arXiv:2301.07534v3 [math.GM] 8 Nov 2023

端图度量下模糊集空间紧致性的刻画

Huan Huang

集美大学数学系，中国厦门 361021

摘要

本文给出了赋有端图度量的模糊集空间中全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。本文的结论显著改进了我们在先前论文 [H. Huang,《模糊集上的端图度量及 Γ-收敛的刻画》，《模糊集与系统》350（2018年），55-84] 中给出的相应结论。本文的结果适用于一般度量空间中的模糊集。我们先前论文中的结果适用于 m 维欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 中的模糊集，而该空间是一种特定的度量空间。此外，基于上述结果，我们根据端图度量给出了一类一般模糊集公共子空间中相对紧性、全有界性和紧致性的刻画。作为应用，我们探讨了端图度量与模糊集上的 Γ-收敛之间的一些关系。

关键词：紧致性；端图度量； Γ-收敛；豪斯多夫度量

1. 引言

模糊集是研究模糊现象的基本工具 [3–5, 8, 20, 22–24]。模糊集可以用其端图来表示。模糊集上的端图度量 H_{end} 是定义在其端图上的豪斯多夫度量。研究表明，模糊集上的端图度量具有显著优势[2, 15–17]。

电子邮箱：hhuangjy@126.com（Huan Huang）

紧致性是拓扑学和分析学中的核心概念之一，在应用中也很有用（参见 [13, 22]）。赋予不同拓扑的各种模糊集空间中的紧致性刻画受到了广泛关注 [6, 7, 9–11, 18, 21]。

在 [9], 中，我们给出了配备端图度量 H_{end}的模糊集空间全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。

[9] 中的结果适用于 m维欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$中的模糊集。 $\mathbb{R}^m$ 是一种特殊的度量空间。在理论研究和实际应用中，经常会用到一般度量空间中的模糊集[3, 4, 6, 7]。

本文给出了配备端图度量 H_{end}的一般度量空间中模糊集空间的全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。我们指出， [9] 中给出的全有界性、相对紧性和紧致性刻画，是本文相应刻画的推论。

此外，我们讨论端图度量 H_{end}的性质，并利用这些性质以及上述对一般模糊集的刻画，根据端图度量 H_{end}给出一般模糊集的某类公共子空间中相对紧性、全有界性和紧致性的刻画。

作为本文所给出的紧致性刻画的应用，我们讨论模糊集上的 H_{end} 度量与 Γ 收敛之间的关系。

本文其余部分安排如下。第2节回顾并介绍与模糊集、端图度量及其上的 Γ-收敛相关的一些基本概念和基本结果。第3节给出本文所需的各类模糊集的表示定理。第5节分别给出一般度量空间中配备端图度量的模糊集空间内相对紧集、全有界集和紧集的刻画。第5节基于第5节给出的紧致性刻画，给出第5节所讨论的模糊集空间的某类公共子空间内相对紧集、全有界集和紧集的刻画。第6节将第5节给出的紧致性刻画作为应用，考察模糊集上的端图度量与 Γ-收敛之间的关系。最后，我们得出

第7节中的结论。

2. 模糊集、端图度量及其上的 Γ-收敛

本节回顾并介绍与模糊集、端图度量及其上的 Γ-收敛相关的一些基本概念和基本结果。相关内容可参阅 [3, 4, 12, 19, 24] 。

令 $\mathbb{N}$ 表示自然数集（即所有正整数构成的集合）。令 $\mathbb{R}$ 表示实数集。令 $\mathbb{R}^m$、 $m>1$ 表示集合 $\{\langle x_1,\ldots,x_m\rangle:\ x_i\in\mathbb{R}、\ i=1、\ldots\ldots、\ m\}$。下文中， $\mathbb{R}$ 也写作 $\mathbb{R}^1$。

本文中，我们假设 X 是一个非空集，并赋予其度量 d。为简便起见，我们也用 X 表示度量空间 (X,d)。

$X\times[0,1]$ 上的度量 $\overline{d}$ 定义如下：对于 (x,α)、$(y,\beta)\in X\times[0,1]$，

$$\overline{d}((x,\alpha),(y,\beta))=d(x,y)+|\alpha-\beta|.$$

本文中，我们假设 $X\times[0,1]$ 上的度量为 $\overline{d}$。为简便起见，我们也用 $X\times[0,1]$ 表示度量空间 $(X\times[0,1],\overline{d})$。

设 $m\in\mathbb{N}$。为简便起见， $\mathbb{R}^m$ 也用于表示 m 维欧几里得空间； d_m 用于表示 $\mathbb{R}^m$ 上的欧几里得度量； $\mathbb{R}^m\times[0,1]$也用于表示度量空间 $(\mathbb{R}^m\times[0,1],\overline{d_m})$。

X 中的模糊集 u 可视为函数 $u:X\to[0,1]$。 X 的子集 S 可视为 X 中的模糊集。若不会引起混淆，与 S 对应的模糊集通常记作 χ_S；即，

$$\chi_S(x)=\begin{cases}1, & x\in S,\\ 0, & x\in X\setminus S.\end{cases}$$

为简便起见，对于 $x\in X$，我们用 $\widehat{x}$ 表示 X 中的模糊集 $\chi_{\{x\}}$ 。在本文中，若要强调特定的度量空间 X，我们将 X 中与 S 对应的模糊集记作 $S_{F(X)}$，将 X 中与 $\{x\}$ 对应的模糊集记作 $\widehat{x}_{F(X)}$。

符号 $F(X)$ 用于表示 X 中所有模糊集的集合。对于 $u\in F(X)$ 和 $\alpha\in[0,1]$，令 $\{u>\alpha\}$ 表示集合 $\{x\in X:\ u(x)>\alpha\}$，并令 $[u]_\alpha$ 表示 u 的 α-截集，即

$$[u]_\alpha=\begin{cases}\{x\in X:u(x)\geq\alpha\}, & \alpha\in(0,1],\\ \operatorname{supp}u=\overline{\{u>0\}}, & \alpha=0,\end{cases}$$

其中 $\overline{S}$ 表示 (X,d) 中 S 的拓扑闭包。

若将上述两段中的 X 替换为非空集 Y，则上述两段中的定义和记号仍然适用，唯独记号 $[u]_0$ 除外。

符号 $K(X)$ 和 $C(X)$ 分别表示 X 的所有非空紧子集构成的集合，以及 X 的所有非空闭子集构成的集合。 $P(X)$ 表示 X 的幂集，即 X 的所有子集构成的集合。

令 $F_{USC}(X)$ 表示所有满足 $u:X\to[0,1]$ 的上半连续模糊集，即，

$$F_{USC}(X):=\{u\in F(X):[u]_\alpha\in C(X)\cup\{\emptyset\}\text{ for all }\alpha\in[0,1]\}.$$

定义

$$F_{USCB}(X):=\{u\in F_{USC}(X):[u]_0\in K(X)\cup\{\emptyset\}\},$$
$$F_{USCG}(X):=\{u\in F_{USC}(X):[u]_\alpha\in K(X)\cup\{\emptyset\}\text{ for all }\alpha\in(0,1]\}.$$

显然，

$$F_{USCB}(X)\subseteq F_{USCG}(X)\subseteq F_{USC}(X).$$

定义

$$F_{CON}(X):=\{u\in F(X):\text{for all }\alpha\in(0,1],\ [u]_\alpha\text{ is connected in }X\},$$
$$F_{USCCON}(X):=F_{USC}(X)\cap F_{CON}(X),$$
$$F_{USCGCON}(X):=F_{USCG}(X)\cap F_{CON}(X).$$

设 $u\in F_{CON}(X)$。那么 $[u]_0=\overline{\cup_{\alpha>0}[u]_\alpha}$ 在 X中是连通的。证明如下。

若 $u=\chi_\emptyset$，则 $[u]_0=\emptyset$ 在 X中是连通的。若 $u\neq\chi_\emptyset$，则存在一个$\alpha\in(0,1]$ 使得 $[u]_\alpha\neq\emptyset$。注意，当 $\beta\in[0,\alpha]$时， $[u]_\beta\supseteq[u]_\alpha$。因此$\cup_{0<\beta<\alpha}[u]_\beta$ 是连通的，从而 $[u]_0=\overline{\cup_{0<\beta<\alpha}[u]_\beta}$ 是连通的。

So

$$F_{CON}(X)=\{u\in F(X):\text{for all }\alpha\in[0,1],\ [u]_\alpha\text{ is connected in }X\}.$$

令 $F^1_{USC}(X)$ 表示 $F_{USC}(X)$ 中所有正规模糊集构成的族，即，

$$F^1_{USC}(X):=\{u\in F(X):[u]_\alpha\in C(X)\text{ for all }\alpha\in[0,1]\}.$$

我们引入 $F^1_{USC}(X)$ 的一些子类，并将在本文中进行讨论。定义

$$\begin{aligned}
F^1_{USCB}(X) &:= F^1_{USC}(X) \cap F_{USCB}(X),\\
F^1_{USCG}(X) &:= F^1_{USC}(X) \cap F_{USCG}(X),\\
F^1_{USCCON}(X) &:= F^1_{USC}(X) \cap F_{CON}(X),\\
F^1_{USCGCON}(X) &:= F^1_{USCG}(X) \cap F_{CON}(X).
\end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned}
F^1_{USCB}(X) \subseteq F^1_{USCG}(X) \subseteq F^1_{USC}(X),\\
F^1_{USCGCON}(X) \subseteq F^1_{USCCON}(X).
\end{aligned}$$

设 (X,d) 为一个度量空间。我们用 $\boldsymbol{H}$ 表示由 d诱导的 $C(X)$ 上的豪斯多夫距离，即,

$$\boldsymbol{H(U,V)} = \max\{H^*(U,V),\ H^*(V,U)\} \tag{1}$$

对任意的 $U,V \in C(X)$，其中

$$H^*(U,V) = \sup_{u\in U} d\,(u,V) = \sup_{u\in U}\inf_{v\in V} d\,(u,v).$$

$C(X)$ 上的豪斯多夫半距离 H^*可扩展到 $C(X) \cup\{\emptyset\}$如下:

$$H^*(M_1,M_2) = \begin{cases} H^*(M_1,M_2), & \text{if } M_1,M_2 \in C(X),\\ +\infty, & \text{if } M_1 \in C(X) \text{ and } M_2 = \emptyset,\\ 0, & \text{if } M_1 = \emptyset \text{ and } M_2 \in C(X)\cup\{\emptyset\}. \end{cases}$$

因此， $C(X)$ 上的豪斯多夫距离 H 可扩展到 $C(X) \cup \{\emptyset\}$ 如下:

$$H(M_1,M_2) = H^*(M_1,M_2)\vee H^*(M_2,M_1) = \begin{cases} H(M_1,M_2), & \text{if } M_1,M_2 \in C(X),\\ +\infty, & \text{if } M_1 = \emptyset \text{ and } M_2 \in C(X),\\ 0, & \text{if } M_1 = M_2 = \emptyset. \end{cases}$$

若不致混淆，我们也用 H 表示由 $\overline{d}$诱导的 $C(X\times[0,1]) \cup \{\emptyset\}$ 上的豪斯多夫距离。

在本文中，对于度量空间（Y,ρ）及其子集 $S \in Y$，我们仍用ρ 表示由 ρ在 S 上诱导的度量。

注 2.1. 若 ρ 是定义在 Y 上的度量，则它是一个从 $Y \times Y$到 $\mathbb{R}$的函数 ρ ，满足正定性、对称性和三角不等式。此时，(Y, ρ)称为度量空间。

ρ 被称为 Y 上的扩展度量，当且仅当 ρ 是一个从 $Y \times Y$到$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 的函数，并满足正定性、对称性和三角不等式。此时，(Y, ρ)被称为扩展度量空间。

我们可以看到，对于任意度量空间(X, d)，由 d 诱导的H 在 $K(X)$上的豪斯多夫距离是一个度量。因此，由$\overline{d}$ 在 $X \times [0,1]$ 上诱导的 H 在$K(X \times [0,1])$上的豪斯多夫距离也是一个度量。

由 d在 X 上诱导的 H 在 $C(X)$上的豪斯多夫距离是一个扩展度量，但可能不是度量，因为对于某些度量空间 X 和 A， $H(A, B)$可能等于 $+\infty$， $B \in C(X)$。

H 在 $C(X)$上的豪斯多夫距离 $\cup \{\emptyset\}$ 是一个扩展度量。由于对于每个 $x \in X$， $H(\{x\}, \emptyset) = +\infty$，我们有： H 在$C(X)$上的豪斯多夫距离 $\cup \{\emptyset\}$ （分别地， $K(X) \cup \{\emptyset\}$）不是一个度量。

显然，如果由 d 在 $C(X)$ 上诱导的 H 不是度量，那么由 $\overline{d}$ 在 $C(X \times [0,1])$ 上诱导的 H 也不是度量。因此，由 $\overline{d}$ 在 $X \times [0,1]$ 上诱导的 H（即 $C(X \times [0,1])$ 上的豪斯多夫距离）是扩展度量，但可能不是度量。

我们可以看到， H 在 $C(\mathbb{R}^m)$ 上是扩展度量，但不是度量； H 在 $C(\mathbb{R}^m \times [0,1])$ 上也是如此。

当豪斯多夫距离 H 是度量时，也称为豪斯多夫度量。当豪斯多夫距离 H 是扩展度量时，也称为豪斯多夫扩展度量。为简便起见，本文将豪斯多夫扩展度量和豪斯多夫度量均称为豪斯多夫度量，但本备注中使用“豪斯多夫扩展度量”一词的情况除外。

对于 $u \in F(X)$，定义

$$\operatorname{end} u := \{(x,t) \in X \times [0,1] : u(x) \geq t\},$$
$$\operatorname{send} u := \{(x,t) \in X \times [0,1] : u(x) \geq t\} \cap ([u]_0 \times [0,1]).$$

$\operatorname{end} u$ 和 $\operatorname{send}\ u$ 分别称为 u 的端图和发送图。

注 2.2. 设 $u \in F(X)$。以下条件 (i)-(iii) 等价：

(i) $u \in F_{USC}(X)$;

(ii) 端 u 在 $(X\times[0,1],\overline{d})$ 中是闭的;
(iii) 发送 u 在 $(X\times[0,1],\overline{d})$ 中是闭的。

(i)⇒(ii)。假设 (i) 成立。为证明 (ii) 成立，设 $\{(x_n,\alpha_n)\}$是端集 u 中的一个序列，该序列收敛于 $X\times[0,1]$中的 (x,α)，我们只需证明 $(x,\alpha)\in$端 u。由于 u 是上半连续的，因此 $u(x)\geq$上极限$_{n\to\infty}u(x_n)\geq$极限$_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$。于是 $(x,\alpha)\in$端 u。所以 (ii) 成立。

(ii)⇒(iii)。假设 (ii) 成立。注意到 $[u]_0\times[0,1]$ 在$X\times[0,1]$中是闭的，因此 send $u=$端 $u\cap([u]_0\times[0,1])$ 在 $X\times[0,1]$ 中是闭的。所以 (iii) 成立。

(iii)⇒(i)。假设 (iii) 成立。为证明 (i) 成立，设 $\alpha\in[0,1]$，并假设 $\{x_n\}$是 $[u]_\alpha$ 中的一个序列，该序列收敛于 X中的 x，我们只需证明 $x\in[u]_\alpha$。注意到 $\{(x_n,\alpha)\}$ 收敛于 $X\times[0,1]$中的 (x,α)，且序列 $\{(x_n,\alpha)\}$ 属于 send u。因此，根据 send u的闭性，可知 $(x,\alpha)\in$send u，这意味着$x\in[u]_\alpha$。所以 (i) 成立。

设 $u\in F(X)$。显然 $X\times\{0\}\subseteq$端 u。因此端 $u\neq\emptyset$。于是根据注 2.2，$u\in F_{USC}(X)$ 当且仅当端 $u\in C(X\times[0,1])$。

我们可以看到，条件 (i) $u=\emptyset_{F(X)}$、(ii) 发送 $u=\emptyset$ 和 (iii) 端$u=X\times\{0\}$ 是等价的。

Kloeden [15] 引入了端图度量 $\boldsymbol{H_{\mathbf{end}}}$。对于 $u,\ v\in F_{USC}(X)$，

$$\boldsymbol{H_{\mathbf{end}}(u,v)}:=H(\operatorname{end}u,\operatorname{end}v),$$

w这里 H 是由 $\overline{d}$ 在 $X\times[0,1]$ 上诱导的 $C(X\times[0,1])$ 上的豪斯多夫度量。

Rojas-Medar 和 Rom´an-Flores [19] 基于度量空间中集合序列的 Kuratowski 收敛，引入了上半连续模糊集序列的 $\boldsymbol{\Gamma}$-收敛。

设 (X,d) 为一个度量空间。设 C 为 X 中的一个集合，$\{C_n\}$ 为 X 中的一个集合序列。若 $\{C_n\}$ 根据 (X,d) 库拉托夫斯基收敛到 C，则

$$C=\liminf_{n\to\infty}C_n=\limsup_{n\to\infty}C_n,$$

其中

$$\liminf_{n\to\infty}C_n=\{x\in X:\ x=\lim_{n\to\infty}x_n,x_n\in C_n\},$$

$$\limsup_{n\to\infty}C_n=\{x\in X:\ x=\lim_{j\to\infty}x_{n_j},x_{n_j}\in C_{n_j}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{m\geq n}C_m}.$$

在这种情况下，我们将根据 (X,d) 记作 $\boldsymbol{C}=\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}}^{\boldsymbol{(K)}}\boldsymbol{C_n}$。若不会引起混淆，为简便起见，我们不再特别强调度量空间 (X,d)，并记作 $\{C_n\}$ 库拉托夫斯基收敛到 C 或 $\boldsymbol{C}=\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}}^{\boldsymbol{(K)}}\boldsymbol{C_n}$。

注 2.3。 [1] 中的定理 5.2.10 指出，在第一可数豪斯多夫拓扑空间中，集合序列按库拉托夫斯基意义收敛，当且仅当该序列按 Fell拓扑收敛。当然，度量空间是第一可数豪斯多夫拓扑空间。

[14] 中的定义 3.1.4 给出了拓扑空间中子集网 $\{C_n, n\in D\}$ 的 $\liminf C_n$、$\limsup C_n$ 和 $\lim C_n$ 的定义。当 $\{C_n, n=1,2,\ldots\}$ 是度量空间中的子集序列时，根据 [14] 中的定义 3.1.4 得到的 $\liminf C_n$、$\limsup C_n$ 和 $\lim C_n$，分别就是根据上述定义得到的 $\liminf_{n\to\infty} C_n$、$\limsup_{n\to\infty} C_n$ 和 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} C_n$。

设 $u, u_n, n=1,2,\ldots$ 是 $F(X)$ 中的模糊集。若 $\{u_n\}$ 按照 $(X\times[0,1],\overline{d})$ $\boldsymbol{\Gamma}$ 收敛到 u，记作 $\boldsymbol{u}=\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}}^{\boldsymbol{(\Gamma)}}\boldsymbol{u_n}$，则称之为如此，其中端 $u=\lim_{n\to\infty}^{(K)}$ 端 u_n。

下面的定理 2.4 是一个已知结论，在本文中很有用。我们未能找到给出定理 2.4 的原始文献。定理 2.4 可用与 [9] 中定理 4.1 类似的方法证明。

定理 2.4. 设 C和 C_n, $n=1,2,\ldots$ 是 X 中的闭集。则当 $n\to\infty$ 时，若 $H(C_n,C)\to 0$，便有 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} C_n = C$。

