arXiv:2301.07541v2 [physics.flu-dyn] 3 Nov 2023

利用生成对抗网络推断旋转湍流中的速度分量

TianyiLi[1*]，Michele Buzzicotti[1],Luca Biferale[1] 和 Fabio Bonaccorso[1]1*意大利国家核物理研究院与罗马第二大学“Tor Vergata”物理系，Via della Ricerc a Scientifica 1，罗马，00133，意大利。

*通讯作者。电子邮件：tianyi.li@roma2.infn.it；贡献作者：michele.buzzicotti@roma2.infn.it；luca.biferale@roma2.infn.it；fabio.bonaccorso@roma2.infn.it；

摘要

本文研究旋转湍流流动二维快照的推断问题。我们对线性扩展本征正交分解（EPOD）方法、非线性卷积神经网络（CNN）和生成对抗网络（GAN）的逐点重建与统计重建能力进行了系统的定量基准测试。我们着眼于一项重要任务：根据一个速度分量的测量值推断另一个速度分量，并研究了两种情况：（I）两个分量均位于垂直于旋转轴的平面内；（II）其中一个分量平行于旋转轴。结果表明，EPOD 方法仅在前一种情况下表现良好，此时两个分量具有很强的相关性；而在逐点重建和统计重建方面，CNN 和 GAN 始终优于 EPOD。对于情况（II），当输入和输出数据的相关性较弱时，所有方法都无法忠实重建逐点信息。在这种情况下，只有 GAN 能够从统计意义上重建流场。分析采用了基于预测与真实值之间 $\boldsymbol{L_2}$空间距离的标准验证工具，并结合使用小波分解进行更精细的多尺度分析。统计验证则基于概率密度函数、谱特性和多尺度平坦度的标准詹森-香农散度。

关键词： 统计推断、湍流、扩展正交分解、卷积神经网络、生成对抗网络

1 引言

理解并预测地球物理和实验室装置中的湍流过程，是解答许多重要问题的关键 [1–4]。尽管观测技术不断进步，但迄今为止可用数据的质量和数量在许多方面仍然不足。最主要的局限来自测量灵敏度不足以及时空稀疏性 [5–7]。因此，人们开发了不同的工具，用于根据稀疏／含噪／有限的测量值重建完整的“稠密”场。缺失数据本征正交分解（GPOD）基于特征模态进行线性重建 [8]，，后来又在 [9] 中得到改进并应用于一个简单、理想化且具有代表性的案例：存在随机时空缺失的绕圆柱体流动。近来，受卷积神经网络（CNN）在计算机

视觉任务中的成功所启发，一系列概念验证研究采用生成对抗网络（GAN） [10] 在存在较大缺失区域的情况下，重建三维（3D）旋转湍流的二维（2D）快照 [11, 12]。在我们此前的工作中 [12], , 我们系统比较了基于 POD 和 GAN 的重建在逐点误差及湍流统计特性方面的表现，考察了不同大小和几何形状的缺失区域。对于超分辨率任务，卷积神经网络和生成对抗网络已被用于根据时空低分辨率粗糙数据恢复高分辨率的层流或湍流 [13–16]。此外，近期也有研究提出使用卷积神经网络或生成对抗网络，根据若干二维截面重建三维速度场 [17] ，或根据非配对二维速度观测的一个横截面进行重建[18]。

本文探讨了不同的推断问题，这些问题与可测量物理场多样性中的缺口有关。具体而言，我们想知道，能在多大程度上利用三维湍流速度场一个分量的测量结果来预测另一个分量。对于许多野外和实验室应用而言，这个问题显然十分重要，因为传感器/观测设备只能采集某些优选方向上的脉动，例如粒子图像测速（PIV） [19, 20]以及基于卫星红外图像的风观测 [21–25]。可利用扩展本征正交分解（EPOD），通过在预定义的独立函数基底上进行线性分解来处理推断问题[26]。最近，有研究表明，对于湍流明渠流，可以利用全非线性卷积神经网络（CNN） [27] 和生成对抗网络（GAN）[28]，根据壁面剪切应力分量和壁面压力，以较高的统计精度预测不同壁面法向位置处的二维速度脉动场。本文提出一个更复杂的多目标问题，考察能在多大程度上推断未知场，包括（i）点对点误差L_2 和（ii）统计特性，例如依据真实值的概率密度函数（PDF）与预测速度分量的概率密度函数（PDF）之间的 Jensen-Shannon（JS）散度进行评估。

为了聚焦于一些重要应用，我们关注旋转三维湍流这一情形；这一系统具有丰富的物理内涵，并且与

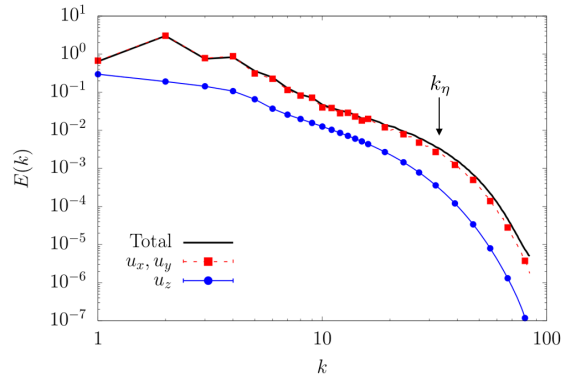

图 1 TURB-Rot数据库 [39]中不同速度分量的能谱及总能谱。科尔莫戈洛夫耗散波数$k_\eta = 32$被确定为总能谱开始呈指数衰减时对应的尺度。

地球物理和工程问题密切相关 [29–31]。在强旋转作用下，流动趋于准二维，并形成平行于旋转轴的大尺度相干涡结构 [32–34]。此外，由于正向能量级联，小尺度上存在强烈的非高斯三维间歇性脉动 [35–38]。向准二维构型发展的趋势意味着，面外速度分量 u_z的行为近似于由平面内分量 u_x 和 u_y输运的被动标量。图 1 展示了这一点，其中给出了本研究所用数据库中不同速度分量的能谱。显然，在整个尺度范围内， u_x 或 u_y 的能量均显著高于 u_z，这表明u_z 几乎与主导动力学解耦。因此， u_x 和 u_y 彼此具有较强相关性，而预计 u_z 的相关性较弱（图 2）。本研究评估了 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络方法在垂直于旋转轴的二维切片上推断速度分量的潜力。我们将分析限定在仅提供瞬时测量值、且不含任何时间序列信息的情形。如图 2 所示，我们研究了两个难度不同的任务： （I）使用一个平面内分量u_x预测另一个平面内分量 u_y； （II）使用一个平面内分量 u_x预测面外分量u_z。

本文的组织结构如下。在第 2节中，我们介绍用于评估推理工具的数据集，并介绍 EPOD

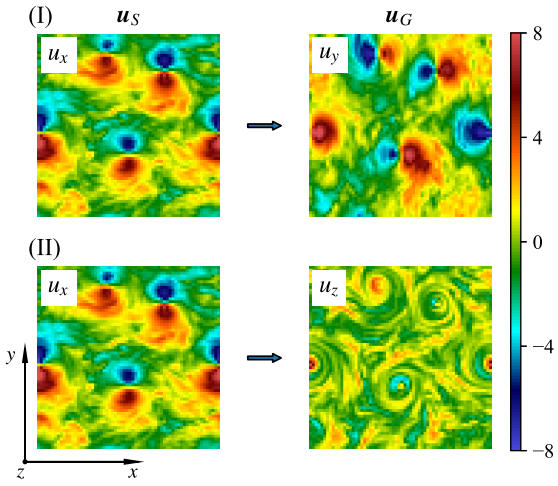

图 2 三维湍流旋转流二维切片上两种推断任务的示例：(I) 使用 u_x 推断 u_y；(II) 使用 u_x 推断 u_z。旋转轴沿 z 方向。请注意，平面内分量 u_x 和 u_y彼此高度相关，而平面外分量 u_z与 u_x 和 u_y的相关性较弱。这里，$\boldsymbol{u}_S$和 $\boldsymbol{u}_G$ 分别表示测量量和待推断的物理量。

