arXiv:2301.07577v1 [math.RT] 18 Jan 2023

对称群的非线性西洛分支系数

EUGENIO GIANNELLI 和 GIADA VOLPATO

Abstract. 我们研究对称群不可约特征标在西洛子群上的限制。特别地，我们关注次数大于 1 的成分。我们的主要结果是对 [GN18，定理 3.1] 的广泛推广。

1. Introduction

本文旨在考察对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标在西洛子群上的限制的结构。设 p 为一个素数，并设 P_n 为 $\mathfrak{S}_n$ 的一个固定西洛 p-子群。本文研究的主要问题如下：给定 $k \in \mathbb{N}$， $\mathfrak{S}_n$ 的哪些不可约特征标在限制到 P_n 时含有次数为 p^k 的成分？这样的特征标有多少个？更形式地，令 $\mathrm{Irr}_k(P_n)$ 表示由 P_n 中所有次数为 p^k 的不可约特征标组成的集合，并关注 $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 的如下子集 Ω_n^k：

$$\Omega_n^k = \{\chi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n) \mid [\chi_{P_n}, \phi] \neq 0, \text{ for some } \phi \in \mathrm{Irr}_k(P_n)\}.$$

在 [GN18 中，定理 3.1] 证明了， $\mathfrak{S}_n$ 的任意不可约特征标在限制到 P_n 后都含有一个线性成分。换言之，$\Omega_n^0 = \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$。这一结果在 [GL21] 中得到了改进（针对奇素数）：对于 P_n 的每个线性特征 ϕ，作者对 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标 χ 进行了分类，确定了其中哪些使 ϕ 成为 χ_{P_n} 的不可约成分。

本文沿着一个新的方向，大幅推广了上述 [GN18] 中得到的结果。更准确地说，对于任意奇素数 p，我们能够描述任意$k \in \mathbb{N}$对应的集合 Ω_n^k。令人惊讶的是，这些集合具有相当规整的结构。为了描述这种结构，我们回顾一下： $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标与 $\mathcal{P}(n)$ 之间存在自然的双射，其中 $\mathcal{P}(n)$ 是 n 的所有分拆构成的集合。有鉴于此，我们认为将 Ω_n^k 看作 $\mathcal{P}(n)$ 的子集，而非 $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 的子集，更为合适。对于任意 $t \in \mathbb{N}$，我们将 $\mathcal{P}(n)$ 中由杨图可嵌入一个 $t \times t$ 网格（即首行和首列的大小均不超过 t）的分拆所构成的子集记为 $\mathcal{B}_n(t)$。

本文的第一个主要结果是定理 5.1，我们证明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，都存在某个 $T_n^k \in \{1, \dots, n\}$，使得 $\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(T_n^k)$。换言之，定理 5.1 表明， n 的所有分拆中，其对应的不可约特征标在限制到 $\mathfrak{S}_n$ 的 Sylow p-子群时含有次数为 p^k 的成分的那些分拆，与能够放入一个正方形内的 n 的所有分拆相同；该正方形的大小取决于 n 和 t。如上所述，这一结论凸显了集合 Ω_n^k 所具有的优美且规整的组合结构。

定理 5.3 进一步细化了定理 5.1 给出的描述，其中我们明确计算了所有 $n, k \in \mathbb{N}$ 对应的 T_n^k 的值。由于精确描述这些值需要引入一些技术性定义，这里便不作详述。不过，我们请读者参阅表 1 和表 2，其中列出了第二个主要结果的一些具体实例。

定理 5.3 的一个有趣推论是，对所有 $k \leq j$， $\Omega_n^j \subseteq \Omega_n^k$。这意味着，只要 χ_{P_n} 含有次数为 p^j 的不可约成分，那么对所有 $0 \leq k \leq j$，它也含有次数为 p^k 的成分。

我们通过研究上文提出的问题的第二部分来结束本文。具体而言，我们估计 $\mathfrak{S}_n$ 的特征标中有多少个包含在 Ω_n^k 中。在推论 5.5 中，我们证明，对于所有可取的 $k \in \mathbb{N}$， $\mathfrak{S}_n$ 中几乎所有不可约特征标在 P_n 上的限制都含有次数为 p^k 的不可约成分。更准确地说，我们证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Omega_n|}{|\mathcal{P}(n)|} = 1,$$

其中 Ω_n 是所有集合 Ω_n^k的交集，这里的 k 遍历满足 p^k 是 P_n的一个不可约特征标的次数的所有自然数。

注 1.1。如上所述，本文讨论奇素数的情形。当 $p = 2$时，关于 $\mathfrak{S}_n$ 的奇次数特征标在 Sylow 2-子群上的限制的线性成分，已在 [INOT17], 中得到研究，主要与 McKay 猜想 [N18] 有关。尽管如此，我们研究的对象在 $p = 2$时似乎格外困难。例如，我们立即注意到，此时集合 $\Omega_4^1 = \{(3, 1), (2, 1, 1)\}$，因此对任意 $T \in \{1, 2, 3, 4\}$，它都不是 $\mathcal{B}_4(T)$的形式。这表明，本文的主要定理不适用于素数 2。即使这种不规则性在较大的自然数下可能消失，这一情形仍会出现更严重的障碍。例如，下文的引理 3.3 断言， $\mathfrak{S}_n$ 的每个非线性不可约特征标在 P_n上的限制，都不可能恰好有一个次数为某个特定值的不可约成分。这是证明主要结果的关键一步。遗憾的是，当素数为 2 时，这显然不成立。例如， [G17] 中证明了，若 $\lambda = (2^n - x, 1^x)$，则 $(\chi^\lambda)_{P_{2^n}}$ 恰好有一个次数为 1 的成分。情况甚至可能更糟：若 $\lambda = (2^n - 1, 1)$，则不难看出，对所有$k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$，$(\chi^\lambda)_{P_{2^n}}$ 恰好有一个次数为 2^k 的成分。

致谢。我们感谢 Stacey Law 仔细审阅本文的早期版本，并为我们提供了许多有益的意见和建议。我们也感谢审稿人提出的若干有用意见，这些意见改进了本文。

2. Notation and Background

在本文中， p 表示一个奇素数。给定整数 $n \le m$，我们用 $[n, m]$表示集合 $\{n, n + 1, \dots, m\}$。若 $n < m$，则将 $[m, n]$ 视为空集。我们令 $\mathcal{C}(n)$ 表示 n的组合所成的集合，即由所有有限序列 $(a_1, a_2, \dots, a_z)$ 组成的集合，其中对所有 $i \in [1, z]$， a_i 均为非负整数，且满足 $a_1 + \cdots + a_z = n$。给定$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_z) \in \mathcal{C}(n)$，有时我们用 $l(\lambda) = z$表示 λ中部分的个数。正如引言中所述， P_n 表示对称群 $\mathfrak{S}_n$的 Sylow p-子群。通常，给定有限群 G，我们用 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示G的不可约复特征标集合，用 $\mathrm{Lin}(G)$ 表示 G的线性特征标子集。最后，$\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ 是不可约特征标次数的集合。