注 2.5. 定理 2.4 表明，对于 $F_{USC}(X)$ 中的序列 $\{u_n\}$ 以及 $F_{USC}(X)$ 中的元素 u，若当 $n\to\infty$ 时， $H_{\mathrm{end}}(u_n,u)\to 0$，则 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。然而，反向结论不成立。参见 [9] 中的例4.1 和命题 7.3。

注 2.6. 设 $\{u_n\}$ 是 $F(X)$ 中的一个序列，并设 $\{v_n\}$ 是 $\{u_n\}$ 的一个子序列。我们可以看到

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{end}\, u_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{end}\, v_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{end}\, v_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{end}\, u_n.$$

因此，如果存在一个 $u\in F(X)$ 使得 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，那么 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} v_n = u$。

显然，$\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} v_n = u$ 并不一定意味着 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。下面给出一个简单的例子。

对于 $n=1$、2、.....，令 $v_n = \widehat{1}_{F(\mathbb{R})}$。对于 $n=1$、2、.....，定义 u_n 为

$$u_n = \begin{cases} \widehat{1}_{F(\mathbb{R})}, & n \text{ is odd}, \\ \widehat{3}_{F(\mathbb{R})}, & n \text{ is even}. \end{cases}$$

那么 $\{u_n\} \subseteq F_{USCB}(\mathbb{R})$，且 $\{v_n\}$ 是 $\{u_n\}$的子序列。可以看出 $\lim\limits_{n\to\infty}^{(\Gamma)} v_n = \widehat{1}_{F(\mathbb{R})}$。然而 $\lim\limits_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n$ 不存在，因为

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{end} u_n = \mathbb{R}\times\{0\} \subsetneqq \operatorname{end}\widehat{1}_{F(\mathbb{R})} \cup \operatorname{end}\widehat{3}_{F(\mathbb{R})} = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{end} u_n.$$

注 2.7. 在 $X\times[0,1]$ 上还定义了另一种度量 d'：对于 $X\times[0,1]$ 中的任意 (x,α)、(y,β)，$d'((x,\alpha),(y,\beta)) = \max\{d(x,y)\ |\alpha-\beta|\}$。基于 d'，可以导出 $F_{USC}(X)$ 上相应的端图度量，以及 $F(X)$ 上的 Γ-收敛。我们分别用 H'_{end} 和 Γ'- 收敛表示它们。

众所周知，(i) $d' \le \overline{d} \le 2d'$ 在 $X\times[0,1]$ 上；(ii) 对每个 u，$v\in F_{USC}(X)$，$H'_{\mathrm{end}}(u,v) \le H_{\mathrm{end}}(u,v) \le 2H'_{\mathrm{end}}(u,v)$；(iii) 在 $F(X)$ 上，Γ-收敛等价于 Γ'-收敛（(ii) 和 (iii) 可由 (i) 立即推出）。因此不难看出，如果将“$\overline{d}$”、“H_{end}”和“Γ-收敛”分别替换为“d'”、“H'_{end}”和“Γ'-收敛”，本文中的哪些结论仍然成立。引理 5.10、定理 5.12、5.14、5.15、命题 7.1、7.2、7.3 等都是这样的结论。无需逐一列出这些结论，因为这很容易看出。

我们分别用 H'^* 和 H' 表示由 d'诱导的 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$ 上的 Hausdorff 半距离和豪斯多夫距离。已知 $H'^* \le H^* \le 2H'^*$ 和 $H' \le H \le 2H'$ 在 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$上。容易看出，若将“$d$”、“$H_{\mathrm{end}}$”、“$\Gamma$- 收敛”、$H^*$和 H在 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$ 上分别替换为“d'”、“H'_{end}”、“Γ'-收敛”、H'^*和 H'在 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$上，本文中的结论仍然成立。

豪斯多夫距离 H' 是 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$ 上的扩展度量。注意，对于每个 A，$B\in C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$，$H(A,B) = +\infty$ 当且仅当 $H'(A,B) = +\infty$。因此，对于 $C(X\times[0,1])\cup\{\emptyset\}$的每个子集 S，H 在 $S\times S$ 上的限制是 S 上的度量，当且仅当 H' 在 $S\times S$上的限制是 S上的度量。

3. 各类模糊集的表示定理

本节给出各类模糊集的表示定理。这些表示定理在本文中很有用。

以下表示定理应是一个已知结论。

定理 3.1. 设 Y是一个非空集。若 $u\in F(Y)$，则对所有 $\alpha\in(0,1]$，$[u]_\alpha = \cap_{\beta<\alpha}[u]_\beta$.

反之，设 $\{v_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ 是 Y 中的一个集合族，且对所有 $\alpha \in (0,1]$ 都有$v_\alpha = \cap_{\beta<\alpha} v_\beta$。定义 $u \in F(Y)$如下:

$$u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$$

对每个 $x \in Y$。那么， u 是 Y 中唯一满足对所有 $\alpha \in (0,1]$，均有 $[u]_\alpha = v_\alpha$ 的模糊集。

证明。令 $u \in F(Y)$ 且 $\alpha \in (0,1]$。对每个 $x \in Y$， $x \in [u]_\alpha \Leftrightarrow u(x) \geq \alpha \Leftrightarrow$ 。对每个 $\beta < \alpha$， $u(x) \geq \beta \Leftrightarrow$ 。对每个 $\beta < \alpha$， $x \in [u]_\beta$。因此 $[u]_\alpha = \cap_{\beta<\alpha}[u]_\beta$.

反过来，假设 $\{v_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ 是 Y 中的一个集合族，且对所有 $\alpha \in (0,1]$，均有 $v_\alpha = \cap_{\beta<\alpha} v_\beta$。令 $u \in F(Y)$ 定义如下:

$$u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$$

对每个 $x \in Y$。首先，我们证明对每个 $\alpha \in (0,1]$，都有 $[u]_\alpha = v_\alpha$。为此，令 $\alpha \in (0,1]$。我们只需验证 $[u]_\alpha \supseteq v_\alpha$ 和 $[u]_\alpha \subseteq v_\alpha$。

设 $x \in v_\alpha$。显然， $u(x) \geq \alpha$，即 $x \in [u]_\alpha$。因此 $[u]_\alpha \supseteq v_\alpha$。

设 $x \in [u]_\alpha$。那么 $\sup\{\beta : x \in v_\beta\} = u(x) \geq \alpha$。因此，存在一个序列 $\{\beta_n, n = 1,2,\ldots\}$，使得 $1 \geq \beta_n \geq \alpha - 1/n$ 且 $x \in v_{\beta_n}$。令 $\gamma = \sup_{n=1}^{+\infty} \beta_n$。那么 $1 \geq \gamma \geq \alpha$，从而 $x \in \cap_{n=1}^{+\infty} v_{\beta_n} = v_\gamma \subseteq v_\alpha$。因此$[u]_\alpha \subseteq v_\alpha$。

现在我们证明 u的唯一性。为此，假设 v 是 Y中的一个模糊集，满足对所有 $\alpha \in (0,1]$，都有 $[v]_\alpha = v_\alpha$。那么，对于每个 $x \in Y$，

$$v(x) = \sup\{\alpha : x \in [v]_\alpha\} = \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\} = u(x).$$

所以 $u = v$。

□

注3.2。我们找不到提出定理 3.1 的原始参考文献，因此在此给出证明，以使本文内容完整。定理 3.1 及其证明与 chi-naXiv:202110.00083v4 中 P27 的定理 7.10 及其证明基本相同，因为 u 的唯一性显而易见。

由定理 3.1，立即可得以下关于 $F_{USC}(X)$、 $F^1_{USC}(X)$、 $F_{USCG}(X)$、 $F_{CON}(X)$、 $F_{USCB}(X)$ 和 $F^1_{USCB}(X)$ 的表示定理。

命题 3.3. 设 (X,d) 是一个度量空间。若 $u \in F_{USC}(X)$（分别地，$u \in F^1_{USC}(X)$、$u \in F_{USCG}(X)$、$u \in F_{CON}(X)$），则 (i) 对所有 $\alpha \in (0,1],$，$[u]_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$（分别地，$[u]_\alpha \in C(X)$、$[u]_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$、$[u]_\alpha$ 在 (X,d) 中连通），且 (ii) 对所有 $\alpha \in (0,1]$，$[u]_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha}[u]_\beta$。

反过来，假设集合族 $\{v_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ 满足条件 (i) 和 (ii)。定义 $u \in F(X)$ 为 $u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$，其中每个 $x \in X$ 均如此。则 u 是 X 中满足对每个 $\alpha \in (0,1]$ 都有 $[u]_\alpha = v_\alpha$ 的唯一模糊集。此外，$u \in F_{USC}(X)$（分别地，$u \in F^1_{USC}(X)$、$u \in F_{USCG}(X)$、$u \in F_{CON}(X)$）。

证明。证明是常规的。我们只证明 $F_{USC}(X)$ 的情形。其他情形可类似验证。

若 $x \in F_{USC}(X)$，则显然 (i) 成立。由定理 3.1，(ii) 成立。

反过来，假设集合族 $\{v_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ 满足条件 (i) 和 (ii)。定义 $u \in F(X)$ 为 $u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$，其中每个$x \in X$ 均如此。则由定理 3.1，u 是 X 中满足对每个 $\alpha \in (0,1]$ 都有$[u]_\alpha = v_\alpha$ 的唯一模糊集。由于 $\{[u]_\alpha, \alpha \in (0,1]\}$ 满足条件 (i)，$u \in F_{USC}(X)$。

□

命题 3.4. 设 (X,d) 是一个度量空间。若 $u \in F_{USCB}(X)$（分别地，$u \in F^1_{USCB}(X)$），则
(i) 对所有 $\alpha \in [0,1]$，$[u]_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$（分别地，$[u]_\alpha \in K(X)$）；
(ii) 对所有 $\alpha \in (0,1],$，$[u]_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha}[u]_\beta$；并且 (iii) $[u]_0 = \overline{\bigcup_{\beta>0}[u]_\beta}$。

反之，假设集合族 $\{v_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ 满足条件 (i) 至 (iii)。定义 $u \in F(X)$ 为 $u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$，其中每个 $x \in X$ 均成立。则 u 是 X 中唯一满足对每个 $\alpha \in [0,1]$ 都有 $[u]_\alpha = v_\alpha$ 的模糊集。此外，$u \in F_{USCB}(X)$（分别地，$u \in F^1_{USCB}(X)$）。

证明。证明过程很常规。我们只证明 $F_{USCB}(X)$ 的情形。$F^1_{USCB}(X)$ 的情形可类似验证。

若 $x \in F_{USCB}(X)$，则显然 (i) 成立。由定理 3.1，(ii) 成立。根据 $[u]_0$ 的定义，(iii) 成立。

反之，假设集合族 $\{v_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ 满足条件 (i) 至 (iii)。定义 $u \in F(X)$ 为 $u(x) := \sup\{\alpha : x \in v_\alpha\}$，对每个 $x \in X$ 均成立。于是由定理 3.1，u 是满足下述条件的 X 中唯一的模糊集

即对每个 $\alpha \in (0,1]$，都有 $[u]_\alpha = v_\alpha$。显然，$[u]_0 = \overline{\bigcup_{\beta>0}[u]_\beta} = \overline{\bigcup_{\beta>0} v_\beta} = v_0$。由于 $\{[u]_\alpha, \alpha \in [0,1]\}$ 满足条件 (i)，因此 $u \in F_{USCB}(X)$。

□

同样，我们可以得到 $F_{USCCON}(X)$、$F_{USCGCON}(X)$、$F^1_{USCCON}(X)$ 等的表示定理。

基于这些表示定理，我们可以通过给出其 α-截集族来定义一个模糊集或某种类型的模糊集。下文中，我们会直接指出所定义的是模糊集还是某种类型的模糊集，而不说明使用了哪一个表示定理，因为这一点很容易看出。

4. $X \times [0,1]$ 的基本性质

本节给出 $X \times [0,1]$ 的一些基本性质，这些性质在本文中很有用。

下面的结论是众所周知的。

设 (Y,τ_1) 和 (Z,τ_2) 是拓扑空间，且 f 是从 (Y,τ_1) 到 (Z,τ_2) 的连续函数。若 A 在 (Y,τ_1) 中是紧的，则 $f(A)$ 在 (Z,τ_2) 中是紧的。

令 p_X 为从 $(X \times [0,1], \overline{d})$ 到 (X,d) 的投影映射；也就是说，

$$\text{for each } (x,\alpha) \in X \times [0,1],\ p_X(x,\alpha) = x.$$

显然，对于 (x,α)、$(y,\beta) \in X \times [0,1]$，$d(p_X(x,\alpha)\ p_X(y,\beta)) = d(x,y) \le \overline{d}((x,\alpha),(y,\beta))$。因此 p_X 连续。

对于 $u \subseteq X \times [0,1]$ 和 $\alpha \in [0,1]$，定义 $\mathbf{h}u\mathbf{i}_\alpha := \{x : (x,\alpha) \in u\}$。

令 $u \subseteq X \times [0,1]$。则 $p_X(u) = \cup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha$。显然，

$$u \neq \emptyset \Leftrightarrow p_X(u) \neq \emptyset \Leftrightarrow \cup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \neq \emptyset.$$

若 $u \in K(X \times [0,1])$，则 $p_X(u) \neq \emptyset$，且 $p_X(u)$ 在 (X,d) 中是紧的；也就是说，$p_X(u) \in K(X)$。

命题 4.1. 设 u 是 $X \times [0,1]$ 的一个子集。

(i) 若 $u \in C(X \times [0,1])$，则 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$成立。(ii) $u \in K(X \times [0,1])$ 当且仅当 $u \in C(X \times [0,1])$ 且 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。(iii) 若 $u \in K(X \times [0,1])$，则 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$ 成立。(iv) 即使 $u \neq \emptyset$，(i) 的逆命题和 (iii) 的逆命题也不成立。

证明。为证明 (i)，假设 $u \in C(X \times [0,1])$ 且 $\alpha \in [0,1]$。为证明 $\langle u\rangle_\alpha$ 在 (X,d) 中是闭集，设 $\{x_n\}$ 是 $\langle u\rangle_\alpha$ 中的一个序列，且 $\{x_n\}$ 在 (X,d) 中收敛到 x。我们只需证明 $x \in \langle u\rangle_\alpha$。

注意，$\{(x_n,\alpha)\}$ 在 $(X\times[0,1],d)$ 中收敛到 (x,α)。因此 $(x,\alpha) \in u$。这意味着 $x \in \langle u\rangle_\alpha$。所以，$\langle u\rangle_\alpha$ 是 (X,d) 中的闭集；也就是说，$\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。因此 (i) 成立。

接下来证明 (ii)。必要性。假设 $u \in K(X \times [0,1])$。那么 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha = p_X(u) \in K(X)$。显然，$u \in C(X \times [0,1])$。因此必要性得证。

充分性。假设 $u \in C(X \times [0,1])$ 且 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。由于 $[0,1] \in K([0,1])$，我们有 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \times [0,1] \in K(X\times[0,1])$。注意，$u$ 是 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \times [0,1]$ 的非空闭子集。因此 $u \in K(X\times[0,1])$。所以充分性得证，(ii) 成立。

为证明 (iii)，假设 $u \in K(X \times [0,1])$ 和 $\alpha \in [0,1]$。则由 (i) 和 (ii)，$\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$ 且 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。因此 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$，因为 $\langle u\rangle_\alpha$ 是 $\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha$ 的闭子集。所以 (iii) 成立。

最后证明 (iv)。定义 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 的一个非空子集 u，令

$$\langle u\rangle_\alpha = \begin{cases} [0,1], & \alpha \in [0,1/2), \\ [0,1/2], & \alpha \in [1/2,1]. \end{cases}$$

那么对于每个 $\alpha \in [0,1]$，$\langle u\rangle_\alpha \in K(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$。

令 x 为 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 中的点 $(1, \frac{1}{2})$。对于 $n = 1, 2, \ldots$，令 x_n 为点 $(1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n})$。那么 $\{x_n\}$ 是 u 中的一个序列。用 ρ 表示 $\mathbb{R}$ 上的欧几里得度量。我们可以看到 $\overline{\rho}(x_n, x) \to 0$。然而 $x \notin u$，因此 $u \notin C(\mathbb{R}\times[0,1])$。这表明，即使 $u \neq \emptyset$，(i) 的逆命题和 (iii) 的逆命题也不成立。因此 (iv) 得证。 □

设 $c_0, c_1 \in [0,1]$ 满足 $0 \le c_0 \le c_1 \le 1$，并设 u 是 $X\times[c_0,c_1]$ 的一个子集。结论 (i) 和 (ii) 显而易见。我们将直接使用它们，不再赘述。

(i) 显然，$u \in C(X \times [c_0,c_1])$ 当且仅当 $u \in C(X\times[0,1])$；$u \in K(X\times[c_0,c_1])$ 当且仅当 $u \in K(X\times[0,1])$。

(ii) 由于对所有 $\alpha \in [0,1]\setminus[c_0,c_1]$，$\langle u\rangle_\alpha = \emptyset$，因此 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X)\cup\{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [c_0,c_1]$ 成立，当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$ 成立；$\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [c_0,c_1]$ 成立，当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [0,1]$ 成立。

对于 $u \subseteq X\times[0,1]$，定义 $S_u := \sup\{\alpha : (x,\alpha) \in u\}$。我们称 S_u 为 u 的高度。本文假设 $\sup\emptyset = 0$。

命题 4.2. 设 u 是 $X \times [0,1]$ 和 $c \in [0, S_u]$的子集。假设满足以下条件。(i) $u \cap (X \times [c,1]) \in K(X \times [0,1])$。(ii) $\cup_{\alpha \in [c,1]} \langle u \rangle_\alpha \in K(X)$ 且 $u \cap (X \times [c,1]) \in C(X \times [0,1])$。(iii) $\langle u \rangle_{S_u} \in K(X)$。则 (i)⇔(ii)⇒(iii)。

证明。设 $v := u \cap (X \times [c,1])$。根据命题 4.1 (ii), $v \in K(X \times [0,1])$ 当且仅当 $v \in C(X \times [0,1])$ 且 $\cup_{\alpha \in [0,1]} \langle v \rangle_\alpha = \cup_{\alpha \in [c,1]} \langle u \rangle_\alpha \in K(X)$。因此 (i)⇔(ii)。

为了完成证明，我们只需证明 (i)⇒(iii)。假设 (i) 成立。根据命题 4.1 (iii), $\langle u \rangle_{S_u} \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。因此，要证明 (iii)，我们只需证明 $\langle u \rangle_{S_u} \neq \emptyset$。我们用反证法证明。

假设 $\langle u \rangle_{S_u} = \emptyset$。那么 $c < S_u$，并且存在一个序列 $\{(x_n, \alpha_n)\}$，属于 $u \cap (X \times [c, S_u))$，使得当 $n \to \infty$ 时，$\alpha_n \to S_u$。由 (i)，存在 $\{(x_{n_k}, \alpha_{n_k})\}$，它是 $\{(x_n, \alpha_n)\}$ 的子序列，并收敛到 (x, α)，其中 $(u \cap (X \times [c,1])\overline{d})$。因此 $\alpha = S_u$，进而 $\langle u \rangle_{S_u} \neq \emptyset$。这就产生了矛盾。于是$\langle u \rangle_{S_u} \neq \emptyset$，且 (iii) 成立。因此 (i)⇒(iii)。证明完毕。

结论 (i)⇔(ii) 等价于命题 4.1 (ii)。上文已证明命题 4.1 (ii) 推出 (i)⇔(ii)。反之，令 $c = 0$。于是由 (i)⇔(ii)，可得命题 4.1 (ii)。