和基于生成对抗网络的方法。本研究使用的卷积神经网络取自生成对抗网络的生成器部分。上述工具在两个推断任务上的结果见第 3节。最后，我们在第4节总结全文。

2 方法论

2.1 数据集

为评估不同工具在速度分量推断方面的表现，我们使用 TURB-Rot数据库 [39]，。该数据库基于在三维周期性区域内对不可压缩旋转流体的纳维–斯托克斯方程进行直接数值模拟（DNS）而获得，其方程可写为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} + \nu\Delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \quad (1)$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 是不可压缩速度，$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\boldsymbol{z}}$是旋转矢量，$\tilde{p}$ 是旋转坐标系中的修正压力，外力 $\boldsymbol{f}$ 作用于 $k_f = 4$ 附近的尺度上，并由二阶奥恩斯坦–乌伦贝克过程 [40, 41]生成。为扩大惯性区间，耗散 $\nu\Delta\boldsymbol{u}$由超黏性项 $\nu_h\nabla^4\boldsymbol{u}$模拟。此外，在大尺度上使用线性摩擦项，以减少大尺度凝聚的形成 [37]。定常状态下的罗斯贝数为 $Ro = \mathcal{E}^{1/2}/(\Omega/k_f) \approx 0.1$，其中$\mathcal{E}$ 是流场动能。科尔莫戈洛夫耗散波数 $k_\eta = 32$选为总能谱 $E(k$开始呈指数衰减时对应的尺度（图1）。给定区域长度 L_0，积分长度尺度为$L = \mathcal{E}/\int kE(k)\,\mathrm{d}k \approx 0.15L_0$，积分时间尺度为 $T = L/\mathcal{E}^{1/2} \approx 0.185$。有关模拟的更多详情，请参阅 [39]。

尽管本研究中的所有推理工具都可应用于三维数据，但为与地球物理观测和 PIV 实验相联系，并限制训练所用数据量，我们在此仅研究二维水平切片（参见 [14, 15, 17, 18]，其中介绍了若干针对三维数据集的应用）。为从模拟中提取数据，我们首先在统计稳态期间对完整三维速度场进行快照采样。快照之间选取较大的时间间隔 $\Delta t_s = 5.41T$，以降低它们在时间上的相关性。早期时段内共采样了 600 个快照，覆盖时间范围 $3243T$，用于训练和验证；较晚时段内则采样了 160 个快照，覆盖时间范围 $865T$。训练 / 验证与测试所用的两组采样之间的时间间隔超过 $3459T$。其次，通过在傅里叶空间中进行伽辽金截断，将采样场的分辨率从 256^3 降至 64^3：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\|\boldsymbol{k}\|\le k_\eta} \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \quad (2)$$

其中，截断波数选为科尔莫戈洛夫耗散波数，从而只剔除完全耗散的自由度；在这些自由度对应的区域，流动可近似为线性，且近似精度较高。这样做是为了在减少待分析数据量的同时，避免降低任务的复杂度。对于每种降采样配置，我们在不同的 z 层级选取了 16 x-y 个平面，并利用周期性边界条件 [39]将每个平面扩增为 11 个（用于训练/验证）或 8 个（用于测试）。对两组平面分别进行随机打乱后，数据集按以下比例划分为训练集/验证集/测试集：84480/10560/20480，分别占 73.1%、9.1% 和 17.7%。

2.2 EPOD 推断

将向量 $\boldsymbol{u}_S$ 记为测量量，$\boldsymbol{u}_G$ 记为待推断的物理量，它们定义在空间二维区域 Ω 上。请注意，当测量量或待推断的物理量只有一个时，$\boldsymbol{u}_S$ 或 $\boldsymbol{u}_G$ 就成为标量。对于推断任务 (I)，使用 u_x 来预测 u_y，可表示为

$$\boldsymbol{u}_S \colon u_x \to \boldsymbol{u}_G \colon u_y, \tag{3}$$

以及对于推断任务（II），

$$\boldsymbol{u}_S \colon u_x \to \boldsymbol{u}_G \colon u_z, \tag{4}$$

见图 2。EPOD 方法的第一步是计算相关性矩阵

$$\mathcal{R}_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{y})^T \rangle, \tag{5}$$

其中，with $\langle \cdot \rangle$ 表示对为训练集选取的各个配置取平均。然后我们求解特征值问题

$$\int_\Omega \mathcal{R}_S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y} = \sigma_n \boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

其中，$n = 1$、.....、N_Ω，且 N_Ω 是区域 Ω 中物理点的数量，由此得到特征值 σ_n 和 POD 特征模态 $\boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{x})$。显然，观测场的任意一次实现均可分解为

$$\boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N_\Omega} b_S^{(n)} \boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

其中，POD 系数由内积给出：

$$b_S^{(n)} = \int_\Omega \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{8}$$

此外，利用 POD 特征模态的正交性，还可以写出以下恒等式 [26]:

$$\boldsymbol{\phi}_S^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \langle b_S^{(n)} \boldsymbol{u}_S(\boldsymbol{x}) \rangle / \sigma_n. \tag{9}$$

扩展 *POD* 模态的 理念是将精确关系（9）推广到以下情况：在等式右侧，我们使用待推断的物理量，即将 $\boldsymbol{u}_S$ 替换为 $\boldsymbol{u}_G$ 但仍使用相同的系数 b_n，这些系数定义于（8）：

$$\boldsymbol{\phi}_E^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \langle b_S^{(n)} \boldsymbol{u}_G(\boldsymbol{x}) \rangle / \sigma_n. \tag{10}$$

完成训练流程并定义 EPOD 模态集（10）后，对于训练集之外的任意新构型，均可开始推断过程：采集测量分量 $\boldsymbol{u}_S$（$\boldsymbol{x}$），计算系数（8），并将预测/推断场定义为

$$\boldsymbol{u}_G^{(p)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N_\Omega} b_S^{(n)} \boldsymbol{\phi}_E^{(n)}(\boldsymbol{x}). \tag{11}$$

$\boldsymbol{u}_G^{(p)}$ 表示由推断方法（此处为 EPOD）得到的预测。注意，在测试数据的测量值下，$b_S^{(n)}$ 在（11）中根据（9）计算得出，这与训练集的 $b_S^{(n)}$ 在（10）中不同。

2.3 基于 GAN 的上下文编码器推断

生成对抗网络 [10] 已被提出用于从随机输入集中生成二维图像。其架构由两个神经网络组成：生成器和判别器。生成器尝试创建与训练数据在统计上相似的新数据，而判别器则尝试区分真实数据和生成数据。两个网络以类似博弈的方式共同训练：生成器试图欺骗判别器，而判别器则试图准确地区分真实数据和生成数据。在学习阶段，生成器逐渐擅长创建能够欺骗判别器的逼真数据，从而生成高质量数据。对于本文所研究的任务——根据某些输入配置推断数据——典型的生成对抗网络架构必须稍作调整，使用上下文编码器 [42]，它以测量数据（而非随机向量）作为输入，并增加第二个损失项，用于衡量生成对抗网络输出与真实配置之间的 L_2 逐点距离。我们此前的研究已使用这些架构重建含缺失数据的二维湍流配置