2.1. 花环积。这里我们固定花环积特征标的记号。更多细节请参见 [JK81，第 4]章。设 G 为有限群，H 为 $\mathfrak{S}_n$的子群。我们用 $G^{\times n}$ 表示 G的 n 重直积。 $\mathfrak{S}_n$ 在 $G^{\times n}$ 的直因子上的自然作用，通过 $G^{\times n}$的自同构诱导出 $\mathfrak{S}_n$ （因此也包括 $H \le \mathfrak{S}_n$）的作用，从而得到花环积 $G \wr H := G^{\times n} \rtimes H$。我们称 $G^{\times n}$ 为花环积 $G \wr H$的底群。对于 $g_i \in G$ 和 $h \in H$，我们将 $G \wr H$ 的元素记为 $(g_1, \dots, g_n; h)$。设 V为一个$\mathbb{C}G$-模，并假设其对应的特征标为 ϕ。令 $V^{\otimes n} := V \otimes \cdots \otimes V$（$n$ 个副本）为相应的 $\mathbb{C}G^{\times n}$-模。将下列左作用线性延拓后，便得到 $G \wr H$在 $V^{\otimes n}$ 上的作用

$$(g_1, \dots, g_n; h) : v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto g_1 v_{h^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g_n v_{h^{-1}(n)},$$

这使 $V^{\otimes n}$ 成为一个 $\mathbb{C}(G \wr H)$-模，我们将其记为 $\tilde{V}^{\otimes n}$。我们用 $\tilde{\phi}$ 表示 $\mathbb{C}(G \wr H)$-模 $\tilde{V}^{\otimes n}$所对应的特征标。对于 H的任意特征标 ψ，我们也用 ψ 表示其到 $G \wr H$ 的膨胀，并令 $\mathcal{X}(\phi; \psi) := \phi \cdot \psi$表示 $G \wr H$的特征标，它由 ϕ和 ψ的乘积得到。设 $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$，并令 $\phi^{\times n} := \phi \times \cdots \times \phi$ 为 $G^{\times n}$对应的不可约特征标。注意，$\phi \in \mathrm{Irr}(G \wr H)$是 $\phi^{\times n}$的一个扩张。给定 $K \leq G$，我们用 $\mathrm{Irr}(G|\psi)$ 表示特征标集合，其中 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，且 ψ 是限制 χ_K的一个不可约成分。因此，根据 Gallagher 定理 [I76，推论 6.17]，有

$$\mathrm{Irr}(G \wr H | \phi^{\times n}) = \{ \mathcal{X}(\phi; \psi) \mid \psi \in \mathrm{Irr}(H) \}.$$

If $H = C_p$ 是一个素数阶为 p 的循环群，每个 $\psi \in \mathrm{Irr}(G \wr C_p)$ 都具有以下形式

(i) $\psi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_p \uparrow_{G^{\times p}}^{G \wr C_p}$，其中 $\phi_1, \ldots \phi_p \in \mathrm{Irr}(G)$ 并非全都相等；

或 (ii) $\psi = \mathcal{X}(\phi; \theta)$，其中 $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$ 且 $\theta \in \mathrm{Irr}(C_p)$。

我们指出，在情形 (i) 中，有 $\mathrm{Irr}(G \wr C_p | \phi_1 \times \cdots \times \phi_p) = \{\psi\}$。

2.2. $\mathfrak{S}_n$ 的西洛子群。我们记录对称群的西洛子群的一些事实，并请参阅 [JK81，第 4] 章，或 [O76]，了解更多详情。

我们用 P_n 表示 $\mathfrak{S}_n$ 的一个西洛 p-子群。显然，P_1 是平凡群，而 $P_p \cong C_p$ 是阶为 p 的循环群。若 $i \geq 2$，则 $P_{p^i} = \left(P_{p^{i-1}}\right)^{\times p} \rtimes P_p = P_{p^{i-1}} \wr P_p \cong P_p \wr \cdots \wr P_p$（$i$ 重幔积）。令 $n = \sum_{i=1}^{t} a_i p^{n_i}$ 为 n 的 p 进制展开。于是 $P_n \cong P_{p^{n_1}}^{\times a_1} \times P_{p^{n_2}}^{\times a_2} \times \cdots \times P_{p^{n_t}}^{\times a_t}$。

对于 $n \in \mathbb{N}$，$\mathfrak{S}_{p^n}$的 Sylow p-子群的正规化子是 $N_{\mathfrak{S}_{p^n}}(P_{p^n}) = P_{p^n} \rtimes H$，其中$H \cong (C_{p-1})^{\times n}$。更一般地，若 $n = \sum_{i=1}^{t} a_i p^{n_i}$，$n_t > \cdots > n_1 \geq 0$，则 $N_{\mathfrak{S}_n}(P_n) = N_1 \wr \mathfrak{S}_{a_1} \times \cdots \times N_t \wr \mathfrak{S}_{a_t}$，其中对每个 $i \in [1, t]$，都有 $N_i := N_{\mathfrak{S}_{p^{n_i}}}(P_{p^{n_i}})$。关于 Sylow p-子群的正规化子的结构，更多细节请参阅[G21，第 2] 节。以下事实想必是众所周知的。我们在此陈述它，因为本文下一节将会用到。

引理 2.1。设 p 为奇素数，设 $n \in \mathbb{N}$，并设 H 为 $N_{\mathfrak{S}_{p^n}}(P_{p^n})$ 中 P_{p^n} 的一个补。P_{p^n} 中不存在被 H 中心化的非平凡元素。

证明。这可直接由 [G21，第 2 节2] 中的讨论得出。 □

我们指出，引理 2.1 等价于对任意 $n \in \mathbb{N}$，有 $C_{\mathfrak{S}_{p^n}}(P_{p^n}) = Z(P_{p^n})$。

2.3. Littlewood-Richardson 系数。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 与 $\mathcal{P}(n)$ 自然一一对应，后者是所有 n 的分拆集合。对于 $\lambda \in \mathcal{P}(n)$，相应的不可约特征标记为 χ^λ。设 $m, n \in \mathbb{N}$ 满足 $m < n$。给定 $\chi^\mu \times \chi^\nu \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{n-m})$，其归纳表示分解为不可约成分的结果

$$(\chi^\mu \times \chi^\nu)^{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu) \chi^\lambda$$

由 Littlewood-Richardson 规则描述（参见 [F97，第 5] 章或 [J78，第 16] 章）。这里，自然数 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu)$ 称为 Littlewood-Richardson 系数。给定 $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{C}(n)$、$\lambda \in \mathcal{P}(n)$ 和对所有 $j \in [1, k]$ 均成立的 $\mu_j \in \mathcal{P}(n_j)$，令 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_k)$ 表示 χ^λ 作为 $(\chi^{\mu_1} \times \cdots \times \chi^{\mu_k})_Y^{\mathfrak{S}_n}$ 的不可约成分的重数。这里，Y 表示 $\mathfrak{S}_n$ 的 Young 子群 $\mathfrak{S}_{n_1} \times \mathfrak{S}_{n_2} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_k}$。下面的引理描述了非零 Littlewood-Richardson 系数中涉及的分拆的首部分的性质。在接下来的几节中将多次用到这一性质。

引理 2.2. 设 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_k) \neq 0$那么 $\lambda_1 \leq \sum_{j=1}^{k} (\mu_j)_1$。

证明. 当 $k = 2$ 时，该结论可直接由 Littlewood-Richardson 系数 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \mu_2)$ 的组合描述推出，如 [F97，第 5 节.2] 所述。然后通过迭代即可证明此引理。□

