arXiv:2301.07537v1 [cs.DS] 18 Jan 2023

# 最大权重 $k$-集合打包的改进近似算法

Theophile Thiery* Justin Ward*

2023年1月19日

摘要

我们研究加权 $k$-集合打包问题：给定一个加权集合族，其中每个集合至多包含 $k$ 个元素，要求返回一组两两不相交的集合，使其总权重最大。对于 $k = 3$，该问题是经典 3-维匹配问题的推广；后者被列为 Karp 最初的 21 个 NP 完全问题之一。我们给出一种算法，其在加权 3-集合打包问题上的近似因子为 1.786，优于 Neuwohner 最近取得的最佳结果 $2 - \frac{1}{63\,700,\,,\,992}$。

我们的算法基于 Berman 的局部搜索过程，该过程试图改进权重平方之和，而不是问题的目标函数。当使用大小至多为 $k$ 的交换时，该算法可达到 $\frac{k+1}{2}$ 的近似因子。使用大小为 $k^2(k-1) + k$ 的交换时，我们给出了一种相对简单的分析，从而在 $k = 3$ 时获得 1.811 的近似因子。随后我们证明，所开发的工具可以推广到大小为 $2k^2(k-1) + k$ 的更大规模交换，从而得到 1.786 的近似因子。尽管我们主要关注 $k = 3$ 的情形，但事实上，对于所有 $k > 3$，我们的方法都能对因子 $\frac{k+1}{2}$ 带来略强的改进。与以往工作一样，我们的保证也适用于更一般的问题：在 $(k + 1)$-无爪图中寻找最大权独立集。

## 1 引言

在加权 $k$-集合打包问题中，给定一个由 $n$ 个集合组成的加权集合族，每个集合都包含来自某个全集的至多 $k$ 个元素。目标是返回一族互不相交且总权重最大的集合。加权 $k$-集合打包问题概括了许多实际和理论问题。当 $k = 2$时，它涵盖最大权匹配问题。对于更大的 $k$，它概括了 $k$维匹配问题，该问题涉及在一个 $k$部 $k$均匀超图中寻找最大匹配。虽然最大权匹配问题存在多项式时间算法，可以精确求解该问题[9], ，但即使在无权情形下，三维匹配问题也是 NP 困难的 [14]。对于较小的 $k$，无权$k$维匹配事实上甚至无法在优于因子 $98/97$、 $54/53$、$30/29$ 和 $23/22$ 的近似范围内求解，分别适用于 $k = 3$、4、5 和 6 [3, 12], ；对于一般的 $k$ [12]，则无法在优于 $\Omega(k/\ln(k))$ 的近似范围内求解。[1]

*数学科学学院，伦敦玛丽女王大学，伦敦，英国（t.f.thiery@qmul.ac.uk、justin.ward@qmul.ac.uk）。本研究得到工程与自然科学研究委员会 [EP/T006781/1]的支持。[1]为与以往研究保持一致，我们的近似结果均使用近似因子 $w(O)/w(A) \geq 1$来表述，该因子衡量最优解 $O$ 相较于算法$A$ 生成的解优越多少。

相比之下，无权问题的最佳近似算法可达到 $\frac{k+1+\varepsilon}{3}$ -近似，由 Cygan 提出[7] ，随后 F¨urer 和 Yu [10] 改进了对 $\varepsilon$ 的运行时间依赖关系。值得注意的是，目前已知的无权情形下所有最佳算法都采用局部搜索过程，通过反复改进解 $S$：每次加入若干个当前不属于 $S$ 的集合，并从 $S$中移除与之相交的集合。如果每次交换都只尝试加入一个集合，那么得到的就是 $k$-近似算法。Hurkens 和 Schrijver [13] 证明，对于任意 $\varepsilon > 0$，执行交换规模为 $O(\varepsilon^{-1})$ 的算法可达到 $\frac{k+\varepsilon}{2}$ - 近似；随后，通过进一步将交换规模增至 Ω(log($n$))，

出人意料的是，在加权 $k$-集合打包问题中，使用大小为 $O(\varepsilon^{-1})$ 的交换只能得到 $k-1+\varepsilon$ [1]的近似因子。然而，Berman [2] 证明，将每个集合的权重平方，并使用大小为 $k$ 的交换来寻找所得实例的局部最优解，可以相对于原权重函数得到 $\frac{k+1+\varepsilon}{2}$ -近似（这里的 $\varepsilon$是由于进一步的缩放过程，以确保算法在多项式时间内终止）。

事实上，Berman 算法适用于更一般的问题：在一个 $(k+1)$-无爪图中寻找顶点的最大权独立集。简言之， $d$-爪是 $G$ 的一个诱导子图，它由一个顶点（称为爪的中心）和一组与该顶点相邻且两两不相邻的 $d$ 个顶点（称为爪齿）组成。如果一个图不包含任何 $(k+1)$-爪，则称其为 $(k+1)$- 无爪图。通过为 $k$- 集合打包实例中的每个集合创建一个顶点，并在相交的集合之间添加一条边，我们可以将（加权）集合打包问题转换为（加权）独立集问题的一个实例；如果每个集合的大小至多为 $k$，则所得图中的爪的最大大小也为 $k$。我们将以这种方式 $G$ 得到的图称为底层集合打包实例的冲突图。为简单起见，下面我们将考虑在某个顶点带权的 $(k+1)$-无爪图中寻找最大权独立集这一一般问题，并采用相关术语。

在这一术语体系中，Berman 的局部搜索算法会对图中所有顶点的权重进行平方加权，然后考虑一组受限的“爪交换”。对于某个当前解 $A$ 中的每个顶点 $a$ ，该算法会寻找一个以 $a$ 为中心的 $G$ 爪，随后将该爪的爪齿加入 $A$ ，并从 $A$ 中丢弃任何冲突顶点，只要这样做能够增加总权重（现已平方加权）的值 $A$。算法分析中的关键难点，在于将相对于平方权重函数 $w^2$ 的局部最优性转化为关于原始权重函数 $w$ 的保证。为此，Berman 采用了两轮收费论证：最优解中的顶点将其权重分配给由该算法产生的局部最优解 $A$ 中的邻接顶点。

20 多年来，Berman 算法一直是加权 $k$-集合打包和 $(k+1)$-无爪图中最大权独立集问题的最先进近似结果。在一项近期突破性成果中，Neuwohner [15] 突破了 $\frac{k+1}{2}$ 这一界限，并通过对权重进行平方加权，再考虑比 Berman 算法中规模更大的交换，获得了略有改进的近似比 $\frac{k+1+\varepsilon}{2} - \frac{1}{63\,700,\,992}$。其分析背后的关键观察是，只有当 $A$ 中顶点的权重与 $O$ 中顶点的权重几乎相同时，Berman 所采用的收费论证才是紧的。Neuwohner 的分析利用这一观察，构造了更复杂的收费方案，其中考虑了若干不同类别的顶点。她接着论证，对于任何在大小为 $O(k^2)$ 的交换下局部最优的解 $A$ ，必定存在一组顶点，其权重占 $A$ 权重的显著比例，而在新的收费方案下，这组顶点所获得的收费不到其权重的 $\frac{k+1}{2}$ 倍。在一篇后续论文中，Neuwohner [16] 证明，对于任何通过改进权重的某种幂次来运行的局部搜索算法

$w^{\alpha}$，即使使用大小为 $O(\log n)$ 的交换，也无法改进因子 $\frac{k}{2}$。然而，Neuwohner 通过使用大小为 $O(\log n)$ 的交换，渐近地达到了因子 $\frac{k}{2}$。她证明，对于任意 $\delta > 0$，存在一个 $k_\delta$，使得对于任意 $k \geq k_\delta$，采用平方加权并考虑大小为 $O(\log n)$ 的交换时，近似比为 $\frac{k+\delta}{2}$。阈值等于 $k_\delta = 2^{2^{2^{2^{00}}}}$。由于收敛到 $\frac{k}{2}$ 的速度相对较慢，对于 $k = 3$（此时近似比的改进空间最大），最佳因子仍为 $\frac{k+1+\varepsilon}{2} - \frac{1}{63\,700}$，992。在后续研究中，Neuwohner [17] 最近证明，实际上可以通过在给定实例的适当子实例上运行无权重局部搜索算法，突破 $\frac{k}{2}$ 这一界限。她采用的技术要求 $k \geq 4$。当 $k = 4$ 时，她将因子 $\frac{4+1}{2}$ 改进了 0.002。与此前的结果一样，相较于因子 $\frac{k+1}{2}$ 的改进会随着 $k$ 而增大；当 $k = 13$ 时，改进达到 0.0115；而对于所有 $k \geq 14$，则为 $0.4986(k+1) + 0.0208$。

## 我们的结果

鉴于近期在大 $k$ 情况下加权 $k$-集合打包渐近可近似性方面取得的进展，自然会想知道，能否在小 $k$ 的情况下显著改进近似效果。本文对此给出了肯定的回答：我们采用 Berman 的平方权重局部搜索的一种变体，并进行更大规模的交换，为加权 $k$-集合打包问题给出了两个新的近似保证。我们首先给出一种相对简单的分析，证明只需进行总计涉及 $k^2(k-1) + k$ 个集合的交换，即可在加权 3-集合打包问题上达到 1.811 的近似因子，较因子 $\frac{k+1}{2} = 2$ 改进了 0.189。随后我们证明，通过改进基本分析，可以使用大小为 $2k^2(k-1) + k$ 的交换达到 1.786 的近似比。我们的结果还意味着对 $k > 3$ 有更好的改进；并且我们证明，随着 $k$ 增大，我们算法的近似保证渐近改进为 $(k+\frac{1}{2})/2$ 和 $(k+\frac{1}{3})/2$。我们在以下定理中总结这些结果。

定理 1.1（概要）。执行大小为 $2k^2(k-1) + k$ 交换的平方权重局部搜索算法，是一个用于加权 $k$-集合打包问题的多项式时间 $\frac{k+1-\tau_k}{2}$-近似算法，其中 $\tau_k \geq \tau_3 = 0.214$，且 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 2/3$。使用大小为 $k^2(k-1) + k$ 交换的同一算法是一个 $\frac{k+1-\tau'_k}{2}$-近似算法，其中 $\tau'_k \geq \tau'_3 = 0.189$，且 $\lim_{k\to\infty} \tau'_k = 1/2$。

我们近似保证的更多具体数值，以及我们相较于 $\tau_k/2$，$\tau'_k/2$ 所取得的改进 $\frac{k+1}{2}$，列于表 1。$\tau_k$ 的精确值取决于对若干量中的最坏情况进行考量与权衡。为简要概述，我们在此仅列出由我们的方法得出的最终结果。完成主要分析后，我们将给出并证明定理 1.1 的更详细版本，解释表 1 中的数值是如何得出的。该定理见定理 5.4。

尽管我们的结果同样建立在对 Berman 提出的平方权重局部搜索算法进行更大规模的交换之上，[2], 但我们采用了不同于 Neuwohner 的方法。[16]我们首先（在第3节）给出一个简洁的证明，证明 Berman 的保证，且无需显式的收费论证。这使我们能够明确指出，利用局部最优性将 $w^2$ 与 $w$ 联系起来时所用技术不等式中的松弛量。对于局部最优解 $A$中的每个顶点 $a$，我们考虑两种不同类型的松弛量。第一种记为$\Delta_a$，用于刻画以 $a$ 为中心的爪交换的紧密程度（即，在执行以 $a$为中心的爪交换后，$A$ 的平方权重总和会减少多少）。第二项记为 $\Psi_a$，用于衡量其余论证中的松弛量；这部分松弛源于爪齿的权重及爪齿邻居的权重与 $a$的权重之间存在偏差。更准确地说，$\Psi_a$

| 交换规模： | $k^2(k-1)+k$ | | $2k^2(k-1)+k$ | |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | $\tau'_k/2$ | APX | $\tau_k/2$ | APX |
| 3 | 0.189 | 1.811 | 0.214 | 1.786 |
| 4 | 0.210 | 2.290 | 0.251 | 2.249 |
| 5 | 0.219 | 2.781 | 0.269 | 2.731 |
| 6 | 0.225 | 3.275 | 0.281 | 3.219 |
| 7 | 0.229 | 3.771 | 0.289 | 3.711 |
| 8 | 0.232 | 4.268 | 0.294 | 4.206 |
| 9 | 0.234 | 4.766 | 0.299 | 4.701 |
| 10 | 0.236 | 5.264 | 0.302 | 5.198 |