□

注 4.3. 本注中的结论很容易得到。我们经常会直接使用这些结论而不加引用。

设 $c_0, c_1, r_0, r_1 \in [0,1]$ 满足 $r_0 \leq r_1$ 和 $c_0 \leq c_1$。设 u 是 $X \times [c_0, c_1]$的子集。

(i) 显然，对每个 $\alpha \in [0,1] \setminus [c_0, S_u]$，都有 $\langle u \rangle_\alpha = \emptyset$。
(ii) 假设满足以下条件：(ii-1) $u \in C(X \times [0,1])$，(ii-2) $u \cap (X \times [r_0, r_1]) \in C(X \times [0,1])$，(ii-3) $u \in K(X \times [0,1])$，(ii-4) $u \cap (X \times [r_0, r_1]) \in K(X \times [0,1])$。那么 (ii-1)⇒(ii-2)，且 (ii-3)⇒(ii-4)。

由 $X \times [r_0, r_1] \in C(X \times [0,1])$，可得 (ii-1)⇒(ii-2)。假设 (ii-3) 成立。那么 $u \cap (X \times [r_0, r_1]) \in C(X \times [0,1])$。这意味着 $u \cap (X \times [r_0, r_1])$ 是 u 的闭子集。因此 (ii-3)⇒(ii-4)。

显然，(ii-2) 不一定蕴含 (ii-1)；(ii-4) 也不一定蕴含 (ii-3)。

命题 4.4. 设 $c_0, c_1 \in [0,1]$ 满足 $0 \leq c_0 \leq c_1 \leq 1$。设 u 是 $X \times [c_0, c_1]$ 的非空子集，并满足：对于所有 $\xi, \eta \in [c_0, c_1]$，都有 $\langle u \rangle_\xi \subseteq \langle u \rangle_\eta$

满足 $\eta \le \xi$

. (i) $\langle u\rangle_{c_0} = \cup_{\gamma\in[c_0,c_1]}\langle u\rangle_\gamma = p_X(u) \neq \emptyset$。(ii) 假设 $u \in C(X\times[0,1])$，且存在一个满足 $\langle u\rangle_{c_2} \in K(X)$ 的 $c_2 \in [c_0, S_u]$。(ii-1) 令 $\alpha \in [0,1]$。那么，$\langle u\rangle_\alpha \neq \emptyset$ 当且仅当 $\alpha \in [c_0, S_u]$；(ii-2) 对每个 $\alpha \in [c_2, S_u]$，都有 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。(iii) 假设 $u \in K(X\times[0,1])$。那么，对每个 $\alpha \in [c_0, S_u]$，都有 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。(iv) 假设存在一个 $c_2 \in [c_0, S_u]$，使得 $u \cap (X\times[c_2,1]) \in K(X\times[0,1])$。(iv-1) 令 $\alpha \in [0,1]$。那么，$\langle u\rangle_\alpha \neq \emptyset$ 当且仅当 $\alpha \in [c_0, S_u]$；(iv-2) 对每个 $\alpha \in [c_2, S_u]$，都有 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。

证明。显然，(i) 成立。接下来证明 (iv)。令 $v := u \cap (X\times[c_2,1])$。由于 $v \in K(X\times[0,1])$，由命题 4.2，$\langle u\rangle_{S_u} \in K(X)$。因此 $\langle u\rangle_{S_u} \neq \emptyset$，从而对于每个 $\alpha \in [c_0, S_u]$，$\langle u\rangle_\alpha \neq \emptyset$；于是由注记 4.3(i)，(iv-1) 成立。由命题 4.1(iii)，对于每个 $\alpha \in [c_2, S_u]$，$\langle u\rangle_\alpha = \langle v\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。此外，由 (iv-1)，对于每个 $\alpha \in [c_2, S_u]$，$\langle u\rangle_\alpha \neq \emptyset$。因此 (iv-2) 成立。故 (iv) 得证。

现在证明 (ii)。由于 $u \in C(X\times[0,1])$，显然 $u \cap (X\times[c_2,1]) \in C(X\times[0,1])$。由于 $\langle u\rangle_{c_2} = \cup_{\alpha\in[c_2,1]}\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$，由命题 4.2，$u \cap (X\times[c_2,1]) \in K(X\times[0,1])$。因此 (ii) 由 (iv) 得出。

最后我们证明 (iii)。由命题 4.1(ii)，$u \in K(X\times[0,1])$ 推出 $u \in C(X\times[0,1])$ 且 $\langle u\rangle_{c_0} = \cup_{\alpha\in[0,1]}\langle u\rangle_\alpha \in K(X)$。因此，由 (ii-2)，(iii) 成立。证明至此完成。

我们可以看到，(iv) 也能推出 (iii)。事实上，(ii)、(iii) 和 (iv) 彼此等价。上文已证明 (iv) 推出 (ii)，(ii) 推出 (iii)。下面证明 (iii) 推出 (iv)。

若 $u \cap (X\times[c_2,1]) \in K(X\times[0,1])$，则由 (iii)，(iv-2) 成立。因此 $\langle u\rangle_{S_u} \neq \emptyset$，由此可推出 (iv-1) 成立。于是 (iii) 推出 (iv)。

□

Clearly for each $r \in \mathbb{R}$, $(r,r] = \{x : r < x \le r\} = \emptyset$.

命题 4.5. 设 $c_0, c_1 \in [0,1]$ 满足 $0 \le c_0 \le c_1 \le 1$。设 u 是 $X\times[c_0,c_1]$ 的非空子集，并满足：对于每个 $\alpha \in (c_0, c_1]$，$\langle u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle u\rangle_\beta$。那么

(i) 对于每个 $\xi, \eta \in [c_0,c_1]$ 满足 $\eta \le \xi$，$\langle u\rangle_\xi \subseteq \langle u\rangle_\eta$。且 $\langle u\rangle_{c_0} \neq \emptyset$。(ii) $u \in C(X\times[c_0,c_1])$ 当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [c_0,c_1]$ 成立。(iii) $u \in K(X\times[c_0,c_1])$ 当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$ 对所有 $\alpha \in [c_0,c_1]$ 成立。

证明。首先证明 (i)。令 $\xi, \eta \in [c_0,c_1]$ with $\eta \le \xi$。由于 $\langle u\rangle_\xi = \bigcap_{\gamma\in[c_0,\xi)}\langle u\rangle_\gamma$，可得 $\langle u\rangle_\xi \subseteq \langle u\rangle_\eta$。因此，由命题 4.4(i)，$\langle u\rangle_{c_0} \neq \emptyset$。所以 (i) 成立。

为证明 (ii)，根据命题 4.1(i)，我们只需验证：若对每个$\alpha \in [c_0, c_1]$, $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$，则 $u \in C(X \times [c_0, c_1])$。为此，令 $\{(x_n, \alpha_n)\}$ be a sequence in u which converges to an element (x, α) in $(X \times [c_0, c_1], d)$。只需证明 $(x, \alpha) \in u$。

注意，$d(x_n, x) \to 0$ 和 $|\alpha_n - \alpha| \to 0$。假设 $\alpha = c_0$。注意，$\{x_n\}$ 是 $\langle u\rangle_{c_0}$中的一个序列。因此，由于 $\langle u\rangle_{c_0} \in C(X)$，$x \in \langle u\rangle_{c_0}$。这意味着 $(x, \alpha) = (x, c_0) \in u$。

假设 $\alpha > c_0$。给定 $\beta \in [c_0, \alpha)$。那么存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$，$\alpha_n > \beta$。这意味着对所有 $n \geq N$，$x_n \in \langle u\rangle_\beta$。因此，由于 $d(x_n, x) \to 0$ 且 $\langle u\rangle_\beta$ 在 X 中是闭的，$x \in \langle u\rangle_\beta$。因此 $x \in \bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)} \langle u\rangle_\beta = \langle u\rangle_\alpha$。这意味着 $(x, \alpha) \in u$。所以 (ii) 得证。

现在证明 (iii)。根据命题 4.1(iii)，$u \in K(X \times [c_0, c_1])$ 蕴含对所有 $\alpha \in [c_0, c_1]$, $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。

假设对所有 $\alpha \in [c_0, c_1]$，$\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。那么由 (ii) 可得，$u \in C(X \times [c_0, c_1])$。注意，$\bigcup_{\alpha\in[0,1]} \langle u\rangle_\alpha = \langle u\rangle_{c_0} \in K(X)$。因此由命题 4.1(ii)，$u \in K(X \times [c_0, c_1])$。故 (iii) 得证。

□

设 u 是 $X \times [0, 1]$的子集。显然，$u = \emptyset$ 当且仅当对每个 $\alpha \in [0, 1]$，$\langle u\rangle_\alpha = \emptyset$。因此，命题 4.5(i) 等价于推论 4.6(i)；命题 4.5(ii) 等价于推论 4.6(ii)；命题 4.5(iii) 等价于推论 4.6(iii)。

推论 4.6. 设 c_0、$c_1 \in [0, 1]$ 满足 $0 \leq c_0 \leq c_1 \leq 1$。设 u 是 $X \times [c_0, c_1]$ 的子集，并满足对每个 $\alpha \in$，c_0、c_1]、$\langle u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)} \langle u\rangle_\beta$。那么 (i) 对每个 ξ，$\eta \in [c_0, c_1]$ 满足 $\eta \leq \xi$、$\langle u\rangle_\xi \subseteq \langle u\rangle_\eta$。(ii) 对所有 $\alpha \in [0, 1]$，$u \in C(X \times [0, 1]) \cup \{\emptyset\}$ 当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。(iii) 对所有 $\alpha \in [0, 1]$，$u \in K(X \times [0, 1]) \cup \{\emptyset\}$ 当且仅当 $\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。

我们用 $\boldsymbol{P_{USC}(X)}$ 表示 $X \times [0, 1]$ 的所有子集组成的族，该族满足：(i) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$，$\langle u\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$；(ii) 对每个$\alpha \in (0, 1]$, $\langle u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \langle u\rangle_\beta$。

我们用 $\boldsymbol{P_{USCB}(X)}$ 表示 $X \times [0, 1]$ 的所有子集组成的族，该族满足：(i) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$，$\langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$；(ii) 对每个$\alpha \in (0, 1]$, $\langle u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \langle u\rangle_\beta$。

显然，对于所有 $\alpha \in [0, 1]\} = \{u \in P_{USC}(X) : \langle u\rangle_0 \in K(X) \cup \{\emptyset\}\}$，$P_{USCB}(X) = \{u \in P_{USC}(X) : \langle u\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。

显然， $\emptyset \in P_{USCB}(X) \subseteq P_{USC}(X)$。由推论 4.6,

$$P_{USC}(X) = \left\{ u \in C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\} : \text{ for each } \alpha \in (0,1],\ \langle u \rangle_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \langle u \rangle_\beta \right\}, \tag{2}$$

$$P_{USCB}(X) = \left\{ u \in K(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\} : \text{ for each } \alpha \in (0,1],\ \langle u \rangle_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} \langle u \rangle_\beta \right\}. \tag{3}$$

因此 $P_{USCB}(X) = \big(K(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}\big) \cap P_{USC}(X)$】【。

显然， $P_{USC}(X) \setminus \{\emptyset\} \subset C(X \times [0,1])$ 且 $P_{USCB}(X) \setminus \{\emptyset\} \subset K(X \times [0,1])$。取 $x \in X$。令 $u = \{(x,0),(x,1)\}$。于是 $u \in K(X \times [0,1])$，但 $u \notin P_{USC}(X)$。这意味着 $u \in K(X \times [0,1]) \setminus P_{USCB}(X)$ 且 $u \in C(X \times [0,1]) \setminus P_{USC}(X)$。因此， $P_{USC}(X) \setminus \{\emptyset\} \subsetneqq C(X \times [0,1])$ 且 $P_{USCB}(X) \setminus \{\emptyset\} \subsetneqq K(X \times [0,1])$。

容易看出，条件 (i) X 是紧的，(ii) $P_{USC}(X) = P_{USCB}(X)$，以及 (iii) $F_{USC}(X) = F_{USCB}(X)$，彼此等价。

设 $u \in F_{USC}(X)$。定义 $\boldsymbol{u^e} :=$ 端 u 和 $\boldsymbol{u^s} :=$ send u。显然 $\emptyset_{F(X)}{}^s = \emptyset$。设 A 是 $F_{USC}(X)$ 的一个子集。定义 $\boldsymbol{A^e} := \{u^e : u \in A\}$ 和 $\boldsymbol{A^s} := \{u^s : u \in A\}$。于是

$$F_{USC}(X)^e \subseteq P_{USC}(X),\ F_{USC}(X)^s \subseteq P_{USC}(X),\ F_{USCB}(X)^s \subseteq P_{USCB}(X). \tag{4}$$

设 $A \in C(X)$ 和 $B \in K(X)$。于是

$$\begin{aligned}
\emptyset \in P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^e &= \{u \in P_{USC}(X) : \langle u \rangle_0 \neq X\}, \\
A \times \{0\} \in P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^s &= \{u \in P_{USC}(X) : \langle u \rangle_0 \supsetneqq \overline{\cup_{\alpha>0} \langle u \rangle_\alpha}\}, \\
B \times \{0\} \in P_{USCB}(X) \setminus F_{USCB}(X)^s &= \{u \in P_{USCB}(X) : \langle u \rangle_0 \supsetneqq \overline{\cup_{\alpha>0} \langle u \rangle_\alpha}\}.
\end{aligned}$$

因此，(4) 中每个“$\subseteq$”都可以替换为“$\subsetneqq$”。

若 X 是单点集，则 $P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^e = \{\emptyset\}$ 和 $P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^s = P_{USCB}(X) \setminus F_{USCB}(X)^s = \{X \times \{0\}\}$。

如果 X至少有两个元素，那么 $P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^e$、$P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^s$和 $P_{USCB}(X) \setminus F_{USCB}(X)^s$各自都含有高度为正的元素。

假设 X 至少有两个元素。取满足 $x \neq y$ 的 x、$y \in X$。在 $X \times [0,1]$ 中定义 u、v，令

$$\langle u\rangle_\alpha = \begin{cases} \{x\}, & \alpha \in (0,1], \\ \{x,y\}, & \alpha = 0, \end{cases} \quad \text{and } \langle v\rangle_\alpha = \{x\} \text{ for all } \alpha \in [0,1].$$

于是 u、$v \in P_{USCB}(X)$ 和 $S_u = S_v = 1$。然而，$u \notin F_{USC}(X)^s$，$v \notin F_{USC}(X)^e$。因此，$v \in P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^e$，$u \in P_{USC}(X) \setminus F_{USC}(X)^s$，$u \in P_{USCB}(X) \setminus F_{USCB}(X)^s$。

设 $u \in P_{USC}(X)$。根据命题 3.3，我们可以如下定义 $\overleftarrow{u} \in F_{USC}(X)$：对于每个 $\alpha \in (0,1]$，$[\overleftarrow{u}]_\alpha = \langle u\rangle_{\alpha^\circ}$。于是 $\overleftarrow{u}^s \subseteq u \subseteq \overleftarrow{u}^e$。

设 A 是 $P_{USC}(X)$ 的子集。定义 $\overleftarrow{A} := \{\overleftarrow{u} : u \in A\}$。显然，对于每个 $u \in F_{USC}(X)$，$\overleftarrow{P_{USCB}(X)} = F_{USC}(X)$，$\overleftarrow{P_{USC}(X)} = F_{USC}(X)$，$\overleftarrow{F_{USCB}(X)} = F_{USCB}(X)$，$u^s \in (0,1]$，$\overleftarrow{u}^e = \overleftarrow{u}^s = u$，并且对于每个 $(0,1]$，$(0,1]^\circ$。因此 $(0,1] \subseteq (0,1]^\circ$ 且 $(0,1]^\circ \subseteq (0,1]$。

显然，对于每个 $u \in P_{USC}(X)$ 和 $v \in F_{USC}(X)$，$\overleftarrow{u} = v$ 当且仅当 $v^s \subseteq u \subseteq v^e$。条件 (i) X 是紧的，以及 (ii) 不存在满足 $\overleftarrow{u} \in F_{USCB}(X)$ 的 $u \in P_{USC}(X) \setminus P_{USCB}(X)$，二者等价。$X$ 是紧的，意味着 $P_{USC}(X) \setminus P_{USCB}(X) = \emptyset$。因此 (i)⇒(ii)。若 X 不紧，取 $x \in X$，则 $\widehat{x}^e \in P_{USC}(X) \setminus P_{USCB}(X)$ 且 $\overleftarrow{\widehat{x}^e} = \widehat{x} \in F_{USCB}(X)$。因此 (ii)⇒(i)。

我们可以利用本节的结果讨论 $F(X)$ 的性质。下面我们利用推论 4.6(ii) 证明注 2.2 中的结论。反过来，我们也可以利用注 2.2 证明推论 4.6(ii)。这两个证明都很常规。

令 $u \in F(X)$。注意，对于每个 $\alpha \in (0,1]$，$\langle \text{end } u\rangle_\alpha = \langle \text{send } u\rangle_\alpha = [u]_\alpha$，以及 $\langle \text{end } u\rangle_0 = X$ and $\langle \text{send } u\rangle_0 = [u]_{0^\circ}$ 因此 $\langle \text{end } u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta\in[0,\alpha)} \langle \text{end } u\rangle_\beta$ and $\langle \text{send } u\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta\in[0,\alpha)} \langle \text{send } u\rangle_\beta$。由于 $\langle \text{end } u\rangle_0 \in C(X)$ 且 $\langle \text{send } u\rangle_0 = [u]_0 \in \underline{C}(X)$，根据推论 4.6(ii)，以下条件等价：(i) end u 在 $(X \times [0,1], d)$ 中是闭集；(ii) send u 在 $(X \times [0,1], \overline{d})$ 中是闭集；(iii) 对所有 $\alpha \in (0,1]$，$[u]_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。显然，$u \in F_{USC}(X)$ 等价于 (iii)。因此，我们得到了注 2.2 中的结论。

5.（$F_{USCG}(X)$ H_{end}）中紧致性的刻画

本节分别给出（$F_{USCG}(X)$ H_{end}）中相对紧集、全有界集和紧集的刻画。我们指出，这些结果改进了相对

紧集、全有界集和紧集在（$F_{USCG}(\mathbb{R}^m)$ H_{end}）中的刻画，这些刻画分别见我们先前的工作 [9], 。

• 拓扑空间 Z 的子集 Y 称为紧的，如果对于每个集合 I 以及每个开集族 O_i、 $i \in I$，只要满足 $Y \subset \bigcup_{i\in I} O_i$，就存在一个有限子族 O_{i_1}、O_{i_2}..... O_{i_n}，使得 $Y \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_n}$。在度量拓扑的情形下，紧致性的判据是： Y 中的任意序列都有一个子序列在 Y 中收敛。

• 拓扑空间 Z 的相对紧子集 Y 是指闭包紧的子集。在度量拓扑的情形下，相对紧性的判据是： Y中的任意序列都有一个子序列在 X中收敛。

• 设 (X, d) 是一个度量空间。集合 U 在 X 中全有界，当且仅当对于每个 $\varepsilon > 0$, 它都包含一个有限的 ε 近似，其中， U 的一个 ε 近似是 U 的子集 S，且满足 $d(x, S) < \varepsilon$，对每个 $x \in U$ 都成立。 U 的一个 ε 近似也称为 U 的 ε-网。

众所周知， U 在 X 中全有界，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$， U都有一个有限的弱 ε-网；其中， U 的弱 ε-网是 X 的一个子集S，满足对每个 $x \in U$， $d(x, S) < \varepsilon$。