与 [GL21], 中一样，我们将 $\mathcal{B}_n(t)$ 定义为满足其杨图可容纳在 $t \times t$ 方格网内的 n 的分拆集合，即对于 n、$t \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{B}_n(t) := \{\, \lambda \in \mathcal{P}(n) \mid \lambda_1 \leq t,\ l(\lambda) \leq t \,\}.$$

此外，对于 $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{C}(n)$ 且对所有 $j \in [1,k]$ 均有 $A_j \subseteq \mathcal{P}(n_j)$，我们令

$$A_1 \star A_2 \star \cdots \star A_k := \{\, \lambda \in \mathcal{P}(n) \mid \mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_k) > 0,\ \text{其中 } \mu_1 \in A_1, \ldots, \mu_k \in A_k \,\}.$$

容易验证，$\star$ 既是交换的，也是结合的。以下引理最早在 [GL21 的命题 3.3] 中得到证明。

引理 2.3. 设 $n, n', t, t' \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{n}{2} < t \leq n$ 且 $\frac{n'}{2} < t' \leq n'$。则

$$\mathcal{B}_n(t) \star \mathcal{B}_{n'}(t') = \mathcal{B}_{n+n'}(t + t').$$

3. Preliminary results

本节开始收集一些关于特征标限制到 Sylow p-子群的结果。这些结果将用于证明本文第二部分中的主要定理。

除非另有说明，从现在起，p 始终表示一个固定的奇素数。令$n \in \mathbb{N}$，并设 $n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$ 是其 p- 进展开，其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq 0$。我们定义整数 α_n 如下。对于 p 的幂，令 $\alpha_1 = \alpha_p = 0$ 和 $\alpha_{p^k} = (p^{k-1} - 1)/(p - 1)$，其中$k \geq 2$。对于一般的 $n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$，令 $\alpha_n = \sum_{i=1}^{t} \alpha_{p^{n_i}}$。如下文引理 3.2 所示，$p^{\alpha_n}$ 是 P_n的不可约特征标的最大次数。值得注意的是，$\alpha_n = \nu(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor!)$，其中 $\nu(n)$表示整除 n的 p 的最高次幂。我们省略这一结论的证明，并请读者参阅 [V23] 以获取完整计算。

如引言中所述，我们令 $\mathrm{Irr}_k(P_n) = \{\theta \in \mathrm{Irr}(P_n) \mid \theta(1) = p^k\}$。本文将始终沿用这一记号。在下面的引理中，我们给出集合 $\mathrm{Irr}_k(P_n)$ 基数的一个下界。这个下界显然远未达到其实际值（一般而言），但对我们的目的来说已经足够。

引理 3.1. 设 $k, t \in \mathbb{N}$ 满足 $p^k \in \mathsf{cd}(P_{p^t})$。则 $|\mathrm{Irr}_k(P_{p^t})| \geq p$。

证明。我们对 t 使用归纳法。若 $t = 1$，则我们知道该命题成立，因为 $\mathrm{Irr}(P_p) = \mathrm{Irr}_0(P_p)$ 的基数为 p。$\mathrm{Irr}(P_p)$ 的元素记为 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{p-1}$，其中按惯例令 ϕ_0 为平凡特征。设 $t \geq 2$，并令 $\psi \in \mathrm{Irr}_k(P_{p^t})$。若对某个 $\theta \in \mathrm{Irr}_k(P_{p^{t-1}})$ 和 $i \in [0, p-1]$，有 $\psi = \mathcal{X}(\theta; \phi_i)$，则对所有 $j \in [0, p-1]$，$\mathcal{X}(\theta; \phi_j) \in \mathrm{Irr}_k(P_{p^t})$。因此 $|\mathrm{Irr}_k(P_{p^t})| \geq p$。否则，$\psi = (\theta_1 \times \cdots \times \theta_p)^{P_{p^t}}$，其中 $\theta_1, \ldots, \theta_p \in \mathrm{Irr}(P_{p^{t-1}})$ 并非全都相等。若存在 $x \in [1,p]$ 使得 $\theta_1(1) \neq \theta_x(1)$，则我们按如下方式定义 $\eta_1, \ldots, \eta_p \in \mathrm{Irr}_k(P_{p^t})$。对任意 $j \in [1,p]$，令

$$\eta_j = (\tau_j \times \theta_2 \times \cdots \times \theta_p)^{P_{p^t}},$$

其中，τ_1、τ_2、...、τ_p 是 $P_{p^{t-1}}$ 中 p 个互不相同的次数为 $\theta_1(1)$ 的不可约特征标。根据归纳假设，这些特征标确实存在。另一方面，若对所有 $x \in [1,p]$，$\theta_1(1) = \theta_x(1)$，则令

$$\eta_1 = (\tau_2 \times \cdots \times \tau_2 \times \tau_1)^{P_{p^t}}, \text{ and } \eta_j = (\tau_1 \times \cdots \times \tau_1 \times \tau_j)^{P_{p^t}}, \text{ for all } j \in [2,p].$$

与之前一样，这里我们选取 $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ 作为 $P_{p^{t-1}}$ 中次数为$\theta_1(1)$的 p 个互不相同的不可约特征标。根据归纳假设，这些特征标存在。在这两种情况下，$\eta_1, \ldots, \eta_p$ 都是 $\mathrm{Irr}_k(P_{p^t})$中的 p 个互不相同的元素。因此 $|\mathrm{Irr}_k(P_{p^t})| \geq p$。□

下一个引理表明， P_n 具有次数分别为 1、 p、 p^2、.....、 p^{α_n}的不可约特征标。

引理 3.2. 设 $n \in \mathbb{N}$。那么 $\mathrm{cd}(P_n) = \{p^k \mid k \in [0, \alpha_n]\}$。

证明. 首先设 $n = p^t$ 是 p 的幂，并对 t 作归纳。 $t = 1$ 的情形显然，因为 P_p 是循环群且 $\alpha_p = 0$。若 $t \geq 2$，注意到 $\alpha_{p^t} = 1 + p\alpha_{p^{t-1}}$。令$k \in [0, \alpha_{p^t} - 1]$，并设 $q \leq \alpha_{p^{t-1}}$ 和 $r \in [0, p-1]$ 满足 $k = qp + r$。若 $r = 0$，由归纳假设，存在 $\phi \in \mathrm{Irr}(P_{p^{t-1}})$，使得 $\phi(1) = p^q$。因此，对任意 $\psi \in \mathrm{Irr}(P_p)$， $\mathcal{X}(\phi; \psi) \in \mathrm{Irr}(P_{p^t})$ 的次数为 p^k。若 $r > 0$，则 $q < \alpha_{p^{t-1}}$。由归纳假设，存在 $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathrm{Irr}(P_{p^{t-1}})$，使得对每个 $i \in [1, r]$， $\phi_i(1) = p^{q+1}$，且对每个$j \in [r+1, p]$， $\phi_j(1) = p^q$。因此，$(\phi_1 \times \cdots \times \phi_r \times \phi_{r+1} \times \cdots \times \phi_p)^{P_{p^t}} \in \mathrm{Irr}(P_{p^t})$ 的次数为 p^k。最后，令$k = \alpha_{p^t}$。由归纳假设和引理 3.1，存在 $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathrm{Irr}(P_{p^{t-1}})$，它们并非全都相等，且对所有 $i \in [1, p]$， $\phi_i(1) = p^{\alpha_{p^{t-1}}}$。因此，$(\phi_1 \times \cdots \times \phi_p)^{P_{p^t}} \in \mathrm{Irr}(P_{p^t})$ 的次数为 p^k。这就完成了 $n = p^t$ 情形下的证明，因为 $t \in \mathbb{N}$。

n 不是 p 的幂的情形很容易得出。事实上，若$n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$ 是 n的 p进制展开，则 $P_n \cong P_{p^{n_1}} \times P_{p^{n_2}} \times \cdots \times P_{p^{n_t}}$。□

