arXiv:2301.07413v1 [math.FA] 18 Jan 2023

某些希尔伯特生成的巴拿赫空间中的等边集与分离集

PIOTR KOSZMIDER 和 KAMIL RYDUCHOWS KI

ABSTRACT. 我们研究了由 Shelah、Stepr¯ans 和 Wark 所考察的不可分巴拿赫空间的希尔伯特生成版本。在这些空间中，范数在不可分子集上的行为极不规则，以至于除对角算子（或恒等算子的数乘）加上一个可分值域算子之外，不允许存在任何有界线性算子。我们探讨这些空间是否存在不可数等距集，以及它们的单位球面是否存在不可数的（1+）-分离集或（$1+\varepsilon$）-分离集。对于其中两类空间，我们通过证明绝对性结果和不可判定性结果，解决了上述部分问题。$\mathcal{X}$ $\mathcal{X}$

推论是：连续统假设（事实上，即存在一个基数为第一不可数基数的非第一纲实数集）蕴含存在希尔伯特空间 $\ell_2(\omega_1)$ 的一种等价重赋范，使其不含任何不可数等边集；它还蕴含存在一个不可分的希尔伯特生成的巴拿赫空间，该空间在每个不可分子空间中都包含 ℓ_2 的一个同构副本，且其单位球面既不含不可数等边集，也不含对任意 $\varepsilon > 0$ 都成立的不可数 $(1+\varepsilon)$-分离集。这可与 H´ajek、Kania 和 Russo 最近的一项结果相比较：所有不可分自反巴拿赫空间的单位球面都含有不可数 $(1+\varepsilon)$-分离集。

1. INTRODUCTION

定义 1. 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间，且 $\delta > 0$。

- $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ 是（$\delta+$）-分离的，当且仅当 $\|y - y'\| > \delta$ 对任意不同的 y、$y' \in \mathcal{Y}$ 均成立。
- $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ 是 δ-分离的[1]，当且仅当 $\|y - y'\| \geq \delta$ 对任意不同的 y、$y' \in \mathcal{Y}$ 均成立。
- $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ 是 δ-等边的[2]，当且仅当 $\|y - y'\| = \delta$ 对任意不同的 y、$y' \in \mathcal{Y}$ 均成立。

给定一个属于指定类的巴拿赫空间 $\mathcal{X}$，已有大量研究试图确定 $\mathcal{X}$ 中是否存在大的等边集，或 $\mathcal{X}$ 的单位球面（记作 $S_{\mathcal{X}}$）中是否存在大的（1+）-分离集或（$1+\varepsilon$）-分离集。这些问题具有等距性质，但许多结果取决于巴拿赫空间的同构类。

若 $\mathcal{X}$ 可分（改进了 Kottman 的一个定理 [20]），Elton 和 Odell 证明了 $S_{\mathcal{X}}$ 包含一个无限的（$1+\varepsilon$）-分离集，其中某个 $\varepsilon > 0$（[6]）成立。若 $\mathcal{X}$ 是

2010 *Mathematics Subject Classification.* 46B20，03E75，46B26，03E35。作者的研究得到波兰国家科学中心（NCN）研究资助项目的支持，项目编号为 2020/37/B/ST1/02613。[1]根据经典的 Riesz引理，对于任意 $\varepsilon > 0$，任意密度为κ 的无限维巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 都包含一个基数为 κ 的（$1-\varepsilon$）-分离集 $\mathcal{Y}$，该集合位于 $\mathcal{X}$ 的单位球面上。[2]注意，一个巴拿赫空间存在无限基数的等边集 κ，当且仅当其单位球面存在基数为 κ 的 1-等边集（将原等边集缩放，并将其中一点平移至 0 即可）。

非自反的，则根据 Kryczka 和 Prus 的结果（[21]），ε 可以取为任意小于 $\sqrt[5]{4}-1$ 的数；而当 $\mathcal{X}$ 一致凸时，可以对其进行估计（[24]）。Mercourakis 和 Vassiliadis 证明，任何包含 c_0 同构副本的巴拿赫空间都存在一个无限等边集；Freeman、Odell、Sari 和 Schlumprecht 证明，所有一致光滑巴拿赫空间都存在无限等边集。然而，Terenzi 在 [28] 中给出了 ℓ_1 的一种等价重赋范，使其不存在任何无限等边集。还应指出，每个无限维巴拿赫空间都存在一种等价重赋范，使其包含一个无限等边集（[22]）。

若要研究 $S_{\mathcal{X}}$ 中如定义 1 所述、其存在性取决于巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 的性质的不可数集，就必须转向非可分巴拿赫空间，因为所有这些集合在范数下都是离散的。Elton-Odell 定理的不可数版本在此处不成立，$c_0(\omega_1)$（[6]）就是一个例证。对于这类空间，Kottman 定理的不可数版本也不成立（[19]）；甚至单位球面也可以是可数多个直径严格小于 1 的集合之并（[10]）。较为积极的一面是，Kania 和 Kochanek（[14]）证明，对于 K 紧豪斯多夫空间上的所有形如 $C(K)$ 的非可分空间，其单位球面都含有不可数的（1+）分离集；然而，这些空间是否含有不可数的（$1+\varepsilon$）分离集或不可数等距集，则被证明是不可判定的（[17]）。此外，文献 [18, 19] 构造了 $\ell_1([0,1])$ 的等价重赋范，使其不含无限等边集；还构造了 X 局部紧豪斯多夫空间上的 $C_0(X)$ 空间的等价重赋范，使其不含不可数等距集。

然而，H´ajek、Kania 和 Russo 给出了一个有力的同构正面结果：所有自反的不可分巴拿赫空间都存在不可数的（$1+\varepsilon$）-分离集。此外，迄今尚未发现不含（无限）不可数等边集的自反不可分巴拿赫空间。以下是我们的主要结果，它进一步阐明了自反性与不可数等边集及分离集之间的关系。

定理 2. 假设存在一个基数为第一不可数基数 ω_1 的非第一纲实数集（例如，假设连续统假设成立）。

(1) $\ell_2(\omega_1)$ 存在一种等价重赋范，使其不含不可数等边集。(2) 存在一个不可分的希尔伯特生成的巴拿赫空间，其中每个不可分子空间都包含 ℓ_2 的一个同构副本；该副本的单位球面既不含不可数等边集，也不含任何 $\varepsilon>0$ 的不可数（$1+\varepsilon$）-分离集。

证明。(1) 使用命题 5、16 和 26。(2) 使用定理 3 (1)。 □

回顾一下，如果存在一个从希尔伯特空间映入 $\mathcal{X}$、且值域稠密的有界线性算子，那么巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 就称为希尔伯特生成的。这类空间恰好是其对偶球在弱 * 拓扑下为一致埃伯莱因紧空间的巴拿赫空间。例如，参见 [3, 5, 8, 11]，其中给出了关于这类空间的大量结果。请注意，在每个不可分子空间中都含有 ℓ_2 的性质，与某种程度上自反有关（[4]）。我们还注意到，迄今文献中所呈现的所有相容或绝对的、没有不可数等距集的不可分巴拿赫空间的例子，甚至都不是 WLD [3]；而 WLD 类比希尔伯特生成空间广泛得多

[3]对于 K 可分的情形，[17] 的空间是 $C(K)$；而 K 可分时，[19] 和 [10] 的空间与 $C(K)$同构；但不可分的 WLD 空间不能与 $C(K)$空间同构，适用于 K

。我们不知道定理 2 的结论能否在不附加任何集合论假设的情况下得到，但我们在定理 3（3）中证明，对于具体的空间类（SW-空间）而言，这种假设无法去除；定理 2（2）中的相容例子就属于这一类。

对于反身或“接近反身”的巴拿赫空间中是否存在定义 1 所述不可数集这一问题，我们的研究方法是考察两类具体的巴拿赫空间，它们最初由 Shelah 在 [26] 中以及由 Shelah 和 Stepr¯ans 在 [27] 中研究，后来又由 Wark [31, 32] 加以修改。我们将属于这两类的巴拿赫空间称为 SW-空间和 SSW 空间（定义见第 2 节）。本文完全致力于研究这些空间，而定理 2 是有关它们的结果的推论。我们之所以开始在上述背景下研究这些空间，是因为它们的范数在不可分集上表现出“混沌”行为（这正是这些空间具有刚性、算子较少的原因，也是最初引发人们对这些空间兴趣的缘由）；另一方面，Wark 已经得到了它们的希尔伯特生成版本（并且通过插值方法，甚至得到了反身且一致凸的版本）。