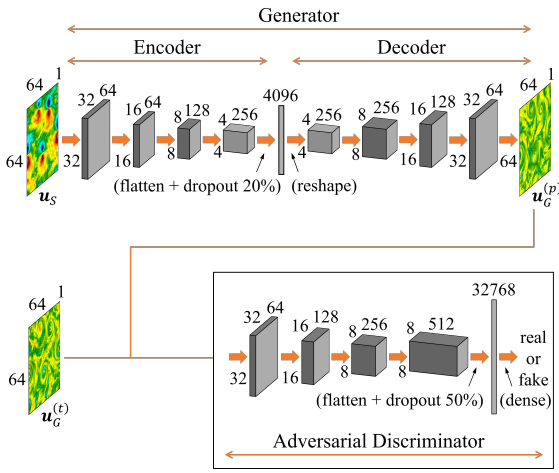

图 3 速度推断任务中生成器和判别器的架构。每个卷积（上卷积）层的卷积核大小均为 **4**，后接带泄漏的修正线性单元（ReLU）激活函数，但生成器的最后一层使用双曲正切激活函数。当测量或待推断的分量/量不止一个时，可以增加层 $\boldsymbol{u}_S$ 或层 $\boldsymbol{u}_G^{(p)}$ 和 $\boldsymbol{u}_G^{(t)}$ 中的通道数。

[11, 12]。对于本文研究的速度分量推断任务，生成对抗网络架构如图 3所示。生成器是一个函数 $GEN(\cdot)$，首先将提供的测量值 $\boldsymbol{u}_S$编码为潜在特征表示，然后通过解码器对该潜在表示进行泛化，生成缺失测量值的候选结果，$GEN(\boldsymbol{u}_S) = \boldsymbol{u}_G^{(p)}$，而 $\boldsymbol{u}_G^{(t)}$ 则表示缺失的真实湍流构型。判别器充当“裁判”函数 $D(\cdot)$，其输入为 $\boldsymbol{u}_G^{(t)}$ 或 $\boldsymbol{u}_G^{(p)}$，并输出所提供的构型是从真实湍流数据集中采样得到的概率。生成器的损失函数为

$$\mathcal{L}_{GEN} = (1-\lambda_{adv})\mathcal{L}_{\text{MSE}} + \lambda_{adv}\mathcal{L}_{adv}, \quad (12)$$

其中 L_2 损失

$$\mathcal{L}_{\text{MSE}} = \langle \frac{1}{A_\Omega}\int_I \|\boldsymbol{u}_G^{(p)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_G^{(t)}(\boldsymbol{x})\|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\rangle \quad (13)$$

定义为在面积为 A_Ω的空间域上求平均的均方误差（MSE）。超参数 λ_{adv} 称为对抗比率，而对抗损失为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{adv} &= \langle \log(1 - D(\boldsymbol{u}_G^{(p)}))\rangle \\ &= \int p(\boldsymbol{u}_S)\log[1 - D(GEN(\boldsymbol{u}_S))]\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}_S \\ &= \int p_p(\boldsymbol{u}_G)\log(1 - D(\boldsymbol{u}_G))\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}_G, \end{aligned} \quad (14)$$

其中，$p(\boldsymbol{u}_S)$是训练集中已知输入测量值的概率分布，$p_p(\boldsymbol{u}_G)$是生成器预测场的概率分布。判别器与生成器同时进行训练，以最大化真实值与生成样本之间的交叉熵

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{DIS} &= \langle \log(D(\boldsymbol{u}_G^{(t)}))\rangle + \langle \log(1 - D(\boldsymbol{u}_G^{(p)}))\rangle \\ &= \int [p_t(\boldsymbol{u}_G)\log(D(\boldsymbol{u}_G)) + \\ &\qquad p_p(\boldsymbol{u}_G)\log(1 - D(\boldsymbol{u}_G))]\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}_G. \end{aligned} \quad (15)$$

这里 $p_t(\boldsymbol{u}_G)$ 是真实值场的概率分布，$\boldsymbol{u}_G^{(t)}$。可以证明，采用$\lambda_{adv} = 1$（12）中的生成对抗训练会最小化生成概率分布与真实概率分布之间的 JS 散度，JSD($p_t \parallel p_p$) [10, 43]。因此，对抗损失有助于生成器生成湍流统计量正确的预测结果；而如果单独训练生成器（$\lambda_{adv} = 0$），它只会最小化 L_2 损失（13），该损失主要对大尺度含能尺度敏感。与线性 EPOD 相比，生成对抗网络不仅利用了生成器的非线性表达，还可以优化一种同时考虑均方误差和生成概率分布的损失。

附录中提供了有关生成对抗网络的更多详细信息A，包括架构、超参数和训练计划。

3 结果

在本节中，我们系统地比较了 EPOD、卷积神经网络和基于生成对抗网络的方法在速度分量推断的两项任务中的表现。卷积神经网络与生成对抗网络的生成器具有相同的架构，因此它相当于我们的生成对抗网络，但 $\lambda_{adv} = 0$（不含判别器）；通过这种方式，我们还能够判断，对于推断场，添加或移除使其与真实值之间的詹森-香农散度较小这一目标的重要性。对于

关于生成对抗网络的对抗比率的确定，读者可参阅附录A。

为量化推断误差，我们将归一化均方误差（均方误差）定义为

$$\mathrm{MSE}(\boldsymbol{u}_G) = \langle \Delta_{\boldsymbol{u}_G} \rangle / E_{\boldsymbol{u}_G}, \tag{16}$$

其中

$$\Delta_{\boldsymbol{u}_G} = \frac{1}{A(I)} \int_I \|\boldsymbol{u}_G^{(p)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}_G^{(t)}(\boldsymbol{x})\|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

是单个流动构型的空间平均 L_2 误差，$\langle \cdot \rangle$ 现在表示测试数据上的平均值。归一化因子定义为

$$E_{\boldsymbol{u}_G} = \sigma_G^{(p)} \sigma_G^{(t)}, \tag{18}$$

其中

$$\sigma_G^{(t)} = \langle \frac{1}{A(I)} \int_I \|\boldsymbol{u}_G^{(t)}(\boldsymbol{x})\|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \rangle^{1/2} \tag{19}$$

并且 $\sigma_G^{(p)}$ 的定义类似。 $E_{\boldsymbol{u}_G}$的形式确保了能量过小或过大的预测会产生较大的均方误差。

我们使用 JS散度来评估推断得到的速度分量的概率密度函数。对于两个概率分布， $P(x)$ 和 $Q(x)$，JS散度用于衡量它们的相似性，其定义为

$$\mathrm{JSD}(P \parallel Q) = \frac{1}{2}\mathrm{KL}(P \parallel M) + \frac{1}{2}\mathrm{KL}(Q \parallel M), \tag{20}$$

where $M = \frac{1}{2}(P + Q)$ and

$$\mathrm{KL}(P \parallel Q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) \log\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) \mathrm{d}x \tag{21}$$

是 Kullback–Leibler（KL）散度。如果两个概率分布接近，则 JS散度较小，反之亦然。

3.1 推断任务（I）

3.1.1 大尺度和小尺度上的预测

对于推断任务 (I)，在图 4 中，我们展示了一项推断实验，所用测试数据在训练过程中从未出现过。目标是利用速度分量 u_x （第 1 行第 1 列）来预测速度分量 u_y，其第 1 行其他列展示了真实值以及不同工具得出的预测结果。第 2 行展示了它们沿 x 方向的梯度，$\partial u_y/\partial x$。EPOD 仅保留与给定信息相关的部分，因此其预测看起来合乎情理，这是因为 u_x 与 u_y 之间存在相关性。卷积神经网络能够表达非线性相关性，因此预测结果更好，也更接近真实值。然而，卷积神经网络的预测结果较为模糊，缺少高频信息；而生成对抗网络借助对抗训练，能够生成逼真的湍流构型。