表1：对于不同的 $k$，以及我们在 $\tau'_k/2$、$\tau_k/2$ 方面的改进，其近似比为 $\frac{k+1}{2}$。

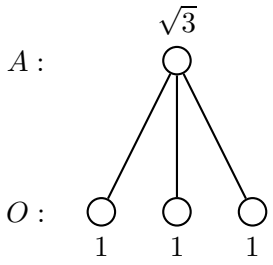



图1：权重平方局部搜索的一个孤立反例。

刻画应用于顶点权重的两个技术不等式中的松弛量：$xy \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ 和 $\sum_i z_i^2 \le (\max_i z_i)\sum_i z_i$，其中所有 $z_i > 0$。这两个不等式分别仅在 $x = y$ 且所有 $z_i$ 相等时取等号。

接下来，我们的分析通过考察规模为 $O(k^3)$ 的交换，并在两种情况下证明 $\Delta_a$ 和 $\Psi_a$ 的和远离 0。在第一种情况下，假设顶点 $a \in A$ 有一个权重相近的顶点 $b$，而该顶点会被以 $a$ 为中心的爪交换移除。接着我们证明，以 $a$ 和 $b$ 为中心的交换不可能同时是紧的；否则，将 $a$ 和 $b$ 的爪齿集合合并的交换就会带来改进。因此，对于任何拥有此类“接近”顶点 $b$ 的顶点 $a$，$\Delta_a + \Delta_b$ 必须远离 0，其确切数值取决于 $a$ 的权重与 $b$ 的权重之间的相似程度。为了在分析中利用这一点，我们构造了一个包含这类“接近”顶点的辅助图，并用它将单个爪交换组合成涉及 $O(k^2)$ 个爪的更大规模交换。随后我们证明，在所有这类大型交换中获得的总松弛量，是参与交换的 $A$ 的所有顶点权重之和的一个显著比例。对于其余没有“接近”顶点 $b$ 的顶点 $a$，我们证明 $\Psi_a$ 很大。为了进一步理解这种情况，可以考虑图1所示的例子；这是将 Berman 算法应用于一个孤立的单爪时的最坏情形。此时局部性差距仅为 $\sqrt{3} < \frac{3+1}{2}$，我们证明这可归因于松弛量 $\Psi_a$。我们还证明，即使一个爪并非完全孤立，只要其邻域中的所有其他顶点的权重都显著小于其中心顶点的权重，仍然存在相对较大的松弛量 $\Psi_a$ 可供利用。

通过平衡这两种情况，我们能够在 所有顶点上改进 $A$的 Berman的收费方案，而不只是针对权重为常数的子集。这足以为加权 3-集合打包实现 1.811 的近似比，我们将在第 4节介绍这一结果。在第 5节中，我们将考虑的交换规模大致扩大一倍，从而能够单独处理分析中的一个关键瓶颈情况，并进一步改进近似比至 1。786。

请注意，当 $k = 3$时，图1 中的小型示例表明，我们无法达到小于 $\sqrt{3} \approx 1.732 > 3/2$的近似因子。直观地说，随着 $k$ 增大，改进次数也会增加，因为 $\frac{k+1}{2}$ 与孤立单爪的 $\sqrt{k}$ 界之间的差距（如图$k = 3$ 1所示）会变得更大。

更多相关工作

$k$集合打包问题和（$k+1$）-无爪图中的最大独立集问题，几乎所有算法结果都基于局部搜索和贪心算法的变体。在无权情形下，尝试将至多2个顶点交换入当前解的简单局部搜索可得到 $\frac{k+1+\varepsilon}{2}$ 近似。Hurkens和Schrijver [13] 表明，通过考虑加入 $O$（$\varepsilon^{-1}$）个顶点的交换，可以得到 $\frac{k+\varepsilon}{2}$ 近似。他们还表明，其分析是紧的，即任何交换常数个顶点的局部搜索算法，其近似因子至少为 $\frac{k+\varepsilon}{2}$ [13]。相比之下，Halld´orson [11] 证明，执行非恒定规模交换Ω(log $n$)的纯局部搜索算法可实现$\frac{k+2+\varepsilon}{3}$ 近似。Cygan等人[8] 进一步改进了这一分析，得到了等于 $\frac{k+1+\varepsilon}{3}$ 的比率。由于交换规模较大，前两个结果产生的是准多项式时间算法。Sviridenko和Ward [19] 以及 Cygan [7] 利用固定参数可处理性中的技术，设计了多项式时间局部搜索算法，其近似因子分别为 $\frac{k+2+\varepsilon}{3}$ 和 $\frac{k+1+\varepsilon}{3}$ 。F¨urer和Yu [10] 给出了一个 $\frac{k+1+\varepsilon}{3}$ 近似算法，其对 $\varepsilon$ 的依赖性有所改进；他们还构造了一个实例，对于任何使用规模为 $O$（$n^{1/5}$）交换的算法，其局部性差距为$\frac{k+1}{3}$ 。对于所有考虑规模为 $O$（log $n$）交换的算法，都依赖于 $k$集合打包问题所特有的底层结构，以便在多项式时间内找到交换，因此无法推广到（$k+1$）-无爪图中的最大独立集问题。

在加权情形下，Arkin 和 Hassin 证明，执行大小为 $O(\varepsilon^{-1})$ 交换的标准加权局部搜索算法只能达到 $k-1+\varepsilon$ 近似 [1]。Chandra 和 Halld´orson [6] 证明，可以通过先采用贪心算法，再采用局部改进策略来规避相关的局部性差距；该策略在每个阶段总是选择最佳改进，因而可达到 $^{2}{}_{(k+1)_3}{}^{+\varepsilon}$ -近似。正如我们已经指出的，Berman [2]通过考虑由权重平方引导、且交换大小为 $k$ 的局部搜索，获得了 $\frac{k+1}{2}$ 近似。对于更小的、大小为 2 的交换，Berman 和 Krysta [4] 证明，对于经过适当选择的 $1<\alpha<2$ ，由 $w^{\alpha}$ 引导的局部搜索具有近似因子 $0.667k$、$0.651k$ 和 $0.646k$ ，分别对应于 $k=3$、 $k=4$ 和 $k>4$。

$k$-集合打包问题也通过线性规划层级进行了研究。在这一背景下，Chan 和 Lau [5] 给出了一种线性规划舍入算法，其对 $kk-1+\frac{1}{k}$ -集合打包问题的近似比为 $k-1+\frac{1}{k}$，对 $k$-维匹配问题的近似比为 $k-1$ 。他们还证明，即使通过 Sherali-Adams 提升过程的线性轮次强化线性规划，其整数间隙仍至少为 $k-2$。相比之下，他们证明，加入多项式数量的额外约束后，整数间隙可以降至 $\frac{k+1}{2}$ 。Singh 和 Talwar [18]证明，对 $k$-集合打包问题的自然线性规划应用 Chv´atal-Gomory 割的 $O(k^2)$ 轮，可以达到相同的 $\frac{k+1}{2}$ 整数间隙。

## 2 预备知识

本节将固定本文其余部分使用的记号。我们考虑如下的一般情形：给定一个顶点带权的 $(k+1)$-无爪图 $G=(V,E)$，并寻求一个最大权重独立集。对于每个 $v\in V$，我们用 $w_v\in\mathbb{R}_+$ 表示给定的 $v$ 权重；对于任意 $A\subseteq V$，我们用 $w(A)$ 表示$A$中所有顶点的总权重 $\sum_{v\in A}w_v$ 。

对于 $V$ 中的任意两个顶点子集 $A$、$B$ ，我们将 $A$ 在 $B$ 中的邻域定义为 $N(A,B)$，记作 $N(A,B)$ $\{b\in B:(a,b)\in E(G)$，其中存在某个 $a\}\cup(A\cap B)$。为简化记号，我们

算法 2.1：使用 $s$-交换的平方权重局部搜索

$S \leftarrow$ 将标准贪心算法应用于 $G$ 和 $w$所得的输出；
重复
  $S' \leftarrow S$；
  对每个至多包含 $sk$ 个顶点的 $C \subseteq V \backslash S$ 执行
    如果 $C$是独立集且 $w^2(C) > w^2(N(C,S))$，则
      $S' \leftarrow S \cup C \backslash N(C,S)$；
      break；
直到 $S = S'$；
返回 $S$

将 $o \in V$ 为顶点时的 $N(\{o\}, A)$ 简写为 $N(o, A)$，并进一步使用 $A-a$ 表示 $A\backslash\{a\}$。由于 $G$ 不含 $(k+1)$-爪，对于每个 $v \in V$，$N(v,V)$ 至多包含 $k$ 个两两不相邻顶点。特别地，如果 $A$ 是顶点的独立集，则对于所有 $v \in V$，$|N(v,A)| \leq k$，并且对于所有 $v \in A$，$N(v,A) = \{v\}$。

我们分析的一般局部搜索过程如算法 2.1 所示。该过程维护一个当前解 $S$，我们使用标准贪心算法对其进行初始化。我们令 $s \geq 1$ 为一个参数，用于控制算法执行的交换规模。算法会反复寻找一个至多包含 $sk$ 个顶点的独立集 $C \subseteq V\backslash S$，使其权重平方总和大于 $S$ 中冲突顶点 $N(C,S)$ 的权重平方总和。每当找到这样一个集合时，算法就将 $C$ 加入 $S$，并从 $S$ 中移除 $N(C,S)$。形式上，对于任意 $A \subseteq V$，我们令 $w^2(A) \sum_{v\in A} w_v^2$。因此，算法 2.1 仅当 $w^2(C) > w^2(N(C,S))$ 时，才用集合 $C \subseteq V\backslash S$ 交换 $N(C,S)$。通过简单枚举，我们可以在 $O(n^{sk})$ 时间内实现对每次改进的搜索。通过使用预处理过程对输入权重进行缩放和舍入，可以确保算法在多项式时间内收敛到局部最优解，同时仅略微损失近似因子。事实上，由于这只会使对该损失因子的依赖增加一个较小的多项式项，因此可以使用简单的部分枚举过程彻底消除这一损失，详见附录 A.2。

因此，在接下来的所有分析中，我们都假设算法已终止，并为该实例生成了一个局部最优解 $A$。我们用 $O$ 表示同一实例的最优解。注意，$A$ 和 $O$ 都是 $G$的独立集；由于 $G$ 不含 $(k+1)$-爪，因此 $G$ 中由 $A \cup O$ 诱导的子图的最大度至多为 $k$。

为了定义一组爪交换，Berman [2] 通过 $\pi(o) = \arg\max\{w_x : x \in N(o,A)\}$构造映射 $\pi: O \to A$，并以任意但一致的方式打破平局。注意，$\pi(o)$是 $A$ 中与 $o$ 相邻且权重最大的邻居。利用 $\pi$，我们定义一组集合 $\mathcal{C} = \{C_a\}_{a\in A}$，其中 $C_a$，$\{o : \pi(o) = a\}$。于是，每个顶点 $o \in O$ 恰好出现在一个集合 $C_a \in \mathcal{C}$ 中。我们注意到，每个集合 $C_a$ 都构成了一个以顶点 $a \in A$为中心、属于 $G$ 的爪的爪齿。因此，对所有 $a \in A$，都有 $|C_a| \leq k$。此外，对于每个 $a \in A$，对所有 $v \in N(C_a, A)$，都有 $w_a \geq w_v$。

对于每个 $a \in A$，我们定义 $N_a^+$，$\{a\} \cup \bigcup_{o\in C_a} N(o, A-a)$。注意，如果 $C_a \neq \emptyset$，那么 $N_a^+ = N(C_a, A)$；如果 $C_a = \emptyset$，那么 $N_a^+ = \{a\}$。对于每个 $a \in A$，我们在分析中考虑一种局部操作：将 $C_a$ 添加到 $A$，并从 $A$ 中移除 $N_a^+$。我们将每个这样的操作称为 1-交换，因为它涉及一个爪 $C_a$ 的爪齿。关于这些 1-交换的局部最优性意味着，对于任意 $a \in A$，

$$w^2(C_a) \leq w^2(N_a^+) \leq w_a^2 + \sum_{o\in C_a} w^2(N(o, A-a)), \tag{1}$$

其中，最后一个不等式成立，是因为对于所有 $o \in C_a$， $a \in N(o, A)$。注意，对于满足 $C_a = \emptyset$ 的空爪，上述不等式可由 $N_a^+ = \{a\}$ 和权重 $w_a$ 非负立即推出。在这种情况下，相应的 1 交换仅仅是从解 $A$ 中移除 $a$ 。