更具体地说，定理 2 是以下结果中第 (1) 项的推论；其余部分则说明了在上述背景下，SW 空间和 SSW 空间作为（反）例所能发挥的作用有何限制。

定理 3。

(1) 存在一个基数为第一不可数基数的非第一纲实数集ω_1 ，这意味着存在一个 SW 空间，其中每个不可分子空间都包含 ℓ_2的一个同构副本；该空间不含任何不可数等距集，且其单位球面不含任何针对任意 $\varepsilon > 0$ 的不可数 $(1+\varepsilon)$-分离集。(2) 所有 SW 空间和 SSW 空间的单位球面都含有不可数 $(1+)$-分离集。(3) 马丁公理与连续统假设的否定意味着，所有 SSW 空间的单位球面都含有某个 $\varepsilon > 0$ 对应的不可数 $(1+\varepsilon)$-分离集，并且所有 SW 空间的单位球面都含有不可数$\sqrt{2}$-等边集。(4) 存在一个 SW 空间和一个 SSW 空间，它们的单位球面分别含有不可数的 $\sqrt{2}$-等边集和 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$等边集。

证明。（1）使用命题 24、25。（2）使用命题 18。（3）使用命题 19。（4）使用命题 21。□

本文结构如下。接下来，第 2 节介绍预备知识。第3节致力于证明定理 3 的（2）—（4）项。第4节包含证明定理 3（1）所需的命题。最后，第5节列出一些问题。

第一不可数基数记为 ω_1。所有满足以下条件的 $x \in \mathbb{R}^{\omega_1}$ 的集合记为 $c_{00}(\omega_1)$：$\{\alpha < \omega_1 : x(\alpha) \neq 0\}$至多是有限的。若 $\mathcal{X}$ 是巴拿赫空间，则 $B_{\mathcal{X}}$ 表示 $\mathcal{X}$ 的单位球， $S_{\mathcal{X}}$ 表示 $\mathcal{X}$ 的单位球面。巴拿赫空间的子空间总是指闭线性子空间。对于 $x \in \mathbb{R}^{\omega_1}$ ，集合 $\operatorname{supp}(x) = \{\alpha \in \omega_1 : x(\alpha) \neq 0\}$ 称为 x 的支撑。

可分，因为可分的科森紧空间是可度量化的。 [18] 的空间是$\ell_1([0,1])$的重新赋范，因此也不是 WLD。

符号 1_A 表示 A 的特征函数。若 A、B 是不相交集合，则 $A \otimes B = \{\{\alpha, \beta\} \colon \alpha \in A, \beta \in B\}$。若 X 是一个集合，$[X]^{<\omega}$ 表示 X 的所有有限子集构成的族，$[X]^n$ 表示 X 的所有 n 元子集构成的族。

2. Families, norms, colorings and axioms

定义 4. 设 $\mathcal{A}$ 是 ω_1 的有限子集族，该族对取子集运算封闭，并包含所有单元素集。我们在 $c_{00}(\omega_1)$ 上定义范数 $\| \ \|_{\mathcal{A}}$，如下：

$$\|x\|_{\mathcal{A}} = \sup_{A \in \mathcal{A}} \sqrt{\sum_{\alpha \in A} x(\alpha)^2}$$

对所有 $x \in c_{00}(\omega_1)$ 均成立。关于此范数的 $c_{00}(\omega_1)$ 完备化记为 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}, \| \ \|_{\mathcal{A}})$。

利用标准方法可以证明，所有满足 $\|x\|_{\mathcal{A}}$ 为有限集的 $x \in \mathbb{R}^{\omega_1}$ 关于 $\| \ \|_{\mathcal{A}}$ 都构成一个完备空间，因此我们得到了 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的具体表示，即 $c_{00}(\omega_1)$ 关于此范数的闭包，如 [27] 所示。我们将使用这一表示。当用 $\mathbb{N}$ 替换 ω_1，并用 ℓ_1 范数替换 ℓ_2 范数时，这类空间称为组合巴拿赫空间或广义 Schreier 空间，其渊源可追溯至 Schreier 的论文 [25]。ω_1 取代 $\mathbb{N}$ 的首次使用似乎见于 [26]，而在这一非可分情形下首次使用 ℓ_2 范数似乎见于 [31]。ℓ_2 在计算中更为繁琐，但具有一些更好的性质：

命题 5. 假设 $\mathcal{A}$ 如定义 4 中所述。那么 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}, \| \ \|_{\mathcal{A}})$ 是一个希尔伯特生成的巴拿赫空间，且范数 $\| \ \|_{2,\ \mathcal{A}} = \| \ \|_2 + \| \ \|_{\mathcal{A}}$ 是希尔伯特空间 $(\ell_2(\omega_1)\ \| \ \|_2)$ 上的等价范数。

证明. 注意，对于任意 $x \in c_{00}(\omega_1)$，我们有 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_2$，因此 $\| \ \|_2 \leq \| \ \|_2 + \| \ \|_{\mathcal{A}} \leq 2\| \ \|_2$，从而 $\| \ \|_{2,\ \mathcal{A}}$ 和 $\| \ \|_2$ 在 $\ell_2(\omega_1)$ 上等价。此外，恒等算子 $\ell^2(\omega_1) \to \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 有界且其像稠密，因此 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 是一个希尔伯特生成的巴拿赫空间。□

定义 6. 假设 $A \subseteq \omega_1$。$P_A \colon \mathcal{X}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 定义为

$$P_A(x)(\eta) = \begin{cases} x(\eta) & \text{if } \eta \in A \\ 0 & \text{if } \eta \notin A \end{cases}$$

引理 7. 假设 $\mathcal{A}$ 如定义 4 中所述。假设 $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \omega_1$和 $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$。那么 $\|P_A(x)\|_{\mathcal{A}} \leq \|P_B(x)\|_{\mathcal{A}}$。特别地，$P_A$ 是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$上的范数为一的投影。

现在我们回顾一下另一种范数的定义。在可分情形中，这种范数可追溯至詹姆斯（[13]）。所谓连续对集，是指由 ω_1 的二元集组成的集合 D，且对于任意不同的 a、$b \in D$，均有 $\max(a) < \min(b)$ 或 $\max(b) < \min(a)$。

定义 8. 设 $\mathcal{D}$ 是由连续对构成的有限集族，且包含 ω_1 的所有单对。对于 $x \in c_{00}(\omega_1)$，在 $c_{00}(\omega_1)$ 上定义范数 $\nu_{\mathcal{D}}$ 如下：

$$\nu_{\mathcal{D}}(x) = \sup_{D \in \mathcal{D}} \sqrt{\sum_{\{\alpha,\beta\} \in D} |x(\alpha) - x(\beta)|^2}$$

对所有 $x \in c_{00}(\omega_1)$ 均成立。若 $\mathcal{A}$ 如定义 4 所述，则将 $c_{00}(\omega_1)$ 关于范数 $\| \|_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$（定义为 $\nu_{\mathcal{D}} + \| \|_{\mathcal{A}}$）的完备化记为 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}, \| \|_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}})$。

要求所有单对都属于 $\mathcal{D}$ 的条件，保证了 ν 不仅是半范数，而且是 $c_{00}(\omega_1)$ 上的范数。这类半范数似乎最早是在非可分情形下于 [27] 中得到考察（事实上，由于上述性质，[27] 中考虑的具体 ν 是一个范数）。与 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的情形一样，我们将采用 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 的具体表示，即相对于 $\| \|_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 的 $c_{00}(\omega_1)$ 的闭包，如 [27] 中所述。

命题 9。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 如定义 4 和定义 8 中所述。那么 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}, \| \|_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}})$ 是一个希尔伯特生成的巴拿赫空间。

证明。注意，对于任意 $x \in c_{00}(\omega_1)$，以及定义 4 和定义 8 中的 $\mathcal{A}$、$\mathcal{D}$，我们有 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_{\mathcal{A}} \leq \|x\|_2$，并且 $\|x\|_\infty \leq \nu_D(x) \leq 2\|x\|_2$。特别地，恒等算子 $\ell^2(\omega_1) \to \mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 的像是稠密的，因此 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 是一个希尔伯特生成的巴拿赫空间。□