为了定量分析预测结果，图 5（上）展示了均方误差（u_y）以及原始 u_y与预测 u_y的概率密度函数之间的 JS散度，记为 JSD（u_y） =JSD（PDF（$u_y^{(t)}$） ||PDF（$u_y^{(p)}$））。我们将测试数据划分为大小为 128（或 2048）的批次，计算这些批次上的均方误差（或 JS散度），并用误差界表示其波动范围。EPOD 方法的均方误差（u_y）约为 0.6，而卷积神经网络和生成对抗网络的数值较小，约为 0.1。图 6 展示了不同构型下空间平均 L_2 误差Δ_{u_y}的概率密度函数，其峰值与均方误差的结果一致。结合图 6（b）可以解释推断分量的 JS散度；图 6（b）展示了预测速度分量的概率密度函数与原始数据的对比。EPOD 的 JSD（u_y）值最大，预测的概率密度函数（u_y）形状正确，但在约 $|u_y| = \sigma$（u_y）处偏离原始概率密度函数，其中 σ（u_y）表示原始数据的标准差。卷积神经网络和生成对抗网络生成的概率密度函数几乎完美，JSD（u_y）值较小。此外，判别器的帮助使生成对抗网络表现更好，但也使均方误差（u_y）略有增加。图 5（下）展示了 u_y、$\partial u_y/\partial x$的梯度均方误差和概率密度函数之间的 JS散度。梯度的均方误差（$\partial u_y/\partial x$）与均方误差（u_y）表现相似：EPOD 的数值较大，而卷积神经网络和生成对抗网络的数值较小且接近。不过，对于梯度，EPOD 和卷积神经网络的 JS散度都较大，只有生成对抗网络预测出的数值较小，这表明对抗训练对于高阶量的重要性。

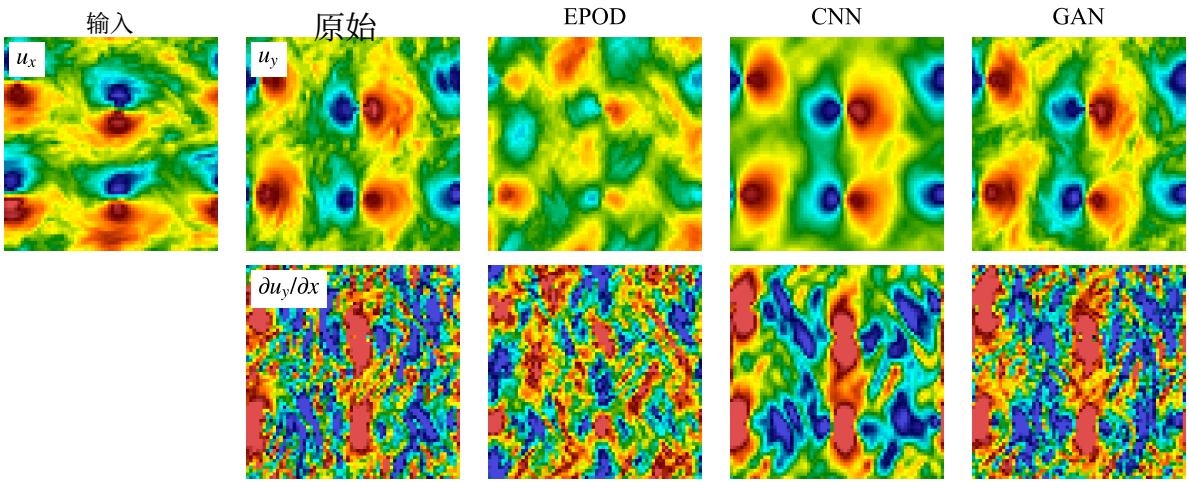

图 4 不同工具对瞬时场推断任务 (I) 的预测可视化。第一行中，第一列显示输入速度分量 u_x，第二至第五列显示真实值以及通过 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络推断得到的速度分量 u_y。第二行显示相应的 x 方向梯度 $\partial u_y/\partial x$。

3.1.2 多尺度预测误差

这里，我们借助小波分析，从多尺度角度评估预测结果 [44–46]。对于定义在大小为$2^N \times 2^N$的均匀网格上的场，二维小波分解可得

$$u_y(\boldsymbol{x}) = \bar{u}_y + \sum_{j=0}^{N-1} u_y^{(k_j)}(\boldsymbol{x}), \tag{22}$$

其中 $\bar{u}_y$ 是平均值，且

$$u_y^{(k_j)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_x=0}^{2^j-1}\sum_{i_y=0}^{2^j-1}\sum_{\sigma} c_{j,i_x,i_y}^{(\sigma)}\psi_{j,i_x,i_y}^{(\sigma)}(\boldsymbol{x}) \tag{23}$$

是波数 $k_j = 2^j$处的小波贡献，对应于尺度 $1/k_j$。鉴于 $\sigma \in \{x, y, d\}$, $c_{j\,i_x,,i_y}^{(\sigma)}$ 是小波系数，且

$$\begin{aligned}
\psi_{j,k_x,k_y}^{(x)}(x,y) &= \psi_{j,k_x}(x)\phi_{j,k_y}(y),\\
\psi_{j,k_x,k_y}^{(y)}(x,y) &= \phi_{j,k_x}(x)\psi_{j,k_y}(y),\\
\psi_{j,k_x,k_y}^{(d)}(x,y) &= \psi_{j,k_x}(x)\psi_{j,k_y}(y),
\end{aligned} \tag{24}$$

其中，$\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 分别为 Haar 尺度函数及其对应的小波。为衡量不同尺度下的推断误差，我们将归一化小波均方误差（W-MSE）定义为

$$\text{W-MSE}(k_j, u_y) = \text{MSE}(u_y^{(k_j)}), \tag{25}$$

即 k_j 预测数据与原始数据在小波贡献上的均方误差，定义如（16）所示。需要强调的是，（18）和（19）给出的归一化因子对于不同的 k_j是不同的。图7展示了不同方法得到的 W-MSE。结果表明，在所有尺度上，EPOD 的预测误差最大。卷积神经网络和生成对抗网络得到的 W-MSE 数值接近；在 $k_j = 2^6$时，小尺度下的 W-MSE 较大，而在 $1 \le k_j \le 2^5$时，其变化范围为 0 到 0.4。波数k_j 对应的 W-MSE 最小，即达到最大预测百分比的尺度；将其与图8（a）对比可知，该尺度与谱的峰值所在尺度相对应。

3.1.3 谱和平坦度

为进一步研究不同预测结果的统计特性，图中8(a) 测量了不同推断场的能谱，即

$$E_{u_y}(k) = \sum_{k \le \|\boldsymbol{k}\| < k+1} \frac{1}{2}\langle \hat{u}_y(\boldsymbol{k})\hat{u}_y^*(\boldsymbol{k})\rangle, \tag{26}$$

其中，$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ 是波数，$\hat{}u_y(\boldsymbol{k})$ 是 $u_y(\boldsymbol{x})$ 的傅里叶变换，$\hat{}u_y^*(\boldsymbol{k})$ 是其复共轭。由于 EPOD 仅提取与所提供信息相关的部分，因此预测出的能谱形状相似，

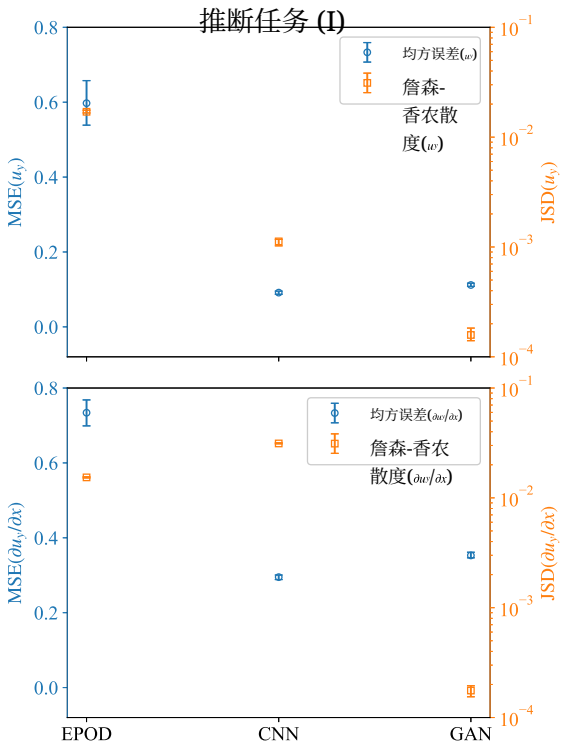

图 5 推断任务 (I) 中，由 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络得到的待推断速度分量 u_y 及其梯度 $\partial u_y/\partial x$ 的概率密度函数之间的均方误差（左侧 y 轴）和詹森-香农散度（右侧 y 轴）。