设 n、 $k \in \mathbb{N}$。正如我们在引言中提到的，将集合 Ω_n^k视为 $\mathcal{P}(n)$的子集会比较方便。更准确地说，对于 $\lambda \in \mathcal{P}(n)$，我们有时会写作 $\lambda \in \Omega_n^k$ ，而不是$\chi^\lambda \in \Omega_n^k$。

以下结果是用归纳法证明命题时的一个重要要素。设 p 为奇素数，令 χ 为 $\mathfrak{S}_n$ 的一个非线性特征，并假设χ_{P_n} 有一个次数为 p^k的不可约成分。那么它至少有两个不同的不可约成分。

引理 3.3. 设 $n \in \mathbb{N}$满足 $n \geq p$，并设 $\lambda \in \Omega_n^k \setminus \{(n), (1^n)\}$，其中 $k \in [0, \alpha_n]$。那么$(\chi^\lambda)_{P_n}$ 至少有两个不同的次数为 p^k的不可约成分。

证明。首先假设 $n = p^t$，并令 $P = P_{p^t}$ 和 $N = N_{\mathfrak{S}_{p^t}}(P_{p^t})$。我们注意到， P 的唯一一个 N-不变不可约特征标是平凡特征标。为证明这一点，对于任意 $K \leq N$，令 $\mathrm{Irr}_K(P)$ 表示 P的 K-不变不可约特征标集合。令 H为 N中 P的一个 p'-补。显然 $\mathrm{Irr}_N(P) = \mathrm{Irr}_H(P)$。另一方面，根据引理 2.1，对于所有 $h \in H\}$，集合 $C_P(H) = \{x \in P \mid x^h = x$, 只含有单位元。利用 Glauberman 对应［I76 定理 13.1],，我们得到 $|\mathrm{Irr}_H(P)| = |\mathrm{Irr}(C_P(H))| = 1$。由此可得 $\mathrm{Irr}_N(P) = \{1_P\}$，证毕。

由于 $\lambda \notin \{(n), (1^n)\}$，根据 [GL21，引理 4.3]，我们知道 $(\chi^\lambda)_P$ 必然含有一个非平凡线性成分（直接计算表明，在情形 (p, n, λ) =(3,9,(3,3, 3)) 中这一结论也成立，而该情形不在引理涵盖范围内）。因此，对于任意满足$\lambda \in \Omega_n^k$的 $k \in \mathbb{N}$，我们都可以找到一个非平凡的 $\theta \in$不可约特征标集合$_k(P)$，使得 θ是 $(\chi^\lambda)_P$的一个成分。由于 χ^λ是 N-不变的，我们推得 θ的每个 N-共轭都是 χ^λ的一个成分。结论得证。回顾第 2.2 节中描述的 P_n 结构，我们注意到，n 不是素数幂的情形可由素数幂情形轻易推出。□

定义 3.4. 设 G 是一个有限群，且 H 是 G的一个 p-子群。给定 G的一个特征标 θ，我们将 $\mathrm{cd}(\theta_H)$ 定义为 θ_H的不可约成分的次数集合。此外，我们将$\partial_H(\theta)$定义为如下的非负整数：

$$\partial_H(\theta) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \in \mathrm{cd}(\theta_H)\}.$$

命题 3.5. 设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $Y = (\mathfrak{S}_{p^{n-1}})^{\times p} \leq \mathfrak{S}_{p^n}$ 满足 $B \leq Y$，其中 $B = (P_{p^{n-1}})^{\times p}$ 是 P_{p^n} 的底群。设 $\lambda \in \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。那么

$$\partial_{P_{p^n}}(\chi^\lambda) = 1 + \max\{\partial_B(\chi^{\nu_1} \times \cdots \times \chi^{\nu_p}) \mid \chi^{\nu_1} \times \cdots \times \chi^{\nu_p} \in \text{不可约特征标集合}(Y), \text{ 且 } \mathcal{LR}(\lambda; \nu_1, \ldots, \nu_p) \neq 0 \quad \}.$$

证明。设 $M = 1+\max\{\partial_B(\chi^{\nu_1}\times\cdots\times\chi^{\nu_p}) \mid \chi^{\nu_1}\times\cdots\times\chi^{\nu_p} \in \text{不可约特征标集合}(Y),\ \text{且}\ \mathcal{LR}(\lambda;\nu_1,\dots,\nu_p)\neq 0\}$。设 $\mu_1,\dots,\mu_p \in \mathcal{P}(p^{n-1})$ 满足 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\dots,\mu_p)\neq 0$ 且 $M = 1+\partial_B(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_p})$。由于 $\lambda\notin\{(n),(1^n)\}$，我们可以假设 $\mu_1,\dots,\mu_p$ 并非全都属于 $\{(p^{n-1}),(1^{p^{n-1}})\}$。此外，设 ϕ 是 $(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_p})_B$ 的一个不可约成分，满足 $\phi(1) = p^{M-1}$。根据引理 3.3，我们可以取 $\phi = \phi_1\times\cdots\times\phi_p$，使得 $\phi_1,\dots,\phi_p \in$不可约特征标集合$(P_{p^{n-1}})$ 不全相等。因此 $\phi^{P_{p^n}} \in$不可约特征标集合(P_{p^n})，其次数为 p^M，且 $[(\chi^\lambda)^{P_{p^n}},\phi^{P_{p^n}}]\neq 0$。于是 $p^M \in \mathrm{cd}((\chi^\lambda)^{P_{p^n}})$。

现在反设存在一个整数 $N > M$，使得 $p^N \in\mathrm{cd}((\chi^\lambda)^{P_{p^n}})$。那么存在 $\varphi\in\mathrm{Irr}(P_{p^n})$，使得 $[(\chi^\lambda)^{P_{p^n}},\varphi]\neq 0$，且 $\varphi(1) = p^N$。令$\phi_1\times\cdots\times\phi_p$为 φ_B的一个不可约成分。因此存在 μ_1、.....、$\mu_p\in\mathcal{P}(p^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1$、.....、$\mu_p)\neq 0$，且 $[\phi_1\times\cdots\times\phi_p,(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_p})_B]\neq 0$。我们有

$$M > \partial_B(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_p}) \geq N-1,$$

因为 $\phi_1\times\cdots\times\phi_p$ 的次数只能是 p^N 或 p^{N-1}。因此 $M < N < M+1$，这就产生了矛盾。□