在 [26] 和 [27] 巴拿赫空间中，范数采用 ℓ_1 范数而非 ℓ_2 来定义（如定义 4、8 中所述），并研究了族 $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ 的特殊性质。文中证明，对于这类特殊族 $\mathcal{A}, \mathcal{D}$，第一类空间上的有界线性算子只能是关于自然基的对角算子与可分值域算子之和；第二类空间上的有界线性算子则只能是恒等算子的数乘与可分值域算子之和。在 [31] 中，对这些证明进行了修改，从而用我们的术语证明了由特殊族 $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ 得到的 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 和 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 也具有类似结果。我们用自己的术语，在以下两个定义中定义了 $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ 的附加性质；这些性质保证了上述意义下算子的数量很少。下面两个定义引入了本文研究的两类空间。

定义 10. 若 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 ω_1 的有限子集族，且二者都对取子集封闭，$\bigcup \mathcal{A} = \omega_1$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq [\omega_1]^1 \cup \{\emptyset\}$，并且对于所有族 $\{\{a(\alpha)\ b(\alpha)\}:$ 由 ω_1 的元素构成的不相交对的族 $\alpha < \omega_1\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，都存在 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \omega_1$ 使得

- $\{a(\alpha_1)\ \ldots a(\alpha_k)\} \in \mathcal{A}$,
- $\{b(\alpha_1)\ \ldots b(\alpha_k)\} \in \mathcal{B}$。

若存在一个族 $\mathcal{B}$，使得 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是 T-族，则有限子集 $\mathcal{A}$ 的族称为 T_0-族。如果 $\mathcal{A}$ 是 T_0-族，则巴拿赫空间 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A}}, \| \|_{\mathcal{A}})$ 称为 SW 空间。

定义11. 由连续对组成的集合族 $\mathcal{D}$ 称为关于 T-族 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 的良好族，若

(1) 每当 $A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ 且 $D \in \mathcal{D}$ 时，就有 $|A \cap (\bigcup D)| \leq 2$。(2) 如果 D、$D' \in \mathcal{D}$ 互不相同，则 D 中与 D' 中除自身配对外的其他配对相交的配对至多有五对，即

$$|\{a \in D : a \cap (\bigcup (D' \setminus \{a\})) \neq \emptyset\}| \leq 5.$$

(3) 每当 $\{d_\xi:\ \xi < \omega_1\} \subseteq [X]^2$ 是连续对的集合且 $k \in \mathbb{N}$ 时，都存在 $\xi_1 < \ldots < \xi_k < \omega_1$ 使得 $\{d_{\xi_i}:\ 1 \leq i \leq k\} \in \mathcal{D}$。

如果 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是 T-族，且 $\mathcal{D}$ 是关于它们的良族，那么 $(\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$、$\|\ \|_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}})$ 称为 SSW 空间。

关于 [26] and[27]， $\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c, \mathcal{D}_c$ 形式的 T-族及其对应良族的构造，适用于由 Todorcevic 得到的某些函数 c （关于一种简单构造，[29],参见 [30] ）。这些概念是下述定义的主题，该定义给出了多种典型的 SW-空间和 SSW 空间。

定义 12. 函数 $c = (c_0, c_1)$: $[\omega_1]^2 \to I \times J$，其中 $0, 1 \in I$ and $J \neq \emptyset$，称为 T-着色，若对于任意不可数的两两不交集合 $\{\{a_\xi(0)\ a_\xi(1)\} : \xi < \omega_1\}$（其元素为 ω_1 的对），以及 $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in I \times J$，存在 $\xi < \eta < \omega_1$ 使得 $c(\{a_\xi(0)\ a_\eta(0)\}) = (i_0, j_0)$ 且 $c(\{a_\xi(1)\ a_\eta(1)\}) = (i_1, j_1)$。我们定义

- $\mathcal{A}_c = \{a \in [\omega_1]^{<\omega} :\ c_0[[a]^2] \subseteq \{0\}\}$
- $\mathcal{B}_c = \{a \in [\omega_1]^{<\omega} :\ c_0[[a]^2] \subseteq \{1\}\}$

当 $I \times J = 3 \times [\omega_1]^{<\omega}$ 时，我们将 $\mathcal{D}_c$ 定义为所有满足下述条件的连续对 $\{\xi_1, \eta_1\}, \ldots, \{\xi_k, \eta_k\}$ 的集合：对于 $1 \leq i \leq k$， $\xi_i < \eta_i$，且存在某个 $k \in \mathbb{N}$，使得对每个 $1 \leq i < j \leq k$，都有

$$c(\{\xi_i, \xi_j\}) = c(\{\eta_i, \eta_j\}) = (2, \{\xi_l, \eta_l : l < i\}).$$

综上所述，我们得到：

命题 13.

(1) 对于任意满足 $0, 1 \in I$ 且 $1 \leq |I|, |J| \leq \omega_1$ 的集合 I, J，存在 T-着色 c: $[\omega_1]^2 \to I \times J$ ([29])。(2) 若 c 是任意一个 T-着色，则 $\mathcal{A}_c, \mathcal{B}_c$ 是 T-族。(3) 若 c: $[\omega_1]^2 \to 3 \times [\omega_1]^{<\omega}$ 是一个 T- 着色，则 $\mathcal{D}_c$ 相对于 $\mathcal{A}_c$ 和 $\mathcal{B}_c$ 是良好的（[27]）。(4) 若 $\mathcal{A}$ 是任意一个 T_0-族，则 $\mathcal{X}_\mathcal{A}$ 上的所有有界线性算子都是对角算子加可分值域算子（[27, 31]）。(5) 若 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是任意的 T-族，且 $\mathcal{D}$ 是相对于它们良好的任意族，则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$ 上的所有有界线性算子都是恒等算子的倍数加可分值域算子（[27, 31]）。

本文不会利用上面的 (4) 和 (5)，但它们为在范数表现不规则的背景下研究上述空间提供了动机。在第4节中，我们将考虑具有以下附加性质的 T-着色，这些性质使我们能够对相应的 SW-空间 $X_{\mathcal{A}_c}$ 得到定理 2 中的 (2)。

定义 14. 若函数 $c = (c_0, c_1)$: $[\omega_1]^2 \to I \times J$，其中 $0, 1 \in I$ 和 $J \neq \emptyset$，是一个强 T-着色，且它是一个 T-着色，并且对于任意不可数两两不交集族 $\{A_\xi : \xi < \omega_1\}$（由 ω_1 的有限子集构成），都存在 $\xi < \eta < \omega_1$ 使得 $c_0[A_\xi \otimes A_\eta] = \{0\}$，且存在 $\xi < \eta < \omega_1$ 使得 $c_0[A_\xi \otimes A_\eta] = \{1\}$，则称其为强 T-着色。若 T 是一个强 T-着色，则称 $\mathcal{A}_c$ 为强 T_0-族，并称 $\mathcal{A}_c$ 和 $\mathcal{B}_c$ 为强 T-族。

根据定义 12 和 14，以下结论显然成立。

引理 15. 若 $\mathcal{A}$ 是强 T_0-族，则对于 ω_1 的每个不可数两两不交族 $\mathcal{F}$，存在不同的 A、$B \in \mathcal{F}$，使得 $(A \otimes B) \cap \mathcal{A} = \emptyset$；并且存在不同的 A、$B \in \mathcal{F}$，使得 $(A \otimes B) \subseteq \mathcal{A}$. 。此外，任何满足 $[C]^2 \subseteq \mathcal{A}$ 的有限集 $C \subseteq \omega_1$ 本身都是 $\mathcal{A}$ 的一个元素。

为了构造强 T-着色，我们需要一些额外的集合论假设。显然，以下假设可由连续统假设推出，并且与其多种否定形式相容（例如参见 [2]）：

命题 16 ([15])。若 $\mathbb{R}$ 存在一个基数为第一个不可数基数 ω_1 的非贫子集，则存在一个强 T-着色 $c\colon [\omega_1]^2 \to 3 \times [\omega_1]^{<\omega}$。

在命题 19 中，我们将考虑另一条著名的附加集合论公理，即马丁公理。关于其定义及相关术语，读者可参阅任何集合论教科书，例如 [2]。不过，以下说明应足以帮助读者理解本命题的证明。偏序 $(\mathbb{P}, \leq)$ 中的两个元素 p, q 称为相容的，如果存在 $r \in \mathbb{P}$ 使得 $r \leq p, q$。$\mathbb{P}$ 中的反链是指 $\mathbb{P}$ 的任意两两不相容子集。若 $\mathbb{P}$ 不存在不可数反链，则称其满足可数链条件。若对 $\mathbb{P}$ 的任意有限子集 $\mathbb{P}'$（$p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}'$），都存在 $p \in \mathbb{P}$ 使得 $p \leq p_1, \ldots, p_k$，则称该子集为中心化。我们将用到以下事实：