## 3 Berman 的 $(k+1)/2$-近似算法

现在我们回顾 Berman [2], 的分析中的论证，该论证表明，对于 $w^2$ ，不存在改进型 1-交换 $w(O) \leq \frac{k+1}{2} w(A)$-近似。Berman 的证明采用两阶段记账论证，并表明当前解 $A$ 中的每个顶点获得的权重都小于其权重的 $(k+1)/2$ 倍。这里我们给出一个（或许）更简单的证明，不使用收费论证；在证明中，我们明确指出了分析 [2]时若干关键不等式中的松弛量。对于每个 $a \in A$, 以及 $o \in C_a$，我们定义以下量来衡量这些松弛量:

$$\begin{aligned}
\psi_{a,o} &\triangleq (w_o - w_a)^2 + w_a w(N(o, A - a)) - w^2(N(o, A - a)), \\
\Psi_a &\triangleq \sum_{o \in C_a} \psi_{a,o}, \\
\Delta_a &\triangleq w^2(N_a^+) - w^2(C_a).
\end{aligned}$$

首先考虑 $\Psi_a$ ，并注意到对于每个 $a \in A$ 和 $o \in C_a$, $(w_o - w_a)^2 \geq 0$ ；根据 $C_a$ $w_v \leq w_a$ $v \in N$ $o$ $A$ $w^2$ $N$ $o$ $A - a$ $= \sum_{v \in N}$ $o$ $A-a$ $w_v^2 \leq$ 的构造，对于所 $w_a \sum_{v \in N}$ $o$ $A-a$ $w_v = w_a w$ $N$ $o$ $A - a$ $\psi_a$ $o \geq 0$ $o \in C_a$ 有 (, ) 均成立。因此, ( (, ) ) (, ) (, ) ( (, ) , 所以对于所有 都成立。由此可得，对于所有 $a \in A$, $\Psi_a \geq 0$。接下来注意到，由于对每个 $a$ 都有 $|C_a| \leq k$，根据关于 1-交换的局部最优性 (1)，对于所有 $a \in A$, $\Delta_a \geq 0$ 。现在我们证明，在 Berman 算法的分析中， $\Psi_a$ 和 $\Delta_a$ 的值确实可以视为松弛量:

引理 3.1. 假设 $A$ 关于 1-交换是局部最优的。那么,

$$2w(O) \leq w(A) + \sum_{o \in O} w(N(o, A)) - \sum_{a \in A} \left[ \frac{\Delta_a}{w_a} + \frac{\Psi_a}{w_a} \right].$$

证明. 固定一个爪 $C_a$ 和 $o \in C_a$。那么,

$$\begin{aligned}
2w_o w_a &= w_o^2 + w_a^2 - (w_o - w_a)^2 \\
&= w_o^2 + w_a^2 - (w_o - w_a)^2 - w^2(N(o, A - a)) + w^2(N(o, A - a)) \\
&\quad - w_a w(N(o, A - a)) + w_a w(N(o, A - a)) \\
&= w_o^2 + w_a^2 - w^2(N(o, A - a)) + w_a w(N(o, A - a)) - \psi_{a,o}.
\end{aligned} \tag{2}$$

式（2）对每个 $o \in C_a$ 均成立。对所有 $o \in C_a$ 求和可得:

$$\begin{aligned}
2w_a w(C_a) &= |C_a| w_a^2 + w^2(C_a) - \sum_{o \in C_a} w^2(N(o, A - a)) + w_a \sum_{o \in C_a} w(N(o, A - a)) - \Psi_a \\
&\leq (|C_a| + 1) w_a^2 + w^2(C_a) - w^2(N_a^+) + w_a \sum_{o \in C_a} w(N(o, A - a)) - \Psi_a \\
&= (|C_a| + 1) w_a^2 - \Delta_a + w_a \sum_{o \in C_a} w(N(o, A - a)) - \Psi_a \\
&= w_a^2 - \Delta_a + w_a \sum_{o \in C_a} w(N(o, A)) - \Psi_a,
\end{aligned}$$

其中，不等式由（1）中的第二个不等式推出，最后一个等式则是因为根据构造，对所有 $a \in N(o,\ A)$ 均有 $o \in C_a$，因此对于每个 $w_a^2 + w_a w(N(o,\ A-a)) = w_a w(N(o,\ A))$。两边除以 $o \in C_a$，得 $w_a$：

$$2w(C_a) \leq w_a + \sum_{o \in C_a} w(N(o,A)) - \left[\frac{\Delta_a}{w_a} + \frac{\Psi_a}{w_a}\right], \tag{3}$$

这对每个 $a \in A$都成立。将（3）对所有 $a \in A$ 求和，并注意到每个 $o \in O$ 恰好出现在一个集合 $C_a \in \mathcal{C}$ 中，即完成证明。 □

作为一个直接推论，我们得到了 Berman [2] 的标准近似结果。

推论 3.2. 对于任意关于 1-交换局部最优的 $A$，$w(O) \geq \frac{k+1}{2} w(A)$。

推论 *3.2* 的证明。 如上所述，对于所有 $\Psi_a \geq 0$，都有 $a \in A$，并且由于 $A$ 关于 1-交换局部最优，$\Delta_a \geq 0$ 对于所有 $a \in A$。因此，引理 3.1 推出

$$2w(O) \leq w(A) + \sum_{o \in O} w(N(o,A)).$$

现在注意到，由于 $O$ 是一个独立集，且 $G$ 是（$k+1$）-爪自由的，因此每个 $a \in A$ 在 $N(o, A)$ 中至多出现于 $k$ 个不同的 $o \in O$。于是，$\sum_{o \in O} w(N(o, A)) \leq k w(A)$。将此代入上面的不等式并将两边除以 2，即完成证明。 □

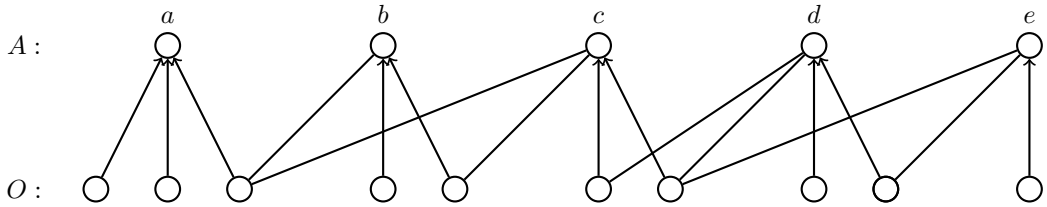
# 4 使用更大规模交换的改进算法

现在我们证明，当 $A$ 对于更大规模的交换是局部最优时，可以得到更好的近似比。我们的证明将通过为引理 3.1 中所有顶点的总松弛量 $\Delta_a$ 和 $\Psi_a$ 求出一个下界来进行。在继续之前，我们先对所采用的方法作一些高层次的直观说明。从推论 3.2 的证明可以看出，只有当 $\Psi_a$ 和 $\Delta_a$ 都接近 0 时，算法 2.1 的近似比才接近 $\frac{k+1}{2}$。对于给定顶点$a \in A$，$\Delta_a$ 衡量以 $a$为中心的 1-交换的紧密程度；具体而言，$\Delta_a$ 等于 0 意味着以 $a$ 为中心的 1-交换满足 $w^2(C_a) = w^2(N_a^+)$。假设存在两个顶点 $a$、$b$，使得 $b \in N_a^+ \backslash \{a\}$，并考虑一次尝试加入 $C_a \cup C_b$ 并移除 $N_a^+ \cup N_b^+$ 的交换。如果这次更大规模的交换不能改进解，我们将证明 $\Delta_a = 0$ 和 $\Delta_b = 0$不可能同时成立。直观地说，这是因为 $b$ 在$N_a^+ \cup N_b^+$中被计算一次，却在 $N_a^+$和 $N_b^+$中都被计算一次。假设 $b$具有较大的权重，就能带来显著的改进。另一方面，如果 $N_a^+ \backslash \{a\}$ 中的所有顶点相较于 $a$ 权重都较低，那么我们将证明可以将松弛项 $\Psi_a$ 与 0 拉开足够的距离。

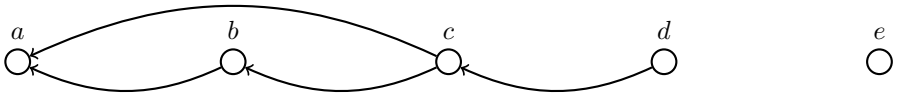
我们的一般方法将考虑 $s$-交换，同时将 $s > 1$ 个爪的爪齿纳入 $A$。为了定义分析中考虑的 $s$-交换，我们使用以下辅助图。

定义 4.1（交换图 $H_\varepsilon$）。固定 $0 \leq \varepsilon \leq 1$。然后，我们将交换图 $H_\varepsilon$定义为一个有向图，其中包含 $V(H_\varepsilon) = A$ 和 $E(H_\varepsilon)$，并且对每个$b \neq a$，当且仅当满足以下条件时，包含一条从 $a$ 到 $b$的弧 $(a, b)$:

1. $a \in N_b^+$, 2. $w_a \geq (1-\varepsilon) w_b$,




(a) 冲突图




(b) 交换图 $H_\varepsilon$

图 2：这幅图展示了交换图 $H_{1/4}$（图 2b），它来自图 $G[A \cup O]$ 中的冲突图 2a。我们假设 $w_a = w_b = w_c = 1$，$w_d = 4/5$，且 $w_e = 1/2$。在图 2a中，我们用箭头标记从 $o$ 的每个顶点指向 $\pi(o)$ 的边，并假设通过按标签对顶点排序来打破平局。

请注意，对于任意弧 $(a, b) \in E(H_\varepsilon)$，都有 $(1-\varepsilon)w_b \le w_a \le w_b$。图 2 展示了图 $G$ 及其对应的交换图 $H_\varepsilon$的一个示例。请注意，定义 4.1 的第一个条件意味着，在 $H_\varepsilon$ 中，只有当 $x \in A$ 和 $y \in A$ 在 $G[A \cup O]$中由一条长度为 2 的路径连接时，才包含弧 $(x, y)$ 或 $(y, x)$。由于 $G[A \cup O]$ 中的最大度为 $k$，以任意顶点 $x \in A$为终点的长度为 2 的路径至多有 $k(k-1)$条，因此任意顶点 $x \in V(H_\varepsilon)$的最大度为 $k(k-1)$。

我们将 $H_\varepsilon$ 中度为 0 的顶点称为孤立顶点，并令 $I$ 表示所有孤立顶点的集合。我们将其余顶点 $D$ $A \backslash I$ 称为非孤立顶点。我们分别考察每种类型的顶点，并证明两种情况下松弛项的总值都很大。

### 4.1 非孤立顶点的松弛量界定

为了处理非孤立顶点 $D$，我们考虑一种 $s$-交换，其中将 $s > 1$ 个爪 $C_a$ 一并加入 $A$。我们证明如下：

引理 4.2。设 $0 \le \varepsilon \le 1/2$，并假设 $A$ 在 $s$-交换下对$s \ge 1 + k(k-1)$ 局部最优。那么，

$$\sum_{a \in D} \left[ \frac{\Delta_a}{w_a} + \frac{\Psi_a}{w_a} \right] \ge \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} w(D) + \sum_{a \in D} \sum_{o \in C_a} \varepsilon w(N(o, I)).$$

注意，引理 4.2 意味着，对于 $D$中的顶点，我们可以节省其总权重（$1-\varepsilon$）中几乎一半的权重/（$2-\varepsilon$）。这与 Berman 算法的证明形成对比，在该证明中我们只有$\sum_{a \in A} \frac{\Delta_a}{w_a} \ge 0$。本节其余部分将用于证明引理 4.2。

构造交换：我们首先为$s = k(k-1)$构造一组合适的 $s$-交换。为此，我们按如下方式划分 $D$ 的顶点。令 $T$最初为一个集合

由 $H_\varepsilon$ 中的弧构成，在 $H_\varepsilon$ 的每个连通分量中形成一棵任意的无向生成树（注意，这里我们将忽略每条弧的方向）。只要 $T$ 包含一条长度至少为 3 的无向路径，我们就从 $T$中移除该路径中间的一条弧（即一条与两个度为 2 的顶点相 incident 的弧）。注意，每次这样的修改都会减少 $T$中的弧数，因此这一过程必然终止。过程结束时，最终的弧集 $T$ 是一组不相交树，每棵树都不包含长度为 3 的路径。这意味着 $T$ 的每个连通分量都必须是一颗星。此外，过程结束时， $D$ 的所有顶点在 $T$中的度都至少为 1，因为我们从不移除与度小于 2 的顶点相 incident 的弧。过程终止后可知， $T$ 是 $H_\varepsilon$中的一组不相交的星 $T_1$、.....、 $T_\ell$，且 $D$ 的每个顶点恰好出现在 1 颗星中。由于 $H_\varepsilon$ 中顶点的最大度至多为 $k(k-1)$，对于所有$i=1$、.....、 $\ell$，都有 $|V(T_i)| \le 1+k(k-1)$；并且对于每个 $a \in V(T_i)$，都有 $|C_a| \le k$。因此，每次这样的交换都是一次 $s$-交换，它向 $A$ 中添加一个至多包含 $sk$ 个顶点的独立集，所以当$s=k(k-1)$时，算法 2.1 会考虑该交换。[2]