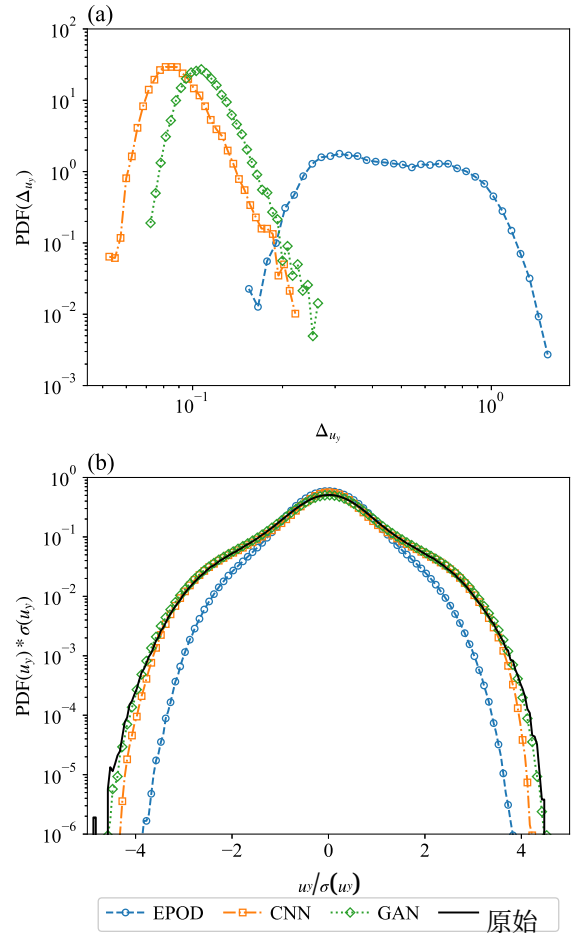

图 6 (a) 不同构型下空间平均 L_2 误差的概率密度函数，以及 (b) 预测速度分量与原始速度分量的概率密度函数，u_y，其中 $\sigma(u_y)$为原始数据的标准差。推断任务（I）的结果由 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络获得。

但与原始能谱相比，所有波数处的能量都较小。卷积神经网络利用非线性特性，在小波数处预测出正确的能谱。在判别器的帮助下，生成对抗网络能够在所有波数处预测出与原始能谱相近的能谱。图8（b）绘出了平坦度

$$F_{u_y}(r) = \langle(\delta_r u_y)^4\rangle / \langle(\delta_r u_y)^2\rangle, \qquad (27)$$

其中 $\delta_r u_y = u_y(x+r, y) - u_y(x, y)$。这些结果与能谱的结果一致：EPOD 在所有尺度上均失效，卷积神经网络在大尺度上能正确预测平坦度，而生成对抗网络在所有尺度上均取得令人满意的结果。

3.2 推断任务（II）

现在我们转向推断任务（II），如引言中所示，该任务更具挑战性。图 9 展示了一个与图 4 类似的推断实验，但针对任务（II）。显然 GAN 的预测结果真实可信，且与真实值高度相关。然而，尽管预测出的结构正确，GAN 的预测结果仍可能存在数值错误，甚至在某些涡旋中符号相反（第 5 列）。由于任务复杂，EPOD 方法无法推断出有意义的结果。第 4 列显示，卷积神经网络预测出一些模糊的斑块，能够捕捉大尺度涡旋的位置，却无法正确预测其符号。卷积神经网络的这种有限能力，或许正是 GAN 也无法正确预测涡旋符号的原因，因为 GAN 使用相同的卷积神经网络作为生成器。

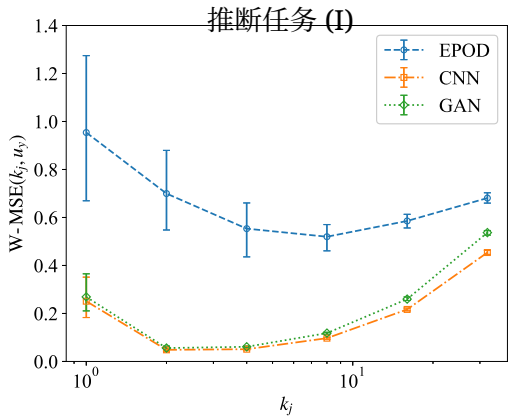

图7 待推断速度分量 u_y 的加权均方误差，随不同波数 k_j 的变化。结果来自用于推断任务 (I) 的不同工具。

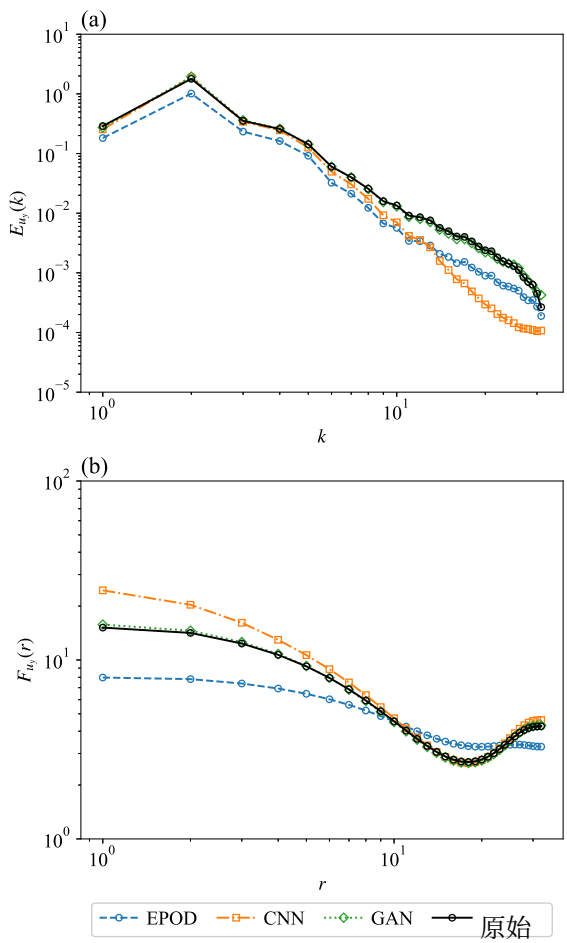

图8 (a) 速度分量 u_y 的预测结果与真实值的能谱；(b) 其平坦度。 r 的单位为网格宽度 $w_g = 2\pi/64$。结果来自用于推断任务 (I) 的不同工具。

图10 展示了感兴趣分量的均方误差， u_z，及其梯度， $\partial u_z/\partial x$。与推断任务（I）相比，不同工具所得的均方误差更大，表明该任务难度更高。对于均方误差（u_z）和均方误差（$\partial u_z/\partial x$），EPOD 和卷积神经网络的数值都较大，而 GAN 预测结果的最佳数值约为 2。不同流动构型下空间平均的 L_2 误差 Δ_{u_z}的概率密度函数见图11（a）。图中显示，相较于卷积神经网络和 EPOD，GAN 的概率密度函数峰值对应的 Δ_{u_z} 最小，这与图10（上图）一致。图 u_z 和 $\partial u_z/\partial x$的 JS 散度也列于图10中。只有 GAN 对湍流预测所得的 JS 散度较小。图11（b）进一步展示了预测结果中 u_z 的概率密度函数，其中 GAN 的概率密度函数与原始数据最接近。

为了定量研究预测的统计特性，图12 展示了不同推断场的能谱 $E_{u_z}(k)$和平坦度 $F_{u_z}(r)$。在所有波数上，只有生成对抗网络预测的能量与原始数据的能量接近，这表明生成对抗网络生成的推断结果具有令人满意的多尺度特性（图12(a)）。图12(b)显示，生成对抗网络得到的平坦度与原始平坦度形态相似。在小尺度和中间尺度上二者接近，但生成对抗网络得到的平坦度在大尺度上数值较小。此外，其他所有工具都无法在各个尺度上预测出令人满意的平坦度。