设(X, d)为一个度量空间。集合 U在(X, d)中紧，意味着U 在(X, d)中相对紧，进而意味着 U 在(X, d)中全有界。设 Y是 X 的一个子集，且 A 是 Y的一个子集。那么， A 在(Y, d)中全有界，当且仅当 A 在(X, d)中全有界。另请参见 [10] 或以下论文：H. Huang, 《若干模糊集空间的性质》（v1- v13），chinaXiv:202107.00011，其中一些内容早于 [10]。论文 H. Huang, 《模糊集上若干收敛结构的刻画》，arXiv:1910.02205v1, 于2019年10月5日提交，是 chinaXiv:202107.00011 的早期版本。

定理 5.1. *[10]* 设 (X, d) 为度量空间，且 $\mathcal{D} \subseteq K(X)$。那么， $\mathcal{D}$在 $(K(X)$ $H)$ 中全有界，当且仅当 $\mathsf{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在 (X, d) 中全有界。

定理 5.2. *[6]* 设 (X, d) 是一个度量空间，且 $\mathcal{D} \subseteq K(X)$。那么， $\mathcal{D}$在 $(K$ (X) $H)$ 中相对紧，当且仅当 $\mathsf{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在 (X, d) 中相对紧。

定理 5.3. *[10]* 设 (X,d) 是一个度量空间，且 $\mathcal{D}\subseteq K(X)$。那么以下命题等价：

(i) $\mathcal{D}$ 在（$K(X)$ H）中是紧的；(ii) $D=\bigcup\{C:\ C\in\mathcal{D}\}$ 在（X,d）中是相对紧的，且 $\mathcal{D}$ 在（$K(X)$ H）中是闭的；(iii) $D=\bigcup\{C:\ C\in\mathcal{D}\}$ 在（X,d）中是紧的，且 $\mathcal{D}$ 在（$K(X)$ H）中是闭的。

设 $u\in F_{USC}(X)$。那么 $F_{USC}(X)^e\subseteq C(X\times[0,1])$（参见注 2.2 下方的段落）。定义 $g:(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})\to(C(X\times[0,1])\ H)$，使得$g(u)=$端 u，对每个 $u\in F_{USC}(X)$ 均成立。那么 $g(F_{USC}(X))=F_{USC}(X)^e$。显然，对每个 u，$v\in F_{USC}(X)$，$H_{\mathrm{end}}(u,v)=H(g(u)\ g(v))$。这意味着 g 是（$F_{USC}(X)$ H_{end}）到（$C(X\times[0,1])$ H）中的等距嵌入。

以下关于 $F_{USC}(X)^e$ 和 $F_{USCG}(X)^e$ 的表示定理可由命题 3.3 立即推出。

命题 5.4. 设 U 是 $X\times[0,1]$的一个子集。那么，$U\in F_{USC}(X)^e$（分别地，$U\in F_{USCG}(X)^e$）成立，当且仅当以下性质 (i)-(iii) 成立。

(i) 对每个 $\alpha\in(0,1]$, $\langle U\rangle_\alpha\in C(X)\cup\{\emptyset\}$（分别地，$\langle U\rangle_\alpha\in K(X)\cup\{\emptyset\}$）。
(ii) 对每个 $\alpha\in(0,1]$, $\langle U\rangle_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}\langle U\rangle_\beta$。(iii) $\langle U\rangle_0=X$。

命题 5.5. 设 c_0,c_1 属于 $[0,1]$，且 $c_0\le c_1$，并设 $U\in C(X\times[c_0,c_1])\cup\{\emptyset\}$。则以下 (i) 和 (ii) 等价。(i) 对每个 α，满足 $c_0<\alpha\le c_1$, $\langle U\rangle_\alpha=\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$。(ii) 对每个 α,β，满足 $c_0\le\beta<\alpha\le c_1$, $\langle U\rangle_\alpha\subseteq\langle U\rangle_\beta$。

证明。证明是常规的。(i)⇒(ii) 显然成立。

假设 (ii) 成立。为证明 (i) 成立，令 $\alpha\in(c_0,c_1]$。由 (ii) 可得 $\langle U\rangle_\alpha\subseteq\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$。因此，我们只需证明 $\langle U\rangle_\alpha\supseteq\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$。为此，令 $x\in\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$。这意味着，对于每个$\beta\in[c_0,\alpha)$，$(x,\beta)\in U$。注意到 $\lim_{\beta\to\alpha-}\overline{d}((x,\beta),(x,\alpha))=0$，因此根据 U 的闭性，$(x,\alpha)\in U$。于是 $x\in\langle U\rangle_\alpha$。由于 $x\in\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$是任意的，我们有 $\langle U\rangle_\alpha\supseteq\bigcap_{\beta\in[c_0,\alpha)}\langle U\rangle_\beta$。所以 (i) 成立。因此，(ii)⇒(i) 得证。

□

命题 5.6. 设 $U\in C(X\times[0,1])$。那么 $U\in F_{USC}(X)^e$ 当且仅当 U 具有以下性质：

(i) 对每个 α, β满足 $0 \le \beta < \alpha \le 1$, $\langle U\rangle_\alpha \subseteq \langle U\rangle_\beta$, 且
(ii) $\langle U\rangle_0 = X$。
证明。由于 $U \in C(X \times [0,1])$, 显然对所有 $\alpha \in [0,1]$, $\langle U\rangle_\alpha \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。因此, 所需结果可由命题 5.4 和命题 5.5 立即得出。

□

为简便起见, 我们用 $\{x_n\}$ 表示序列 $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$。
命题 5.7. $F_{USC}(X)^e$ 是 $(C(X \times [0,1]) \ H)$ 的闭子集。
证明。设 $\{u_n^e\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $F_{USC}(X)^e$ 中的一个序列, 且 $\{u_n^e\}$ 收敛到 $(C(X \times [0,1]) \ H)$ 中的 U。为证明所需结果, 我们只需证明 $U \in F_{USC}(X)^e$。

我们断言:
(i) 对每个 α, β 满足 $0 \le \beta < \alpha \le 1$, $\langle U\rangle_\alpha \subseteq \langle U\rangle_\beta$;
(ii) $\langle U\rangle_0 = X$。
为证明 (i), 令 α, β属于 $[0,1]$, 且 $\beta < \alpha$, 并令 $x \in \langle U\rangle_\alpha$, 即 $(x, \alpha) \in U$。由定理 2.4, $\lim_{n\to\infty}^{(K)} u_n^e = U$。于是存在一个序列 $\{(x_n, \alpha_n)\}$, 满足对 $n = 1$、 2 、 ....., $(x_n, \alpha_n) \in u_n^e$, 且 $\lim_{n\to\infty} \overline{d}((x_n, \alpha_n), (x, \alpha)) = 0$。因此存在一个 N, 使得对所有 $n \ge N$, 均有 $\alpha_n > \beta$。于是对所有 $n \ge N$, $(x_n, \beta) \in u_n^e$。注意, $\lim_{n\to\infty} \overline{d}((x_n, \beta), (x, \beta)) = 0$。于是 $(x, \beta) \in \lim_{n\to\infty}^{(K)} u_n^e = U$。这意味着 $x \in \langle U\rangle_\beta$。因此 (i) 成立。

显然, $\langle U\rangle_0 \subseteq X$。由 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} u_n^e = U$ 和 $\langle u_n^e\rangle_0 = X$, 可得$\langle U\rangle_0 \supseteq X$。因此 $\langle U\rangle_0 = X$。所以 (ii) 成立。
由命题 5.6, (i) 和 (ii) 可推出 $U \in F_{USC}(X)^e$。

□

注 5.8. (i) 由 (2)、(3) 和命题 5.5,
$P_{USC}(X) = \{u \in C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}\colon$ 对每个 α, β满足 $0 \le \beta < \alpha \le 1$, $\langle u\rangle_\alpha \subseteq \langle u\rangle_\beta\}$。
$P_{USCB}(X) = \{u \in K(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}\colon$ 对每个 α, β满足 $0 \le \beta < \alpha \le 1$, $\langle u\rangle_\alpha \subseteq \langle u\rangle_\beta\}$。
(ii) $P_{USC}(X)$ 是 $(C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}, H)$ 的闭子集。
设 $\{u_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $P_{USC}(X)$ 中的一个序列, 且 $\{u_n\}$ 收敛到 $(C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}, H)$ 中的 u。为证明 (ii), 我们只需证明 $u \in P_{USC}(X)$。由 (i) 可知, 要做到这一点, 只需证明: (a) 对每个 α, β, 都有 $0 \le \beta < \alpha \le 1, \langle u\rangle_\alpha \subseteq \langle u\rangle_\beta$。
(a) 的证明与命题 5.7 的证明中 (i) 的证明类似。因此 $u \in P_{USC}(X)$。于是 (i) 得证。

(ii) 令 $a \in [0,1]$。命题 6.6(ii) 表明, $F'^a_{USC}(X)$ 是 $(F_{USC}(X) \ H_{\text{end}})$ 的闭子集。因此, 根据命题 5.7, 我们有 $F'^a_{USC}(X)^e$ 是 $(C(X \times [0,1]) \ H)$ 的闭子集。

我们用 (X,d) 表示 (X,d) 的完备化。我们将 (X,d) 视为 (X,d) 的一个子空间。

若无歧义，我们也用 H 表示由 d 诱导的 $C(X)$ 上的豪斯多夫度量。我们也用 H 表示由 d 诱导的 $C(X\times[0,1])$ 上的豪斯多夫度量。我们还用 H_{end} 表示通过在 $C(X\times[0,1])$ 上使用 H 所给出的 $F_{USC}(X)$ 上的端图度量。

$F_{USC}(X)$ 中的自然嵌入到 $F(X)$ 的嵌入 j 定义如下。

设 $u\in F_{USC}(X)$。我们可以定义 $j(u)\in F(X)$ 如下：

$$j(u)(t)=\begin{cases} u(t), & t\in X,\\ 0, & t\in \widetilde{X}\setminus X.\end{cases}$$

设 $U\subseteq X$。若 U 在 (X,d) 中是紧的，则 U 在 (X,d) 中是紧的。因此，若 $u\in F_{USCG}(X)$，则 $j(u)\in F_{USCG}(X)$，因为对于每个 $\alpha\in(0,1]$，$[j(u)]_\alpha=[u]_\alpha\subseteq K(X)\cup\{\emptyset\}$。此外，对于 $u,v\in F_{USCG}(X)$，$H_{\mathrm{end}}(u,v)=H_{\mathrm{end}}(j(u),j(v))$。

定义 $k(u)=j(u)$，对每个 $u\in F_{USCG}(X)$。那么，k 是从 $(F_{USCG}(X),H_{\mathrm{end}})$ 到 $(F_{USCG}(X),H_{\mathrm{end}})$ 的等距嵌入。

下文中，若不致混淆，我们将 $(F_{USCG}(X),H_{\mathrm{end}})$ 视为 $(F_{USCG}(X),H_{\mathrm{end}})$ 的一个子空间：将 $F_{USCG}(X)$ 中的 u 与 $F_{USCG}(X)$ 中的 $j(u)$ 等同。因此，我们将 $F_{USCG}(X)$ 的子集 U 视为 $F_{USCG}(X)$ 的子集。

设 $u\in F_{USCG}(X)$。显然，对每个 $\alpha\in(0,1]$，$\langle j(u)^e\rangle_\alpha=\langle u^e\rangle_\alpha$。

假设 U 是 $F_{USC}(X)$ 的子集，且 $\alpha\in[0,1]$。为方便书写，我们记

- $U(\alpha):=\bigcup_{u\in U}[u]_\alpha$, and
- $U_\alpha:=\{[u]_\alpha:u\in U\}$.

这里说明，空并为 $\emptyset$。

命题 5.9。设 u、$v\in F_{USC}(X)$ 和 $\varepsilon\in(0,1]$。令 α、$\beta\in[0,1]$ with $\alpha-\beta\geq\varepsilon$。设 $a:=H^*([u]_\alpha,\overline{\{v>\beta\}})$ 以及 $b:=\sup\{\bar{d}((y,\alpha),\text{端 }v):\ y\in[u]_\alpha\}$。

(i) 如果 $b<\varepsilon$，则 $a\leq b$。(ii) 如果 $H^*(\text{端 }u,\text{端 }v)<\varepsilon$，则 $H^*([u]_\alpha,[v]_\beta)\leq H^*(\text{端 }u,\text{端 }v)<\varepsilon$。

证明。首先证明 (i)。假设 $b<\varepsilon$。若 $[u]_\alpha=\emptyset$，则 $a=0\leq b$。

假设 $[u]_\alpha \neq \emptyset$。令 $y \in [u]_{\alpha}$。设

$$\xi := \inf\{\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) : (z,\gamma) \in \operatorname{end} v \text{ with } \gamma \leq \beta\},$$
$$\eta := \begin{cases} \inf\{\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) : (z,\gamma) \in \operatorname{end} v \text{ with } \gamma > \beta\}, & \{v > \beta\} \neq \emptyset, \\ +\infty, & \{v > \beta\} = \emptyset. \end{cases}$$

那么 $\overline{d}((y,\alpha), \text{端}\, v) = \inf\{\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) : (z,\gamma) \in \text{端}\ v\} = \xi \wedge \eta$。这意味着 $\overline{d}((y,\alpha), \text{端}\, v) = \xi$ 或 $\overline{d}((y,\alpha), \text{端}\ v) = \eta$。

注意，对于每个 $(z,\gamma) \in \text{端}\ v$ 且满足 $\gamma \leq \beta$, $\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) \geq |\alpha - \gamma| \geq |\alpha - \beta| \geq \varepsilon$。因此 $\xi \geq \varepsilon$。由于 $\overline{d}((y,\alpha), \text{端}\, v) \leq b < \varepsilon$，可得 $\{v > \beta\} \neq \emptyset$ 且

$$\overline{d}((y,\alpha), \operatorname{end} v) = \eta = \inf\{\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) : (z,\gamma) \in \operatorname{end} v \text{ with } \gamma > \beta\}. \quad (5)$$

由于对于每个 $(z,\gamma) \in \text{端}\, v$ 且满足 $\gamma > \beta$, $\overline{d}((y,\alpha),(z,\gamma)) \geq d(y,z) \geq d(y,\{v > \beta\}) = d(y,\overline{\{v > \beta\}})$，由 (5) 可得

$$\overline{d}((y,\alpha), \operatorname{end} v) \geq d(y, \overline{\{v > \beta\}}).$$

因此，$b = \sup\{\overline{d}((y,\alpha), \text{端}\, v) : y \in [u]_\alpha\} \geq \sup\{d(y,\overline{\{v > \beta\}} : y \in [u]_\alpha\} = a$。所以 (i) 成立。

现在证明 (ii)。显然，$H^*([u]_\alpha, [v]_\beta) \leq a$ 且 $b \leq H^*(\text{端}\, u, \text{端}\ v)$。若 $H^*(\text{端}\, u, \text{端}\ v) < \varepsilon$，则 $b < \varepsilon$，因此由 (i) 可得，$H^*([u]_\alpha, [v]_\beta) \leq a \leq b \leq H^*(\text{端}\, u, \text{端}\ v) < \varepsilon$。所以 (ii) 成立。

□

这里我们指出，若将 $\overline{d}$ 替换为 d'，并将 H^* on $C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}$ 替换为 H'^* on $C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}$，则命题 5.9 及其证明仍然成立。

引理 5.10. 设 U 是 $F_{USCG}(X)$ 的子集。如果 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界，那么对于每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。

证明. 证明与 [10] 中定理 7.8 的必要性部分类似。另见论文：H. Huang, 若干模糊集空间的性质 (v1-v13)，chinaXiv:202107.00011。

设 $\alpha \in (0,1]$。要证明 $U(\alpha)$ 在 X 中全有界，只需证明 $U(\alpha)$ 中的每个序列都有一个柯西子列。

设 $\{x_n\}$ 是 $U(\alpha)$ 中的一个序列。那么存在一个序列 $\{u_n\}$，属于 U，且对于 $n = 1$、2、.....，有 $x_n \in [u_n]_\alpha$。由于 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界，

$\{u_n\}$ 在 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 中有一个柯西子列 $\{u_{n_l}\}$。因此，给定 $\varepsilon \in (0,\alpha)$，存在一个 $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $l \geq K$，都有 $H_{\mathrm{end}}(u_{n_l}, u_{n_K}) < \varepsilon$。于是根据命题 5.9(ii),

$$H^*([u_{n_l}]_\alpha, [u_{n_K}]_{\alpha-\varepsilon}) < \varepsilon \tag{6}$$

对所有 $l \geq K$。我们断言：(a) $\bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$ 在 (X,d) 中全有界。

为证明 (a)，只需证明对于每个 $\lambda > 0$，存在 $\bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$ 的有限弱 λ-网。

令 $\lambda > 0$。设 $\varepsilon = \min\{\lambda/2, \alpha/2\}$。则 $\varepsilon \in (0,\alpha)$。因此存在一个 $K(\varepsilon)$，使得对所有 $l \geq K$，(6) 均成立。设 $A := \bigcup_{l=1}^{K-1}[u_{n_l}]_\alpha \cup [u_{n_K}]_{\alpha-\varepsilon}$。由于 A 是紧的，存在一个有限的 ε 近似 $\{z_j\}_{j=1}^m$，逼近 A。下面证明 $\{z_j\}_{j=1}^m$ 是 $\bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$ 的有限弱 λ-网。

令 $z \in \bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$。若 $z \in \bigcup_{l=1}^{K-1}[u_{n_l}]_\alpha$，则显然 $d(z,\{z_j\}_{j=1}^m) < \varepsilon < \lambda$。若 $z \in \bigcup_{l=K}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$，则由 (6)，存在一个 $y_z \in [u_{n_K}]_{\alpha-\varepsilon}$，使得 $d(z,y_z) < \varepsilon$，因而 $d(z,\{z_j\}_{j=1}^m) \leq d(z,y_z) + d(y_z,\{z_j\}_{j=1}^m) < 2\varepsilon \leq \lambda$。因此，对每个 $z \in \bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$，$d(z,\{z_j\}_{j=1}^m) < \lambda$。故 $\{z_j\}_{j=1}^m$ 是 $\bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$ 的有限弱 λ-网。(a) 得证。

由于 $\{x_{n_l}\}$ 是 $\bigcup_{l=1}^{+\infty}[u_{n_l}]_\alpha$ 中的一个序列，(a) 表明 $\{x_{n_l}\}$ 有一个柯西子列。由于 $\{x_{n_l}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子列，因此 $\{x_n\}$ 也有一个柯西子列。所以 $U(\alpha)$ 在 X 中是全有界的。证明完毕。

□

注 5.11. 容易看出，对于 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 中的全有界集 U，即使 $U \neq \emptyset$，$\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha) = \emptyset$ 也是可能的。

设 $u \in F(X)$ 且 $0 \leq r \leq t \leq 1$。我们用符号 $\mathbf{end}_r^t\, u$ 表示由下式给出的 $\mathbf{end}\, u$ 的子集

$$\mathrm{end}_r^t\, u := \mathrm{end}\, u \cap ([u]_r \times [r,t]).$$

为简单起见，我们将 $\mathbf{end}_r^1\, u$ 记作 $\mathbf{end}_r\, u$。我们可以看到 $\mathbf{end}_0\, u = \mathbf{send}\, u$.