命题 17 (1.4.24 [2])。假设马丁公理成立，且连续统假设不成立，则每个基数为 ω_1 、满足可数链条件的偏序 $\mathbb{P}$ 都是 σ-中心化的，也就是说，$\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_n$ 其中每个 $\mathbb{P}_n$ 都是中心化的。

3. 一般的 SW-空间和 SSW-空间

命题 18。每个 SW 空间和每个 SSW 空间的单位球面都含有一个不可数的 (1+)-分离集。

证明。令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为诱导出 SW 空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的 T-族。注意，ω_1 的每个不可数子集都含有一个属于 $\mathcal{A}$ 的二元素子集。这由定义 10 得出。另一方面，空集和所有单元素集都属于 $\mathcal{A}$，因为 $\mathcal{A}$ 对子集封闭，且覆盖 ω_1。

通过归纳法，我们构造由 ω_1 的可数子集组成的族 $(A_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$，如下所示：$A_0 \subseteq \omega_1$ 是满足 $[A_0]^{<\omega} \cap \mathcal{A} \subseteq [A_0]^1 \cup \{\emptyset\}$ 的任意极大集（必至多可数）。构造出 $\alpha < \beta$ 的 A_α 后，我们选取 $\gamma > \sup^{\alpha<\beta} \sup A_\alpha$，并将满足 $[A_\beta]^{<\omega} \cap \mathcal{A} \subseteq [A_\beta]^1 \cup \{\emptyset\}$ 的 $\omega_1 \setminus \gamma$ 的任意极大子集取作 A_β。A_α 可能是单元素集，但它们都非空。构造出 A_α 后，令 x_α 为 $\ell_2(\omega_1)$ 中满足 $\operatorname{supp}(x_\alpha) = A_\alpha, x_\alpha(\min(A_\alpha)) = 1$ 以及 $|x_\alpha(\gamma)| \leq 1$ 的任意元素，其中 $\gamma \neq \min(A_\alpha)$，$\gamma < \omega_1$。根据 A_α 的选取，x_α 属于 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$。此外，由于 $\mathcal{A}$ 中与 A_α 相交的集合至多是单元素集，因此对于每个 $\alpha < \omega_1$，都有 $\|x_\alpha\|_{\mathcal{A}} = 1$。

为了证明 $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ 在 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 中构成一个不可数的 (1+)-分离集，任取 $\alpha < \beta < \omega_1$。由 A_α 的极大性可知，存在 $\xi \in A_\alpha$ 使得 $\{\xi, \min(A_\beta)\} \in \mathcal{A}$。因此

$$(*) \qquad \|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathcal{A}} \geq \sqrt{|x_\alpha(\xi)|^2 + |x_\beta(\min A_\beta)|^2} > 1,$$

由此完成了 SW-空间情形下的证明。

现在假设 $\mathcal{D}$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的良族，并考虑一个 SSW 空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\,\mathcal{D}}$。首先请注意，在上文中，我们可以选取 x_α，使得数 $\nu_D(x_\alpha)$ 为有理数。事实上，如果 $y \in \ell_2(A_\alpha)$ 是任意满足 $\operatorname{supp}(y) = A_\alpha \setminus \{\min(A_\alpha)\}$ 且 $|y(\gamma)| \leq 1$ 的向量 $\gamma \in A_\alpha$（因此在上文中我们选取 x_α 为 $\mathbf{1}_{\{\min(A_\alpha)\}} + y$），那么将 $t \in [0,1]$ 映射到 $\nu_D(\mathbf{1}_{\{\min(A_\alpha)\}} + ty)$ 的函数是连续的，且定义在一个连通定义域上。如果它是常数，那么 $\nu_D(\mathbf{1}_{\{\min(A_\alpha)\}} + y) =$

$\nu_D(\mathbb{1}_{\{\min(A_\alpha)\}}) = 1$。如果它不是常数，则它会取到某个有理数值。因此，我们将成功得到这样一个 $\nu_{\mathcal{D}}(x_\alpha)$ 值。

对于 $n \in \mathbb{N}$ 令 $D_{n,\alpha} \in \mathcal{D}$ 满足

$$\nu_{\mathcal{D}}(x_\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\sum_{\{\xi,\eta\}\in D_{n,\alpha}} |x_\alpha(\xi) - x_\alpha(\eta)|^2}.$$

通过取一个不可数子序列，我们可以假设对每个 $\alpha < \beta < \omega_1$，都有

$$\bigcup\bigcup\{D_{n,\alpha} : n \in \mathbb{N}\} \cap A_\beta = \emptyset.$$

这意味着

$$(**) \qquad \nu_{\mathcal{D}}(x_\alpha) \le \nu_{\mathcal{D}}(x_\alpha - x_\beta)$$

因为 x_β 的支撑等于 A_β。由 **(*)** 和 **(**)** 可知，对每个$\alpha < \beta < \omega_1$，都有

$$(***) \qquad \|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}} > \|x_\beta\|_{\mathcal{A}} + \nu_{\mathcal{D}}(x_\alpha).$$

通过取一个不可数子集，我们可以假设 $\nu_D(x_\alpha)$ 的取值都相同，因为这些值是有理数；因此$\|x_\alpha\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}}$的所有取值也都相同，因为对每个 $\alpha < \omega_1$，都有 $\|x_\alpha\|_{\mathcal{A}} = 1$。所以 **(***)** 得出 $\|x_\alpha - x_\beta\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}} > \|x_\beta\|_{\mathcal{A}} + \nu_{\mathcal{D}}(x_\beta) = \|x_\beta\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}}$，对每个 $\alpha < \beta < \omega_1$ 都成立。也就是说，集合 $\{\frac{1}{\|x_\alpha\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}}} x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是 (1+)-分离的。□

命题 19. 假设马丁公理成立，且连续统假设不成立。每个 SW 空间的单位球面都包含一个不可数 $\sqrt{2}$-等边集，而每个 SSW 空间的单位球面都包含一个不可数的 $(1+\varepsilon)$-分离集，其中 $\varepsilon > 0$ 满足某个条件。

证明. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是诱导 SW 空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的 T-族。考虑由满足 $[p]^{<\omega} \cap \mathcal{A} \subseteq [p]^1 \cup \{\emptyset\}$ 的有限集 $p \subseteq \omega_1$ 构成的偏序 $\mathbb{P}$，其序关系由反向包含关系给出。

注意，我们的假设蕴含 $\mathbb{P}$ 不满足可数链条件。事实上，若 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件，则（由于 $|\mathbb{P}| = \omega_1$），根据命题 17 $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} \mathbb{P}_n$，$\mathbb{P}_n$ 是中心化的。由于对每个 $\alpha < \omega_1$ 都有 $\{\alpha\} \in \mathbb{P}$，便存在 $n \in \mathbb{N}$ 和一个不可数的 $I \subseteq \omega_1$，使得对每个 $\alpha \in I$ 都有 $\{\alpha\} \in \mathbb{P}_n$。那么 I 将是一个不可数集，其中任意一对元素都不属于 $\mathcal{A}$ ——这与定义 10 矛盾。

设 $\mathbb{P}'$ 是 $\mathbb{P}$ 中的一个不可数反链，即由 ω_1 的有限子集组成的不可数族，其中不存在一对 $\mathcal{A}$，使得对于任意不同的 p、$p' \in \mathbb{P}'$，并集 $p \cup p'$ 在 $\mathcal{A}$ 中含有一对元素。应用 Δ-系统引理并移除根后，不妨设它们两两不交且具有相同的有限基数。我们将证明，$\{\mathbb{1}_p : p \in \mathbb{P}'\}$ 构成 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 单位球面中的一个不可数 $\sqrt{2}$-等距集。由于 $\mathbb{P}'$ 的元素不包含 $\mathcal{A}$ 的非空元素（单元素集除外），显然 $\{\mathbb{1}_p : p \in \mathbb{P}'\}$ 包含于 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的单位球面中。若 p、p' 是 $\mathbb{P}'$ 中的不同元素且 $A \in \mathcal{A}$，则 $|A \cap (p \cup p')| \le 2$。由此可得 $\|\mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{p'}\|_{\mathcal{A}} \le \sqrt{2}$。但是由于 p 和 p' 不相容，必定存在 $\xi \in p$ 和 $\eta \in p'$，使得 $\{\xi, \eta\} \in \mathcal{A}$，因此

$$\|\mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{p'}\|_{\mathcal{A}} \ge \sqrt{|(\mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{p'})(\xi)|^2 + |(\mathbb{1}_p - \mathbb{1}_{p'})(\eta)|^2} = \sqrt{2},$$