命题 3.6. 设 n 是一个自然数，$n = \sum_{i=1}^t p^{n_i}$ 是n的 p-进展开，其中 $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_t\geq 0$。设$Y = \mathfrak{S}_{p^{n_1}}\times\mathfrak{S}_{p^{n_2}}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{p^{n_t}}$满足 $P_n\leq Y\leq\mathfrak{S}_n$，并设 λ 是 n的一个划分。那么

$$\partial_{P_n}(\chi^\lambda) = \max\{\partial_{P_n}(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_t}) \mid \chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_t}\in\mathrm{Irr}(Y)\ \textit{and}\ \mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\dots,\mu_t)\neq 0\}.$$

证明. 由于 $P_n = P_{p^{n_1}}\times P_{p^{n_2}}\times\cdots\times P_{p^{n_t}}\leq Y$，结论得证。□

引理 3.7. 设 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，设 $k\in[2,\alpha_{p^n}]$，并设 $(a_1,\dots,a_p)\in\mathcal{C}(k-1)$ 满足：对所有 $i\in[1,p]$，都有 $a_i\in[0,\alpha_{p^{n-1}}]$。那么

$$\Omega^{a_1}_{p^{n-1}}\star\Omega^{a_2}_{p^{n-1}}\star\cdots\star\Omega^{a_p}_{p^{n-1}}\subseteq\Omega^k_{p^n}.$$

证明. 为简化记号，令 $q = p^{n-1}$。若 $\lambda\in\Omega^{a_1}_q\star\Omega^{a_2}_q\star\cdots\star\Omega^{a_p}_q$，根据定义，存在 $(\chi^\lambda)^{(\mathfrak{S}_q)\times p}$的一个不可约成分 $\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_p}$，使得对所有 $i\in[1,p]$，都有 $\mu_i\in\Omega^{a_i}_q$。因此，对每个 $i\in[1,p]$，存在 $(\chi^{\mu_i})^{P_q}$ 的一个不可约成分 ϕ_i，使得 $\phi_i(1) = p^{a_i}$。由于 $k\geq 2$，存在 $j\in[1,p]$使得 $a_j\geq 1$。因此 $\mu_j\notin\{(q),(1^q)\}$。于是，根据引理 3.3，我们可以假设 $\phi_1,\dots,\phi_p$并非全都相等。由此可知，$(\phi_1\times\cdots\times\phi_p)^{P_{p^n}}$是 $(\chi^\lambda)^{P_{p^n}}$ 的一个不可约成分，其次数等于 p^k。因此 $\lambda\in\Omega^k_{p^n}$. □

引理 3.8. 设 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$，且令 $n = \sum_{i=1}^t p^{n_i}$ 为其 p-进展开，其中 $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_t\geq 0$。设 $k\in[1,\alpha_n]$，并令 $(a_1,\dots,a_t)\in\mathcal{C}(k)$ 满足 $a_i\in[0,\alpha_{p^{n_i}}]$，对所有 $i\in[1,t]$ 均成立。则

$$\Omega^{a_1}_{p^{n_1}}\star\Omega^{a_2}_{p^{n_2}}\star\cdots\star\Omega^{a_t}_{p^{n_t}}\subseteq\Omega^k_{p^n}.$$

证明。回忆 $P_n\cong P_{p^{n_1}}\times P_{p^{n_2}}\times\cdots\times P_{p^{n_t}}$，并令 $\lambda\in\Omega^{a_1}_{p^{n_1}}\star\Omega^{a_2}_{p^{n_2}}\star\cdots\star\Omega^{a_t}_{p^{n_t}}$。根据定义，对每个 $i\in[1,t]$，存在 $\phi_i\in\mathrm{Irr}(P_{p^{n_i}})$，使得 $\phi_i(1) = p^{a_i}$，且 $\phi_1\times\cdots\times\phi_t$ 是 $(\chi^\lambda)_{P_n}$ 的一个不可约成分，其次数为 p^k。因此 $\lambda\in\Omega^k_{p^n}$. □

4. The prime power case

本节旨在完整描述对于所有奇素数 p、所有自然数 n 以及所有 $k\in[0,\alpha_{p^n}]$，集合 $\Omega^k_{p^n}$。提醒读者，根据 [GN18 定理 3.1],，我们知道，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\Omega^0_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n)$。等价地，$\mathfrak{S}_{p^n}$ 的每个不可约特征标在限制到 Sylow p-子群时都含有一个线性成分。我们将频繁使用这一结果，不再另行引用。我们首先分析 $k\in\{1,2\}$ 的情形。在下一个引理中，我们证明，对于 $j = 1$、2，如果 $\mathfrak{S}_{p^n}$ 有一个次数为 [的不可约特征标，那么 $\mathfrak{S}_{p^n}$ 的每个非线性特征

在限制到 Sylow p-子群 P_{p^n}时，都有一个次数为 p^j 的不可约成分，只要 P_{p^n} 有一个次数为 p^j 的不可约特征标。

引理 4.1. 设 p 是奇素数，$n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in [1, \alpha_{p^n}] \cap \{1, 2\}$。则 $\Omega^k_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1$).

证明。设 $k = 1$。则必有 $n \geq 2$。我们首先注意到，显然 $\Omega^1_{p^n} \subseteq \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。另一方面，若 $\lambda \in \mathcal{B}_{p^n}(p^n-1)$，则存在 $\mu_1 \in \mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1}-1)$ 和 $\mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathcal{P}(p^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_p) \neq 0$。利用引理 3.3，我们推得 $(\chi^{\mu_1})^{P_{p^{n-1}}}$ 有两个不同的线性成分。因此，存在 $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathrm{Lin}(P_{p^{n-1}})$，它们并非全都相等，且对所有 $i \in [1, p]$，ϕ_i 都是 $(\chi^{\mu_i})^{P_{p^{n-1}}}$ 的一个成分。由此可得，$(\phi_1 \times \cdots \times \phi_p)^{P_{p^n}}$ 是 $(\chi^{\lambda})^{P_{p^n}}$ 的一个次数为 p 的不可约成分。我们得出 $\lambda \in \Omega^1_{p^n}$，因此 $\Omega^1_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。

设 $k = 2$。那么必然有 $n \geq 3$。显然，$\Omega^2_{p^n} \subseteq \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。另一方面，若 $\lambda \in \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$，则存在 $\mu_1 \in \mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1} - 1)$ 和 $\mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathcal{P}(p^{n-1})$，使得$\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_p) \neq 0$。现在可以完全照上述方法论证，推出 $(\chi^{\lambda})^{P_{p^n}}$ 有一个形如 $\theta = (\psi \times \phi_1 \times \cdots \times \phi_{p-1})^{P_{p^n}}$ 的不可约成分 θ，其中 $\psi \in \mathrm{Irr}_1(P_{p^{n-1}})$，且 $\phi_1, \ldots, \phi_{p-1} \in \mathrm{Lin}(P_{p^{n-1}})$。因此 $\theta(1) = p^2$，$\lambda \in \Omega^2_{p^n}$，从而有 $\Omega^2_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。□

引理 4.1 是以下更一般结果的特例。

定理 4.2. 设 $n \in \mathbb{N}$且 $k \in [0, \alpha_{p^n}]$。那么存在 $t^k_n \in [\frac{p^n+1}{2}, p^n]$，使得 $\Omega^k_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(t^k_n)$。此外，若 $k \in [0, \alpha_{p^n} - 1]$，则 $t^{k+1}_n \in \{t^k_n - 1, t^k_n\}$.