4 结论

我们研究了一个具有实际应用价值的问题：利用旋转湍流二维快照中的一个速度分量推断另一个速度分量，该问题可应用于地球物理和工程问题。此外，这一问题也具有理论意义，与湍流的特征排序有关：识别湍流中哪些自由度占主导地位。

通过两个复杂度不同的推断任务，系统地比较了线性方法（EPOD）和非线性方法（卷积神经网络与生成对抗网络）。这些任务的复杂度取决于输入分量与待推断分量之间的相关性。
EPOD 方法使用给定分量进行 POD分析，并将相关部分作为预测结果。卷积神经网络和生成对抗网络方法基于全非线性逼近器，前者不含对抗成分，后者则包含对抗成分。

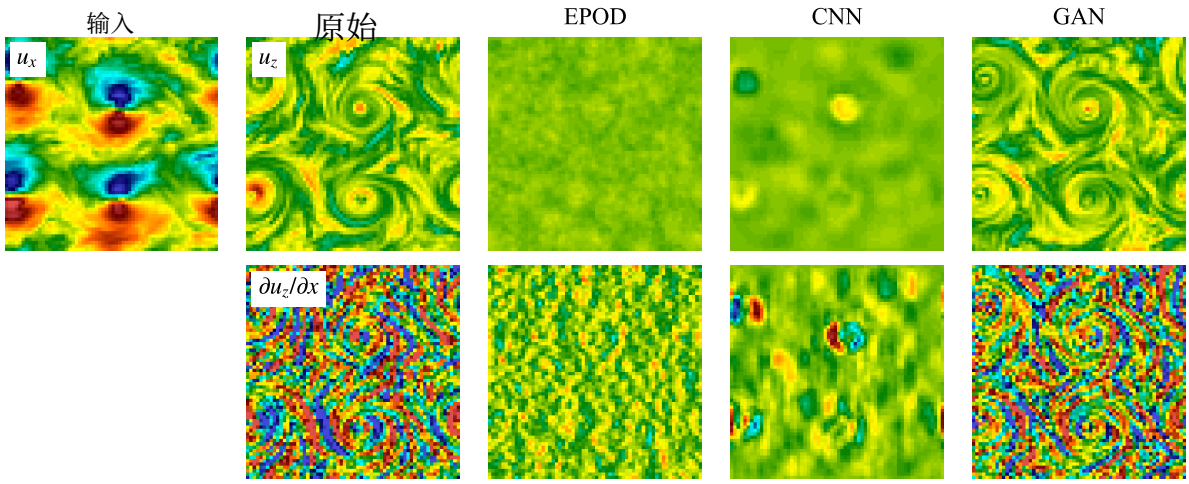

图 9 不同工具对瞬时场执行推断任务（II）的预测可视化。在第 1 行中，第 1 列显示输入速度分量 u_x，第 2 至第 5 列分别显示真实值，以及通过 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络获得的推断速度分量 u_z。x 方向上对应的梯度 $\partial u_z/\partial x$ 显示在第 2 行。

对于较简单的推断任务（I），EPOD 能够给出有意义的推断，但从均方误差和与真实数据之间的 JS散度来看，结果并不理想。采用非线性映射后，结果显著改善：卷积神经网络给出了较好的预测结果，与真实值之间的均方误差和 JS散度都较小。与卷积神经网络相比，生成对抗网络的推断结果更为逼真，包含精细结构，但均方误差略有增加。此外，生成对抗网络的训练成本也更高。对于推断任务（II），给定分量与待推断分量之间的相关性较弱。由于这一复杂性，EPOD 方法无法给出有意义的推断。不过，凭借非线性能力，卷积神经网络和生成对抗网络能够识别相干结构的位置，尽管它们无法预测涡旋中的正确数值（甚至无法预测正确的正负号）。此外，判别器在这一任务中至关重要。事实上，卷积神经网络只能预测出一些平滑的斑块，而生成对抗网络则能生成与真实值相关的湍流构型。总之，我们证明了生成对抗网络同时优化了逐点距离（逐个快照计算）和真实值数据与生成数据之间的交叉熵，从而达到瞬时和统计重建的最优解。另一方面，EPOD 仅通过各个单独场的特征值来最小化方差，因此其统计特性的重建结果较差。

需要注意的是，基于 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络的方法可以直接推广到提供和/或推断多个分量/量的推断任务。该推断任务中

$$\boldsymbol{u}_S : (u_x, u_y) \rightarrow \boldsymbol{u}_G : u_z$$

也进行了研究，结果与任务 (II) 非常相似，这是因为两个平面内分量之间具有很高的相关性。未来的研究可进一步考虑服务于 PIV 等实际应用。鉴于当前研究聚焦于完全解析的湍流流动，未来研究可着重利用含噪声和/或傅里叶滤波数据进行推断。此外，建议研究采用机器学习技术的潜在益处 [47–49] 以利用数据中存在的时间相关性。鉴于当前研究仅限于二维场，因此无法施加不可压缩性等物理约束。未来研究的一种可能方向是考虑三维体积中的场，这或许更有利于施加此类先验知识。

致谢。 本研究获得欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号：882340）提供的支持

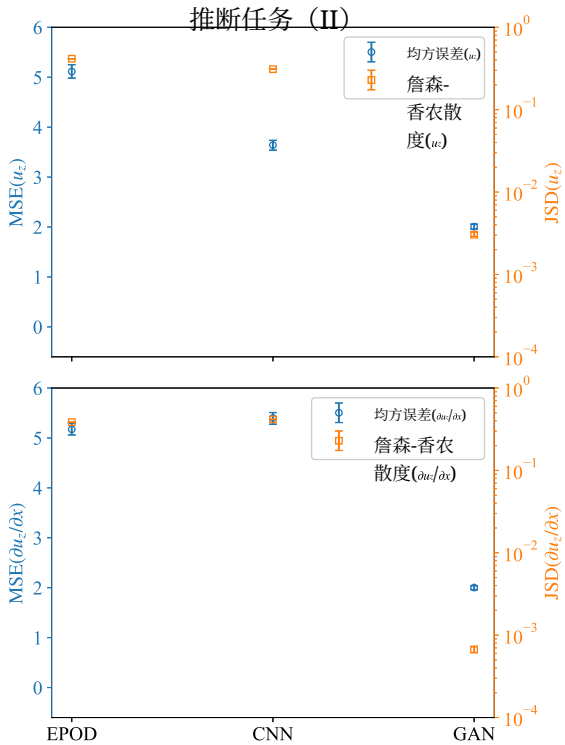

图10 待推断速度分量 u_z 的均方误差（左侧纵轴）和概率密度函数之间的 JS 散度（右侧纵轴），以及其梯度 $\partial u_z/\partial x$。结果由用于推断任务（II）的不同工具得出。