我们的第一个引理表明，可以利用树中每条弧 $(a,b)$ 所关联的最小权重之和，来界定所有 $v \in T_i$ 的总松弛量 $\Delta_v\ w_a$。

引理 4.3. 设 $\varepsilon \ge 0$，并假设 $A$ 在 $s$-交换下局部最优。设 $T$ 是 $H_\varepsilon$ 中的一棵树，满足 $|V(T)| \le s$；设 $B \subseteq A$ 是任意一个顶点集合，使得 $H_\varepsilon$ 中任意 $u \in B$ 与任意 $v \in V(T)$ 之间都不存在弧 $(u,v)$ 或 $(v,u)$。那么，

$$\sum_{v \in V(T)} \left[ \frac{\Delta_v}{w_v} + \frac{\Psi_v}{w_v} \right] \ge \sum_{(a,b) \in E(T)} w_a + \sum_{v \in V(T)} \sum_{o \in C_v} \varepsilon w(N(o,B)).$$

证明。首先考虑松弛项 $\Delta_v$。回顾一下，对于每个顶点 $v$，我们定义 $\Delta_v = w^2(N_v^+) - w^2(C_v)$。对于任意子集 $X \subseteq A$，我们类似地定义 $\Delta_X$，$w^2\left(\bigcup_{v \in X} N_v^+\right) - w^2\left(\bigcup_{v \in X} C_v\right)$。首先，我们通过对 $V(T)$ 的大小进行归纳，证明：

$$0 \le \Delta_{V(T)} \le \left( \sum_{v \in V(T)} \frac{\Delta_v}{w_v} - \sum_{(a,b) \in E(T)} \frac{w_a^2}{w_b} \right) w_{\hat{v}}, \tag{4}$$

其中 $\hat{v} = \arg\max_{v \in V(T)} w_v$。对于 $|V(T)| = 1$ 的情形，必有 $V(T) = \{\hat{v}\}$，且 $E(T) = \emptyset$。因此，

$$\left( \sum_{v \in V(T)} \frac{\Delta_v}{w_v} + \sum_{(a,b) \in E(T)} \frac{w_a^2}{w_b} \right) w_{\hat{v}} = \frac{\Delta_{\hat{v}}}{w_{\hat{v}}} \cdot w_{\hat{v}} = \Delta_{\hat{v}} \ge 0,$$

这是所要求的，其中最后一个不等式由相对于 1-交换的局部最优性得出。现在假设对于所有满足 $|V(T)| \le t < s$ 的树 $T$，式 (4) 均成立，并考虑一棵满足 $|V(T)| = t+1$ 的树 $T$。同上，令 $\hat{v}$ 为 $V(T)$ 中权重最大的顶点；现在令$T^1, \dots, T^c$ 为移除 $\hat{v}$ 后得到的 $T[V(T) - \hat{v}]$ 的连通分量。于是，每个 $T^i$ 都是一棵满足 $|V(T^i)| \le t$ 的树，而 $T$ 中与 $\hat{v}$ 相 incident 的弧形式为 $(t_1, \hat{v}) \dots, (t_c, \hat{v})$，其中

[2]简要指出，除了与星 $T_i$ 的中心顶点相关联的爪 $C_v$ 之外，每个爪都与 $C_v$ 共享 $O$ 的一个元素。因此，实际上可以将算法所需交换的规模从 $k^2(k-1)+k$ 降至 $k(k-1)^2+k$。为避免引入更多细节，我们始终采用了一个较为简单的上界。

$t_i \in V(T^i)$ 对每个 $i = 1, \ldots, c$ 均成立（每条弧的定向由 $V(T)$ 中 $w_{\hat{v}}$ 的权重最大这一事实得出）。此外，令 $\hat{v}_i = \arg\max_{v \in V(T_i)} w_v$。那么，相对于 $s$-交换的局部最优性意味着：

$$
\begin{aligned}
0 \le \Delta_{V(T)} &= w^2\left(\bigcup_{v \in V(T)} N_v^+\right) - w^2\left(\bigcup_{v \in V(T)} C_v\right) \\
&\le \sum_{i=1}^{c}\left[w^2\left(\bigcup_{v \in V(T_i)} N_v^+\right) - w^2\left(\bigcup_{v \in V(T_i)} C_v\right)\right] + w^2(N_{\hat{v}}^+) - w^2(C_{\hat{v}}) - \sum_{i=1}^{c} w_{t_i}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{c}\left[\Delta_{T_i}\right] + \Delta_{\hat{v}} - \sum_{i=1}^{c} w_{t_i}^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{c}\left[\left(\sum_{v \in V(T_i)} \frac{\Delta_v}{w_v} - \sum_{(a,b) \in E(T_i)} \frac{w_a^2}{w_b}\right) w_{\hat{v}_i}\right] + \Delta_{\hat{v}} - \sum_{i=1}^{c} w_{t_i}^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{c}\left[\left(\sum_{v \in V(T_i)} \frac{\Delta_v}{w_v} - \sum_{(a,b) \in E(T_i)} \frac{w_a^2}{w_b}\right) w_{\hat{v}}\right] + \frac{\Delta_{\hat{v}}}{w_{\hat{v}}} \cdot w_{\hat{v}} - \sum_{i=1}^{c} \frac{w_{t_i}^2}{w_{\hat{v}}} \cdot w_{\hat{v}} \\
&= \left(\sum_{v \in V(T)} \frac{\Delta_v}{w_v} - \sum_{(a,b) \in E(T)} \frac{w_a^2}{w_b}\right) w_{\hat{v}}.
\end{aligned}
$$

这里，第二个不等式由以下事实得出：对于 $T_i$ 与 $\hat{v}$ 之间的每条弧 $e_i = (t_i, \hat{v})$，都有 $t_i \in N^+\hat{v}$ 和 $t_i \in N_{t_i}^+$。因此， $w_{t_i}^2$ 在 $\bigcup_{v \in V(T_i)} w^2(N_v^+)$ 和 $w^2(N^+\hat{v})$ 中都被计数，但在 $\bigcup_{v \in V(T)} N_v^+$ 中只计数一次。此外， $O$ 的每个元素至多出现在集合 $C_v$ 中的一个集合里，因此 $w^2\left(\bigcup_{v \in V(T)} C_v\right) = w^2(C_{\hat{v}}) + \sum_{i=1}^{c} w^2\left(\bigcup_{v \in V(T_i)} C_v\right)$。第三个不等式由归纳假设 (4) 的第一个不等式得出。第四个不等式则再次由归纳假设 (4) 的第二个不等式以及对所有 $i$ 都成立的 $w_{\hat{v}} \ge w_{v_i}$ 得出。至此，(4) 的证明的归纳步骤完成。

重新整理（4），对于任意 $V$（$T$），若有 $|V$（$T$）$| \le s$，则有：

$$
\sum_{v \in V(T)} \frac{\Delta_v}{w_v} \ge \sum_{(a,b) \in E(T)} \frac{w_a^2}{w_b}. \tag{5}
$$

N现在我们考虑每个顶点 $v \in V(T)$ 的松弛量 $\Psi_v = \sum_{o \in C_v} \psi_{v,\ o}$。回想一下，at

$$
\begin{aligned}
\Psi_v &= \sum_{o \in C_v} (w_o - w_v)^2 + w_v w(N(o, A - v)) - w^2(N(o, A - v)) \\
&\ge \sum_{o \in C_v} w_v w(N(o, A - v)) - w^2(N(o, A - v)) = \sum_{o \in C_v} \sum_{a \in N(o, A - v)} \left[w_v w_a - w_a^2\right].
\end{aligned}
$$

最终求和中的每个内部项均为非负数，因为对于任意 $o \in C_v$, $w_a \le w_v$ for all$a \in N(o, A - v)$。对于任意 $a \in N(o, B) \subseteq N(o, A - v)$，其中存在某个 $o \in C_v$，我们还必须有$w_a < (1 - \varepsilon)w_v$，否则弧 $(a, v)$ 就会出现在 $H_\varepsilon$ 中。因此，对于所有 $a \in N(o, B)$，$w_a w_v - w_a^2 \ge w_v w_a - (1 - \varepsilon)w_v w_a = \varepsilon w_v w_a$。最后，每个满足 $(a, v)$ 的 $a \in E(T)$ 都必须出现在

$N(o,(A\backslash B)-v)$，其中存在某个 $o\in C_v$。因此，

$$\Psi_v \geq \sum_{o\in C_v}\sum_{a\in N(o,A-v)}\left[w_v w_a - w_a^2\right] = \sum_{o\in C_v}\left[\sum_{a\in N(o,B)}\left[w_v w_a - w_a^2\right] + \sum_{a\in N(o,(A\backslash B)-v)}\left[w_v w_a - w_a^2\right]\right]$$
$$\geq \sum_{o\in C_v}\left[\sum_{a\in N(o,B)}\varepsilon w_v w_a\right] + \sum_{a:(a,v)\in E(T)}\left[w_v w_a - w_a^2\right].$$

对所有 $v\in V(T)$ 求和，我们得到：

$$\sum_{v\in V(T)}\frac{\Psi_v}{w_v} \geq \sum_{v\in V(T)}\sum_{o\in C_v}\sum_{a\in N(o,B)}\frac{\varepsilon w_v w_a}{w_v} + \sum_{v\in V(T)}\sum_{a:(a,v)\in E(T)}\frac{w_v w_a - w_a^2}{w_v} \tag{6}$$
$$= \sum_{v\in V(T)}\sum_{o\in C_v}\varepsilon w(N(o,B)) + \sum_{(a,b)\in E(T)}\left[w_a - \frac{w_a^2}{w_b}\right].$$

结合方程（5）和（6），即可得到所述结果。 □

在引理 4.3 中，$s$-交换产生的松弛量用树 $T$ 的弧表示。接下来，我们将证明，可以用 $T$ 中所有顶点的总权重来界定该松弛量。

引理 4.4. 对任意包含于 $H_\varepsilon$ 的无向树 $T$，其中 $|V(T)|=t\geq 2$，以及任意 $0\leq\varepsilon\leq 1/2$,

$$\sum_{(a,b)\in E(T)} w_a \geq \frac{(t-1)(1-\varepsilon)}{t-\varepsilon}\sum_{v\in V(T)} w_v.$$

证明。设 $r$ 是 $T$ 中权重最小的顶点，并固定一条边 $(r,x)\in E(T)$。对于每条其余的弧 $(a,b)\in E(T)-(r,x)$，考虑从 $r$ 出发、以 $(a,b)$ 结束的唯一无向路径，并令 $v\in\{a,b\}$ 为该路径末端的顶点。注意，$V(T)\backslash\{r,x\}$ 中的每个顶点恰好作为一条边 $(a,b)\in E(T)-(r,x)$ 的 $v$。此外，若 $v=a$，则$w_a=w_v$；若 $v=b$，则 $w_a\geq(1-\varepsilon)w_b=(1-\varepsilon)w_v$。令 $z=\sum_{(a,b)\in E(T)-(r,x)} w_a$。那么，根据上述讨论，$z\geq(1-\varepsilon)\sum_{v\in V(T)\backslash\{r,x\}} w_v$。考虑函数：

$$f(z)=\frac{w_r+z}{w_r+w_x+(1-\varepsilon)^{-1}z}\leq\frac{\sum_{(a,b)\in E(T)} w_a}{\sum_{v\in V(T)} w_v}.$$

为完成证明，只需证明 $f(z)\geq(t-1)(1-\varepsilon)\,t-\varepsilon$。注意，~~由于 $(r,x)\in E(T)$~~，$(1-\varepsilon)w_x\leq w_r\leq w_x$，因此 $\frac{w_r}{w_r+w_x}\leq\frac{1}{2}$。于是，对于 $\varepsilon\leq 1/2$，$f(z)$ 是关于 $z$ 的非递减函数。此外，由于 $w_r$ 是 $T$ 中所有顶点的最小权重，$z\geq|E(T)-(r,x)|w_r=(t-2)w_r$。因此，

$$f(z)\geq\frac{w_r+(t-2)w_r}{w_r+w_x+(1-\varepsilon)^{-1}(t-2)w_r}\geq\frac{(t-1)w_r}{w_r+(1-\varepsilon)^{-1}w_r+(1-\varepsilon)^{-1}(t-2)w_r}=\frac{(t-1)(1-\varepsilon)}{t-\varepsilon},$$