证明. 我们对 n 使用归纳法。若 $n = 1$，则 $\alpha_p = 0$ 且 $\Omega^0_p = \mathcal{P}(p)$。若 $n \geq 2$，我们假设该命题对 $n - 1$成立。若 $k = 0$，则由 GN18 的定理 3.1], 可得 $\Omega^0_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n)$，且$t^0_n = p^n$。此外，由引理 4.1 可知 $t^1_n = p^n - 1 = t^0_n - 1$，如所需。情形$k = 1$ 已由引理 4.1 完全处理。事实上，我们知道 $\Omega^1_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$，并且$t^2_n = p^n - 1 = t^1_n$，如所需。现在可以假设 $k \geq 2$。我们定义

$$\mathcal{L}(k-1) = \{(j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{C}(k-1) \mid j_i \in [0, \alpha_{p^{n-1}}] \text{ for all } i \in [1, p]\}.$$

此外，我们设

$$M = \max \left\{ t^{j_1}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1} \;\middle|\; (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k-1) \right\}.$$

注意，对于任意 $j \in [0, \alpha_{p^{n-1}}]$，值 t^j_{n-1} 由归纳法良定义，是满足 $\Omega^j_{p^{n-1}} = \mathcal{B}_{p^{n-1}}(t^j_{n-1})$ 的整数。我们声称 $M = t^k_n$。换言之，我们要证明 $\Omega^k_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(M)$。设 $(j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k-1)$ 满足 $M = t^{j_1}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1}$。由归纳假设以及引理 2.3 和引理 3.7，我们得到

$$\mathcal{B}_{p^n}(M) = \mathcal{B}_{p^{n-1}}(t^{j_1}_{n-1}) \star \cdots \star \mathcal{B}_{p^{n-1}}(t^{j_p}_{n-1}) = \Omega^{j_1}_{p^{n-1}} \star \cdots \star \Omega^{j_p}_{p^{n-1}} \subseteq \Omega^k_{p^n}.$$

对于反向包含，反设 $\lambda \in \Omega^k_{p^n} \setminus \mathcal{B}_{p^n}(M)$。由于 p 是奇数，因此 $\Omega^k_{p^n}$ 在分拆共轭下封闭。因此，我们可以假设 $\lambda_1 \geq M + 1$。由于 $\lambda \in \Omega^k_{p^n}$，存在 $(\chi^{\lambda})^{P_{p^n}}$ 的一个不可约成分 θ，使得 $\theta(1) = p^k$。

• 若 $\theta = (\phi_1 \times \cdots \times \phi_p)^{P_{p^n}}$ 满足 $\phi_1, \ldots, \phi_p \in \mathrm{Irr}(P_{p^{n-1}})$ 不全相等，则存在 $(j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k-1)$，使得 $\phi_i(1) = p^{j_i}$ 对所有 $i \in [1, p]$均成立。于是，对每个 $i \in [1, p]$，存在 $(\phi_i)^{\mathfrak{S}_{p^{n-1}}}$ 的一个不可约成分 χ^{μ_i}，使得 $\left[\chi^{\mu_1} \times \cdots \times \chi^{\mu_p}, (\chi^{\lambda})_{(\mathfrak{S}_{p^{n-1}})^{\times p}}\right] \neq 0$。因此，利用

归纳假设可得，对于所有 $i \in [1,p]$，均有 $\mu_i \in \Omega^{j_i}_{p^{n-1}} = \mathcal{B}_{p^{n-1}}(t^{j_i}_{n-1})$。因此

$$M \geq t^{j_1}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1} \geq \lambda_1 \geq M+1,$$

其中，第一个不等式由 M 的定义得出，第二个不等式则由引理 2.2 得出。这与假设矛盾。

• 另一方面，若对某个 $\phi \in \mathsf{Irr}(P_{p^{n-1}})$ 和 $\psi \in \mathsf{Irr}(P_p)$，有 $\theta = \mathcal{X}(\phi;\, \psi)$，则，$\phi(1) = p^{\frac{k}{p}}$ 并且存在 $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \Omega^{p^{\frac{k}{p}}}_{p^{n-1}}$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\, \mu_1, \ldots, \mu_p) \neq 0$。因此，利用归纳假设，我们有

$$\lambda \in \left(\Omega^{\frac{k}{p}}_{p^{n-1}}\right)^{\star p} = \left(\mathcal{B}_{p^{n-1}}(t^{\frac{k}{p}}_{n-1})\right)^{\star p}.$$

这里我们用 $A^{\star p}$ 表示 p 重 $\star$ 积 $A \star \cdots \star A$。根据归纳假设，我们还知道 $t^{\frac{k}{p}}_{n-1} \in \left\{ t^{\frac{k}{p}-1}_{n-1} - 1,\ t^{\frac{k}{p}-1}_{n-1} \right\}$。利用引理 2.2，我们得到

$$M+1 \leq \lambda_1 \leq p t^{\frac{k}{p}}_{n-1} \leq (p-1) t^{\frac{k}{p}}_{n-1} + t^{\frac{k}{p}-1}_{n-1} \leq M.$$

这就矛盾了。注意，上述最后一个不等式由 M 的定义可得，因为 $(\frac{k}{p}, \ldots, \frac{k}{p}, \frac{k}{p}-1) \in \mathcal{L}(k-1)$。

对于 $k \in [2, \alpha_{p^n} - 1]$，目前为止我们证明的内容总结如下。

$$\Omega^k_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(T), \text{ with } T = \max\left\{ t^{j_1}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1} \;\middle|\; (j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k-1) \right\}$$

$$\Omega^{k+1}_{p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(V), \text{ with } V = \max\left\{ t^{h_1}_{n-1} + \cdots + t^{h_p}_{n-1} \;\middle|\; (h_1, \ldots, h_p) \in \mathcal{L}(k) \right\}.$$

设 $(j_1, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k-1)$ 满足 $T = t^{j_1}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1}$。不失一般性，我们可以假设 $j_1 < \alpha_{p^{n-1}}$。那么 $(j_1+1, j_2, \ldots, j_p) \in \mathcal{L}(k)$。由归纳假设可知 $t^{j_1+1}_{n-1} \in \left\{ t^{j_1}_{n-1} - 1, t^{j_1}_{n-1} \right\}$。因此

$$V \geq t^{j_1+1}_{n-1} + t^{j_2}_{n-1} + \cdots + t^{j_p}_{n-1} \in \{\, T-1, T \,\}. \tag{1}$$

另一方面，设 $(h_1, \ldots, h_p) \in \mathcal{L}(k)$ 满足 $V = t^{h_1}_{n-1} + \cdots + t^{h_p}_{n-1}$。由于 $k \geq 2$，不失一般性，我们可以假设 $h_1 > 0$。那么 $(h_1 - 1, h_2, \ldots, h_p) \in \mathcal{L}(k-1)$。因此，如上所述：

$$V = t^{h_1}_{n-1} + \cdots + t^{h_p}_{n-1} \leq T, \tag{2}$$

由于 $t^{h_1}_{n-1} \in \left\{ t^{h_1-1}_{n-1} - 1, t^{h_1-1}_{n-1} \right\}$。不等式 (1) 和 (2) 推出 $V \in \{\, T-1, T \,\}$。