定理 5.12. 设 U 是 $F_{USCG}(X)$ 的一个子集。那么，当且仅当对每个 $\alpha \in (0,1]$，U 在 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧时，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。

证明。必要性。假设 U 在 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧。令 $\alpha \in (0,1]$。那么根据引理 5.10，$U(\alpha)$ 是全有界的。因此 $U(\alpha)^{\sim}{}^{\sim}$ 在 (X,d) 中相对紧。

为了证明 $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧，我们采用反证法。若结论不成立，则存在一个序列 $\{x_n\}$，它属于 $\widetilde{U(\alpha)}$，且 $\{x_n\}$ 在 (X,d) 中收敛到 $x \in X \setminus X$。

假设 $x_n \in [u_n]_\alpha$ 且 $u_n \in U$，$n = 1, 2, \ldots$. 由 U的相对紧性可知，存在 $\{u_n\}$的一个子序列 $\{u_{n_k}, k = 1, 2, \ldots\}$，使得 $\{u_{n_k}\}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中收敛于 u，这等价于 $\{j(u_{n_k})\}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中收敛于 $j(u)$。根据注 2.5，$\lim_{k\to\infty}^{(\Gamma)} j(u_{n_k}) = j(u)$；也就是说，根据 $(\widetilde{X} \precsim [0,1], d)$，$\lim_{k\to\infty}^{(K)} j(u_{n_k})^e = j(u)^e$。注意到，对于 $k = 1, 2, \ldots$，$(x_{n_k}, \alpha) \in j(u_{n_k})^e$，并且 $\{(x_{n_k}, \alpha)\}\widetilde{}$ 在 $(X \times [0,1], d)$ 中收敛于 (x, α)。因此，$(x, \alpha) \in j(u)^e$。这意味着 $\sim x \in \langle j(u)^e \rangle_\alpha = \langle u^e \rangle_\alpha$，与 $x \in X \setminus X$ 矛盾。

可以看出，[10] 中定理 7.9 的必要性部分可以用与本定理必要性部分类似的方法加以验证。

充分性。设对每个$\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中都是相对紧的。为了证明 U在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧，我们只需证明 U 中的每个序列在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中都有收敛子列。

设 $\{u_n\}$ 是 U中的一个序列。我们将证明分为两种情形。

情形 (i) $\liminf_{n\to\infty} S_{u_n} = 0$；也就是说，存在$\{u_n\}$的一个子序列 $\{u_{n_k}\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} S_{u_{n_k}} = 0$。显然，当 $k \to \infty$时，$H_{\mathrm{end}}(u_{n_k}, \emptyset_{F(X)}) = S_{u_{n_k}} \to 0$。由于 $\emptyset_{F(X)} \in F_{USCG}(X)$，$\{u_{n_k}\}$是 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的一个收敛子列。

情形 (ii) $\liminf_{n\to\infty} S_{u_n} > 0$；也就是说，存在一个 $\xi > 0$和一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$都有 $[u_n]_\xi \neq \emptyset$。

首先，我们断言以下性质成立：

(a) 设 $\alpha \in (0,1]$，并设 S 是 U 的子集，且对每个 $u \in S$都有 $[u]_\alpha \neq \emptyset$。那么 $\{\mathrm{end}_\alpha u : u \in S\}$ 是 $(K(X \times [\alpha,1])\ H)$ 中的相对紧集。

下面证明 (a)。首先验证，对每个 $u \in S$，$\mathrm{end}_\alpha u \in K(X \times [\alpha,1])$。设 $u \in S$。显然，$\mathrm{end}_\alpha u \neq \emptyset$ as $\mathrm{end}_\alpha u \supseteq [u]_\alpha \times \{\alpha\}$。注意，对每个 $\beta \in [\alpha,1]$，$\langle \mathrm{end}_\alpha u \rangle_\beta = [u]_\beta \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。因此，由命题 4.5(iii)，$\mathrm{end}_\alpha u \in K(X \times [\alpha,1])$。

由于 $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧，因此 $U(\alpha) \times [\alpha,1]$ 在 $(X \times [\alpha,1], \overline{d})$ 中相对紧。由于$\bigcup_{u\in S} \mathrm{end}_\alpha u$ 是 $U(\alpha) \times [\alpha,1]$的子集，因此$\bigcup_{u\in S} \mathrm{end}_\alpha u$ 在 $(X \times [\alpha,1], \overline{d})$ 中也是相对紧集。由定理 5.2，$\{\mathrm{end}_\alpha u : u \in S\}$ 在 $(K(X \times [\alpha,1])\ H)$ 中相对紧。因此断言 (a) 成立。

取一个满足 $0 < \alpha_{k+1} < \alpha_k \le \min\{\xi, \frac{1}{k}\}$ for $k = 1, 2, \ldots$ 的序列 $\{\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots\}$。我们可以看出 $\alpha_k \to 0$ as $k \to \infty$。

根据断言 (a)，$\{\mathrm{end}_{\alpha_1} u_n :\ n = N, N+1, \ldots\}$ 在 $(K(X \times [\alpha_1, 1]),\ H)$ 中相对紧。因此，存在 $\{u_n$ 的一个子序列 $\{u_n^{(1)}\} :\ n \ge N\}$ 和 $v^1 \in K(X \times [\alpha_1, 1])$，使得 $H(\mathrm{end}_{\alpha_1} u_n^{(1)}, v^1) \to 0$。显然，$\{u_n^{(1)}\}$ 也是 $\{u_n\}$的一个子序列。

再次利用断言 (a)，$\{\mathrm{end}_{\alpha_2} u_n^{(1)}\}$ 在 $(K(X \times [\alpha_2, 1]),\ H)$ 中相对紧。因此，存在 $\{u_n^{(1)}\}$ 的一个子序列 $\{u_n^{(2)}\}$ 和 $v^2 \in K(X \times [\alpha_2, 1])$，使得 $H(\mathrm{end}_{\alpha_2} u_n^{(2)}, v^2) \to 0$ 当 $n \to \infty$。

重复上述过程，可得 $\{u_n^{(k)}\}$ 和 $v^k \in K(X \times [\alpha_k, 1])$，$k = 1, 2, \ldots$，使得对于每个 $k = 1, 2, \ldots$，$\{u_n^{(k+1)}\}$ 都是 $\{u_n^{(k)}\}$ 的一个子序列，且 $H(\mathrm{end}_{\alpha_k} u_n^{(k)}, v^k) \to 0$ 当 $n \to \infty$。

我们可以看出，序列 $\{u_n^{(n)} :\ n = 1, 2, \ldots\}$ 满足：对每个α_k, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim_{n\to\infty} H(\mathrm{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)}, v^k) = 0$。由于对每个 $k \in \mathbb{N}$, $\{u_n^{(k)}\}$都是 $\{u_n :\ n \ge N\}$ 的子序列，因此对每个 $n, k \in \mathbb{N}$, $[u_n^{(k)}]_\xi \ne \emptyset$。

我们断言

(b) 设 k_1 和 k_2 属于 $\mathbb{N}$，且 $k_1 < k_2$。设 $k \in \mathbb{N}$。那么 (b-i) $\langle v^{k_1}\rangle_{\alpha_{k_1}} \subseteq \langle v^{k_2}\rangle_{\alpha_{k_1}}$, (b-ii) 当 $\alpha \in (\alpha_{k_1}, 1]$ 时，$\langle v^{k_1}\rangle_\alpha = \langle v^{k_2}\rangle_\alpha$，(b-iii) $v^k \subseteq v^{k+1}$，(b-iv) 对每个满足 $\beta < \alpha$, $\langle v^k\rangle_\alpha \subseteq \langle v^k\rangle_\beta$ 的 $\alpha, \beta \in [\alpha_k, 1]$，(b-v) 对每个 $\alpha \in (\alpha_k, 1]$, $\langle v^k\rangle_\alpha = \bigcap_{\beta\in[\alpha_k,\alpha)} \langle v^k\rangle_\beta$，(b-vi) 对每个 $\alpha \in [0, 1]$, $\langle v^k\rangle_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$。

下面证明 (b)。注意，$\{u^{(k_2)}{}_n\ \}$ 是 $\{u^{(k_1)}{}_n\ \}$ 的子序列，并且$\alpha_{k_2} < \alpha_{k_1}$。因此，根据定理 2.4，对于每个 $\alpha \in [\alpha_{k_1}, 1]$,

$$\begin{aligned}
&\langle v^{k_1}\rangle_\alpha \times \{\alpha\} \\
&= \liminf_{n\to\infty} \mathrm{end}_{\alpha_{k_1}} u_n^{(k_1)} \cap (X \times \{\alpha\}) \\
&\subseteq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{end}_{\alpha_{k_2}} u_n^{(k_2)} \cap (X \times \{\alpha\}) \\
&= \langle v^{k_2}\rangle_\alpha \times \{\alpha\}. \qquad (7)
\end{aligned}$$

所以 (b-i) 成立。

设 $\alpha \in [0, 1]$，其中 $\alpha > \alpha_{k_1}$。令 $A := \limsup_{n\to\infty} 端_{\alpha_{k_1}} u^{(k_2)}{}_n\ \cap (X \times \{\alpha\})$，以及 $B := \limsup_{n\to\infty} 端_{\alpha_{k_2}} u^{(k_2)}{}_n\ \cap (X \times \{\alpha\})$。我们证明 $A = B$。

显然 $A \subseteq B$。给定 $(x,\alpha) \in B$。于是存在序列 $\{(x_m,\beta_m)\}$及其子序列 $\{u^{(k_2)}_{n_m}\}$，取自 $\{u^{(k_2)}_n\}$，使得对每个 $m=1,2,...,(x_m,\beta_m) \in$端$_{\alpha_{k_2}} u^{(k_2)}_{n_m}$，且 $\overline{d}((x_m,\beta_m),(x,\alpha)) \to 0$，当 $m \to \infty$时。因此存在一个 M，使得对所有 $m > M$，$\beta_m > \alpha_{k_1}$，即 $(x_m,\beta_m) \in$端$_{\alpha_{k_1}} u^{(k_2)}_{n_m}$。于是 $(x,\alpha) \in \limsup_{n\to\infty}$端$_{\alpha_{k_1}} u^{(k_2)}_n$。显然 $(x,\alpha) \in X\times\{\alpha\}$。因此 $(x,\alpha) \in A$。由于 $(x,\alpha) \in B$ 是任意的，可得 $B \subseteq A$。因此 $A = B$。

现在由定理 2.4，对每个 $\alpha \in (\alpha_{k_1},1]$，

$$\begin{aligned}
&\langle v^{k_1}\rangle_\alpha \times \{\alpha\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \mathrm{end}_{\alpha_{k_1}} u^{(k_1)}_n \cap (X\times\{\alpha\}) \\
&\supseteq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{end}_{\alpha_{k_1}} u^{(k_2)}_n \cap (X\times\{\alpha\}) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \mathrm{end}_{\alpha_{k_2}} u^{(k_2)}_n \cap (X\times\{\alpha\}) \\
&= \langle v^{k_2}\rangle_\alpha \times \{\alpha\}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

因此由 (7) 和 (8)，对于 $\alpha \in (\alpha_{k_1},1]$，$\langle v^{k_1}\rangle_\alpha = \langle v^{k_2}\rangle_\alpha$ 成立。所以 (b-ii) 成立。

(b-iii) 可由 (b-i) 和 (b-ii) 立即推出。(b-iv) 的证明与命题 5.7 的证明中 (i) 的证明类似。由于 $v^k \in K(X\times[\alpha_k,1])$，由命题 5.5 可知，(b-iv) 等价于 (b-v)。由于 $v^k \in K(X\times[\alpha_k,1]) \subset K(X\times[0,1])$，由命题 4.1(iii) 可知，(b-vi) 成立。因此 (b) 得证。

定义 $X\times[0,1]$ 的一个子集 v，如下所示

$$v = \bigcup_{k=1}^{+\infty} v^k \cup (X\times\{0\}). \qquad (9)$$

令 $k \in \mathbb{N}$。那么根据断言 (b)，$\langle v\rangle_\alpha = \langle v^k\rangle_\alpha$ 对于每个 $\alpha \in (\alpha_k,1]$。这意味着

$$v \cap (X\times(\alpha_k,1]) = v^k \cap (X\times(\alpha_k,1]) \subseteq v^k. \qquad (10)$$

So

$$\langle v\rangle_\alpha = \begin{cases} \langle v^k\rangle_\alpha, & \text{if } k\in\mathbb{N} \text{ and } \alpha\in(\alpha_k,1], \\ X, & \text{if } \alpha = 0, \end{cases} \qquad (11)$$

我们证明 $v \in C(X\times[0,1])$。为此，令 $\{(x_l,\gamma_l)\}$ 是 v 中收敛到 $X\times[0,1]$ 中某个元素 (x,γ) 的序列。若 $\gamma = 0$，则显然 $(x,\gamma) \in v$。若 $\gamma > 0$，则存在一个 $k_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\gamma > \alpha_{k_0}$。因此存在

一个 L 使得当 $l \geq L$ 时 $\gamma_l > \alpha_{k_0}$。因此由 (10)，当 $l \geq L$ 时 $(x_l, \gamma_l) \in v^{k_0}$。由于 $v^{k_0} \in K(X \times [\alpha_{k_0}, 1])$，可得 $(x, \gamma) \in v^{k_0} \subset v$。

我们断言

(c) $\lim_{n\to\infty} H(\text{端}\, u_n^{(n)}, v) = 0$ 和 $v \in F_{USCG}(X)$[e].

令 $n, k \in \mathbb{N}$。显然 $S_{\text{end}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)}} \leq \alpha_k$。由于 $\langle \text{端}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)} \rangle_{\alpha_k} = [u_n^{(n)}]_{\alpha_k} \supseteq [u_n^{(n)}]_\xi \neq \emptyset$，可得 $S_{\text{end}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)}} = \alpha_k$。显然 $S_{v\cap(X\times[0,\alpha_k])} \leq \alpha_k$。因此

$$H^*(\text{end}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)}, v) \leq H^*(\text{end}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)}, X \times \{0\}) = \alpha_k, \tag{12}$$

$$H^*(v \cap (X \times [0, \alpha_k]), \text{end}\, u_n^{(n)}) \leq H^*(v \cap (X \times [0, \alpha_k]), X \times \{0\}) \leq \alpha_k. \tag{13}$$

(令 $k \in \mathbb{N}$。由于 $v^k \neq \emptyset$，由 (b-iv) 得 $\langle v^k \rangle_{\alpha_k} = \bigcup_{\gamma\in[\alpha_k,1]} \langle v^k \rangle_\gamma \neq \emptyset$。再由 (9)，$\langle v \rangle_{\alpha_k} \supseteq \langle v^k \rangle_{\alpha_k} \neq \emptyset$。因此 $\langle v \cap (X \times [0, \alpha_k]) \rangle_{\alpha_k} = \langle v \rangle_{\alpha_k} \neq \emptyset$。于是$S_{v\cap(X\times[0,\alpha_k])} = \alpha_k$。所以 (13) 中最后一个“$\leq$”可以替换为“$=$”。)

由 (9) 和 (12)，对每个 n、$k \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} H^*(\text{end}\, u_n^{(n)}, v) &= \max\{H^*(\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)}, v),\ H^*(\text{end}_0^{\alpha_k} u_n^{(n)}, v)\} \\ &\leq \max\{H^*(\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)},\ v^k),\ \alpha_k\}. \end{aligned} \tag{14}$$

由 (10) 和 (13)，对每个 n、$k \in \mathbb{N}$，

$$\begin{aligned} H^*(v, \text{end}\, u_n^{(n)}) &= \max\{\sup_{(x,\gamma)\in v\cap(X\times(\alpha_k,1]} \overline{d}((x,\gamma), \text{end}\, u_n^{(n)}),\ H^*(v \cap (X \times [0, \alpha_k]), \text{end}\, u_n^{(n)})\} \\ &\leq \max\{H^*(v^k, \text{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)}),\ \alpha_k\}. \end{aligned} \tag{15}$$

显然，(14) 和 (15) 表明，对每个 n、$k \in \mathbb{N}$，

$$H(\text{end}\, u_n^{(n)},\ v) \leq \max\{H(\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)},\ v^k),\ \alpha_k\}. \tag{16}$$

现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty} H(\text{end}\, u_n^{(n)}, v) = 0. \tag{17}$$

为说明这一点，令 $\varepsilon > 0$。注意到 $\alpha_k \to 0$，且对每个 α_k，$k = 1, 2, \ldots\ldots$，$\lim_{n\to\infty} H(\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(n)}, v^k) = 0$。于是存在一个 α_{k_0} 和一个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\alpha_{k_0} < \varepsilon$，并且对所有 $n \geq N$，都有 $H(\text{end}_{\alpha_{k_0}} u_n^{(n)}, v^{k_0}) < \varepsilon$。因此，由 (16) 可知，对所有 $n \geq N$，都有 $H(\text{end}\ u_n^{(n)}, v) < \varepsilon$。所以 (17) 成立。

由于序列 $\{\text{end } u_n^{(n)}\}$ 属于 $F_{USC}(X)^e$，且 $\{\text{end } u_n^{(n)}\}$ 在 $(C(X\times[0,1]),H)$ 中收敛到 v，根据命题 5.7，可得 $v\in F_{USC}(X)^e$。要证明 $v\in F_{USCG}(X)^e$，我们只需证明，对每个 $\alpha\in(0,1]$，$\langle v\rangle_\alpha\in K(X)\cup\{\emptyset\}$。

设 $\alpha\in(0,1]$。于是存在一个 $k\in\mathbb{N}$，使得 $\alpha\in(\alpha_k,1]$。因此，由 (11) 和 (b-vi)，$\langle v\rangle_\alpha=\langle v^k\rangle_\alpha\in K(X)\cup\{\emptyset\}$。故 $v\in F_{USCG}(X)^e$。于是断言 (c) 得证。

由断言 (c)，我们知道 $\{u_n^{(n)}\}$ 是 $(F_{USCG}(X),H_{\text{end}})$ 中的一个收敛序列。注意，$\{u_n^{(n)}\}$ 是 $\{u_n\}$ 的一个子序列。因此证明完成。

□

注 5.13。我们对定理 5.12 及其证明作一些补充。下面继续使用证明中采用的记号。

(I) 我们也可以如下证明 $v\in F_{USCG}(X)^e$。

由命题 5.4，要证明 $v\in F_{USCG}(X)^e$，只需证明：(i) 对每个 $\alpha\in(0,1]$，$\langle v\rangle_\alpha\in K(X)\cup\{\emptyset\}$；(ii) $\langle v\rangle_0=X$；(iii) 对每个 $\alpha\in(0,1]$，$\langle v\rangle_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}\langle v\rangle_\beta$。

(i) 已得证（见定理 5.12 证明的倒数第二段）。(ii) 显然。现在证明 (iii)。首先验证以下性质 (f)：(f) 设 $\alpha,\beta\in[0,1]$ with $\beta<\alpha$。则 $\langle v\rangle_\alpha\subseteq\langle v\rangle_\beta$。

若 $\beta=0$，则 $\langle v\rangle_\beta=X$，因此 $\langle v\rangle_\alpha\subseteq\langle v\rangle_\beta$。若 $\beta>0$，则存在一个 α_k，使得 $\alpha,\beta\in(\alpha_k,1]$。由 (10) 和 (b-iv) 可得$\langle v\rangle_\alpha=\langle v^k\rangle_\alpha\subseteq\langle v^k\rangle_\beta=\langle v\rangle_\beta$。因此 (f) 成立。

设 $\alpha\in(0,1]$。则存在一个 α_k，使得 $\alpha\in(\alpha_k,1]$。因此由 (10)、(b-v) 和 (f)，$\langle v\rangle_\alpha=\langle v^k\rangle_\alpha=\bigcap_{\beta\in[\alpha_k,\alpha)}\langle v^k\rangle_\beta=\bigcap_{\beta<\alpha}\langle v\rangle_\beta$。由此证明了 (iii)。因此$v\in F_{USCG}(X)^e$。

（II）我们还可以利用断言 (c) 证明，对于每个 $k\in\mathbb{N}$, $S_{v\cap(X\times[0,\alpha_k])}=\alpha_k$。

