽然他们的结果针对团复形表述，但经过少许修改，该论证也适用于一般复形。这里我们陈述一般情形下的结果，并给出证明以供日后参考。

设 K 和 L 是单纯复形。我们将 $K \circledast L$ 记为非不交并。它是这样一个单纯复形，其单形是 $\sigma \cup \tau$ 与 $\sigma \in K$、 $\tau \in L$ 的并，以及 K 的单形和 L 的单形。如果 K 和 L 的顶点集互不相交，那么 $K \circledast L$ 与通常的并 $K * L$ 重合。当然， $\circledast$ 是交换且结合的。

例 1. 设 K 是一个单纯复形， $L \leq K$ 是一个子复形， v 是 K 的一个顶点。那么， $L \leq \mathsf{St}_K(v)$ 当且仅当非不交锥 $v \circledast L \leq K$。此外，如果 $v_1, v_2, \ldots, v_t$ 是 K 的 t 个顶点，那么 $L \leq \bigcap \mathsf{St}_K(v_i)$ 当且仅当 $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \circledast L \leq K$，其中 $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ 表示离散子复形。

引理 2. 设 K 是一个 r-锥形单纯复形。设 $t \in \mathbb{N}$ 和 $v_1, v_2, \ldots, v_t \in K$。那么 $S = \bigcap \mathrm{St}_K(v_i) \leq K$ 是 $(r-t)$- 锥形的。特别地，如果 $t \leq r$, S 非空。

证明。 设 $L \leq S$是一个至多含有 $r-t$个顶点的子复形。那么 $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \circledast L \leq K$至多含有 r 个顶点，因此存在 $v \in K$使得 $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \circledast L \in \mathsf{St}_K(v)$。换言之， $v \circledast \{v_1, v_2, \ldots, v_t\} \circledast L \leq K$。于是 $v \circledast L \leq S$。这意味着 $L \leq \mathsf{St}_S(v)$。□

我们回顾神经引理 [2, 定理 10.6]的表述。

定理 3 （神经引理）。 设 K 为一个单纯复形， $\{L_i\}_{i \in I}$ 为覆盖 K的子复形族。设 $n \geq 0$。如果对于每个 $1 \leq t \leq n+1$，每个非空交集 $L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \ldots \cap L_{i_t}$ 都是（ $n-t+1$）连通的，那么当且仅当神经 $\mathcal{N}$（$\{L_i\}_{i \in I}$）是 n连通的， K 才是 n连通的。

定理 4。 设 $n \geq 0$。如果单纯复形 K 是（$2n+2$）锥形的，那么它是 n连通的。

证明。 设 $\mathcal{U} = \{\mathsf{St}_K(v)\}_{v \in K}$。我们断言， $\mathcal{N}(\mathcal{U})$具有完备的（$2n+1$）骨架，即任意至多包含 $2n+2$ 个顶点的集合都是一个单纯形。事实上，根据引理 2， K的 $t \leq 2n+2$ 个顶点的闭星的交集非空。特别地， $\mathcal{N}(\mathcal{U})$是 $2n$连通的，因此当然也是 n连通的。

根据神经引理，只需验证对于每个 $1 \leq t \leq n+1$ 以及顶点v_1， v_2，……， v_t, $S = \bigcap \mathsf{St}_K(v_i)$ 都是 $(n-t+1)$-连通的。对于 $t = 1$，这显然成立。对于$2 \leq t \leq n+1$, $0 \leq n-t+1 < n$，由归纳法，只需检验 S 是 $(2n-2t+4)$-圆锥的。但引理 2 表明 S 是 $(2n+2-t)$- 圆锥的，且由于 $t \geq 2$,$2n+2-t \geq 2n-2t+4$。□

参考文献

[1] J.A. Barmak。《丰裕、圆锥及随机单纯复形的连通性》。《国际数学研究通报》，
2022 030, 10 1093 030 ； rnac https://doi.org/ . /imrn/rnac A.
[2]
Björner，《拓扑方法》，《组合学手册》（R. Graham、M. Grötschel 和 L. Lovász 编），North-Holland，阿姆斯特丹，1994 年，第 1819-1872 页。[3] M. Kahle。《随机团复形的拓扑》。《离散数学》309（2009），第 1658-1671 页。[4] R. Meshulam。《团复形与超图匹配》。《组合数学》21（2001），第 89-94 页。