由此完成了对 SW-空间的证明。

现在设 $\mathcal{D}$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的良族，并且它诱导出 SSW 空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$。由于每个 $p \in \mathbb{P}'$ 都是有限的，因此 $\nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_p)$ 的值也是有限的，所以 $\mathbb{1}_p \in \mathcal{X}_{\mathcal{A},\ \mathcal{D}}$。通过取一个不可数子集，我们可以假设存在 $r \in \mathbb{R}$，使得对于每个 $p \in \mathbb{P}'$，都有 $\nu(\mathbb{1}_p) = r$；这是因为 p 的基数将 $\nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_p)$ 的可能取值限制在一个有限集合中。我们将 $\mathbb{P}' = \{p_\alpha$ 枚举如下：$\alpha < \omega_1\}$。

对于 $\alpha < \omega_1$，令 $D_\alpha \in \mathcal{D}$ 满足

$$\nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{p_\alpha}) = \sqrt{\sum_{\{\xi,\eta\}\in D_\alpha} |\mathbb{1}_{p_\alpha}(\xi) - \mathbb{1}_{p_\alpha}(\eta)|^2}.$$

由于 p_α 两两不相交，通过取一个不可数子集，我们可以假设对每个 $\alpha < \beta < \omega_1$ 都有

$$(\bigcup D_\alpha) \cap p_\beta = \emptyset.$$

这意味着 $\nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{p_\alpha}) \leq \nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{p_\alpha} - \mathbb{1}_{p_\beta})$。由此可得

$$\|\mathbb{1}_{p_\alpha} - \mathbb{1}_{p_\beta}\|_{\mathcal{A},\mathcal{D}} = \|\mathbb{1}_{p_\alpha} - \mathbb{1}_{p_\beta}\|_{\mathcal{A}} + \nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{p_\alpha} - \mathbb{1}_{p_\beta}) \geq \sqrt{2} + r.$$

因此，$\{\frac{1}{1+r}\mathbb{1}_{p_\alpha}$：$\alpha < \omega_1\}$ 是 SSW 空间单位球面中的一个不可数 $\frac{\sqrt{2}+r}{1+r}$-分离子集。□

引理 20. 假设 $c = (c_0, c_1)$：$[\omega_1]^2 \to 3 \times [\omega_1]^{<\omega}$ 是一个 T-着色，并且 $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ 满足

(1) $\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\beta_1, \beta_2\} \in \mathcal{B}_c$, (2) $\{\alpha_2, \beta_1\} \in \mathcal{A}_c$, (3) $c(\{\alpha_1, \beta_2\}) = (2, \emptyset)$, (4) $c(\{\alpha_1, \alpha_3\}) = c(\{\alpha_0, \alpha_2\}) = (2, \emptyset)$, (5) $c(\{\beta_1, \beta_3\}) = c(\{\beta_0, \beta_2\}) = (2, \emptyset)$, (6) $\alpha_1 \notin c_1(\{\alpha_2, \beta_2\})$.

于是 $\|\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}\|_{\mathcal{A}_c} = \|\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}\|_{\mathcal{A}_c} = 1$，$\nu_{\mathcal{D}_c}(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}) = \nu_{\mathcal{D}_c}(\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}) = \sqrt{2}$，$\|\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}\|_{\mathcal{A}_c} = \sqrt{2}$ 和 $\nu_{\mathcal{D}_c}(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1\beta_2\}}) = \sqrt{5}$.

证明。$\|\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}\|_{\mathcal{A}} = \|\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}\|_{\mathcal{A}} = 1$ 由 (1) 可知显然。注意，根据 (4) 和 (5)，$\{\{\alpha_0, \alpha_1\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}\} \in \mathcal{D}$ 且 $\{\{\beta_0, \beta_1\}, \{\beta_2, \beta_3\}\} \in \mathcal{D}$，因此 $\nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}) = \nu_{\mathcal{D}}(\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}) = \sqrt{2}$。

若 $A \in \mathcal{A}_c$，则根据 (1)，$A \cap \{\alpha_1, \alpha_2\}, A \cap \{\beta_1, \beta_2\}$ 至多是单元素集。因此 $|A \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}| \leq 2$，从而 $\sqrt{\Sigma_{\alpha\in A}(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\alpha)^2}$ 为 0、$\sqrt{1^2}$或 $\sqrt{(-1)^2}$ 或 $\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$。根据 (2)，第三种可能性在 $\{\alpha_2, \beta_1\} \in \mathcal{A}_c$ 时成立。因此 $\|\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}\|_{\mathcal{A}_c} = \sqrt{2}$。

注意，由 (3) 和 (5) 可知 $\{\{\alpha_1, \beta_1\}, \{\beta_2, \beta_3\}\} \in \mathcal{D}_c$ 由于 $c(\{\alpha_1, \beta_2\}) = (2, \emptyset) = c(\{\beta_1, \beta_3\})$。于是

$$((\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\alpha_1) - (\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\beta_1))^2 +$$
$$((\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\beta_2) - (\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\beta_3))^2 =$$
$$= (1 - (-1))^2 + (-1 - 0)^2 = 5.$$

因此 $\nu_{\mathcal{D}_c}(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}}) \geq \sqrt{5}$。考虑 $D \in \mathcal{D}_\circ$ 如果一对 $\{\xi, \eta\}$ 不同时满足 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2\}$，那么 $|(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\xi) - (\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\eta)|$为 1 或 0。因此，如果没有一对 D 同时满足 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1, \beta_2\}$，那么

$$\sqrt{\Sigma_{\{\xi,\eta\}\in D}|(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\xi) - (\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}} - \mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\eta)|^2}$$

不大于 $\sqrt{4}=2$。由于 $D\in\mathcal{D}$ 的元素是连续对，至多有一个 $d\in D$ 可能同时满足 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2\}$。如果 D 中只有另一对满足$\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$，那么$\sqrt{\Sigma_{\{\xi,\eta\}\in D}|(}$ $\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}-\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\xi)-(\mathbb{1}_{\{\alpha_1,\alpha_2\}}-\mathbb{1}_{\{\beta_1,\beta_2\}})(\eta)|^2$不大于 $\sqrt{5}$。因此，我们只需证明不存在满足 $d,d',d''\in D$的 $D\in\mathcal{D}$，使得 $d<d'<d''$，并且所有满足 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\}$ 的 d,d',d''以及满足 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$和 $\{\beta_1,\beta_2\}$的其中一对 d,d',d''。只有在$d'=\{\alpha_2,\beta_1\}$，$\alpha_1\in d$ 且 $\beta_2\in d''$时才可能如此。但根据 $\mathcal{D}_c$ 的定义，数对 d 必须包含在 c_1 在 d' 和 d'' 的第一元素上的取值中，也包含在 c_1 在 d' 和 d'' 的第二元素上的取值中。因此，$\alpha_1\in c_1(\alpha_2,\beta_2)$ 或 $\alpha_1\in c_1(\beta_1,\beta_2)$，并且$c_0(\beta_1,\beta_2)=2$。这些可能性已被 (1) 和 (6) 排除。

□

命题 21. 存在一个 T-着色 $c=(c_0,c_1)\colon [\omega_1]^2\to 3\times[\omega_1]^{<\omega}$ 使得$X_{\mathcal{A}_c}$ 有一个不可数的 $\sqrt{2}$-等边集，且 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_c,\ \mathcal{D}_c}$ 有一个不可数的$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$-等边集。

证明。设 $e=(e_0,e_1)\colon [\omega_1]^2\to 3\times[\omega_1]^{<\omega}$是任意一个 T-着色。令 A_ξ为一族两两不交的四元组 $\{\alpha^0_\xi,\alpha^1_\xi,\alpha^2_\xi,\alpha^3_\xi\}$，其中 $\xi<\omega_1$满足：对任意 $\xi<\eta<\omega_1$，都有 $\alpha^0_\xi<\alpha^1_\xi<\alpha^2_\xi<\alpha^3_\xi<\alpha^0_\eta$。对每个 $\xi<\eta<\omega_1$，我们定义

(1) $c(\alpha^1_\xi,\alpha^2_\xi)=(1,\emptyset)$，(2) $c(\alpha^1_\xi,\alpha^3_\xi)=(2,\emptyset)$，(3) $c(\alpha^0_\xi,\alpha^2_\xi)=(2,\emptyset)$，(4) 若 $\alpha^1_\xi\in e_1(\alpha^2_\xi,\alpha^2_\eta)$，则 $c(\alpha^2_\xi,\alpha^2_\eta)=(1,\emptyset)$。