其中第二个不等式再次由 $w_r\geq(1-\varepsilon)w_x$ 得出。 □

结合引理4.3 和4.4，我们接着证明引理4.2。

引理4.2的证明。回顾一下，星的集合 $T_1,\dots,T_\ell$ 具有这样的性质：每个$a \in D$ 恰好出现在一个 $T_i$ 和 $2 \le |V(T_i)| \le k(k-1)+1 \le s$。对于每个 $T_i$，由于$A$ 相对于 $s$-交换是局部最优的，引理4.3 (其中 $B = I$）和引理4.4分别推出

$$\sum_{a\in V(T_i)}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \sum_{(a,b)\in E(T_i)} w_a + \sum_{a\in V(T_i)}\sum_{o\in C_a}\varepsilon w(N(o,I)) \\ \ge \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}\sum_{a\in V(T_i)} w_a + \sum_{a\in V(T_i)}\sum_{o\in C_a}\varepsilon w(N(o,I)).$$

将每个 $i=1,\dots,\ell$ 所得的不等式相加，即可得到所述结果。注意，只有当所有 $T_i$ 都满足 $|V(T_i)|=2$ 时，最后一个不等式才取等号。 □

## 4.2 孤立爪的松弛量界

现在考虑那些 $a \in I$ 为孤立顶点的爪 $C_a$。注意，对于所有这类爪，对每个 $v \in \bigcup_{o\in C_a} N(o, A-a)$，都必须有 $w_v \le (1-\varepsilon)w_a$，否则 $H_\varepsilon$ 中就会存在一条边 $(v,a)$。因此，对于所有 $a \in I$ 和 $o \in C_a$，

$$w^2(N(o,A-a)) \le (1-\varepsilon)w_a w(N(o,A-a)). \tag{7}$$

在下面的引理中，我们将推导孤立爪的松弛量界。

引理 4.5。假设 $A$ 关于 1-交换是局部最优的。令 $0 \le \delta \le \varepsilon$，并对 $0 \le t \le k$，定义 $\rho_t, {}^t(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon})$。那么，对任意 $a \in I$，

$$\frac{\Psi_a}{w_a} \ge \rho_{|C_a|}w_a + \delta\sum_{o\in C_a} w(N(o,A-a)).$$

引理 4.5 揭示的关键观察是，孤立顶点的松弛量并非为零。尽管这一观察看似显而易见，但我们要指出，处理它时存在一个微妙的难点。考察引理 3.1 中的界可知，对于任意 $a \in A$, $w_a$，每个 $o \in N(a,O)$都会使它们在该界中出现一次。具体而言，权重 $w_a$ 会出现 $|C_a| + |N(a, O\backslash C_a)| \le k$次。如果$a$是孤立的，那么由 (7) 可知，我们得到的界将变为 $(|C_a| + |N(a, O\backslash C_a)|\,(1-\varepsilon))w_a$。问题在于，当 $|N(a, O\backslash C_a)|$ 较小时，我们节省的量不足以取得任何进展。为处理这种情况，每个顶点都会保留一部分松弛量，其比例等于引理 4.5 中的参数 $\rho_{|C_a|}$，从而为其他孤立顶点 $b \in N_a^+\backslash\{a\}$留出较少的量 $(1-\delta)w_b$，其中 $\delta \le \varepsilon$。直观而言，参数 $\delta$ 可以看作一种分配方式：将来自 $\Psi_a$ 的松弛量分为两部分，一部分用于支付 $a$，另一部分则用于帮助支付其他孤立爪的代价。

引理证明 *ma 4.5.* 固定 $a \in I$ 并考虑任意一个 $o \in C_a$。由于 $a \in I$，式（7）意味着 th at

$$\psi_{a,o} = (w_a - w_o)^2 + w_a w(N(o,A-a)) - w^2(N(o,A-a)) \ge (w_a-w_o)^2 + \varepsilon w_a w(N(o,A-a))$$

对于每个 $o \in C_a$，因此

$$\Psi_a \ge \sum_{o\in C_a}(w_a-w_o)^2 + \varepsilon w_a \sum_{o\in C_a} w(N(o,A-a)).$$

定义 $\alpha_o$、 $w_o/w_a$ 和 $\beta$、 $\sum_{o\in C_a} w(N(o,A-a))/w_a$。那么我们可以将上述不等式重新表述为

$$\begin{aligned}\Psi_a &\geq \sum_{o\in C_a}(w_a-\alpha_o w_a)^2+\varepsilon w_a\beta w_a = w_a^2\left(\sum_{o\in C_a}(1-\alpha_o)^2+\varepsilon\beta\right)\\ &= w_a^2\left(\sum_{o\in C_a}(1-\alpha_o)^2+(\varepsilon-\delta)\beta\right)+w_a^2\delta\beta.\end{aligned} \tag{8}$$

现在对右侧括号中的表达式求下界。由于 $A$ 相对于 1-交换是局部最优的，(1) 和 (7) 可推出

$$\sum_{o\in C_a} w_o^2 = w^2(C_a)\leq w^2(N_a^+)\leq w_a^2+\sum_{o\in C_a} w^2(N(o,A-a))\leq w_a^2+\sum_{o\in C_a} w_a(1-\varepsilon)w(N(o,A-a)).$$

将此不等式改写为关于 $\alpha_o$ 和 $\beta$的形式，可得以下约束:

$$\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2 w_a^2\leq w_a^2+(1-\varepsilon)w_a^2\beta.$$

两边除以 $w_a^2$，然后重新整理，得到 $\beta\geq\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2\right)_{1-\varepsilon}{}^{-1}$。接着，由于 $\varepsilon-\delta\geq 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{o\in C_a}(1-\alpha_o)^2+(\varepsilon-\delta)\beta &\geq \sum_{o\in C_a}(1-\alpha_o)^2+(\varepsilon-\delta)\frac{\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2\right)-1}{1-\varepsilon}\\ &= |C_a|-2\sum_{o\in C_a}\alpha_o+\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2+(\varepsilon-\delta)\frac{\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2\right)-1}{1-\varepsilon}\\ &= |C_a|-2\sum_{o\in C_a}\alpha_o+\frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\sum_{o\in C_a}\alpha_o^2-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\\ &\geq |C_a|-2\sum_{o\in C_a}\alpha_o+\frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\cdot\frac{1}{|C_a|}\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o\right)^2-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon},\end{aligned} \tag{9}$$

最后一个不等式由柯西-施瓦茨不等式得出。我们可以将上述下界表示为 $f(x)$，其中 $f(x)=\frac{1-\delta}{|C_a|}(\frac{}{1-\varepsilon})x^2-2x+|C_a|-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}$且 $x=\sum_{o\in C_a}\alpha_o$。接下来，注意到$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{2(1-\delta)}{|C_a|(1-\varepsilon)}>0$，因此 $f$ 是关于 $x$的凸函数，并且当 $x=\frac{|C_a|}{(1-\varepsilon)}(1-\delta)$ 时，我们有 $\frac{df}{dx}=\frac{x}{(1-\delta)|C_a|}(1-\varepsilon)-2=0$。因此，

$$\begin{aligned}&|C_a|-2\sum_{o\in C_a}\alpha_o+\frac{1-\delta}{|C_a|(1-\varepsilon)}\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o\right)^2-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\\ &\qquad= f\left(\sum_{o\in C_a}\alpha_o\right)\geq f\left(\frac{|C_a|(1-\varepsilon)}{1-\delta}\right)=\frac{|C_a|(\varepsilon-\delta)}{1-\delta}-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}=\rho_{|C_a|}.\end{aligned} \tag{10}$$

结合不等式（8）、（9）和（10），最终得到

$$\frac{\Psi_a}{w_a}\geq\frac{\rho_{|C_a|}w_a^2+\delta\beta w_a^2}{w_a}=\rho_{|C_a|}w_a+\delta\sum_{o\in C_a}w(N(o,A-a)),$$

正如所要求的。 □

现在，我们将前面的结果结合起来，得到与所有顶点 $a \in I$ 相关的总松弛量的以下界。

引理 4.6. 假设 $A$ 关于 1-交换是局部最优的。令 $0 \le \delta \le \varepsilon$，令 $B$ 为 $H_\varepsilon$ 中的任意顶点集，并且对于 $0 \le t \le k$，定义 $\rho_t$ , $^{t}{}_{\left(\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta}\right.}$ $\left. - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)$。那么，

$$\sum_{a\in I}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \sum_{a\in I}\left(\rho_{|C_a|}-\delta|C_a|\right)w_a + \sum_{a\in I}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,B)).$$

证明。 对于每个 $a \in I$，引理 4.5 给出

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a} &\ge \rho_{|C_a|}w_a + \sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,A-a)) \\ &= \rho_{|C_a|}w_a - \delta|C_a|w_a + \sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,A)) \ge \rho_{|C_a|}w_a - \delta|C_a|w_a + \sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,B)). \quad (11)\end{aligned}$$

对所有 $a \in I$ 将式（11）求和，即得本引理。. □

## 4.3 合并这些界

现在，我们将引理 4.4 和 4.6 给出的孤立爪和非孤立爪的松弛量界，与引理 3.1 结合，以获得算法 2.1 的保证。接下来，我们将根据 $\varepsilon$，将参数 $\delta$ 设为 $\delta$， $1-\sqrt{1-\varepsilon}$。随后，经过直接的代数运算（见附录 A.1），可得:

引理 4.7。设 $0 \le \varepsilon < 1$ 和集合 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$。那么， $\delta \le \varepsilon$，且对所有 $0 \le t \le k$,

$$\rho_t \triangleq \frac{t(\varepsilon-\delta)}{1-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon} = \left(t - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon}) = \left(t-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)\delta.$$

特别地，对所有 $0 \le t \le k$， $\rho_t = \rho_k - (k-t)\delta$。

设定 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$后，我们现在可以陈述本节的主要结果。定理 4.8证明，近似因子是在孤立爪与非孤立爪之间的一种权衡。

定理 4.8。对于任意 $0 \le \varepsilon \le 1/2$，若 $A$ 在 $s \ge 1+k(k-1)$ 下关于 $s$-交换是局部最优的，则

$$w(O) \le \left[\tfrac{k+1}{2} - \tfrac{1}{2}\min\left\{\tfrac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \rho_k\right\}\right] w(A),$$

其中 $\rho_k = (k-1/\sqrt{1-\varepsilon})(1-\sqrt{1-\varepsilon})$。

证明。 设定 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$，并注意到 $\delta \le \varepsilon$。于是，根据引理 4.2,

$$\sum_{a\in D}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D) + \sum_{a\in D}\sum_{o\in C_a}\varepsilon w(N(o,I)) \ge \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D) + \sum_{a\in D}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I)),$$

并根据引理 4.6 （其中 $B = I$），

$$\sum_{a\in I}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \sum_{a\in I}\left(\rho_{|C_a|}-\delta|C_a|\right)w_a + \sum_{a\in I}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I)).$$

回顾一下，根据引理 4.7，当 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$，$\rho_t = \rho_k - (k-t)\delta$ 对于 $0 \le t \le k$。因此，$\rho_{|C_a|} - \delta|C_a| = \rho_k - \delta(k-|C_a|) - \delta|C_a| = \rho_k - k\delta$。结合上述两个界，并注意到每个 $o \in O$ 都恰好属于 $C_a$ 中的一个 $a \in A$，即可得到

$$\begin{aligned}\sum_{a\in A}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] &\ge \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)+\sum_{a\in I}(\rho_{|C_a|}-|C_a|\delta)w_a+\sum_{a\in A}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I))\\ &= \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)+(\rho_k-k\delta)w(I)+\sum_{o\in O}\delta w(N(o,I)).\end{aligned}$$

结合这一界与引理3.1 可得：

$$\begin{aligned}2w(O) &\le w(A)+\sum_{o\in O}w(N(o,A))-\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)-(\rho_k-k\delta)w(I)-\sum_{o\in O}\delta w(N(o,I))\\ &= w(A)+\sum_{o\in O}w(N(o,A\backslash I))+(1-\delta)\sum_{o\in O}w(N(o,I))-\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)-(\rho_k-k\delta)w(I)\\ &\le w(A)+kw(A\backslash I)+k(1-\delta)w(I)-\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)-(\rho_k-k\delta)w(I)\\ &= w(A)+kw(A)-\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}w(D)-\rho_k w(I)\le (k+1)w(A)-\min\left\{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon},\rho_k\right\}w(A),\end{aligned}$$

如所需。 □

在第5 节中，我们将说明如何平衡定理4.8 给出的两个关于改进幅度的上界，从而为 $k=3$ 得到 1.811 近似。在附录A.3 中，我们给出一个例子，表明在此情形下对孤立爪的分析几乎是紧的；若要进一步改进，就必须考虑组合孤立爪的交换，或者改进我们针对非孤立爪所得的因子$\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$。下一节中，我们采用后一种方法。