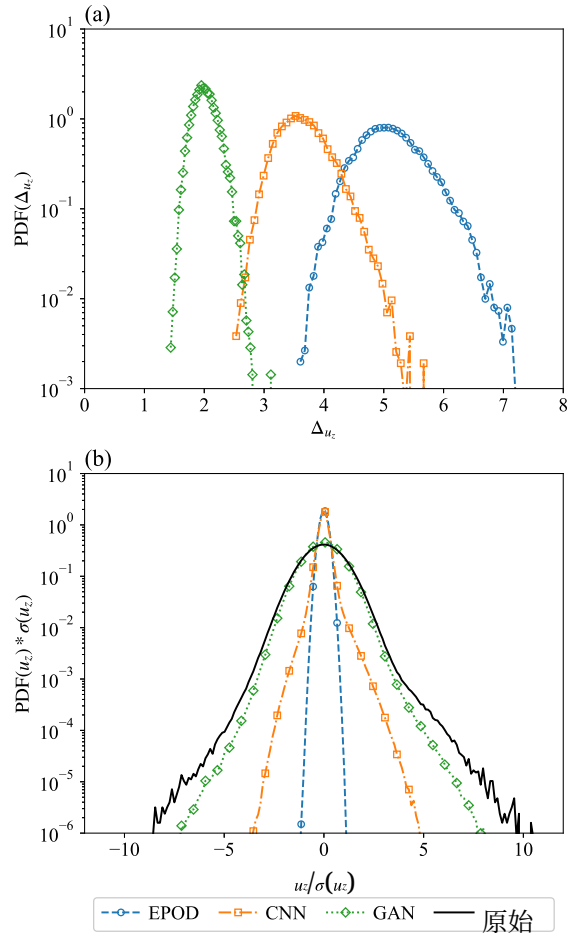

图11 (a) 不同构型下空间平均 L_2 误差的概率密度函数，以及 (b) 预测速度分量与原始速度分量 u_z的概率密度函数，其中 $\sigma(u_z)$ 为原始数据的标准差。推断任务 (II) 的结果由 EPOD、卷积神经网络和生成对抗网络获得。

声明

数据可用性声明。 支持本研究发现的数据集可在Smart-Turb代码库中公开获取 [39] 网址: http://smart-turb.roma2.infn.it。

作者贡献。所有作者对本文的贡献均相同。

附录 A

我们为所有泄漏型ReLU激活函数选择参数 $\alpha = 0.2$ 。使用Adam优化器 [50]同时训练生成器和判别器，其中生成器的学习率是判别器的两倍。为提高训练的稳定性，学习率采用阶梯衰减调度，每经过50个训练轮次衰减至原来的0.5，共衰减11次，对应的最大训练轮次为600。生成器的初始学习率为 10^{-3} ，批量大小设为128。结果表明， $\mathcal{L}_{\text{MSE}}$ （式（13））和$\mathcal{L}_{adv}$ （式（14））在较后的训练轮次中围绕固定值波动，说明训练已收敛。

图 A1展示了推断任务（I）中，来自具有不同对抗比率的生成对抗网络的概率密度函数之间的均方误差和JS散度： u_y ， λ_{adv}。结果表明，非零 λ_{adv} 可以略微增大均方误差，同时降低JS散度。本研究中所有生成对抗网络均选择 $\lambda_{adv} = 10^{-3}$ 。

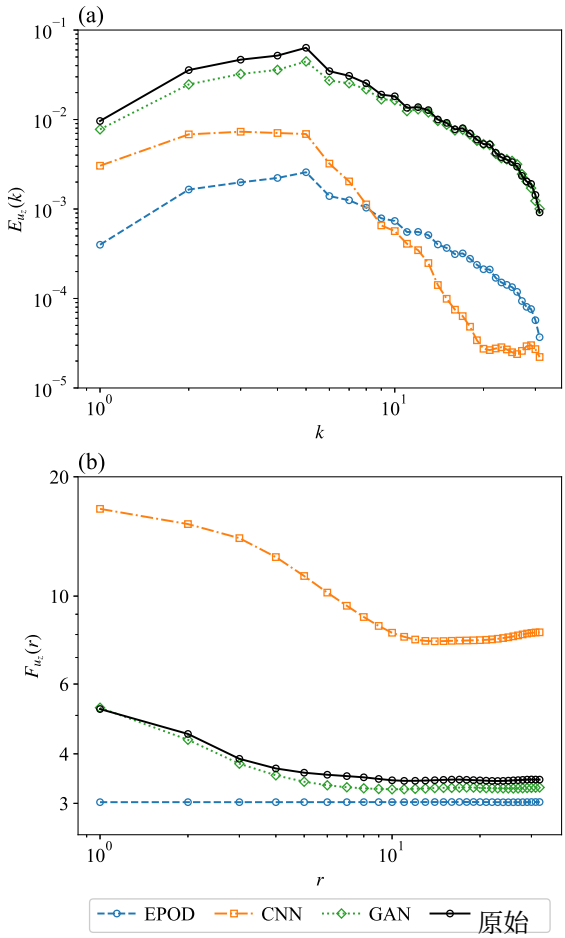

图 12 (a) 预测结果和真实值的能谱，以及 (b) 速度分量 u_z 的平坦度。 r 的单位为网格宽度 $w_g = 2\pi/64$。结果来自针对推断任务 (II) 使用不同工具得到的结果。

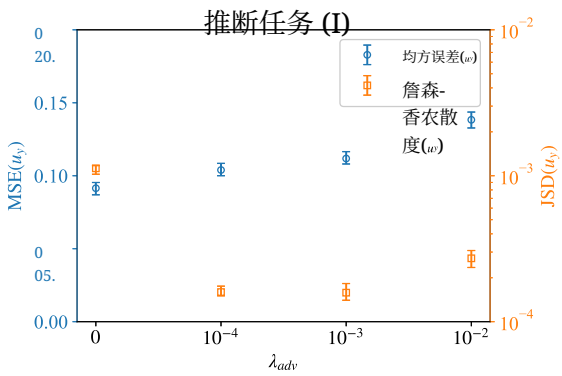

图 A1 待推断速度分量 u_y 的概率密度函数之间的均方误差和JS散度。结果来自使用不同对抗比率 λ_{adv} 的生成对抗网络在推断任务 (I) 中得到的结果。

参考文献

[1] Fran.cois-Xavier Le Dimet 和 Olivier Tala- grand。《气象观测分析与同化的变分算法：理论方面》。*Tellus A: DynamicMeteorology and Oceanography*,38(2):97–110, 1986.

[2]MichAEl J BEll、Michel Lefebvre、Pierre-Yves Le Traon、Neville Smith 和 Kirsten Wilmer-Becker。Godae：全球海洋资料同化试验。《海洋学》，22(3):14–21，2009。

[3]Monika Krysta、Eric Blayo、Emmanuel Cosme 和 Jacques Verron。一种一致的混合变分平滑数据同化方法：应用于湍流中纬度海洋的简单浅水模型。《月刊天气评论》，139(11):3333–3347，2011。

[4]Benjamin A Storer、Michele Buzzicotti、Hemant Khatri、Stephen M Griffies 和 Hussein Aluie。全球海洋环流的全球能谱。《自然通讯》，13(1):1–9，2022。

[5]Huanfeng Shen、Xinghua Li、Qing Cheng、Chao Zeng、Gang Yang、Huifang Li 和 Liangpei Zhang。遥感数据缺失信息重建：技术综述。*IEEE* 地球科学与遥感杂志，3(3):61–85，2015。

[6] Qiang Zhang, Qiangqiang Yuan, Chao Zeng, Xinghua Li 和 Yancong Wei。使用统一的时空谱深度卷积神经网络重建遥感图像中的缺失数据。*IEEE* 地球科学与遥感汇刊，56(8):4274–4288，2018。

[7]Ana F Militino、MD Ugarte 和 M Montesino。使用空间函数程序填补卫星图像中的缺失数据并平滑受损数据。随机环境研究与风险评估，33(10):1737–1750，2019。

[8]Richard Everson 和 Lawrence Sirovich. 基于缺失数据的 Karhunen–Loève 方法。*JOSA A*，12(8):1657–1664，1995。

[9] Daniele Venturi 和GeorgeEmKarniadakis. 绕圆柱流动的缺失数据与重建方法。《流体力学杂志》，519:315–336，2004。

[10] Ian Goodfellow、Jean Pouget-Abadie、Mehdi Mirza、Bing Xu、David Warde-Farley、Sherjil Ozair、Aaron Courville 和 Yoshua Ben- gio. 生成对抗网络。《神经信息处理系统进展》，27，2014。

[11]Michele Buzzicotti、Fabio Bonaccorso、P Clark Di Leoni 和 Luca Biferale. 使用深度生成模型对 TURB-Rot数据库中的湍流数据进行语义修复重建。《物理评论：流体》，6(5):050503，2021。