□

关于定理 4.2 的证明在一个简单具体实例中的关键步骤，请参阅例 4.8 的第二部分。以下定义看起来可能有些人为，但对于确定所有 $n, k \in \mathbb{N}$ 下 t^k_n 的精确值至关重要。

定义 4.3。设 $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 且 $x \in [1, p^{n-2}]$。我们定义整数 m_x 和 $\ell(n,x)$ 如下：

$$m_x = \min\{m \mid x \leq p^{m-2}\}, \text{ and } \ell(n,x) = n - m_x + 1.$$

注意，$\sum_{x=1}^{p^{n-2}} \ell(n,x) = \alpha_{p^n}$（这将在下文的引理 4.4 中证明）。对于 $x \in [1, p^{n-2}]$，我们令

$$A_x = \left[\sum_{j=1}^{x-1} \ell(n,j) + 1, \sum_{j=1}^{x} \ell(n,j) \right].$$

我们注意到，$\{A_1, A_2, \ldots, A_{p^{n-2}}\}$是$[1, \alpha_{p^n}]$的一个划分，并且对所有$x \in [1, p^{n-2}]$，都有$|A_x| = \ell(n, x)$。关于这些对象在特定情形下的描述，请参见例 4.8。

为方便读者理解，我们对上面的定义 4.3 作更为非正式的说明。对于固定的 $n \geq 2$，我们按如下方式定义一个递增序列 $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{p^{n-2}} = \alpha_{p^n}$。首先 $a_1 = n-1$。然后，对于 $i = 2$，有 $a_i - a_{i-1} = n-2$，……，p。接下来，对于 $i = p+1$，有 $a_i - a_{i-1} = n-3p+2$，……，p^2。以此类推，我们得到对于 $i = p^{n-3}+1$，有 $a_i - a_{i-1} = 1$，……，p^{n-2}。现在令 $A_i := (a_{i-1}, a_i]$，对于 $i = 1$，……，p^{n-2}。那么 $\{A_1, A_2, \ldots, A_{p^{n-2}}\}$ 显然是 $[1, p^{n-2}]$ 的一个划分。

引理 4.4. 使用定义 4.3 中引入的记号，我们有 $\sum_{x=1}^{p^{n-2}} \ell(n, x) = \alpha_{p^n}$。

证明. 若 $n = 2$，则 $\ell(2, 1) = 1 = \alpha_{p^2}$。令 $n \geq 3$ 和 $i \in [0, n-3]$，则对每个 $x \in [p^i + 1, p^{i+1}]$，$m_x = i + 3$ 和 $\ell(n, x) = n - i - 2$。因此

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{p^{n-2}} \ell(n,x) &= \ell(n,1) + \sum_{i=0}^{n-3} \sum_{x=p^i+1}^{p^{i+1}} \ell(n,x) = (n-1) + \sum_{i=0}^{n-3} p^i (p-1)(n-i-2) \\ &= (n-1) - (n-2) + \left(\sum_{i=1}^{n-3} p^i [(n-i-1) - (n-i-2)] \right) + p^{n-2}[n-(n-3)-2] \\ &= 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-3} p^i \right) + p^{n-2} = \alpha_{p^n}.\end{aligned}$$

□

以下技术性引理将有助于证明定理 4.6。

引理 4.5. 设 $n \in \mathbb{N} \geq 2$ 和 p 为奇素数。若对某些 $r \in [0, p-1]$ 和$a \in \mathbb{N}$，有 $x = pa + r$，则

$$p \cdot \sum_{j=1}^{a} \ell(n-1, j) + r \cdot \ell(n-1, a+1) = \sum_{j=1}^{x} \ell(n, j) - 1.$$

证明. 注意，$\ell(n,1) = n-1$，且若 $y \in [2, p]$，则 $\ell(n, y) = n-2$。因此

$$\sum_{y=1}^{p} \ell(n, y) = p\ell(n-1, 1) + 1.$$

此外，对于 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sum_{y=jp+1}^{jp+p} \ell(n, y) = p\ell(n-1, j+1).$$

这可通过观察到，对于所有 $y \in [jp+1, jp+p]$，$\ell(n, y) = \ell(n-1, j+1)$ 得出。利用这些事实，我们推得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{x} \ell(n,j) &= \sum_{j=1}^{p} \ell(n,j) + \sum_{j=1}^{a-1} \sum_{y=jp+1}^{jp+p} \ell(n,y) + \sum_{i=1}^{r} \ell(n, ap+i) \\ &= 1 + p\ell(n-1,1) + p \sum_{j=1}^{a-1} \ell(n-1, j+1) + r\ell(n-1, a+1).\end{aligned}$$

□

本节的主要结果表明，若 p^k 是 P_{p^n} 的一个特征标次数，那么 p^n 的分拆中，其对应的不可约特征标在限制到 P_{p^n} 时含有次数为 p^k 的成分的那些，恰好是能装入边长为 $p^n - x$ 的正方形中的分拆，其中 $k \in A_x$ 决定 x。

定理 4.6. 设 $n \geq 2$, $k \in [1, \alpha_{p^n}]$，并设 $x \in [1, p^{n-2}]$ 满足 $k \in A_x$。则 $\Omega_{p^n}^k = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x)$。

证明. 我们对 n 使用归纳法：若 $n = 2$，则 $\alpha_{p^2} = 1$，且必有 $k = 1$，因为 $A_1 = \{1\}$。由引理 4.1，我们有 $\Omega_{p^2}^1 = \mathcal{B}_{p^2}(p^2 - 1)$，证毕。若 $n \geq 3$，则我们对参数 $x \in [1, p^{n-2}]$ 使用归纳法。对于 $x = 1$，我们要证明，对于每个 $k \in A_1 = [1, \ell(n, 1)]$，都有 $\Omega_{p^n}^k = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。利用定理 4.2 和引理 4.1，我们知道

$$\Omega_{p^n}^{\ell(n,1)} \subseteq \Omega_{p^n}^k \subseteq \Omega_{p^n}^1 = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1).$$

因此，只需证明 $\Omega_{p^n}^{\ell(n,1)} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1)$。由于 $\ell(n,1) = \ell(n-1, 1) + 1$，我们使用引理 3.7、关于 n 的归纳假设以及 [GN18、定理 3.1], , 推得

$$\Omega_{p^n}^{\ell(n,1)} \supseteq \Omega_{p^n}^{\ell(n-1,1)} \star \left(\Omega_{p^n}^0\right)^{\star p-1} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - 1) \star \left(\mathcal{B}_{p^n}(p^n)\right)^{\star p-1}.$$

利用引理 2.3，我们得出 $\mathcal{B}_{p^n}(p^n-1) \subseteq \Omega_{p^n}^{\ell(n,1)}$，因此 $\mathcal{B}_{p^n}(p^n-1) = \Omega_{p^n}^{\ell(n,1)}$.