## 5 进一步改进界

我们对非孤立爪进行分析时，主要的瓶颈出现在对所有 $T_i$，$|V(T_i)|=2$ 的情形下。此时，每个星都只是一个孤立边。引理 4.4 表明，若能确保对所有 $T_i$，$|V(T_i)|\ge 3$，则可将我们针对非孤立爪得到的 $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$ 的增益提升至$\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}$。然而，当 $H_\varepsilon$ 包含大小为 2 的极大连通分量时，这是不可能的。形式化地说，如果 $(a,b)\in E(H_\varepsilon)$，且$a$ 和 $b$ 除 $(a,b)$ 外不与 $H_\varepsilon$ 的任何边关联，则称顶点对 $a,b\in A$ 是 $H_\varepsilon$ 中的一条孤立边。本节将展示，我们可以结合上一节中的基本技术，证明每条这样的边所获得的总松弛量已经相当大。随后我们将说明，通过采用稍大的交换，可以确保 $H_\varepsilon$ 中剩余的非孤立顶点能够划分为大小至少为 3 的树 $T_i$。

令 $I_2$ 为 $H_\varepsilon$ 中所有孤立边（$a$，$b$）的集合。在本节中，我们令 $I_1\subseteq A$ 表示孤立顶点的集合，$I_2\subseteq A\backslash I_1$ 表示所有出现在孤立边中的顶点的并集，并令 $D=A\backslash(I_1\cup I_2)$ 表示既非孤立、也不属于孤立边的顶点集合。注意，$I_2$ 中的每个顶点恰好出现在一条孤立边（$a$，$b$）中。下面的引理给出了我们从一条孤立边获得的总松弛量的界。

引理 **5 1** $A$ 2 $0 \le \delta \le \varepsilon \le$。假设 相对于 -交换是局 $1/2$ $0 \le t \le k$ $\rho_t$ $\frac{t\,\varepsilon-\delta}{1-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}$ $a\ b$ $H_\varepsilon$ 部最优的，并令。对于，定义，()。那么，对于 中任意一条孤立边（，），

$$\sum_{v\in\{a,b\}} \left[\frac{\Delta_v}{w_v} + \frac{\Psi_v}{w_v}\right] \ge \left(\left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right) - k\delta\right) w_a + (\rho_{|C_b|} - |C_b|\delta) w_b + \sum_{v\in\{a,b\}} \sum_{o\in C_v} \delta w(N(v,A)).$$

引理 *5.1* 的证明。考虑一条孤立边（$a$，$b$），注意到 $a \in N_b^+$ 和 $w_a \le w_b \le (1-\varepsilon)^{-1} w_a$。对于所有 $v \in \bigcup_{o\in C_a} N(o,\ A-a)$，必有 $w_v < (1-\varepsilon)\, w_a$，否则 $H_\varepsilon$ 中就会存在另一条弧（$v$，$a$）。利用 $\varepsilon \ge \delta$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_a}{w_a} &\ge \frac{1}{w_a} \sum_{o\in C_a} \left[w_a w(N(o,A-a)) - w^2(N(o,A-a))\right] \ge \sum_{o\in C_a} \varepsilon w(N(o,A-a)),\\ &\ge \sum_{o\in C_a} \delta w(N(o,A-a)) = \sum_{o\in C_a} \delta w(N(o,A)) - |C_a|\delta w_a. \quad (12)\end{aligned}$$

现在考虑顶点 $b$。由于 $A$ 关于二交换局部最优，并且$a \in N_a^+ \cap N_b^+$，

$$w^2(C_a) + w^2(C_b) \le w^2(N_a^+ \cup N_b^+) \le w^2(N_b^+) + w^2(N_b^+) - w_a^2,$$

因此

$$\Delta_a + \Delta_b = w^2(N_a^+) - w^2(C_a) + w^2(N_b^+) - w^2(C_b) \ge w_a^2. \quad (13)$$

注意，对于任意 $o \in C_b$，对所有 $v \in N$（$o$，$A\backslash\{a,b\}$），都有 $w_v < (1-\varepsilon)\, w_b$，否则，对于每个这样的 $v$，$H$ 中都会出现另一条弧（$v$，$b$）。对于每个 $o \in C_b$，我们定义 $\alpha_o$、$w_o/w_b$，并进一步定义 $\beta$、$\sum_{o\in C_b} w$（$N$（$o$，$A\backslash\{a,b\}$））和 $\gamma$、$w_a/w_b$。于是，

$$\begin{aligned}\Delta_a + \Delta_b + \Psi_b &\ge w_a^2 + \sum_{o\in C_b} \left[(w_b - w_o)^2 + w_b w(N(o,A-b)) - w^2(N(o,A-b))\right] \quad (14)\\ &\ge w_a^2 + \sum_{o\in C_b} \left[(w_b - w_o)^2 + \varepsilon w_b w(N(o,A\backslash\{b,a\}))\right] + (w_b - w_a) w_a\\ &= w_b^2\gamma^2 + w_b^2 \sum_{o\in C_b} \left[(1-\alpha_o)^2\right] + w_b^2\varepsilon\beta + w_b^2(1-\gamma)\gamma\\ &= w_b^2 \left(\sum_{o\in C_b} \left[(1-\alpha_o)^2\right] + \varepsilon\beta + \gamma\right)\\ &= w_b^2 \left(\sum_{o\in C_b} \left[(1-\alpha_o)^2\right] + (\varepsilon-\delta)\beta + \gamma\right) + w_b^2\delta\beta,\end{aligned}$$

其中第一个不等式由（13）得出。由于引入 $C_b$ 的 **1**-交换不会带来改进，我们还必须有：

$$\sum_{o\in C_b} w_o^2 \le w_b^2 + w_a^2 + w^2(N(C_b, A\backslash\{a,b\})) \le w_b^2 + w_a^2 + (1-\varepsilon) w_b \sum_{o\in C_b} w(N(o,A\backslash\{a,b\})),$$

或者等价地，

$$w_b^2 \sum_{o\in C_b} \alpha_o^2 \le w_b^2 \left(1 + \gamma^2 + (1-\varepsilon)\beta\right).$$

重新排列后，我们得到 $\beta \geq \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\sum_{o\in C_b}\alpha_o^2 - 1 - \gamma^2\right)$。因此，

$$\begin{aligned}\sum_{o\in C_b}(1-\alpha_o)^2 + (\varepsilon-\delta)\beta + \gamma &\geq \sum_{o\in C_b}(1-\alpha_o)^2 + \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\left(\sum_{o\in C_b}\alpha_o^2 - 1 - \gamma^2\right) + \gamma \\ &= |C_b| - 2\sum_{o\in C_b}\alpha_o + \frac{1-\delta}{1-\varepsilon}\sum_{o\in C_b}\alpha_o^2 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\gamma^2 + \gamma \\ &\geq \rho_{|C_b|} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\gamma^2 + \gamma \\ &\geq \rho_{|C_b|} + \left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)\gamma,\end{aligned} \tag{15}$$

其中倒数第二个不等式与引理 4.5 证明中的 (10 ) 完全相同地推出，而最后一个不等式则由 $\gamma = \frac{w_a}{w_b} \leq 1$ 得出。结合 (14) 和 (15)，可得

$$\begin{aligned}\Delta_a + \Delta_b + \Psi_b &\geq \rho_{|C_b|}w_b^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)\gamma w_b^2 + \delta\beta w_b^2 \\ &= \rho_{|C_b|}w_b^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)w_b w_a + \sum_{o\in C_b}\delta w_b w(N(o, A\backslash\{a,b\})).\end{aligned} \tag{16}$$

最后，结合 (12) 和 (16)，并利用 $w_b \geq w_a$，可得

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_a}{w_a} + \frac{\Psi_a}{w_a} + \frac{\Delta_b}{w_b} + \frac{\Psi_b}{w_b} &\geq \frac{\Psi_a}{w_a} + \frac{\Delta_a + \Delta_b + \Psi_b}{w_b} \\ &\geq \sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,A)) - |C_a|\delta w_a + \rho_{|C_b|}w_b + \left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)w_a + \sum_{o\in C_b}\delta w(N(o, A\backslash\{a,b\}) \\ &= \sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,A)) - |C_a|\delta w_a + \rho_{|C_b|}w_b + \left(1 - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right)w_a \\ &\quad + \sum_{o\in C_b}\delta w(N(o,A)) - |C_b|\delta w_b - |N(a,C_b)|\delta w_a \\ &\geq \delta\sum_{o\in C_a} w(N(o,A)) + \delta\sum_{o\in C_b} w(N(o,A)) + \left(\left(1 - \tfrac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}\right) - k\delta\right)w_a - \left(\rho_{|C_b|} - |C_b|\delta\right)w_b,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了 $|C_a| + |N(a, C_b)| \leq k$，因为 $G$ 是 $(k+1)$-无爪的，且 $C_a \cap C_b = \emptyset$。 □

引理 5.2。考虑 $H_\varepsilon$ 的连通分量。对于每个既非孤立顶点也非孤立边的连通分量，都存在一组子图 $T_1, \ldots, T_p$，这些子图属于该连通分量，其中每个 $T_i$ 都是一棵树，满足 $|E(T_i)| \geq 2$, $|V(T_i)| \leq 2k(k-1) + 1$，且该连通分量的每个顶点恰好出现在一个子树 $T_i$ 中。

引理 5.2 的证明。 在整个证明过程中，我们忽略弧的定向，并将 $H_\varepsilon$ 视为无向图来进行分解。考虑 $H_\varepsilon$ 的一个至少含有 3 个顶点的连通分量，并令 $T$ 为该连通分量的一棵任意（无向）生成树。我们反复对 $T$ 进行如下修改：若其中存在一条边（$a$, $b$），使得 $T$ 那么

在 $T-(a,b)$ 的每个连通分量中至少有 2 条边，那么我们就从 $T$ 中删除 $(a,b)$。重复此过程，直到找不到这样的边为止。注意，每次修改都会减少 $T$ 中的边数，因此该过程必定终止。过程结束后，我们得到一组连通分量 $T_1$、……、$T_p$，每个连通分量都是 $T$ 的一个子树，且至少含有 2 条边； $V(T)$ 的每个顶点恰好出现在连通分量 $T_1$、……、$T_p$ 中的一个。接下来需要界定每个连通分量的大小。任取一个连通分量 $T_i$。注意，若 $T_i$ 中有两个度至少为 3 的顶点 $u$ 和 $v$，那么从 $u$ 到 $v$ 在 $T_i$ 中的路径上删除任意一条边后，会得到两棵树，且每棵树都必定含有 2 条边，因为原先与 $u$ 相连的边中有 2 条仍然保留，与 $v$ 相连的边中也有 2 条仍然保留。因此， $T_i$ 中度大于或等于 3 的顶点至多有 1 个。

首先，假设 $T_i$ 有这样的顶点，令该顶点为 $r$。若 $T_i$ 中的某个顶点 $v$ 与 $r$ 在 $T_i$中的距离为 3，那么移除从 $r$ 到 $v$的路径上的第一条边（$r,u$）后，我们会得到一棵包含该路径最后 2 条边的树，以及一棵包含 $r$ 和至少另外 2 条边的树（因为 $r$ 原本的度至少为 3）。因此，若 $T_i$ 有一个度为 3 或更大的顶点，那么所有其他顶点的度都必须为 2 或 1，且与 $r$ 的距离至多为 2。由于 $H_\varepsilon$ 的度至多为 $k(k-1)$，这意味着任何这样的 $T_i$ 最多包含 $2k(k-1)$ 个 $+1$ 顶点。

现在假设 $T_i$ 没有度大于 2 的顶点。那么， $T_i$ 必定是一条路径。若这条路径至少有 5 条边，则可以移除路径中间的某条边，从而得到两条各含 2 条边的路径。因此，在这种情况下， $T_i$ 实际上是一条长度至多为 4 的路径，因而最多包含 5 个顶点。 □

引理 5.3. 设 $0\le\delta\le\varepsilon\le 1/2$，并假设 $A$ 在 $s$-交换下局部最优，其中 $s\ge 1+2k(k-1)$。那么，

$$\sum_{a\in D}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right]\ge\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(D)+\sum_{a\in D}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)).$$