设 $k\in\mathbb{N}$。由于 $\lim_{n\to\infty}H(\text{端 } u_n^{(n)},v)=0$，且对每个 $n\in\mathbb{N}$, $S_{\text{end}\,u_n^{(n)}}=S_{u_n^{(n)}}\geq\xi$，由命题 6.1 可得 $S_v\geq\xi>0$。于是 $v\neq\emptyset$。由于 $v\in F_{USCG}(X)^e\setminus\{\emptyset\}$ 且 $\alpha_k\in[0,\xi]\subseteq[0,S_v]$，由命题 6.4(ii-2) 可得 $\langle v\cap(X\times[0,\alpha_k])\rangle_{\alpha_k}=\langle v\rangle_{\alpha_k}\neq\emptyset$。因此 $S_{v\cap(X\times[0,\alpha_k])}=\alpha_k$。

（III）我们断言

(d) (d-i) 对每个 $k\in\mathbb{N}$, $S_v=S_{v^k}\geq\xi$。(d-ii) 对每个满足 $k>1$ 的 $k\in\mathbb{N}$，$\langle v\rangle_{S_v}=\langle v^k\rangle_{S_{v^k}}$。

(d-iii) 设 $k \in \mathbb{N}$。那么对每个 $\alpha \in [\alpha_k, S_{v^k}]$, $\langle v^k \rangle_\alpha \in K(X)$；对每个 $\alpha \in [0,1] \setminus [\alpha_k, S_{v^k}]$, $\langle v^k \rangle_\alpha = \emptyset$。

注意，对每个 $n, k \in \mathbb{N}$, $S_{\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(k)}} = S_{u_n^{(k)}} \geq \xi$。令 $k \in \mathbb{N}$。由于$H($端$_{\alpha_k} u_n^{(k)}, v^k) \to 0$，由命题 6.1，$S_{v^k} = \lim_{n\to\infty} S_{\text{end}_{\alpha_k} u_n^{(k)}} \geq \xi$。

令 $k \in \mathbb{N}$，其中 $k > 1$。由于 $\{u_n^{(k)}\}$ 是 $\{u_n^{(1)}\}$的子序列，我们有 $S_{v^k} = \lim_{n\to\infty} S_{u_n^{(k)}} = \lim_{n\to\infty} S_{u_n^{(1)}} = S_{v^1}$。注意到 $\alpha_k < \xi \leq 1$。因此由 (10), $S_v = S_{v^k}$ 且 $\langle v \rangle_{S_v} = \langle v^k \rangle_{S_{v^k}}$。所以 (d-i) 和 (d-ii) 成立。

令 $k \in \mathbb{N}$。由于 $v^k \in K(X \times [\alpha_k, 1])$，根据 (b-iv) 和命题 4.4(iii)，并由注记 4.3(i)，(d-iii) 成立。因此 (d) 得证。

定理 5.14. 设 U 是 $F_{USCG}(X)$ 的子集。当且仅当对于每个 $\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界时，U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界。

证明. 必要性。必要性部分即引理 5.10。

充分性。假设对于每个 $\sim\sim\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。那么对于每个 $\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。因此，根据定理 5.12，U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中相对紧。因此，$\sim U$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界。所以显然，U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界。

□

定理 5.15. 设 U 是 $F_{USCG}(X)$ 的子集。则以下条件等价：(i) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中紧；(ii) 对于每个 $\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧，且 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的；(iii) 对于每个 $\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中紧，且 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H)$ 中是闭的

端)。

证明。由定理 5.12 可知，(i) $\Leftrightarrow$(ii)。显然，(iii) $\Rightarrow$ (ii)。我们将通过证明 (ii) $\Rightarrow$ (iii) 来完成证明。假设 (ii) 成立。为验证 (iii)，只需证明对于每个 $\alpha \in (0,1]$, $U(\alpha)$ 在 (X,d) 中是闭集。为此，取 $\alpha \in (0,1]$，并设 $\{x_n\}$ 是 $U(\alpha)$ 中的一个序列，其中 $\{x_n\}$ 收敛到 (X,d) 中的一个元素 x。我们只需证明 $x \in U($端$)$。

取 U 中的一个序列 $\{u_n\}$，使得对于 $n = 1, 2, \ldots$，有 $x_n \in [u_n]_\alpha$；这意味着对于 $n = 1, 2, \ldots$，$(x_n, \alpha) \in$端 u_n。

由 (i) 与 (ii) 的等价性，U在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是紧的。因此，存在 $\{u_n\}$ 的一个子序列 $\{u_{n_k}\}$ 和 $u \in U$，使得 $H_{\text{end}}(u_{n_k}, u) \to$

0。因此，根据注 2.5，$\lim^{(\Gamma)}_{n\to\infty} u_{n_k} = u$。注意，$(x,\alpha) = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k},\alpha)$。因此

$$(x,\alpha) \in \liminf_{n\to\infty} \operatorname{end} u_{n_k} = \operatorname{end} u.$$

因此 $x \in [u]_\alpha$，进而 $x \in U(\alpha)$。

可以看出，[10] 中的定理 7.10 可以用与本定理类似的方法加以验证。

□

我们 [9] 给出了 $(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$ 中紧致性的如下刻画。

定理 5.16。（*[9]* 中的定理 7.1）设 U 是 $F_{USCG}(\mathbb{R}^m)$ 的子集。那么，U 是 $(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$ 中的相对紧集，当且仅当在 $\alpha \in (0,1]$ 时，$U(\alpha)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界集。

定理 5.17。（*[9]* 中的定理 7.3）设 U 是 $F_{USCG}(\mathbb{R}^m)$ 的子集。那么，U 是 $(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$ 中的全有界集，当且仅当对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界集。

定理 5.18。（*[9]*中的定理 7.2）当且仅当 U 是$(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$中的闭集，且 $U(\alpha)$在 $\mathbb{R}^m$ 中是有界集（当 $\alpha \in (0,1]$时），U 是$(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$中的紧集。

设 S 是 $\mathbb{R}^m$中的一个集合。以下性质等价。
(i) S 是 $\mathbb{R}^m$中的有界集。(ii) S 是 $\mathbb{R}^m$中
的全有界集。(iii) S 是 $\mathbb{R}^m$中的相对紧集。

利用上述众所周知的事实，可以看出定理 5.12 推出定理 5.16；定理 5.14 推出定理 5.17；定理 5.15 推出定理 5.18。

因此，本节给出的$(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$的相对紧性、全有界性和紧致性刻画，分别推出了我们在先前工作 [9] 中给出的$(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$的相对紧性、全有界性和紧致性刻画。

此外，本节给出的 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 的相对紧性、全有界性和紧致性的刻画，阐明了 $F_{USCG}(X)$ 中集合的相对紧性、全有界性和紧致性与其元素的 α-截集之并的相应性质之间的关系。

从上述讨论可以看出，本节给出的 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧性、全有界性和紧致性的刻画

显著改进了我们先前工作 [9]中给出的 $(F_{USCG}(\mathbb{R}^m),\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧性、全有界性和紧致性的刻画。

注 5.19. 以下条款 (i) 和 (ii) 在 chinaXiv:202107.00011v2 的注 5.1 中已有说明（我们于 2021-07-22 提交了该文）。(i) 可以将 $(F^1_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 视为 $(C(X\times[0,1]),\ H)$ 的子空间，方法是将每个 $u\in F^1_{USCG}(X)$ 视为其端图。(ii) 我们可以将 $(F^1_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}}$ 视为子空间，从而讨论 $(F^1_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ $(C(X\times[0,1]),\ H)$ 的性质。这些性质包括对 $(F^1_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 的全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。

本文将 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 视为 $(C(X\times[0,1]),\ H)$ 的子空间，以讨论 $(F_{USCG}(X),\ H_{\mathrm{end}})$ 的性质。

在本节末尾，我们说明定理 5.2、5.1 和 5.3 分别可视为定理 5.12、5.14 和 5.15 的特例。我们先从一些命题开始。

以下命题可由基本定义立即推出。

命题 5.20。设 A 是 X 的一个子集。

(i) 条件 (i-1) A 是 $C(X)$ 中的一个集合，和 (i-2) χ_A 是 $F_{USC}(X)$ 中的一个模糊集，二者等价。(ii) 条件 (ii-1) A 是 $K(X)$ 中的一个集合、(ii-2) χ_A 是 $F_{USCB}(X)$ 中的一个模糊集，和 (ii-3) χ_A 是 $F_{USCG}(X)$ 中的一个模糊集，三者等价。

设 $\mathcal{D}\subseteq P(X)$。我们用符号 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 表示集合 $\{C_{F(X)}\colon C\in\mathcal{D}\}$。

设 $A,B\in C(X)$。则端 $\chi_A=(A\times[0,1])\cup(X\times\{0\})$，并且

$$H^*(\operatorname{end}\chi_A,\operatorname{end}\chi_B)=\min\{H^*(A,B),\ 1\},\tag{18}$$

$$H_{\mathrm{end}}(\chi_A,\chi_B)=\min\{H(A,B),\ 1\}.\tag{19}$$

设 $(x,\alpha)\in X\times[0,1]$。则 $\overline{d}((x,\alpha),$端$\chi_B)=\overline{d}((x,\alpha)\ B\times[0,1])\wedge\overline{d}((x,\alpha)\ X\times\{0\})=d((x,\alpha)\ \underline{B}\times\{\alpha\})\wedge\overline{d}((x,\alpha)\ X\times\{0\})=d(x,B)\wedge\alpha$。显然，若 $(x,\alpha)\in X\times\{0\}$，则 $d((x,\alpha),$端$\chi_B)=0$。因此 $H^*($端$\chi_A,$端$\chi_B)=\sup\{\overline{d}((x,\alpha),$端$\chi_B)\colon(x,\alpha)\in$端$\chi_A\}=\sup\{d(x,B)\wedge\alpha\colon(x,\alpha)\in A\times[0,1]\}=\sup\{d(x,B)\wedge1\colon x\in A\}=$最小值$\{H^*(A,B)\ 1\}$. 所以 (18) 成立。

由（18），$H_{\mathrm{end}}(\chi_A,\chi_B)=H^*($端$\chi_A,$端$\chi_B)\vee H^*($端$\chi_B,$端$\chi_A)=$最小值$\{H^*(A,B)\ 1\}\vee$最小值$\{H^*(B,A)\ 1\}=$最小值$\{H^*(A,B)\vee H^*(B,A)\ 1\}=$最小值$\{H(A,B)\ 1\}$。因此（19）成立。

这里提请注意，以上包含（18）和（19）的两段内容，在将 $\overline{d}$ 替换为 d'，H^*，将 $C(X\times[0,1])$ 上的 $\cup\{\emptyset\}$ 替换为H'^*，将 $C(X\times[0,1])$ 上的 $\cup\{\emptyset\}$ 替换为 H_{end}，以及将 H'_{end} 替换为 后，仍然成立。

命题 5.21. 设 $\mathcal{D}$ 是 $K(X)$ 的子集。(i) $\mathcal{D}$ 在 $(K(X),H)$ 中全有界，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X),H_{\text{end}})$ 中全有界；(ii) $\mathcal{D}$ 在 $(K(X),H)$ 中紧，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X),H_{\text{end}})$ 中紧。

证明. 由 (19) 可立即得出 (i) 成立。

由 (19) 可知，$\mathcal{D}$ 在 $(K(X),H)$ 中紧，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(K(X)^{F(X)},H_{\text{end}})$ 中紧。显然，$\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(K(X)_{F(X)},H_{\text{end}})$ 中紧，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X),H_{\text{end}})$ 中紧。因此 (ii) 成立。

□

命题 5.22. 设 $\{A_n\}$ 是 $C(X)$ 中的一个集合序列。若 $\{\chi_{A_n}\}$ 按照 H_{end} 度量收敛到 $F_{USC}(X)$ 中的一个模糊集 u，则存在一个 $A\in C(X)$，使得 $u=\chi_A$ 且 $H(A_n,A)\to 0$，当 $n\to\infty$ 时。

证明。我们将依次证明以下性质 (i)、(ii) 和 (iii)

(i) 设 $x\in X$ and $\alpha,\beta\in(0,1]$。那么 $(x,\alpha)\in$端 u 当且仅当 $(x,\beta)\in$端 u。

(ii) $[u]_\alpha=[u]_\beta$对所有 $\alpha,\beta\in[0,1]$。

(iii) 存在一个 A 属于 $C(X)$，使得 $u=\chi_A$ and $H(A_n,A)\to 0$ 如 $n\to\infty$。

为了证明 (i)，我们只需证明：若 $(x,\alpha)\in$端 u，则 $(x,\beta)\in$端 u，因为 α and β 可以互换。

假设 $(x,\alpha)\in$端 u。由于 $H_{\text{end}}(\chi_{A_n},u)\to 0$，由定理 2.4 和注 2.5，$\lim\limits^{(\Gamma)}_{n\to\infty}\chi_{A_n}=u$。于是存在一个序列 $\{(x_n,\alpha_n)\}$，使得对于 $n=1$、2、.....，$(x_n,\alpha_n)\in$端 χ_{A_n}，且 $\lim_{n\to\infty}\overline{d}((x_n,\alpha_n),(x,\alpha))=0$。由 $\alpha>0$，可知存在一个 N，使得对所有 $n\geq N$，均有 $\alpha_n>0$。这表明对所有 $n\geq N$，$(x_n,\alpha_n)\in$端 $\chi_{A_n}=A_n\times[0,1]$。因此对所有 $n\geq N$，$(x_n,\beta)\in$端 χ_{A_n}。注意，$\lim_{n\to\infty}\overline{d}((x_n,\beta),(x,\beta))=0$，即 $\{(x_n,\beta):\ n\geq N\}$ 在 $(X\times[0,1],\overline{d})$ 中收敛到 (x,β)。因此我们有 $(x,\beta)\in\liminf_{n\to\infty}$端 $\chi_{A_n}=$端 u。所以 (i) 成立。

由 (i) 可知，对所有 α，$\beta\in(0,1]$，都有 $[u]_\alpha=[u]_\beta$。于是 $[u]_0=\overline{\cup_{\alpha>0}[u]_\alpha}=[u]_1$。因此 (ii) 成立。

取集合 $A=[u]_1$。则 $A\in C(X)\cup\{\emptyset\}$。由命题 6.2，$u\in F'^1_{USC}(X)$。由此及 (ii)，$A=[u]_{0.9}\neq\emptyset$，因此 $A\in C(X)$。由 (ii)，$u=\chi_A$。

由于根据 (19),

$$H_{\mathrm{end}}(\chi_{A_n}, u) = H_{\mathrm{end}}(\chi_{A_n}, \chi_A) = \min\{H(A_n, A),\ 1\} \to 0 \text{ as } n \to \infty,$$

我们得到 $H(A_n, A) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。因此，(iii) 成立。证明完毕。

□

命题5.23. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列。若根据 H_{end} 度量，$\{\widehat{x_n}\}$ 在 $F_{USC}(X)$ 中收敛到模糊集 u，则存在一个 $x \in X$，使得 $u = \widehat{x}$ 且 $d(x_n, x) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。

证明。注意，对每个 $z \in X$，都有 $\widehat{z} = \chi_{\{z\}}$。因此，根据命题 5.22，存在一个 $A \in C(X)$，使得 $u = \chi_A$ 且 $H(\{x_n\}, A) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。由于 $\lim^{(K)}_{n\to\infty}\{x_n\} = A$，可知 A 是一个单点集。令 $A = \{x\}$。于是 $u = \widehat{x}$ 且 $d(x_n, x) = H(\{x_n\}, \{x\}) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。证明完毕。

□

命题5.23即我们论文 arXiv:submit/4644498 中的命题8.15。可以看出，我们也可以运用命题 5.22 证明中的思路，直接证明命题5.23。

可以看出，运用 arXiv:submit/4644498 中命题8.15证明里的思路，我们可以如下证明：命题 5.23 的证明中，A 是一个单点集。

假设 A 至少包含两个不同元素。取 p、$q \in A$，其中 $p \neq q$。令 $z \in X$。由于 $d(p, z)+d(q, z) \geq d(p, q)$，可得 $\max\{d(p, z)\ d(q, z)\} \geq \frac{1}{2}d(p, q)$。因此 $H(A, \{x_n\}) = H^*(A, \{x_n\}) \geq \frac{1}{2}d(p, q)$，这与$H(A, \{x_n\}) \to 0$ 作为 $n \to \infty$相矛盾。

命题5.24. 设 $\mathcal{D}$ 是 $K(X)$的子集，且 $\mathcal{B}$ 是 $C(X)$的子集。
(i) $C(X)^{F(X)}$ 在 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是闭的。(ii) $K(X)^{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是闭的。(iii) $\mathcal{D}$ 在 $(K(X)\ H)$ 中是闭的，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是闭的。(iv) $\mathcal{D}$在 $(K(X)\ H)$ 中是相对紧的，当且仅当 $\mathcal{D}_{F(X)}$在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是相对紧的。(v) $\mathcal{B}$在 $(C(X)\ H)$ 中是闭的，当且仅当 $\mathcal{B}_{F(X)}$在 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是闭的。(vi) $\mathcal{B}$在 $(C(X)\ H)$ 中是相对紧的，当且仅当 $\mathcal{B}_{F(X)}$在 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中是相对紧的。

证明。由命题 5.22 可知，(i) 成立。

由 (i) 可知，$K(X)^{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中的闭包包含于 $F_{USCG}(X) \cap C(X)^{F(X)}$。由命题 5.20 (ii)，$F_{USCG}(X) \cap C(X)^{F(X)} = K(X)^{F(X)}$。因此，$K(X)^{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中的闭包为 $K(X)^{F(X)}$。所以 (ii) 成立。

假设满足以下条件：(a-1) $\mathcal{D}$ 在 $(K(X)\ H)$ 中是闭的，(a-2)$\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(K(X)^{F(X)}, H_{\text{end}})$ 中是闭的，且 (a-3) $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的。

由 (19)，(a-1)⇔(a-2)。由 (ii)，(a-2)⇔(a-3)。因此，(a-1)⇔(a-3)。所以 (iii) 成立。

假设满足以下条件：(b-1) $\mathcal{D}$ 在 $(K(X)\ H)$ 中相对紧，(b-2) $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(K(X)^{F(X)}\ H_{\text{end}})$ 中相对紧，并且 (b-3) $\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中相对紧。

由 (19)，(b-1)⇔(b-2)。由 (ii)，(b-2)⇔(b-3)。因此 (b-1)⇔(b-3)。所以 (iv) 成立。

利用 (19) 和 (i)，可分别以与 (iii) 和 (iv) 类似的方式证明 (v) 和 (vi)。

□

$(K(X)\ H)$ 的每个子集 $\mathcal{D}$ 都对应于 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 的一个子集 $\mathcal{D}_{F(X)}$。利用定理 5.12、5.14 和 5.15，可以得到 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中 $\mathcal{D}_{F(X)}$ 的相对紧性、全有界性和紧致性的刻画如下。

推论 5.25. 设 $\mathcal{D}$ 是 $K(X)$ 的子集。那么，$\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中相对紧，当且仅当 $\mathrm{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在 (X, d) 中相对紧。

推论 5.26. 设 $\mathcal{D}$ 是 $K(X)$ 的子集。那么，$\mathcal{D}_{F(X)}$ 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界，当且仅当 $\mathrm{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在 (X, d) 中全有界。