(5) $c(\alpha^1_\xi,\alpha^2_\eta)=(2,\emptyset)$，(6) $c(\alpha^2_\xi,\alpha^1_\eta)=(0,\emptyset)$，

对于所有剩余的配对 $\{\alpha,\beta\}\in[\omega_1]^2$，我们令 $c(\{\alpha,\beta\})=e(\{\alpha,\beta\})$。这样，对于每个 $\xi<\eta$，集合 $\{\alpha^0_\xi,\alpha^1_\xi,\alpha^2_\xi,\alpha^3_\xi\}$ 满足引理 20 的假设，因此$\|\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}\|_{\mathcal{A}_c,\ \mathcal{D}_c}=1+\sqrt{2}$ $\|\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}-\mathbb{1}_{\{\alpha^\eta_1,\alpha^2_\eta\}}\|_{\mathcal{A}_c,\ \mathcal{D}_c}=\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $\|\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}\|_{\mathcal{A}_c}=1$

$\|\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}-\mathbb{1}_{\{\alpha^\eta_1,\alpha^2_\eta\}}\|_{\mathcal{A}_c}=\sqrt{2}$ 对于每个 $\xi<\eta$ 都成立，因此 $\{\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}:\xi<\omega_1\}$ 是$\sqrt{2}$ 中的单位球面上的 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}_c}$-等距子集，而 $\{\frac{1}{1+\sqrt{2}}\mathbb{1}_{\{\alpha^\xi_1,\alpha^2_\xi\}}:\xi<\omega_1\}$ 在$\mathcal{X}_{\mathcal{A}_c,\ \mathcal{D}_c}$中是$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+1}$等距的。

还需验证 c是一个 T-着色。因此，设 $\{\{a_\gamma(0)\ a_\gamma(1)\}:\gamma<\omega_1\}$两两不相交，且 (n,F)、$(m,G)\in 3\times[\omega_1]^{<\omega}$。取 $\{\{a_\gamma(0)\ a_\gamma(1)\}:\gamma<\omega_1\}$ 的一个不可数子族后，不妨设

(a) 每个集合 $\{\alpha^0_\xi,\alpha^1_\xi,\alpha^2_\xi,\alpha^3_\xi\}$ 至多与一对 $\{a_\gamma(0)\ a_\gamma(1)\}$相交；(b) 对每个 $\gamma<\omega_1$，都有 $F\cup G<\{a_\gamma(0)\ a_\gamma(1)\}$；(c) 若存在 $\gamma,\xi<\omega_1$使得 $a_\gamma(j)=\alpha^i_\xi$，其中某些 $j\in\{0,1\},i\in\{0,1,2,3\}$，则对每个 $\gamma<\omega_1$，都存在 $\xi<\omega_1$ 使得 $a_\gamma(j)=\alpha^i_\xi$。

现在利用 e 是一个 T-着色这一假设，并找出 $\gamma<\gamma'<\omega_1$，使得$e(\{a_\gamma(0)\ a_{\gamma'}(0)\})=(n,F)$ 且 $e(\{a_\gamma(1)\ a_{\gamma'}(1)\})=(m,G)$。我们声称，着色 e 在这些点对上没有被修改。事实上，由于 (a)，我们没有通过 (1)、(2) 或 (3) 进行修改；由于 (b)，我们没有通过 (4) 进行修改；又由于 (c)，我们没有通过 (5) 或 (6) 进行修改。因此，$c(\{a_\gamma(0)\ a_{\gamma'}(0)\})=(i,F)$ 且$c(\{a_\gamma(1)\ a_{\gamma'}(1)\})=(j,G)$，这证明了 c是一个 T-着色。□

4. An SW-space and a renorming of $\ell_2(\omega_1)$ from a strong T-coloring

本节讨论 SW 空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$，其中 $\mathcal{A}$ 是强 T_0-族；也就是说，对于强 T-着色 c，有 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_c$ （见定义 12 和 14）。

引理 22. 假设 $\mathcal{A}$ 是强 T_0-族，且 $r\in\mathbb{R}$。设 $\{x_\xi:\xi<\omega_1\}\subseteq c_{00}(\omega_1)$ 由支撑两两不相交的向量组成，并且对所有 $\xi<\omega_1$，都有 $\|x_\xi\|_{\mathcal{A}}=r$。那么

- 存在 $\xi<\eta<\omega_1$，使得$\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{2}r$,
- 存在 $\xi<\eta<\omega_1$，使得 $\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}=r$。

证明。对于每个 $\xi<\omega_1$，令 F_ξ 为 x_ξ 的支撑。对于每个 $\xi<\omega_1$，存在$A_\xi\in\mathcal{A}$、$A_\xi\subseteq F_\xi$，使得 $\|x_\xi\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{\Sigma_{\alpha\in A_\xi}|x_\xi(\alpha)|^2}$。

由于 $\mathcal{A}$ 是一个强 T_0-族，根据引理 15，存在 $\xi<\eta<\omega_1$ 使得 $(F_\xi\otimes F_\eta)\cap\mathcal{A}=\emptyset$。注意，在这种情况下，如果 $A\in\mathcal{A}$，那么要么 $A\cap F_\xi=\emptyset$，要么$A\cap F_\eta=\emptyset$，因此 $\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}=\|x_\xi\|_{\mathcal{A}}=\|x_\eta\|_{\mathcal{A}}=r$。

由于 $\mathcal{A}$ 是一个强 T_0-族，根据引理 15，还存在 $\xi<\eta<\omega_1$ 使得$A_\xi\otimes A_\eta\subseteq\mathcal{A}$。由于 A_ξ，$A_\eta\in\mathcal{A}$，因此可得 $A_\xi\cup A_\eta\in\mathcal{A}$，从而 $\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{2}r$。□

命题23。设 $\mathcal{A}$ 是一个强 T_0-族。对于每个 $\delta>0$，都存在 $\varepsilon>0$，使得对于每个不可数的 $(1-\varepsilon)$-分离的 $\{x_\alpha:\ \alpha<\omega_1\}\subseteq S_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}}$，都存在$\alpha<\beta<\omega_1$ 使得 $\|x_\alpha-x_\beta\|_{\mathcal{A}}>\sqrt{2}-\delta$，并且存在 $\xi<\eta<\omega_1$ 使得$\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}<1+\delta$。

证明。固定 $\delta>0$ 并考虑 $\varepsilon<\frac{\delta}{2\sqrt{2}+1}$ 以及一个不可数的 $(1-\varepsilon)$-分离集$\{x_\alpha:\ \alpha<\omega_1\}\subseteq S_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}}$。

对于每个 $\alpha<\omega_1$，我们选取有理数值的 $y_\alpha\in B_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}}$, $y_\alpha\in c_{00}(\omega_1)$，使得 $\|x_\alpha-y_\alpha\|_{\mathcal{A}}\le\frac{\varepsilon}{2}$。通过取一个不可数子集，我们可以假设 $\{\mathrm{supp}(y_\alpha):\ \alpha<\omega_1\}$ 是一个 Δ-系统，其根为 Δ。再取一个不可数子集后，我们可以假设对于每个 $\delta\in\Delta$ 和 $\alpha<\beta<\omega_1$，都有 $y_\alpha(\delta)=y_\beta(\delta)$。特别地，如果 $z_\alpha=P_{\omega_1\setminus\Delta}(y_\alpha)$，那么 $\{\mathrm{supp}(z_\alpha):\ \alpha<\omega_1\}$ 两两不交，且 $\|z_\alpha-z_\beta\|_{\mathcal{A}}=\|y_\alpha-y_\beta\|_{\mathcal{A}}\ge1-2\varepsilon$。由于所有 z_α 的取值都是有理数，我们可以假设对于某个 $r\in\mathbb{R}$ 和每个 $\alpha<\omega_1$，都有 $\|z_\alpha\|_{\mathcal{A}}=r$。

由引理 22，存在 $\alpha<\beta<\omega_1$ 使得 $\|y_\alpha-y_\beta\|_{\mathcal{A}}=\|z_\alpha-z_\beta\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{2}r$，并且存在 $\xi<\eta<\omega_1$ 使得 $\|y_\xi-y_\eta\|_{\mathcal{A}}=\|z_\xi-z_\eta\|_{\mathcal{A}}=r.$。特别地，$r\ge1-2\varepsilon$，因为 $\{y_\alpha:\ \alpha<\omega_1\}$ 是（$1-2\varepsilon$）-分离的。因此

$$\|x_\alpha-x_\beta\|_{\mathcal{A}}\ge\sqrt{2}r-\varepsilon\ge\sqrt{2}(1-2\varepsilon)-\varepsilon=\sqrt{2}-\varepsilon(2\sqrt{2}+1)>\sqrt{2}-\delta.$$