证明。将引理 5.2 应用于 $H_\varepsilon$ 中至少包含 2 个顶点的每个连通分量，可得到一组树 $T_1$，…，$T_\ell$，其中每个顶点 $a\in D$ 恰好出现在某个 $1\le i\le\ell$ 的 $V(T_i)$ 中，并且 $V(T_1)$…，$V(T_\ell)$，其中对所有 $1\le i\le\ell$，$3\le|V(T_i)|\le s$。然后，对每个 $T_i$ 应用引理 4.3（其中 $B=I_1\cup I_2$）和引理 4.4，可得

$$\begin{aligned}\sum_{a\in V(T_i)}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right]&\ge\sum_{(a,b)\in E(T_i)}w_a+\sum_{a\in V(T_i)}\sum_{o\in C_a}\varepsilon w(N(o,I_1\cup I_2))\\&\ge\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(T_i)+\sum_{a\in V(T_i)}\sum_{o\in C_a}\varepsilon w(N(o,I_1\cup I_2))\\&\ge\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(T_i)+\sum_{a\in V(T_i)}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)).\end{aligned}$$

将所得不等式分别对每个 $i=1$，…，$\ell$ 求和，即可得到所述结果。 □

与定理 4.8类似，下面的定理表明，近似因子取决于孤立爪、孤立边以及较大连通分量中以顶点为中心的爪之间的权衡。

定理 5.4。若 $A$ 在 $s\ge 1+2k(k-1)$ 的 $s$-交换下是局部最优的，则对任意 $0\le\varepsilon\le 1/2$,

$$w(O)\le\left[\tfrac{k+1}{2}-\tfrac{1}{2}\min\left\{\tfrac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon},\,\rho_k,\,2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right\}\right]w(A),$$

其中 $\rho_k$，$(k-1/\sqrt{1-\varepsilon})(1-\sqrt{1-\varepsilon})$。

证明。与定理 4.8 的证明中一样，令 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$ 并注意到 $\delta \le \varepsilon$。将引理 5.1 中的不等式对所有孤立边（$a$，$b$）求和，并注意到每个 $v \in I_2$ 恰好出现在一条孤立边中，分别作为 $a$ 或 $b$，我们得到：

$$\sum_{v\in I_2}\left[\frac{\Delta_v}{w_v}+\frac{\Psi_v}{w_v}\right] \ge \sum_{v\in I_2}\min\left\{1-\tfrac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon}-k\delta,\ \rho_{|C_v|}-|C_v|\delta\right\}w_v + \sum_{v\in I_2}\sum_{o\in C_v}\delta w(N(o,A)).$$

对于 $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon}$，有 $1-\frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon} = 1-\frac{\sqrt{1-\varepsilon}-(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} = 2-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}$。此外，根据引理 4.7，有 $\rho_{|C_b|}-|C_b|\delta = \rho_k-(k-|C_b|)\delta-|C_b|\delta = \rho_k-k\delta$ 对每个 $b$ 均成立。因此，上述不等式意味着：

$$\begin{aligned}\sum_{v\in I_2}\left[\frac{\Delta_v}{w_v}+\frac{\Psi_v}{w_v}\right] &\ge \min\left\{2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}-k\delta,\ \rho_k-k\delta\right\}w(I_2)+\sum_{v\in I_2}\sum_{o\in C_v}\delta w(N(o,A)) \qquad (17)\\ &\ge \min\left\{2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}-k\delta,\ \rho_k-k\delta\right\}w(I_2)+\sum_{v\in I_2}\sum_{o\in C_v}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)).\end{aligned}$$

此外，引理 4.6（其中 $B = I_1\cup I_2$）和 5.3 意味着：

$$\sum_{a\in I_1}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge (\rho_k-k\delta)\,w(I_1)+\sum_{a\in I_1}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)), \qquad (18)$$

$$\sum_{a\in D}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(D)+\sum_{a\in D}\sum_{o\in C_a}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)). \qquad (19)$$

将（17）、（18）和（19）相加，可得实例总松弛量的如下界：

$$\sum_{a\in A}\left[\frac{\Delta_a}{w_a}+\frac{\Psi_a}{w_a}\right] \ge \frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(D)+\left(\min\left\{2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},\ \rho_k\right\}-k\delta\right)w(I_1\cup I_2)+\sum_{o\in O}\delta w(N(o,I_1\cup I_2)).$$

在引理 3.1 中使用此界，最终可得：

$$\begin{aligned}2w(O) &\le w(A)+\sum_{o\in O}w(N(o,A))-\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(D)\\ &\quad-\left(\min\left\{2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},\ \rho_k\right\}-k\delta\right)w(I_1\cup I_2)-\sum_{o\in O}\delta w(N(o,I_1\cup I_2))\\ &= w(A)+\sum_{o\in O}w(N(o,A\backslash(I_1\cup I_2)))+(1-\delta)\sum_{o\in O}w(N(o,I_1\cup I_2))\\ &\quad-\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon}w(D)-\left(\min\left\{2-\tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},\ \rho_k\right\}-k\delta\right)w(I_1\cup I_2)\end{aligned}$$

利用如下事实：对于任意 $B\subseteq A$，每个 $a\in B$ 在 $N(o,B)$ 中至多对应 $k$ 个不同的 $o$ 值，因此有：$\sum_{o\in O}w(N(o,A\backslash(I_1\cup I_2))) \le kw(A\backslash(I_1\cup I_2))$，且 $\sum_{o\in O}w(N(o,I_1\cup I_2)) \le kw(I_1\cup I_2)$。将上述界代入前面的计算，即可得到所需的

结果

$$
\begin{aligned}
2w(O) &\le w(A) + kw(A\backslash(I_1 \cup I_2)) + k(1-\delta)w(I_1 \cup I_2) - \frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon} w(D) \\
&\quad - \left(\min\left\{2 - \tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},\, \rho_k\right\} - k\delta\right) w(I_1 \cup I_2) \\
&= w(A) + kw(A) - \frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon} w(D) - \min\left\{2 - \tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}},\, \rho_k\right\} w(I_1 \cup I_2) \\
&\le (k+1)w(A) - \min\left\{\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon},\, \rho_k,\, 2 - \tfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right\} w(A)
\end{aligned}
$$

□

## 6 我们最终的保证

在前面的章节中，我们展示了如何将关于 $s$-交换的局部最优性转化为取决于给定参数 $0 \le \varepsilon \le 1/2$的保证。在这里，我们给出定理 1.1 的最终详细版本，该版本为 $k$ 的不同取值提供具体保证，同时还量化了我们保证在 $k$中的渐近行为。关于 $\varepsilon$的精确数值以及相对于因子 $\frac{k+1}{2}$ 的改进显示在表 2中。

| 交换规模: | $k^2(k-1)+1$ | | | $2k^2(k-1)+1$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $\tau_k/2$ | APX | $\varepsilon$ | $\tau_k/2$ | APX | $\varepsilon$ |
| 3 | 0.189 | 1.811 | 0.3918 | 0.214 | 1.786 | 0.4533 |
| 4 | 0.210 | 2.290 | 0.2753 | 0.251 | 2.249 | 0.3281 |
| 5 | 0.219 | 2.781 | 0.2144 | 0.269 | 2.731 | 0.2614 |
| 6 | 0.225 | 3.275 | 0.1759 | 0.281 | 3.219 | 0.2176 |
| 7 | 0.229 | 3.771 | 0.1494 | 0.289 | 3.711 | 0.1866 |
| 8 | 0.232 | 4.268 | 0.1298 | 0.294 | 4.206 | 0.1635 |
| 9 | 0.234 | 4.766 | 0.1148 | 0.299 | 4.701 | 0.1455 |
| 10 | 0.236 | 5.264 | 0.1029 | 0.302 | 5.198 | 0.1311 |

表 2：不同 $k$取值下的 $\varepsilon$ 最优设置和近似比。此处， $\tau_k/2$、 $\tau'_k$ 衡量相对于 $\frac{k+1}{2}$ 的改进。

定理 **1.1** (完整)。 算法*2.1* 的近似因子为 $\frac{k+1-\tau_k}{2}$，其中

- 对于 $s = k(k-1)+1$， $\tau_k =$最大值$_{\varepsilon\in[0,1/2]}$最小值 $\left\{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon},\ \left(k - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon})\right\}$对于任意 $0 \le \varepsilon \le 1/2$，且关于 $k$ 单调不减，满足 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 1/2$。
- 对于 $s = 2k(k-1)+1$， $\tau_k =$最大值$_{\varepsilon\in[0,1/2]}$最小值 $\left\{\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon},\ \left(k - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon}),\ 2 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right\}$对于任意 $0 \le \varepsilon \le 1/2$，且关于 $k$ 单调不减，满足 $\lim_{k\to\infty} \tau_k = 2/3$。

定理的证明 *1.1*。 对于 $\tau_k$，其值可直接由定理 4.8 和 5.4 得出。注意，对于每个 $\varepsilon \in [0, 1/2]$, 每个最大值中的第二项都是 $k$的增函数，而其余各项均为常数。因此， $\tau_k$ 是 $k$ 的非递减函数。

在证明的其余部分，我们省略 $\tau_k$ 中的下标 $k$，并简记为 $\tau$。为了求出在给定 $k$ 时定义 $\tau$ 的 $\varepsilon$ 的值，可以令保证 $\left(k - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon})$

和 $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$ 或 $\frac{2}{(1-\varepsilon)(3-\varepsilon)}$，分别相等。这会得到一个关于 $\sqrt{1-\varepsilon}$ 的四次方程，其解难以处理。因此，我们在此改为在表 $3 \le k \le 10$ 中给出 2 的数值解，只需将给定的 $\varepsilon$ 代入最小值中的各项即可轻松验证。当$k$取较大值时，为了证明所声称的渐近行为，而非精确刻画 $\tau$ 收敛到 $1/2$ 和 $2/3$ 的收敛速度，我们采用一个粗略的界。具体而言，令 $\varepsilon = 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^2$，并注意到 $\sqrt{1-\varepsilon} = \frac{k-1}{k}$，且对所有 $k \ge 4$，$0 \le \varepsilon < \frac{1}{2}$。于是，对所有 $k \ge 4$，

$$2 - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = 2 - \frac{k}{k-1},$$

$$\left(k - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon}) = \left(k - \frac{k}{k-1}\right)\left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = k - (k-1) - \frac{k}{k-1} + 1 = 2 - \frac{k}{k-1},$$

$$\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon} \le \frac{1}{2},$$

$$\frac{2(1-\varepsilon)}{3-\varepsilon} \le \frac{2}{3}.$$

现在注意到，对于所有 $k \ge 4$，$2 - \frac{k}{k-1} = 1 - \frac{1}{k-1} \ge \frac{2}{3}$。因此，对于 $k \ge 4$，我们有 $\tau = \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$，对于 $s = k(k-1)$ ~~$+1$~~，以及 $\tau = \frac{2}{(1-\varepsilon)(3-\varepsilon)}$，对于 $s = 2k(k-1) + 1$。只需注意 $\lim_{k\to\infty} \varepsilon = \lim_{k\to\infty} 1 - \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 = 0$ 即可。 □

## 7 结论与未来方向

本文的核心成果是设计并分析了一种大规模邻域搜索算法，用于求解（$k+1$）-无爪图上的最大权独立集问题。我们证明，$O(k^3)$ 邻域搜索足以使加权 3-集合打包问题的近似比达到 1。786，且其渐近近似保证为 $\frac{k+\frac{1}{3}}{2}$，当 $k \to \infty$ 时；这大幅改进了 Neuwohner 的 $\frac{k+1}{2} - \frac{1}{63\,700}$，$992$ 的界，$k = 3$ 也优于随后针对中等规模[3]的改进。尽管我们得到了更优的近似比，但本文的主要目标是提供分析 Berman 算法在大规模交换方面表现的工具。我们认为，这些技术具有通用性，还可以进一步扩展，从而为 $k = 3$ 提供 $\sqrt{3}$-近似，并为 $k \ge 4$提供 $\frac{k}{2}$ -近似。特别是，受例3的启发，研究针对孤立顶点进行大规模交换的影响将很有意义，这也为未来的改进留下了空间。

## 参考文献


[1] Esther M Arkin 和 Refael Hassin。关于加权 $k$-集合打包的局部搜索。《运筹学数学》，23(3):640–648，1998。（↑ 2，5）

[2] Piotr Berman。无爪图中最大权独立集的 d/2 近似 $d$-爪无关图。载于斯堪的纳维亚算法理论研讨会，第 214–219 页。Springer，2000。（↑ 2，3，5，6，7，8，24）


[3]我们简要指出，对于 $k = 10$，我们获得了 0.302 的改进，相较于$\frac{k+1}{2}$，这为我们对所有 $k \ge 10$ 获得的改进次数给出了下界。对于所有 $k \le 229$，该下界都大于 $\frac{k+1}{2} -$ 给出的改进（0.4986（$k+1$）$+0.0208$）。