推论 5.27。设 $\mathcal{D}$ 是 $K(X)$的子集。则以下条件等价：(i) $\mathcal{D}_{F(X)}$在$(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中是紧的；(ii) $\mathrm{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在(X, d)中是相对紧的，且 $\mathcal{D}_{F(X)}$在$(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中是闭的；(iii) $\mathrm{D} = \bigcup\{C : C \in \mathcal{D}\}$ 在(X, d)中是紧的，且 $\mathcal{D}_{F(X)}$在$(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中是闭的。

由命题 5.21和命题5.24的(iii)和(iv)条款可知，推论5.25、5.26和5.27分别是定理 5.2、5.1 和 5.3的等价形式。因此，我们可以将定理 5.2、5.1 和 5.3分别视为定理 5.12、5.14 和 5.15的特例。

6. ($F^r_{USCG}(X)$ H_{end})中紧致性的刻画

本节中，我们首先研究 H_{end} 度量的性质。然后，基于第5节中给出的($F_{USCG}(X)$ H_{end})中相对紧性、全有界性和紧致性的刻画，我们给出($F^r_{USCG}(X)$ H_{end})中相对紧集、全有界集和紧集的刻画，其中 $r \in [0,1]$。($F^r_{USCG}(X)$ H_{end})、 $r \in [0,1]$ 是($F_{USCG}(X)$ H_{end})的子空间。 $F^r_{USCG}(X)$中的每个元素都以 r作为其最大值。($F^1_{USCG}(X)$ H_{end})是这些子空间之一。

我们断言，对于 $D, E \in C(X \times [0,1])$,

$$H(D,E) \geq |S_D - S_E|. \tag{20}$$

为此，设 $D, E \in C(X \times [0,1])$。若 $|S_D - S_E| = 0$，则(20)成立。若 $|S_D - S_E| \geq 0$。假设 $S_D > S_E$。注意，对于每个满足 $t > S_E$的$(x,t) \in D$，都有$((x,t)\ E) \geq t - S_E$。因此， $H(D,E) \geq \sup\{t - S_E :$ 存在$(x,t) \in D$ 使得 $t > S_E\} = S_D - S_E$。所以(20)成立。

命题 6.1. 设 C和 C_n, $n = 1, 2, \ldots$, 是 $C(X \times [0,1])$ 中的集合。如果$H(C_n, C) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，则 $S_{C_n} \to S_C$ 当 $n \to \infty$ 时。

证明. 所需结果可由 (20) 立即得出。 □

设 $u \in F(X)$。定义 $S_u := \sup\{u(x) : x \in X\}$。则 $S_u \in [0,1]$。我们可以看到 $S_u = S_{\mathrm{end}\, u}$。显然，对每个 $\alpha \in [0,1] \setminus [0, S_u]$, $[u]_\alpha = \emptyset$。如果$S_u > 0$，则对每个 $\alpha \in [0, S_u)$, $[u]_\alpha \neq \emptyset$。 $[u]_{S_u} = \emptyset$ 是可能的。参见 (21) 和例6.5和6.7。

设 $u \in F(X)$。容易看出

$$u = \emptyset_{F(X)} \Leftrightarrow [u]_0 = \emptyset \Leftrightarrow \text{for each } x \in X,\ u(x) = 0 \Leftrightarrow S_u = 0. \tag{21}$$

由 (20) 可知，对于每个 u, $v \in F_{USC}(X)$,

$$H_{\mathrm{end}}(u,v) \geq |S_u - S_v|. \tag{22}$$

命题 6.2. 设 u 和 u_n, $n = 1, 2, \ldots$, 是 $F_{USC}(X)$ 中的模糊集。如果$H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时成立，那么 $S_{u_n} \to S_u$ 当 $n \to \infty$ 时成立。

证明。由 (22) 可立即得到所需结果。显然，所需结论是命题 6.1 的一个推论。 □

令 $u, v \in F_{USC}(X)$。显然 H^*(端 u, 端 v) $\le H^*$(端 $u, X \times \{0\}$) $= S_u$，因此 $H_{\text{end}}(u, v) \le \max\{S_u, S_v\}$。

这里我们指出，从本节中的“我们断言”到上述段落末尾的内容（包括 (20) 和 (22)），在将 $\overline{d}$ 替换为 d'、将 H_{end}替换为 H'_{end}，并分别将 $C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}$上的 H^*和 H替换为 H'^* 和 H'、将 $C(X \times [0,1]) \cup \{\emptyset\}$上的对应项替换为上述两项后，仍然成立。

注 6.3。令 $u \in F(X)$。$\max\{u(x): \ x \in X\}$ 可能不存在。显然，条件 (a) $\max\{u(x): \ x \in X\}$ 存在，(b) 存在一个 x，使得 $u(x) = S_u$，以及 (c) $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$，彼此等价。我们作如下断言：

(i) 若 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$，则 $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$ 且 $S_u > 0$。

(ii) 若 $S_u = 0$ （即 $[u]_0 = \emptyset$），则 $u = \emptyset_{F(X)}$，因此 $\max\{u(x): \ x \in X\} = 0 = S_u$。

(iii) 设 $S_u > 0$。则 $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$ 当且仅当 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。

假设 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。则 (b) 成立，因此 (c) 为真。此外，$S_u > 0$，否则 $S_u = 0$，进而由 (21) 得到 $[u]_{S_u} = \emptyset$，这就产生了矛盾。因此 (i) 成立。(ii) 显然。我们可以看到，若 $S_u > 0$ 且$S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$，则 $[u]_{S_u} = \{x: \ u(x) \ge S_u\} \neq \emptyset$。由此以及 (i)，我们得到 (iii)。

命题 6.4. (i) 设 $u \in F_{USC}(X)$。设 $\alpha \in [0, S_u]$ 满足 $[u]_\alpha \in K(X)$。那么对每个 $\beta \in [\alpha, S_u]$, $[u]_\beta \in K(X)$。并且 $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$。

(ii) 设 $u \in F_{USCG}(X) \setminus \{\emptyset_{F(X)}\}$。那么 (ii-1) $S_u > 0$, (ii-2) 对每个$\alpha \in [0, S_u]$, $[u]_\alpha \neq \emptyset$, 以及 (ii-3) 对每个 $\alpha \in (0, S_u]$, $[u]_\alpha \in K(X)$。

(iii) 设 $u \in F_{USCG}(X)$。那么 $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$。

证明。首先，我们证明 (i)。由于端 $u \in C(X \times [0,1])$，根据命题 4.4 (ii)（在命题 4.4 (ii) 中令 $c_0 = 0$、$c_1 = 1$ 和 $c_2 = \alpha$），对每个 $\beta \in [\alpha, S_u]$, $[u]_\beta \in K(X)$。于是 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$，因此 $S_u = \max\{u(x): \ x \in X\}$。故 (i) 成立。

（i）的另一种证明如下。首先我们证明 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。如果$\alpha = S_u$，那么 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。如果 $\alpha < S_u$，那么取序列 $\{x_n\}$，使其属于 $[u]_\alpha$且满足 $u(x_n) \to S_u$。由 $[u]_\alpha$的紧致性可知，存在 $\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$，使得 $\{x_{n_k}\}$收敛到 $[u]_\alpha$中的一点 x。因此 $u(x) \ge$

$\lim_{k\to\infty} u(x_{n_k}) = S_u$。因此 $u(x) = S_u$，从而 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。所以 $S_u = \max\{u(x) : x \in X\}$。令 $\beta \in [\alpha, S_u]$。则 $[u]_\beta \supseteq [u]_{S_u} \neq \emptyset$，因而$[u]_\beta \in C(X)$。因此 $[u]_\beta \in K(X)$，因为 $[u]_\beta$ 是$[u]_\alpha$ 的非空闭子集，且 $[u]_\alpha \in K(X)$。所以（i）成立。

现在证明 (ii)。根据 (21)，(ii-1) 成立。注意，对于每个 $\alpha \in (0, 1]$，$[u]_\alpha \in K(X) \cup \{\emptyset\}$，以及对于每个 $\alpha \in [0, S_u)$，$[u]_\alpha \neq \emptyset$。因此 $[u]_{S_u/2} \in K(X)$。由 (i) 可得 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$。于是 (ii-2) 成立，进而 (ii-3) 成立。因此 (ii) 得证。

最后证明 (iii)。若 $u \in F_{USCG}(X) \backslash \{\emptyset_{F(X)}\}$，则由 (ii-2) 可得 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$，从而 $S_u = \max\{u(x) : x \in X\}$。若 $u = \emptyset_{F(X)}$，则 $S_u = 0 = \max\{u(x) : x \in X\}$。因此 (iii) 成立。

□

令 $r \in [0, 1]$。定义

$$
\begin{aligned}
F'^r_{USC}(X) &= \{u \in F_{USC}(X) : r = S_u\},\\
F^r_{USC}(X) &= \{u \in F_{USC}(X) : r = \max\{u(x) : x \in X\}\},\\
F'^r_{USCG}(X) &= \{u \in F_{USCG}(X) : r = S_u\},\\
F^r_{USCG}(X) &= \{u \in F_{USCG}(X) : r = \max\{u(x) : x \in X\}\},\\
F'^r_{USCB}(X) &= \{u \in F_{USCB}(X) : r = S_u\},\\
F^r_{USCB}(X) &= \{u \in F_{USCB}(X) : r = \max\{u(x) : x \in X\}\}.
\end{aligned}
$$

令 $r \in [0, 1]$。我们可以看到，$F^r_{USC}(X) \subseteq F'^r_{USC}(X)$。显然，$F'^0_{USC}(X) = F^0_{USC}(X) = F^0_{USCG}(X) = F^0_{USCB}(X) = \{\emptyset_{F(X)}\}$。

令 $u \in F_{USC}(X)$。假设 $r \in [0, 1]$。那么，$u \in F^r_{USC}(X)$ 当且仅当$r = \max\{u(x) : x \in X\} = S_u$。假设 $r \in (0, 1]$。那么，$u \in F^r_{USC}(X)$ 当且仅当 $S_u = r$且 $[u]_{S_u} \neq \emptyset$；$u \in F'^r_{USC}(X) \setminus F^r_{USC}(X)$ 当且仅当 $S_u = r$且 $[u]_{S_u} = \emptyset$ (另见注 6.3(iii))。

对于 $r \in (0, 1]$, $F^r_{USC}(X) \subsetneqq F'^r_{USC}(X)$ 是可能的。参见例6.5和6.7。

例6.5。设 $r \in (0, 1]$。定义 $u \in F_{USC}(\mathbb{R})$，令

$$
[u]_\alpha = \begin{cases} (-\infty, -\frac{1}{r-\alpha}], & \alpha \in [0, r),\\ \emptyset, & \alpha \in [r, 1]. \end{cases}
$$

那么 $S_u = r$和 $[u]_{S_u} = \emptyset$。这意味着 $u \in F'^r_{USC}(\mathbb{R})$，但 $u \notin F^r_{USC}(\mathbb{R})$。

命题 6.6. 设 $r \in [0,1]$。那么
(i) $F^r_{USCG}(X) = F'^r_{USCG}(X)$, $F^r_{USCB}(X) = F'^r_{USCB}(X)$, (ii) $F'^r_{USC}($
$X)$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集, (iii) $F^r_{USCG}(X)$ 是 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$
的闭子集, 并且 (iv) $F^r_{USCB}(X)$ 是 $(F_{USCB}(X)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集。

证明。我们可以看到 $F^r_{USCG}(X) \subseteq F'^r_{USCG}(X)$。令 $u \in F'^r_{USCG}(X)$。由命题 6.4 (iii), $r = S_u = \max\{u(x) : x \in X\}$。因此 $u \in F^r_{USCG}(X)$。由于 $u \in F'^r_{USCG}(X)$ 是任意的, 我们有 $F'^r_{USCG}(X) \subseteq F^r_{USCG}(X)$。于是 $F'^r_{USCG}(X) = F^r_{USCG}(X)$。因此 $F'^r_{USCB}(X)$ $= F'^r_{USCG}(X) \cap F_{USCB}(X) = F^r_{USCG}(X) \cap F_{USCB}(X) = F^r_{USCB}(X)$。所以 (i) 成立。

事实 $F'^r_{USCB}(X) = F^r_{USCB}(X)$ 也可以用与证明事实 $F'^r_{USCG}(X) = F^r_{USCG}(X)$ 类似的方法来证明

由命题 6.2, (ii) 成立。

由命题 6.2, $F'^r_{USCG}(X)$ 是 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集, 而 $F'^r_{USCB}(X)$ 是 $(F_{USCB}(X)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集。因此, 由 (i) 可知 (iii) 和 (iv) 成立。

□

$F^r_{USC}(X)$ 不一定是 $(F_{USC}(X)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集。下面给出一个这样的例子。

例 6.7. 设 $Y = \mathbb{R} \setminus \{1\}$。我们也用 Y 表示度量空间 (Y, ρ), 其中 Y 上的度量 ρ 定义为: 对每个 $x, y \in Y$, $\rho(x, y) = |x - y|$。

令 $r \in (0, 1]$。令 $n \in \mathbb{N}$。通过设定以下内容定义 $u_n \in F_{USC}(Y)$

$$[u_n]_\alpha = \begin{cases} [1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{\alpha}{r}] \setminus \{1\}, & \alpha \in [0, r], \\ \emptyset, & \alpha \in (r, 1]. \end{cases}$$

于是 $S_{u_n} = r$ 和 $[u_n]_r \neq \emptyset$。因此 $u_n \in F^r_{USC}(Y)$。

通过设定以下内容定义 $u \in F_{USC}(Y)$

$$[u]_\alpha = \begin{cases} (1, 2 - \frac{\alpha}{r}], & \alpha \in [0, r], \\ \emptyset, & \alpha \in (r, 1]. \end{cases}$$

于是 $S_u = r$ 和 $[u]_r = \emptyset$。因此 $u \in F'^r_{USC}(Y) \setminus F^r_{USC}(Y)$。

显然, 端 $u \subseteq$ 端 u_n。注意到 $H_{\text{end}}(u_n, u) = H^*($端 u_n, 端 $u) = \overline{\rho}($($1 - \frac{1}{n}, r)$, 端 $u) =$ 最小值$\{1/n, r\}$。因此 $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0$ 如 $n \to \infty$。现在我们知道, 序列 $\{u_n\}$ 在 $F^r_{USC}(Y)$ 中收敛到 $u \in F_{USC}(Y) \setminus F^r_{USC}(Y)$, 依据 H_{end} 度量。因此 $F^r_{USC}(Y)$ 不是 $(F_{USC}(Y)\ H_{\text{end}})$ 的闭子集。

引理 6.8. 设 $r \in [0,1]$，并设 U 是 $F^r_{USCG}(X)$ 的子集。那么，以下 (i-1) 与 (i-2) 等价，且 (ii-1) 与 (ii-2) 等价。(i-1) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧。(i-2) U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧。(ii-1) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中闭。(ii-2) U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中闭。

证明. 命题 6.6 的 (iii) 条指出，$F^r_{USCG}(X)$ 是 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 的闭子集。由此可得 (i-1)⇔(i-2)，且 (ii-1)⇔(ii-2)。

□

在本文中，我们假设 $(r,r] = \emptyset$ for $r \in \mathbb{R}$。

引理 6.9. 设 $r \in [0,1]$，且设 U 是 $F^r_{USCG}(X)$ 的子集。那么，以下命题中 (i-1) 等价于 (i-2)，(ii-1) 等价于 (ii-2)，且 (iii-1) 等价于 (iii-2)。

(i-1) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。(i-2) 对每个 $\alpha \in (0,r]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。(ii-1) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。(ii-2) 对每个 $\alpha \in (0,r]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。(iii-1) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中紧。(iii-2) 对每个 $\alpha \in (0,r]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中紧。

证明。注意，如果 $\alpha \in (r,1]$，则 $U(\alpha) = \emptyset$。由此可得 (i-1)⇔(i-2)、(ii-1)⇔(ii-2) 以及 (iii-1)⇔(iii-2)。

□

推论 6.10。设 $r \in [0,1]$，且设 U 是 $F^r_{USCG}(X)$ 的子集。则以下性质等价。
(i) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧。(ii) U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧。(iii) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。(iv) 对每个 $\alpha \in (0,r]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧。

证明。根据引理 6.8，(i)⇔(ii)。由此以及定理 5.12，可得 (ii)⇔(iii)。根据引理 6.9，(iii)⇔(iv)，证明完毕。

□

推论 6.11. 设 $r \in [0,1]$，且 U 是 $F^r_{USCG}(X)$ 的子集。那么以下性质等价。

(i) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界。(ii) U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中全有界。(iii) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。(iv) 对每个 $\alpha \in (0,r]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中全有界。

证明。显然，(i)⇔(ii)。由此及定理 5.14，可得 (ii)⇔(iii)。根据引理 6.9，(iii)⇔(iv)，证明完毕。

□

推论 6.12。设 $r \in [0,1]$，且令 U 为 $F^r_{USCG}(X)$ 的子集。则以下性质等价。(i) U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是紧的。(ii) U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是紧的。(iii) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧，且 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的；(iv) 对每个 $\alpha \in (0,1]$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中是紧的，且 U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的。(v) 对每个 $\alpha \in (0$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中相对紧，且 U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的。(vi) 对每个 $\alpha \in (0$，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中是紧的，且 U 在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的。

证明。显然 (i)⇔(ii)。由此及定理 5.15，可得 (ii)⇔(iii)⇔(iv)。

根据引理 6.8，U 在 $(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$ 中是闭的，当且仅当 U 是闭的在 $(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$。根据引理 6.9，$U(\alpha)$ 在 (X,d) 中是相对紧的对每个 $\alpha \in (0,1]$，当且仅当 $U(\alpha)$ 对每个都在 (X,d) 中相对紧 $\alpha \in (0,r]$。因此(iii)⇔(v)。

类似地，由引理6.8和引理6.9可得(iv)⇔(vi)。

因此（i）⇔（ii）⇔（iii）⇔（iv）⇔（v）⇔（vi）。

□

注6.13. 由推论 6.12、引理6.8和引理6.9可知，以下性质等价。(i) U 在$(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中是紧的。(ii) U在$(F^r_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中是紧的。(iii) 引理 6.9 中的 (i-1)、(i-2)、(iii-1) 和 (iii-2) 至少有一个成立，并且引理 6.8 中的 (ii-1) 和 (ii-2) 至少有一个成立。(iv) 引理 6.9 中的 (i-1) 、 (i-2) 、 (iii-1) 和 (iii-2) 均成立，并且引理 6.8 中的 (ii-1) 和 (ii-2) 均成立。

7. $\boldsymbol{H}_{\mathbf{end}}$ 度量与 Γ-收敛关系的一个应用

作为第5节中给出的相对紧性、全有界性和紧致性刻画的应用，我们讨论模糊集上的 H_{end} 度量与 Γ-收敛之间的关系。

命题 7.1. 设 S 是 $F_{USC}(X)$ 的非空子集。设 u 是 S中的一个模糊集，且 $\{u_n\}$ 是 S中的一个模糊集序列。则以下性质等价。

(i) $H_{\mathrm{end}}(u_n, u) \to 0$ 当 $n \to \infty$时。(ii) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的相对紧集。(iii) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 (S, H_{end}) 中的相对紧集。(iv) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 (S, H_{end}) 中的紧集。(v) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的紧集。

证明。为证明 (i)⇒(v)。假设 (i) 成立。由定理 2.4 和注 2.5，$\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。显然，$\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的紧集。因此 (v) 成立。

可以看出，$\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的紧集，当且仅当 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 (S, H_{end}) 中的紧集。因此 (v)⇔(iv)。

如果 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 (S, H_{end}) 中的紧集，那么 $\{u_n, n =$1, 2, $\ldots\}$ 在 (S, H_{end}) 中相对紧，因为 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 的子集。因此 (iv)⇒(iii)。