由引理 7，我们有 $r=\|z_\xi\|_{\mathcal{A}}\le\|y_\xi\|_{\mathcal{A}}\le1$，因此

$$\|x_\xi-x_\eta\|_{\mathcal{A}}\le r+\varepsilon\le1+\varepsilon<1+\delta,$$

证毕。 □

由于存在不可数等边集的巴拿赫空间在其单位球面上也存在 1-等边集，前一个命题立即推出以下结论。

命题 24. 假设 $\mathcal{A}$ 是强 T_0-族，且 $\varepsilon>0$。那么，$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 不含任何不可数等边集，而 $S_{\mathcal{X}_{\mathcal{A}}}$ 不含任何不可数的（$1+\varepsilon$）-分离集。

命题 25. 如果 $\mathcal{A}$ 是强 T_0-族，那么 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的每个不可分子空间都包含一个与 ℓ_2 同构的子空间。

证明. 设 $\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的一个不可分子空间。由命题 5，空间 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 是希尔伯特生成的巴拿赫空间，因而是 WLD 巴拿赫空间，所以 $\mathcal{Y}$ 也是如此（见 [9] 的推论 9）。因此，存在一个在线性意义下稠密于 $\mathcal{Y}$ 的 $\mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$，使得对每个 $y^* \in \mathcal{Y}^*$， $\{y \in \mathcal{Y}' : y^*(y) \neq 0\}$ 至多可数（见 [9] 的定理 7 (iv)）。由此可知，对每个 $\alpha < \omega_1$，存在 $y \in \mathcal{Y}' \setminus \{0\}$，使得对每个 $\beta < \alpha$， $y(\beta) = 0$。由于 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 中任一向量的支撑都是可数的，这使我们能够归纳构造出非零向量 $y_\xi \in \mathcal{Y}' \subseteq \mathcal{Y}$ （ $\xi < \omega_1$ ），使它们的支撑两两不相交。

令 A_ξ 为 y_ξ 的支撑。通过将 y_ξ 归一化，我们可以假设 y_ξs 的范数为一。取有限的 $B_\xi \subseteq A_\xi$，使得 $B_\xi \in \mathcal{A}$ 且

$$\sqrt{\sum_{\alpha \in B_\xi} (y_\xi(\alpha))^2} \geq 1/2.$$

考虑由 $c(\{\xi, \eta\}) = 0$ 当且仅当 $B_\xi \cup B_\eta \in \mathcal{A}$ 定义的着色 $c\colon [\omega_1]^2 \to \{0, 1\}$。根据 Erd˝os-Dushnik-Miller 定理以及强 T_0-族的性质（见引理 15），存在一个无限的 $X \subseteq \omega_1$，它对于 c 是 0-单色的。这意味着 $\bigcup\{B_\xi$ 的所有有限子集： $\xi \in X\}$ 都属于 $\mathcal{A}$。

我们断言，存在一个同构 $T\colon \ell_2 \to \mathcal{Y}$，使得 $T(\mathbf{1}_{\{n\}}) = y_{\xi_n}$，其中 ξ_n 是 X 的第 n 个元素。为此，只需证明

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sum_{n<m} c_n^2} \leq \| \sum_{n<m} c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}} \leq \sqrt{\sum_{n<m} c_n^2}$$

对于任意选取的 c_0、 $\ldots c_{m-1} \in \mathbb{R}$。对于第一个不等式，我们有

$$\| \sum_{n<m} c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}} \geq \sqrt{\sum_{n<m} \sum_{\alpha \in B_{\xi_n}} (c_n y_{\xi_n}(\alpha))^2} \geq \sqrt{\sum_{n<m} \frac{1}{4} c_n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{n<m} c_n^2}$$

符合要求。对于第二个不等式，首先注意，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $\| \sum_{n<m} c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}}^2 \leq \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{n<m} c_n y_{\xi_n}(\alpha) \right)^2 + \varepsilon$。由于对于给定的 $\alpha \in A$， y_{ξ_n} 均有互不相交的支撑，因此和式 $\sum_{n<m} c_n y_{\xi_n}(\alpha)$ 至多只有一项非零，于是对于 $\mathrm{supp}(y_{\xi_n}) \cap A = C_n \in \mathcal{A}$，我们有

$$\sum_{\alpha \in A} \Big(\sum_{n<m} c_n y_{\xi_n}(\alpha) \Big)^2 = \sum_{n<m} \Big(\sum_{\alpha \in C_n} (c_n y_{\xi_n}(\alpha))^2 \Big) \leq \sum_{n<m} \| c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}}^2.$$

由于 ε 是任意的，我们有 $\| \sum_{n<m} c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}}^2 \leq \sum_{n<m} \| c_n y_{\xi_n} \|_{\mathcal{A}}^2$，从而得到第二个不等式。□

命题 26. 假设 $\mathcal{A}$ 是一个强 T_0-族，并且 $\| \ \|_{2,\ \mathcal{A}}$ 如命题 5 所述。那么空间 $(\ell_2(\omega_1)$ $\| \ \|_{2,\ \mathcal{A}})$ 不含不可数等距集。

证明。注意，由引理 7 可知， P_A 对 $A \subseteq \omega_1$ 是空间 $(\ell_2\ (\omega_1)\ \| \ \|_{2,\ \mathcal{A}})$ 上的范数为一的投影。只需证明该空间的单位球面 S不包含这样的集合。我们将证明，对于每个不可分的$\mathcal{Y} \subseteq S$，都存在 x_1、 x_2、 x_3、 $x_4 \in \mathcal{Y}$，使得$\|x_1 - x_2\|_{2,\ \mathcal{A}} < \|x_3 - x_4\|_{2,\ \mathcal{A}}$。

利用 $\mathcal{Y}$ 的不可分性，在ω_1 中构造严格递增的（γ_α ： $\alpha < \omega_1$）以及 $\{x_\alpha$ ： $\alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{Y}$，使得对每个 $\alpha < \omega_1$都有 x_α（γ_α）$\neq 0$。取一个不可数子集后，我们可以假设对每个 $\alpha < \omega_1$都有 $|x_\alpha$（γ_α）$| > \varepsilon$。

对于每个 $\alpha < \omega_1$，令 $y_\alpha \in \ell_2(\omega_1)$ 为一个具有有限支撑和有理系数的向量，使得 $\|x_\alpha - y_\alpha\|_{2,\ \mathcal{A}} < \frac{\varepsilon}{20}$ 且 $|y_\alpha(\gamma_\alpha)| > \varepsilon$。

根据 Δ-系引理，我们可以假设 $\{\mathrm{supp}(y_\alpha):\ \alpha<\omega_1\}$ 构成一个以 Δ 为根的 Δ-系，并且对每个 $\alpha<\omega_1$，Δ max γ_αs 都互不相同。令 $z_\alpha=P_{\omega_1\setminus\Delta}(y_\alpha)$。那么 z_α s 具有有理系数，且其有限支撑两两不相交并包含 γ_α，因此 $\|z_\alpha\|_{\mathcal{A}}>\varepsilon$。再次通过取一个不可数子集，我们可以假设 $\|z_\alpha\|_2=R$，并且对每个 $\alpha<\omega_1$ 都有 $\|z_\alpha\|_{\mathcal{A}}=r$，其中某个 r、$R\in\mathbb{R}$ 必然满足 $R\geq r>\varepsilon$。注意，对每个 $\alpha<\beta<\omega_1$，我们都有

$$\|y_\alpha-y_\beta\|_{2,\mathcal{A}}=\|z_\alpha-z_\beta\|_{2,\mathcal{A}}=\|z_\alpha-z_\beta\|_2+\|z_\alpha-z_\beta\|_{\mathcal{A}}=\sqrt{2}R+\|z_\alpha-z_\beta\|_{\mathcal{A}},$$

由于 z_α 和 z_β 的支撑不相交，且 $\|z_\alpha\|_2=\|z_\beta\|_2=R$。引理 22 表明，存在 $\alpha<\beta<\omega_1$ 和 $\xi<\eta<\omega_1$，使得

$$\|y_\alpha-y_\beta\|_{2,\mathcal{A}}=\sqrt{2}R+\sqrt{2}r\ \text{ and }\ \|y_\xi-y_\eta\|_{2,\mathcal{A}}=\sqrt{2}R+r.$$