[12] Tianyi Li、Michele Buzzicotti、Luca Biferale、Fabio Bonaccorso、Shiyi Chen 和 Minping Wan。利用缺失数据 POD、扩展 POD 和生成对抗网络重构湍流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2210.11921*，2022。

[13] Bo Liu、Jiupeng Tang、Haibo Huang 和 Xi- Yun Lu。用于湍流超分辨率重构的深度学习方法。《流体物理学》，32(2):025105，2020。

[14]Akshay Subramaniam、Man Long Wong、Raunak D Borker、Sravya Nimmagadda 和 Sanjiva K Lele。利用物理信息生成对抗网络增强湍流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2003.01907*，2020。

[15]Kai Fukami、Koji Fukagata 和 Kuni- hiko Taira。基于机器学习的湍流时空超分辨率重构。《流体力学杂志》，909

，2021。

[16]Hyojin Kim、Junhyuk Kim、Sungjin Won 和 Changhoon Lee。用于湍流超分辨率重建的无监督深度学习。《流体力学杂志》，910，2021。[17] Mitsuaki Matsuo、Taichi Nakamura、Masaki Morimoto、Kai Fukami 和 Koji Fukagata。利用自适应超分辨率辅助，从截面流场重建三维流体数据的监督卷积网络。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.09020*，2021。

[18]Mustafa Z Yousif、Linqi Yu、Sergio Hoyas、Ricardo Vinuesa 和 HeeChang Lim。利用深度学习方法从二维观测数据重建三维湍流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2208.05754*，2022。

[19] RonaldJ AdrianandJerry Westerweel。粒子图像测速。第 30 卷。剑桥大学出版社，2011。

[20]Patricio Clark Di Leoni、Karuna Agarwal、Tamer Zaki、Charles Meneveau 和 Joseph Katz。使用物理信息神经网络，从稀疏噪声粒子轨迹重建速度和压力。*arXiv* 预印本 *arXiv:2210.04849*，2022。

[21]A Liberzon、R Gurka 和 G Hetsroni。Xpiv——多平面立体粒子图像测速。*Experiments in* 流体，36(2):355–362，2004。

[22]Gerrit E Elsinga、Fulvio Scarano、Bern- hard Wieneke 和 Bas W van Oudheus- den。《层析粒子图像测速》。*Experiments in Fluids*，41(6):933–947，2006。

[23] J Sheng、E Malkiel 和 J Katz。使用数字全息显微术，同时测量湍流边界层中的三维近壁速度和壁面剪切应力。*Experiments in Fluids*，45(6):1023–1035，2008。

[24]Alain Dabas。从太空观测大气风。地球科学通讯，342(4-5):370–379，2010。

[25] Mingwei Lin和 CanjunYang。《海洋观测技术：综述》。《中国机械工程学报》，33(1):1–18，2020。

[26] JBor´ee。扩展适当正交分解：一种分析湍流流动中相关事件的工具。*Experiments in Fluids*，35(2):188–192，2003。

[27] Luca Guastoni、Alejandro G¨uemes、Andrea Ianiro、Stefano Discetti、Philipp Schlat- ter、Hossein Azizpour 和 Ricardo Vin- uesa。卷积网络模型：利用壁面量预测壁面受限湍流。《流体力学杂志》，928，2021。

[28] Alejandro G¨uemes，Stefano Discetti、Andrea Ianiro、Beril Sirmacek、Hossein Azizpour 和 Ricardo Vinuesa。通过深度学习从粗略壁面测量值推断湍流速度场。《流体物理学》，33(7):075121，2021。[29] James YK Cho、Kristen Menou、Bradley MS Hansen 和 Sara Seager。近轨道系外巨行星的大气环流。一、全球正压绝热模拟。《天体物理学杂志》，675(1):817，2008。[30] Thomas Le Reun、Benjamin Favier、Adrian J Barker 和 Michael Le Bars。椭圆不稳定性驱动的惯性波湍流。《物理评论快报》，119(3):034502，2017。[31]Horia Dumitrescu 和 Vladimir Cardos。旋转对风力涡轮机边界层流动的影响。《美国航空航天学会杂志》，42(2):408– 411，2004。[32]Qiaoning Chen、Shiyi Chen、Gregory L Eyink 和 Darryl D Holm。旋转均匀三维湍流中的共振相互作用。《流体力学杂志》，542:139–164，2005。[33] Peter Alan Davidson。湍流：面向科学家和工程师的导论。牛津大学出版社，2015。[34]Michele Buzzicotti、Hussein Aluie、Luca Biferale 和 Moritz Linkmann。旋转条件下湍流中的能量传递。《流体物理学》，3(3):034802，2018。

[35] Pablo D Mininni、Alexandros Alexakis 和 Annick Pouquet。中等罗斯贝数和大雷诺数条件下旋转流的尺度相互作用与标度律。《流体物理学》，21(1):015108，2009。

[36] Fabien S Godeferd 和 Fr´ed´eric Moisy。旋转湍流的结构与动力学：近期实验与数值结果综述。《应用力学评论》，67(3)，2015。

[37] Alexandros Alexakis 和 Luca Biferale。湍流流动中的级联与转变。《物理学报告》，767:1–101，2018。

[38]P Clark Di Leoni、Alexandros Alexakis、L Biferale 和 M Buzzicotti。旋转湍流中的相变与通量环亚稳态。《物理评论：流体》，5(10):104603，2020。

[39]Luca Biferale、Fabio Bonaccorso、Michele Buzzicotti 和 P Clark Di Leoni。Turb-rot：湍流旋转流的三维和二维快照大型数据库。*arXiv* 预印本 *arXiv:2006.07469*，2020。

[40]BL Sawford。雷诺数对湍流弥散拉格朗日随机模型的影响。《流体物理学 A：流体动力学》，3(6):1577–1586，1991。

[41] Michele Buzzicotti、Akshay Bhatnagar、Luca Biferale、Alessandra S Lanotte 和 Samriddhi Sankar Ray。傅里叶模态约化下纳维–斯托克斯湍流的拉格朗日统计：分形与均匀抽取。*New Journal of Physics*，18(11):113047，2016。

[42]Deepak Pathak、Philipp Krahenbuhl、Jeff Donahue、Trevor Darrell 和 Alexei A Efros。上下文编码器：通过图像修复进行特征学习。载于*IEEE*计算机视觉与模式识别会议论文集，第2536–2544页，2016年。

[43] SebastianNowozin、BotondCseke 和Ryota Tomioka。f-GAN：使用变分散度最小化训练生成式神经采样器。神经网络进展 f信息

系统进展，29，2016。

[44] Marie Farge 等。小波变换及其在湍流中的应用。《流体力学年评》，24(1):395–458，1992。[45] R Benzi、L Biferale、A Crisanti、G Paladin、M Vergassola 和 A Vulpiani。用于构造多仿射场的随机过程。《物理学*D*：非线性现象》，65(4):352–358，1993。[46] G Bettega 和 HE Roman。纯电子等离子体中二维湍流的小波分析。《欧洲物理学快报》，85(3):35001，2009。[47]Sepp Hochreiter 和 J¨urgen Schmidhuber。长短期记忆。神经计算，9(8):1735–1780，1997。[48]Ilya Sutskever、Oriol Vinyals 和 Quoc V Le。利用神经网络进行序列到序列学习。《神经信息处理系统进展》，27，2014。[49]Ashish Vaswani、Noam Shazeer、Niki Par-mar、Jakob Uszkoreit、Llion Jones、Aidan N Gomez、 ´Lukasz Kaiser 和 Illia Polosukhin。注意力就是你所需要的一切。《神经信息处理系统进展》，30，2017。[50] Diederik P Kingma 和 Jimmy Ba。Adam：一种随机优化方法。*arXiv* 预印本 *arXiv:1412.6980*，2014。