显然，如果 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 (S, H_{end}) 中的相对紧集，那么 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中的相对紧集。因此 (iii)⇒(ii)。

为证明 (ii)⇒(i)，我们采用反证法。假设 (ii) 成立。若 (i) 不成立；也就是说，$H_{\mathrm{end}}(u_n, u) \not\to 0$。那么存在一个 $\varepsilon > 0$，以及 $\{u_n\}$ 的一个子序列 $\{v_n^{(1)}\}$，它

$$H_{\mathrm{end}}(v_n^{(1)}, u) \geq \varepsilon \text{ for all } n = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

由于 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 在 $(F_{USC}(X)\ H_{\mathrm{end}})$ 中相对紧，因此存在 $\{v_n^{(1)}\}$ 的一个子序列 $\{v_n^{(2)}\}$ 以及 $v \in F_{USC}(X)$，使得 $H_{\mathrm{end}}(v_n^{(2)}, v) \to 0$。

因此，根据定理 2.4 和注 2.5，$\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} v_n^{(2)} = v$。由于 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，根据注 2.6，$u = v$。所以 $H_{\text{end}}(v_n^{(2)}, u) \to 0$，这与 (23) 矛盾。

由于我们已经证明了 (i)⇒(v)、(v)⇔(iv)、(iv)⇒(iii)、(iii)⇒(ii) 和(ii)⇒(i)，证明完毕。

我们也可以如下证明该定理。首先，通过验证 (i)⇒(iv) ⇒(iii)⇒(i)，证明 (i)⇔(iii)⇔(iv)（(i)⇒(iv) 的证明与 (i)⇒(v) 的证明类似。(iii)⇒(i) 的证明与 (ii)⇒(i) 的证明类似）。然后令 $S = F_{USC}(X)$，由 (i)⇔(iii) 可得 (i)⇔(ii)，由 (i)⇔(iv) 可得 (i)⇔(v)。因此，(i)、(ii)、(iii)、(iv) 和 (v) 彼此等价。

□

命题 7.2. 设 u 是 $F_{USCG}(X)$中的一个模糊集，并设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USCG}(X)$中的一个模糊集序列。则以下性质等价。

(i) $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0$ 当 $n \to \infty$时。(ii) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且对每个 $\alpha \in (0, 1]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha$ 在(X, d)中相对紧。(iii) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且对每个 $\alpha \in (0, 1]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha \cup [u]_\alpha$ 在(X, d)中紧。(iv) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$, $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 在$(F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}})$中闭，且对每个 $\alpha \in (0, 1]$, $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha \cup [u]_\alpha$ 在(X, d)中紧。

证明。所需结果由命题 7.1、定理 5.12 和定理 5.15 得出。证明是常规的。

在命题 7.1 中代入 $S = F_{USCG}(X)$。于是我们得到以下条件 (a)、(b) 和 (c) 等价。(a) $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0$。(b) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 ($F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}}$) 中的相对紧集。(c) $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$，且 $\{u_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{u\}$ 是 ($F_{USCG}(X)\ H_{\text{end}}$) 中的紧集

).

(a) 即 (i)。由定理 5.12，(b)⇔(ii)。由定理 5.15，(c)⇔(iv)。我们可以看到，(iv)⇒(iii) ⇒(ii)。因此由 (a)⇔(b)⇔(c)，可得 (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)。

□

命题 7.3。以下陈述等价：

(i) X 是紧的。(ii)设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USC}(X)$中的一个序列，且 $u \in F_{USC}(X)$。那么 $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0 \quad n \to \infty$，当且仅当 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。

(iii)设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USCG}(X)$中的一个序列，且 $u \in F_{USCG}(X)$。那么 $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0 \quad n \to \infty$，当且仅当$\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。

(iv)设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USCB}(X)$中的一个序列，且 $u \in F_{USCB}(X)$。那么 $H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0 \quad n \to \infty$，当且仅当$\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。

证明。假设 (i) 成立。设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USC}(X)$ 中的一个序列，且 $u \in F_{USC}(X)$。则 $u \in F_{USCB}(X)$ 且 $\{u_n\} \subseteq F_{USCB}(X)$。显然，对每个 $\alpha \in (0, 1]$，$\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha$ 在 (X, d) 中相对紧。因此，根据命题 7.2，$H_{\text{end}}(u_n, u) \to 0$ 当且仅当 $n \to \infty$ 时 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u$。所以 (ii) 成立。因此 (i)⇒(ii)。显然 (ii)⇒(iii)⇒(iv)。为完成证明，我们只需证明 (iv)⇒(i)。

假设 (i) 不成立。则存在一个序列 $\{x_n\}$，属于 X，且在 X 中没有收敛子列。对于 $n = 1, 2, \ldots\ldots$，令 $S_n = \{x_1\} \cup \{x_n\}$ 且 $u_n = \chi_{S_n}$。则 $\{u_n\} \subseteq F_{USCB}(X)$ 且 $\lim_{n\to\infty}^{(\Gamma)} u_n = u_1$。

对每个 $n \in \mathbb{N}$，由 (19) 得，$H_{\text{end}}(u_n, u_1) = \text{最小值}\{1, H(S_n, S_1)\} = \text{最小值}\{1, d(x_n, x_1)\}$。显然，$d(x_n, x_1) \not\to 0$。这意味着 $H_{\text{end}}(u_n, u_1) \not\to 0$。因此 (iv) 不成立。故 (iv)⇒(i)。证明完毕。

□

命题 7.4. 以下陈述等价：

(i) X 是紧的。(ii) 设 $\{C_n\}$ 是 $C(X) \cup \{\emptyset\}$ 中的一个序列，且 $C \in C(X) \cup \{\emptyset\}$。那么 $H(C_n, C) \to 0$，当且仅当 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} C_n = C$ 时，$n \to \infty$。(iii) 设 $\{C_n\}$ 是 $K(X)$ 中的一个序列，且 $C \in K(X)$。那么 $H(C_n, C) \to 0$，当且仅当 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} C_n = C$ 时，$n \to \infty$。

证明。注意，对于集合 $A \in X$，$A \in C(X) \cup \emptyset$ 当且仅当 $\chi_A \in F_{USC}(X)$成立。因此，由命题 7.8(i)(ii)和命题 7.3可得，(i)⇒(ii)。显然，(ii)⇒(iii)。为完成证明，我们只需证明 (iii)⇒(i)。

假设(i)不成立。那么存在一个序列 $\{x_n\}$ in X，它在 X中没有收敛子列。对于 $n = 1, 2, \ldots$，令 $S_n = \{x_1\} \cup \{x_n\}$。则 $\{S_n\} \subseteq K(X)$且 $\lim_{n\to\infty}^{(K)} S_n = S_1$。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$H(S_n, S_1) = d(x_n, x_1)$。显然，$d(x_n, x_1) \not\to 0$。这意味着 $H(S_n, S_1) \not\to 0$。因此(iii)不成立。故(iii)⇒(i)。证明完毕。

□

命题 7.5. 设 $\mathcal{D}$ 是 $C(X)$ 的非空子集。设 A 是 $\mathcal{D}$ 中的一个集合，并设 $\{A_n\}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的集合序列。则以下性质等价。

(i) 当 $n \to \infty$ 趋于 $\to 0$ 时，$H(A_n, A)$。(ii) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(C(X)\ H)$ 中的相对紧集。(iii) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(\mathcal{D}, H)$ 中的相对紧集。(iv) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{A\}$ 是 $(\mathcal{D}, H)$ 中的紧集。(v) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{A\}$ 是 $(C(X)\ H)$ 中的紧集。

证明。证明与命题 7.1 的证明类似。

□

命题 7.6。设 A 是 $K(X)$ 中的一个集合，并设 $\{A_n\}$ 是 $K(X)$ 中的一个集合序列。则以下性质等价。
(i) $H(A_n, A) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时。(ii) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ 是 (X, d) 中的相对紧集。(iii) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cup A$ 是 (X, d) 中的紧集。(iv) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \cup A$ 是 (X, d) 中的紧集，且 $\{A_n, n =$1, 2, $\ldots\} \cup \{A\}$ 是 $(K(X)\ H)$ 中的闭集。

所需结果由命题 7.5 以及定理 5.2 和定理 5.3 得出。证明过程是常规的，与命题 7.2 的证明类似。

将 $\mathcal{D} = K(X)$ 代入命题 7.5。于是得到以下条件 (a)、(b) 和 (c) 等价。

(a) $H(A_n, A) \to 0$ 如 $n \to \infty$。(b) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(K(X)\ H)$ 中的相对紧集。(c) $\lim_{n\to\infty}^{(K)} A_n = A$，且 $\{A_n, n = 1, 2, \ldots\} \cup \{A\}$ 是 $(K(X)\ H)$ 中的紧集。

(a) 即 (i)。根据定理 5.2，(b)⇔(ii)。根据定理 5.3，(c)⇔(iv)。我们可以看到，(iv)⇒(iii) ⇒(ii)。因此，由 (a)⇔(b)⇔(c)，可得 (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)。

□

注记 7.7. 设 $u \in F_{USCG}(X)$ 和 $\{u_n\}$ 是 $F_{USC}(X)$ 中的模糊集序列。设 $\alpha \in (0, 1]$。由于 $[u]_\alpha$ 在 X 中是紧的，我们有条件 (a) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [u_n]_\alpha$ 在 (X, d) 中相对紧，与条件 (b) $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [u_n]_\alpha \cup [u]_\alpha$ 在 (X, d) 中相对紧等价。

因此，在命题 7.2 的第 (ii) 条中，“$\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha$ 在 (X,d) 中相对紧”可以替换为“$\bigcup_{n=1}^{+\infty}[u_n]_\alpha \cup [u]_\alpha$ 在 (X,d) 中相对紧”。

在命题 7.1、7.5 和 7.6 中，也可以进行类似的替换。

命题 7.1、7.2、7.5 和 7.6 可以用不同的方法证明。下面给出其他一些证明。

命题 7.5 蕴含命题 7.1。

设 S 是 $F_{USC}(X)$ 的非空子集。设 u 是 S 中的一个模糊集，$\{u_n\}$ 是 S 中的一个模糊集序列。

令 $A=$端 u，并对 $n=1$、2、.....，在命题 7.5 中令 $A_n=$端 u_n。

在命题 7.5 中令 $\mathcal{D}=\{$端 $u:\ u\in F_{USC}(X)\}$。于是，由命题 7.5 中的 (i)⇔(iii)，可得命题 7.1 中的 (i)⇔(ii)。

在命题 7.5 中，令 $\mathcal{D}=\{$端$u:\ u\in S\}$。由命题 7.5 中的 (i)⇔(iii)，可得命题 7.1 中的 (i)⇔(iii)。

类似地，我们可以证明命题 7.1 中的 (i)⇔(iv) 和 (i)⇔(v)。因此，命题 7.5 蕴含命题 7.1。

命题 7.5、定理 5.12 和定理 5.15 蕴含命题 7.2。

设 u 是 $F_{USCG}(X)$ 中的一个模糊集，并设 $\{u_n\}$ 是 $F_{USCG}(X)$ 中的一个模糊集序列。

令 $A=$端 u，并对 $n=1$、2、.....，令 $A_n=$端 u_n，如命题 7.5 中所述。

在命题 7.5 中，令 $\mathcal{D}=\{$端$u:\ u\in F_{USCG}(X)\}$。由命题 7.5 中的 (i)⇔(iii) 以及定理 5.12，可得命题 7.2 中的 (i)⇔(ii)。

由命题 7.5 中的 (i)⇔(iv) 和定理 5.15，同样可得命题 7.2 中的 (i)⇔(iv)。由于命题 7.2 中的 (iv)⇒(iii) ⇒(ii)，因此可得命题 7.2 中的 (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)。所以，命题 7.5、定理 5.12 和定理 5.15 蕴含命题 7.2。

命题 7.1 蕴含命题 7.5 和命题 7.6。

命题 7.2 蕴含命题 7.6。

命题 7.8. (i) 设 $A\in C(X)$ 和 $\{A_n\}$ 是 $C(X)$ 中的一个序列。那么 $H_{\mathrm{end}}(\chi_{A_n},\chi_A)$ 当且仅当 $n\to\infty$ 时，$\to 0$；当且仅当 $n\to\infty$ 时，$\to 0\,(A_n,A)$。(ii) 设 $A\in P(X)$ 和 $\{A_n\}$ 是 $P(X)$ 中的一个序列。那么 $\lim^{(\Gamma)}_{n\to\infty}\chi_{A_n}=\chi_A$ 当且仅当 $\lim^{(K)}_{n\to\infty}A_n=A$。(iii) 设 $\mathcal{D}$ 是 $C(X)$ 的子集，且 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{D}$ 的子集。那么 $\mathcal{B}$ 在 $(\mathcal{D},H)$ 中全有界（分别为相对紧、紧、闭）当且仅当 $\mathcal{B}_{F(X)}$ 在 $(\mathcal{D}_{F(X)},H_{\mathrm{end}})$ 中全有界（分别为相对紧、紧、闭）。

证明。（i）和（iii）由（19）立即得出。（ii）由库拉托夫斯基收敛和 Γ-收敛的定义得出。

□

设 $\mathcal{D}$ 是 $C(X)$ 的非空子集。设 A 是 $C(X)$ 中的一个集合，且令 $\{A_n\}$ 为 $\mathcal{D}$ 中的一个集合序列。

令 $S = C(X)^{F(X)}$ 属于命题 7.1。由命题 7.1 中的（i）⇔（iii），可得：

（c-1） $H_{\text{end}}(\chi_{A_n}, \chi_A) \to 0$ 当且仅当 $\lim^{(\Gamma)}_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$ 时 $n \to \infty$，并且 $\{\chi_{A_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(C(X)^{F(X)}, H_{\text{end}})$ 中的相对紧集。

根据命题 7.8，（c-1）意味着命题 7.5 中的（i）⇔（ii）。

令 $S = \mathcal{D}_{F(X)}$ 属于命题 7.1。由命题 7.1 中的（i）⇔（iii），可得：

(c-2) $H_{\text{end}}(\chi_{A_n}, \chi_A) \to 0$ 当且仅当 $\lim^{(\Gamma)}_{n\to\infty} \chi_{A_n} = \chi_A$，并且 $\{\chi_{A_n}, n = 1, 2, \ldots\}$ 是 $(\mathcal{D}_{F(X)}, H_{\text{end}})$ 中的一个相对紧集。

根据命题 7.8，(c-2) 意味着命题 7.5 中的 (i)⇔(iii)。

类似地，利用命题 7.8，我们可以证明，命题 7.1 中的 (i)⇔(iv) 蕴含命题 7.5 中的 (i)⇔(iv) 和 (i)⇔(v)。

根据命题 7.8 的条款 (i) 和 (ii) 以及命题5.24 的条款 (iii)，我们可以看出命题 7.2 蕴含命题 7.6。

利用模糊集上 H_{end} 和 Γ-收敛的水平集刻画，很容易证明命题 7.6 也蕴含命题 7.2。

8. 结论

本文给出了 $(F_{USCG}(X), H_{\text{end}})$ 中全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。其中，X 是一般度量空间。基于此，我们还给出了 $(F^r_{USCG}(X), H_{\text{end}})$、$r \in [0, 1]$ 中全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。$(F^r_{USCG}(X), H_{\text{end}})$、$r \in [0, 1]$ 是 $(F_{USCG}(X), H_{\text{end}})$ 的度量子空间。

本文的结论显著改进了我们在先前论文 [9] 中给出的相应结论。在该文中，我们给出了 $(F_{USCG}(\mathbb{R}^m), H_{\text{end}})$ 中全有界性、相对紧性和紧致性的刻画。$\mathbb{R}^m$ 是一种特殊类型的度量空间。

作为本文所给出的相对紧性、全有界性和紧致性刻画的应用，我们讨论了 H_{end} 度量与 Γ-收敛之间的关系。

本文的研究结果有望应用于涉及端图度量和 Γ-收敛的模糊集研究。

致谢

作者谨向两位匿名审稿人致谢，感谢他们提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议改进了本文的表达。

符合伦理标准

资助：本研究由中国福建省自然科学基金资助（项目编号：2020J01706）。

利益冲突：作者声明，她不存在任何利益冲突。

伦理审批：本文不包含作者开展的涉及人类参与者或动物的研究。

[1] G. Beer，《闭集与闭凸集上的拓扑》，Kluwer，1993[2] J.S. C´anovas，J. Kupka，关于动力系统模糊扩张的模糊熵与拓扑熵，Fuzzy Sets Syst. 309 (15) (2017) 115-130。[3] P. Diamond，P. Kloeden，《模糊集的度量空间》，世界科学出版社，新加坡，1994。[4] D. Dubois，H. Prade（编），《模糊集基础》，《模糊集手册》第1卷，Kluwer，波士顿，马萨诸塞州，2000。[5] Z. Gong，Y. Hao，基于 Henstock 积分的模糊拉普拉斯变换及其在不连续模糊系统中的应用，Fuzzy Sets Syst. 358 (2019) 1-28。[6] G. H. Greco，模糊集的 Sendograph 度量与相对紧集，Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 286-291。[7] G.H. Greco，M.P. Moschen，模糊集的上确界度量与相对紧集，《非线性分析》64 (2006) 1325-1335[8] J. Guti´errez Garc´ıa，M.A. de Prada Vicente，由模糊（拟）度量空间诱导的 Hutton $[0,1]$-拟一致性，Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 755-766。

[9] H. Huang，模糊集上的端图度量与 Γ-收敛的刻画，Fuzzy Sets Syst. 350 (2018) 55-84。[10] H. Huang，若干模糊集度量空间的性质，Fuzzy Sets Syst. 475 (2024) https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108745。[11] H. Huang，C. Wu，带有 L_p 度量的模糊集空间中紧集的刻画，Fuzzy Sets Syst. 330 (2018) 16-40。[12] H. Huang，模糊集上 Skorokhod 度量的一些性质，Fuzzy Sets Syst. 437 (2022) 35-52。[13] J. L. Kelley，《一般拓扑学》，施普林格，纽约，美国，1975年[14] E. Klein，A.C. Thomposon，《对应理论》，威立，纽约，1984年。[15] P.E. Kloeden，紧支撑端图与模糊集，Fuzzy Sets Syst. 4 (2) (1980) 193-201。[16] P.E. Kloeden，T. Lorenz，具有演化隶属度的模糊微分方程的皮亚诺定理，Fuzzy Sets Syst. 280 (2015) 1-26。[17] J. Kupka，关于扎德扩张原理的近似，Fuzzy Sets Syst. 283 (2016) 26-39。[18] H. Rom´an-Flores， $E(X)$的紧致性，Appl. Math. Lett. 11 (1998) 13-17。[19] M. Rojas-Medar，H. Rom´an-Flores，关于模糊集收敛的等价性，Fuzzy Sets Syst. 80 (1996) 217-224。[20] D. Shin，S.Y. Na，J.Y. Kim，S.J. Baek，用于鱼形机器人障碍物模式识别与避碰的模糊神经网络。Soft Comput. (2008) 12(7):715-720。[21]W. Trutschnig，通过 L_p-收敛与逐层收敛刻画模糊集的集合图收敛，Fuzzy Sets Syst. 161 (2010) 1064-1077。

[22] L. Wang, J. Mendel，模糊基函数、一致逼近与正交最小二乘学习，IEEE 神经网络汇刊 3 (5) (1992) 807-814。[23] G. Wang, P. Shi, B. Wang, J. Zhang，模糊 n 椭球数与不确定多通道数字信息的表示，IEEE 模糊系统汇刊 22(5) (2014) 1113-1126。[24] C. Wu, M. Ma，《模糊分析学基础》（中文），国防工业出版社，北京，1991