根据 y_αs 的选取可得

$$\|x_\alpha-x_\beta\|_{2,\mathcal{A}}\geq\sqrt{2}R+\sqrt{2}r-\frac{\varepsilon}{10}\ \text{ and }\ \|x_\xi-x_\eta\|_{2,\mathcal{A}}\leq\sqrt{2}R+r+\frac{\varepsilon}{10}.$$

然而，

$$\sqrt{2}r-\frac{\varepsilon}{10}>r+\frac{4}{10}r-\frac{\varepsilon}{10}>r+\frac{3\varepsilon}{10}>r+\frac{\varepsilon}{10},$$

由此可得 $\|x_\xi-x_\eta\|_{2,\ \mathcal{A}}<\|x_\alpha-x_\beta\|_{2,\ \mathcal{A}}$，从而完成证明。□

5. 问题

问题 27。

（1）是否存在一个没有无限等边集的无限维自反巴拿赫空间？（2）是否存在一个没有不可数等边集的非可分自反（希尔伯特生成的、弱紧生成、WLD）巴拿赫空间？（3）$\ell_2(\omega_1)$ 是否存在一种没有不可数等边集的等价重赋范？（4）是否存在一个非可分的希尔伯特生成的（弱紧生成、WLD）巴拿赫空间，其单位球面不包含不可数的（1+）-分离集？（5）$c_0(\omega_1)$ 是否存在一种没有不可数等边集的等价重赋范？

当然，问题（1）—（3）要求给出绝对例子，或者证明否定答案的一致性，因为我们的定理 2 为这些问题提供了一致的肯定答案。需要强调的是，这并不排除这样的可能性：某个具有额外性质的 SSW 空间的特定绝对例子，能够为问题（1）—（3）提供肯定答案。根据定理 3（3），SW 空间不能在此发挥作用。对于非可分空间，构造比 [27] 型空间具有更少算子的范数——例如 [1] 中的构造——可能与此相关。

然而，只要能一致地对条目（4）或（5）给出肯定答案，就会是有趣的新结果。文献 [19, 10] 中给出的、其单位球面不含不可数 1+-分离集的不可分巴拿赫空间实例仅此而已；它们与 WLD 相去甚远，因为其对偶空间在弱拓扑下* 可分。事实上，它们的球面甚至不含任何不可数的 1-分离集，因此这类空间既不包含不可数奥尔巴赫系，也不包含不可数等距集。在连续统假设下，文献 c_0中构造了 ω_1 的一种有趣且一致的等价重赋范，该重赋范不容许任何不可数奥尔巴赫系

。这应与以下事实相比较：c_0 的每一种等价重赋范都包含一个无限等距集（[22]）。

References

1. S. Argyros, J. Lopez-Abad, S. Todorcevic, *A class of Banach spaces with few non-strictly singular operators* 222 2005 2, 306 384 .《泛函分析杂志》 ( ), no. – . 2. T. Bartoszy´nski, H. Judah, *Set theory. On the structure of the real line.* A K Peters, Ltd., 马萨诸塞州韦尔斯利, 1995. 3. C. Brech, P. Koszmider, *On universal spaces for the class of Banach spaces whose dual balls are uniform Eberlein compacts* 141 2013 4, 1267 1280 .《美国数学会会刊》 ( ), no. – . 4. J. Clark, *Coreflexive and somewhat reflexive Banach spaces*.《美国数学会会刊》 36 (1972), 421–427. 5. R. Deville, J. Rodr´ıguez, *Integration in Hilbert generated Banach spaces*.《以色列数学杂志》 177 (2010), 285–306. 6. J. Elton and E. Odell, *The unit ball of every infinite dimensional normed linear space contains a* $1+\varepsilon$ *-separated sequence* 44 1981 105 109 ( ) ,《数学讨论》 ( ), – . 7. D. Freeman, E. Odell, B. Sari, T. Schlumprecht, *Equilateral sets in uniformly smooth Banachspaces.*《数学》 60 (2014), no. 1, 219–231. 8. M. Fabia n, G. Godefroy, P. H´ajek, V. Zizler, *Hilbert-generated spaces*.《泛函分析杂志》 200 (2003), no. 2, 301–323. 9. A. Gonzalez, V. Montesinos, *A note on weakly Lindelof determined Banach spaces*.《捷克斯洛伐克数学杂志》 59 (134) (2009), no. 3, 613–621. 10. O. Guzm´an, M. Hruˇs´ak, P. Koszmider, *Almost disjoint families and the geometry of non-separable spheres*, arXiv:2212.05520. 11. P. H´ajek, *Hilbert generated Banach spaces need not have a norming Markushevich basis*.《数学进展》 351 (2019), 702–717. 12. P. H´ajek, T. Kania, T. Russo, *Separated sets and Auerbach systems in Banach spaces*.《美国数学会汇刊》 373 (2020), no. 10, 6961–6998. 13. R. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*.《数学年刊》 (2) 52 (1950), 518–527. 14. T. Kania, T. Kochanek, *Uncountable sets of unit vectors that are separated by more than* 1, Studia Math. 232 (2016), no. 1, 19–44. 15. M. Kojman, A. Rinot, J. Stepr¯ans, *Ramsey theory over partitions III: Strongly Luzin setsand partition relations.*《美国数学会会刊》 151 (2023年, no. 1, 369–384. 16. P. Koszmider, *Projections in weakly compactly generated Banach spaces and Chang's conjecture* 11 2005 2, 187 205 .《应用分析杂志》 ( ), no. – . 17. P. Koszmider, *Uncountable equilateral sets in Banach spaces of the form* $C(K)$.《以色列数学杂志》 224 (2018), no. 1, 83–103. 18. P. Koszmider, H. M. Wark, *Large Banach spaces with no infinite equilateral sets*.《伦敦数学会通报》 54 (2022), no. 6, 2066–2077. 19. P. Koszmider, *Banach spaces in which large subsets of spheres concentrate*. To appear in《朱西厄数学研究所杂志》. arXiv:2104.05335 . 20. C. Kottman, *Subsets of the unit ball that are separated by more than one*. Studia Math. 53 (1975), no. 1, 15–27. 21. A. Kryczka, S. Prus, *Separated sequences in nonreflexive Banach spaces*.《美国数学会会刊》 129 (2001), no. 1, 155–163. 22. S. Mercourakis, G. Vassiliadis, *Equilateral sets in infinite dimensional Banach spaces.*《美国数学会会刊》 142 (2014), no. 1, 205–212. 23. S. Mercourakis, G. Vassiliadis, *Equilateral sets in Banach spaces of the form* $C(K)$. Studia Math. 231 (2015), no. 3, 241–255. 24. J. van Neerven, *Separated sequences in uniformly convex Banach spaces*.《数学讨论》 102 (2005), no. 1, 147–153. 25. J. Schreier, *Ein gegenbeispiel zur theorie der schwachen konvergenz*, Studia Mathematica 2 (1930), no. 1, 58–62. 26. S. Shelah, *A graph which embeds all small graphs on any large set of vertices*.《纯粹与应用逻辑年刊》 38 (1988), no. 2, 171–183. 27. S. Shelah, J. Steprans, *A Banach space on which there are few operators*.《美国数学会会刊》 104 (1988), no. 1, 101–105.

28. P. Terenzi, *Equilater sets in Banach spaces* 7 3 1989 1, 。
Boll. Un. Mat. Ital. A ( ) ( ), 第 – 期。29. S. Todorcevic,
Partitioning pairs of countable ordinals 159 1987 3 4, 。Acta Math. ( ), 第 -
119 124
– 期。30. D. Velleman, *Partitioning pairs of countable sets of ordinals*。J. Symbolic Logic 55 (1990), 第 3 期,
261 294
1019–1021。31. H. M. Wark, *A non-separable reflexive Banach space on which there are few operators*。J.
London Math. Soc. (2) 64 (2001), 第 3 期, 675–689。32. H. M. Wark,
A non-separable uniformly convex Banach space on which there are few operators 241 2018 3, 241 256 。Studia Math. ( ),
第 – 期。

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, ul. Śniadeckich 8, 00-656Warszawa, Poland*Email address*: piotr.math@proton.meFaculty of Mathematics, Informatics and Mechanics, University of Warsaw, ul. Ba-nacha 2, 02-097 Warszawa, PolandInstitute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, ul. Śniadeckich 8, 00-656Warszawa, Poland*Email address*: kryduchowski@impan.pl