[3] Piotr Berman 和 Marek Karpinski。小规模出现优化问题的改进近似下界。ECCC，（8），2003。（↑ 1）[4] Piotr Berman 和 Piotr Krysta。优化误导。载于 SODA，第 192–201 页，2003。（↑ 5）[5] Yuk Hei Chan 和 Lap Chi Lau。关于超图匹配的线性规划与半定规划松弛。数学规划，135(1):123–148，2012。（↑ 5）[6] Barun Chandra 和 Magn´us M Halld´orsson。贪心局部改进与加权集合打包近似。算法杂志，39(2):223–240，2001。（↑ 5）[7] Marek Cygan。通过有界路径宽度局部搜索改进三维匹配的近似。载于 SODA，第 509–518 页，2013。（↑ 2，5）[8] Marek Cygan、Fabrizio Grandoni 和 Monaldo Mastrolilli。如何出售超边：超匹配分配问题。载于 SODA，第 342–351 页，2013。（↑ 5）[9] Jack Edmonds。路径、树与花。加拿大数学杂志，17:449–467，1965。（↑ 1）[10] Martin F¨urer 和 Huiwen Yu。通过局部改进近似 $k$-集合打包问题。载于 ISCO，第 408–420 页，2014。（↑ 2，5）[11] Magn´us M. Halld´orsson。通过局部改进近似离散集合族。载于 SODA，第 160–169 页，1995。（↑ 5）[12] Elad Hazan、Shmuel Safra 和 Oded Schwartz。近似 $k$-集合打包的复杂性。计算复杂性，15(1):20–39，2006。（↑ 1）[13] Cor A. J. Hurkens 和 Alexander Schrijver。每 t 个集合均具有代表元系的集合系统的规模，以及其在打包问题启发式算法最坏情况比率中的应用。SIAM 离散数学杂志，2(1):68–72，1989。（↑ 2，5）[14] Richard M. Karp。组合问题之间的可归约性。载于《计算机计算的复杂性》，IBM 研究研讨会系列，第 85–103 页。Plenum出版社，纽约，1972。（↑ 1）[15] Meike Neuwohner。 $d$-爪无关图中最大权独立集问题的改进近似算法。载于 STACS，第 187 卷，第 53:1–53:20 页，2021。（↑ 2）[16] Meike Neuwohner。加权 $k$-集合打包的局部搜索极限。载于 IPCO，第 415–428 页。Springer，2022。（↑ 2，3）[17] Meike Neuwohner。突破 d-爪无关图中最大权独立集问题的纯局部搜索极限。arXiv，abs/2202.01248，2022。（↑ 3，22）[18] Mohit Singh 和 Kunal Talwar。通过 Chv´atal-Gomory 舍入改进整数间隙。载于 APPROX，第 366–379 页，2010。（↑ 5）[19] Maxim Sviridenko 和 Justin Ward。最大集合打包问题的大邻域局部搜索。载于 ICALP，第 792–803 页。Springer，2013。（↑ 5）

# A 附录

## A.1 省略的证明

引理 4.7。设 $0 \le \varepsilon < 1$，并令集合 $\delta = 1 - \sqrt{1-\varepsilon}$。那么， $\delta \le \varepsilon$，且对所有 $0 \le t \le k$,

$$\rho_t \triangleq \frac{t(\varepsilon-\delta)}{1-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon} = \left(t - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)(1-\sqrt{1-\varepsilon}) = \left(t - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)\delta.$$

特别地，对所有 $0 \le t \le k$， $\rho_t = \rho_k - (k-t)\,\delta$。

证明。当 $\delta = 1 - \sqrt{1-\varepsilon}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
\rho_t &= t\frac{\varepsilon-\delta}{1-\delta} - \frac{\varepsilon-\delta}{1-\varepsilon} \\
&= t\frac{\sqrt{1-\varepsilon} - (1-\varepsilon)}{\sqrt{1-\varepsilon}} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon} - (1-\varepsilon)}{1-\varepsilon} \\
&= t(1-\sqrt{1-\varepsilon}) - \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{\sqrt{1-\varepsilon}} \\
&= \left(t - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)\delta.
\end{aligned}$$

还需注意，对所有 $0 \le \varepsilon < 1$， $1 - \sqrt{1-\varepsilon} \le 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon$，因此 $\delta \le \varepsilon$，如所需。对于引理的最后一个结论，注意对所有 $0 \le t \le k$，我们有 $\rho_k = \left(k - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)\delta = \left(t - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)\delta + (k-t)\delta = \rho_t + (k-t)\delta.$ □

## A.2 算法 2 执行的交换次数上界 .1

在此前的所有分析中，我们仅依赖于算法 $A$ 产生的集合的局部最优性2.1，而没有考虑收敛到此类局部最优解所需的时间。在此，我们证明，Berman [2], 所用的权重缩放论证与一轮部分枚举相结合，可以和我们的结果结合起来，得到一个多项式时间算法。我们首先简要回顾 [2]中使用的一般权重缩放方法。

假设对于权重函数 $w$，任何关于算法 2.1 所考虑的改进而达到局部最优的 $A$，都满足 $\alpha w(A) \ge w(O)$，其中近似因子为$\alpha \ge 1$。设 $G(V,E)$ 是一个给定的无爪图，其权重为 $w_v$（对 $v \in V$而言），并设 $O \subseteq V$是 $G$ 的一个最大权重独立集。我们运行标准贪心算法构造一个解 $S_0$，然后令 $d$，$\varepsilon w^{n}(S_0)$。接着，我们使用权重函数 $\tilde{w}_v$ 为所有 $v \in V$定义该问题的一个新实例，并从解 $S_0$出发，对这个新实例应用算法 2.1。于是，对于算法 2.1 所维护的所有集合 $S$，我们都有$\tilde{w}(S) \le dw(S) \le dw(O)$；又由于权重 $\tilde{w}_v$ 均为整数，因此该算法至多可以执行

$$\tilde{w}^2(O) - \tilde{w}^2(S_0) \le \tilde{w}^2(O) \le k\tilde{w}^2(S_0) \le k\tilde{w}(S_0)^2 \le k\left(dw(S_0)\right)^2 = kn^2\varepsilon^{-2}$$

在达到局部最优集合 $A$ 之前的改进次数。对于第二个不等式，注意到每当 $w_a \le w_b$, $\tilde{w}_a^2 \le \tilde{w}_b^2$ 也成立，因此，针对权重函数 $w$ 的任何贪心解也都是针对权重函数 $\tilde{w}^2$ 的贪心解。由此可得该不等式，因为对于 $(k+1)$-爪无图中的最大权独立集问题，贪心算法的近似因子至多为 $k$。

令 $A$ 为对 $G$ 应用算法 2.1 并使用权重函数 $\tilde{w}$所得到的局部最优解。那么， $\alpha\tilde{w}(A) \geq \tilde{w}(O)$, 因此

$$\alpha dw(A) \geq \alpha\tilde{w}(A) \geq \tilde{w}(O) \geq dw(O) - |O|,$$

这进而意味着

$$\alpha w(A) \geq w(O) - \frac{\varepsilon w(S_0)}{n}|O| \geq w(O) - \varepsilon w(S_0) \geq w(O) - \varepsilon w(O).$$

综上，将算法2.1 应用于 $\tilde{w}$ 可得到近似因子 $\alpha/(1-\varepsilon)$，且最多使用 $kn^2\varepsilon^{-2}$ 次改进。

现在我们证明，实际上可以完全消除这一 $\varepsilon$ 损失。对于每个 $v \in V$，我们构造一个残余实例 $G'(V', E') = G[V \backslash N(v, V)]$。然后，我们在 $G'$上运行上述局部搜索过程，其中 $\varepsilon = (\alpha-1)$ $n^{-1} = \Omega(n^{-1})$，并返回所有 $n$实例中得到的最佳解。注意，对于 $G'$中的任意独立集 $I$， $I \cup \{v\}$ 是 $G$中的一个独立集。令 $\hat{v} = \arg\max_{a \in O} w_a$为最优解中权重最大的顶点，并考虑满足 $v = \hat{v}$的残余实例。令 $A'$ 为我们的算法在该实例上生成的解，并令 $O', O - \hat{v}$。那么， $A = A' \cup \{\hat{v}\}$ 是 $G$ 中的一个独立集，并且

$$\alpha w(A) = \alpha w_{\hat{v}} + \alpha w(A') \geq \alpha w_{\hat{v}} + w(O') - \varepsilon w(O') = w(O) + (\alpha-1)w_{\hat{v}} - \frac{\alpha-1}{n}w(O') \geq w(O),$$

其中，最后一个不等式由 $w_{\hat{v}} = \max_{v \in O} w_v \geq \frac{1}{|O|}w(O) \geq \frac{1}{n}w(O) \geq \frac{1}{n}w(O')$ 得出。综上，考虑算法生成的所有 $n$ 个解中最好的一个，可得一个权重至少为 $w(A)$ 的解，因此我们获得了一个因子为 $\alpha$ 的近似。 此外，最终算法在算法的所有 $n$ 次迭代中最多执行 $n^3k^2\varepsilon^{-1} = O(n^4k)$ 次改进。

## A.3 第 4 节分析的一个相匹配的下界4

这里我们给出一个小例子，说明必须引入新思路，才能改进第 4 节中的分析。该分析在，条件下得出的因子为 1 $k = 3$，这是通过平衡非孤立顶点所获得的改进 $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$ 与孤立顶点所获得的改进 $\rho_3$得到的。这得出的值为 $\varepsilon \approx 0.3918$ （见表 2）。

图 3 所示的例子表明，我们的分析几乎是紧的，近似误差仅为 0。02。该例由一个中心顶点及其映射到 $O$ 中的 3 个顶点组成，映射由 $\pi$给出。我们通过两条路径将这个中心顶点连接起来，路径上的所有顶点在映射 $\pi$中都与 $O$ 中的 2 个顶点相连。顶点的权重设置为：对于某个 $A$中的每个顶点，它在 $H_{\varepsilon'}$ 中都是孤立的，且对应某个 $\varepsilon'$ 略小于 $\varepsilon$的值。因此，在分析中，我们将每个爪视为一次交换。最优解中顶点的权重固定为 $\Delta_a = 0$ 对所有 $a \in A$都成立。注意，我们的例子并非算法 2.1的紧例，因为存在一次改进性的二交换。然而，正如我们将要证明的，这个例子表明，要进一步改进，我们需要考虑涉及孤立顶点的更大交换，或者为非孤立顶点找到一个更好的界 $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$，从而能够在最终分析中提高 $\varepsilon$。紧例的近似比如下：

$$\frac{w(A)}{w(O)} = \frac{1 + 2\sum_{i=1}^{\ell}(1-\varepsilon)^i}{3\sqrt{\frac{1+2(1-\varepsilon)^2}{3}} + 4\sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon)^2}{2}}\sum_{i=1}^{\ell-1}(1-\varepsilon)^i + 4\frac{(1-\varepsilon)^\ell}{\sqrt{2}}},$$
$$\xrightarrow[\ell\to\infty]{} \frac{2\varepsilon^{-1} - 1}{3\sqrt{\frac{1+2(1-\varepsilon)^2}{3}} + 4\sqrt{\frac{1+(1-\varepsilon)^2}{2}}(\varepsilon^{-1} - 1)}.$$

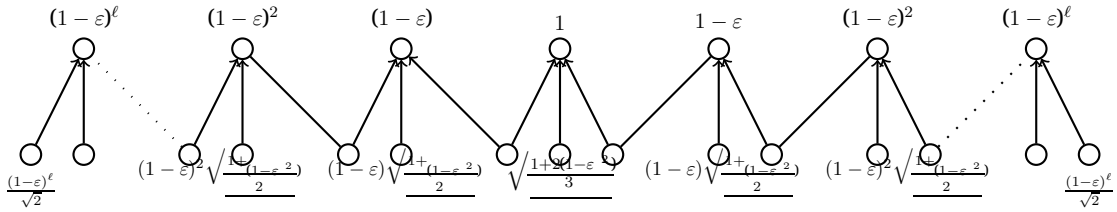



图 3：我们分析中的近乎紧确示例，其中顶部的顶点是当前解中的顶点，底部的顶点是最优解中的顶点。标注的数值对应单个顶点。

对于 $\varepsilon = 0.3918$，先前近似比的值为 $\simeq (1.80857)^{-1}$。相比之下，对于相同的 $\varepsilon$，针对非孤立顶点得到的界为 $(2 - \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon()})^{-1} = (1.81091)^{-1}$。

图 3 表明，对当前分析做一些小幅修改无法将近似因子降至 1。8 以下。这个示例体现了变量 $\varepsilon$ 所面临的矛盾。一方面，图 3 的近似因子会随着 $\varepsilon$ 增大而降低。但随着 $\varepsilon$ 增大，交换的界限，即 $\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}$，会降低。这表明，要突破 1。8 的近似因子，我们必须改进对非孤立顶点的界限，或者拓展现有技术，将孤立顶点合并到多次交换中。