现在假设 $x \geq 2$ 且 $k \in A_x$。为简化记号，对于任意 $y \in [1, p^{n-2}]$，令 $f_n(y) = \sum_{j=1}^{y} \ell(n, j)$。采用这一记号，我们有 $A_x = [f_n(x-1) + 1, f_n(x)]$。利用定理 4.2，并完全仿照上述论证，我们注意到，要证明 $\Omega_{p^n}^k = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x)$，只需证明

$$(1)\ \Omega_{p^n}^{f_n(x-1)+1} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x) \text{ and that } (2)\ \Omega_{p^n}^{f_n(x)} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x).$$

为证明 (1)，我们首先注意到，根据归纳假设，我们知道该陈述对任意 $j \in A_{x-1}$ 都成立。特别地，我们有 $\Omega^{f_n\ (x-1)\ p^n} = \mathcal{B}_{p^n}(p^n - (x-1))$。由定理 4.2 可知，对于某个 $T \in \{p^n - x, p^n - (x-1)\}$，有 $\Omega_{p^n}^{f_n\ x-1\ +1} = \mathcal{B}_{p^n}(T)$。因此，只需证明 $\lambda = (p^n - (x-1)\ x-1) \notin \Omega_{p^n}^{f_n\ x-1\ +1}$。设 $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathcal{P}(p^{n-1})$ 满足 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \ldots, \mu_p) \neq 0$。根据引理 2.2，对每个 $i \in [1, p]$，存在 $a_i \in \mathbb{N}$，使得 $(\mu_i)_1 = p^{n-1} - a_i$，并且满足 $\sum_{j=1}^{p} a_j \leq x - 1$。特别地，对每个 $i \in [1, p]$，我们有

$$\mu_i \in \mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1} - a_i) \setminus \mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1} - (a_i + 1)) = \Omega_{p^{n-1}}^{f_{n-1}(a_i)} \setminus \Omega_{p^{n-1}}^{f_{n-1}(a_i)+1},$$

其中，该等式由关于 n 的归纳假设保证。

令 $B = \left(P_{p^{n-1}}\right)^{\times p}$ 为 P_{p^n} 的底群，并设 $Y = (\mathfrak{S}_{p^{n-1}})^{\times p} \leq \mathfrak{S}_{p^n}$ 满足 $B \leq Y$。令 $\eta = \chi^{\mu_1} \times \cdots \times \chi^{\mu_p} \in \mathrm{Irr}(Y)$，并令 $x - 1 = ap + r$，其中 $a \in \mathbb{N}$ 和 $r \in [0, p-1]$。我们注意到

$$\begin{aligned} \partial_B(\eta) &= \sum_{j=1}^{p} f_{n-1}(a_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{a_j} \ell(n-1, i) \\ &\leq p \cdot \Big(\sum_{j=1}^{a} \ell(n-1, j)\Big) + r \cdot \ell(n-1, a+1) \\ &= \sum_{j=1}^{x-1} \ell(n, j) - 1 = f_n(x-1) - 1. \end{aligned}$$

这里，通过观察到对所有$s \in \mathbb{N}$， $\ell(n-1,s) \geq \ell(n-1,s+1)$，即可立即得到该不等式。另一方面，第三个等式由引理 4.5 得出。利用命题 3.5，我们推得 $\partial_{P_{p^n}}(\chi^\lambda) \leq f_n(x-1)$。由此可得 $\lambda \notin \Omega_{p^n}^{f_n\ x-1\ +1}()$，证毕。

为证明 (2)，我们回顾一下，根据上文的 (1)，有 $\Omega_{p^n}^{f_n\ x-1\ +1} = \mathcal{B}_{p^n()}(p^n - x)$。因此，定理 4.2 蕴含 $\Omega^{f_{n_{(x)}\,p^n}} \subseteq \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x)$。另一方面，将 $x = ap + r$ 写成某个$a \in \mathbb{N}$ 和 $r \in [0, p-1]$，并利用引理 4.5，可得：

$$\begin{aligned}
\Omega_{p^n}^{f_n(x)} &= \Omega_{p^n}^{1+p\cdot\left(\sum_{j=1}^{a}\ell(n-1,j)\right)+r\cdot\ell(n-1,a+1)} \\
&\supseteq \left(\Omega_{p^{n-1}}^{f_{n-1}(a+1)}\right)^{\star r} \star \left(\Omega_{p^{n-1}}^{f_{n-1}(a)}\right)^{\star p-r} \\
&= \left(\mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1} - (a+1))\right)^{\star r} \star \left(\mathcal{B}_{p^{n-1}}(p^{n-1} - a)\right)^{\star p-r} \\
&= \mathcal{B}_{p^n}(p^n - x).
\end{aligned}$$

这里，第一个包含关系由引理 3.7 得出。第二个等式由归纳假设成立。最后一个等式则由引理 2.3 给出。证明完毕。□

在下面的推论中，我们汇总了一些事实，以便更好地理解对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有 $k \in [0, \alpha_{p^n}]$，集合 $\Omega_{p^n}^k$ 的结构。

推论 4.7. 设 $n \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq k < t \leq \alpha_{p^n}$。以下结论成立。

(i) $\mathcal{B}_{p^n}(p^n - p^{n-2}) = \Omega_{p^n}^{\alpha_{p^n}} \subseteq \Omega_{p^n}^t \subseteq \Omega_{p^n}^k$。(ii) $\Omega_{p^n}^k = \Omega$当且仅当存在 $x \in [1, p^{n-2}]$ 使得 $k, t \in A_x$。(iii) 给定 $x \in [1, p^{n-2}]$，我们有 $|\{k \in [1, \alpha_{p^n}] \mid \Omega_{p^n}^k = \mathcal{B}(p^n - x)\}| = \ell(n, x)$。

证明。回想一下，对每个 $x \in [1, p^{n-2}]$，都有 $|A_x| = \ell(n, x)$；由定理 4.6，(i)、(ii) 和 (iii) 立即可得。□

我们尤其惊讶地发现，若 p^n 的一个划分对应的特征标在限制到 P_{p^n} 后含有一个次数为 p^k 的不可约成分，那么对任意 $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$，该特征标也含有一个次数为 p^j 的成分。此外，其特征标含有次数达到最大可能次数 $p^{\alpha_{p^n}}$ 的成分的划分，恰好是那些能够容纳在边长为 $p^n - p^{n-2}$ 的正方形内的划分。

例 4.8. 令 $p = 3$，并固定 $n = 4$。沿用定义 4.3 中引入的记号，我们有 $3^{4-2} = 9$和 $\ell(4,1) = 3$, $\ell(4,2) = \ell(4,3) = 2$, $\ell(4,4) = \cdots = \ell(4,9) = 1$。因此

$$A_1 = \{1,2,3\},\ A_2 = \{4,5\},\ A_3 = \{6,7\},\ A_4 = \{8\},\ A_5 = \{9\}, \ldots, A_9 = \{13\}.$$

注意到 $\{A_1, \ldots, A_9\}$ 是 $[1, \alpha_{3^4}] = [1, 13]$ 的一个划分，符合要求。利用定理 4.6，我们得到了所有 $k \in [1, 13]$ 对应的 $\Omega_{3^4}^k$ 的完整描述。特别地，我们有

$$\Omega_{3^4}^1 = \Omega_{3^4}^2 = \Omega_{3^4}^3 = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 1),\ \Omega_{3^4}^4 = \Omega_{3^4}^5 = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 2),\ \Omega_{3^4}^6 = \Omega_{3^4}^7 = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 3),$$
$$\Omega_{3^4}^8 = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 4),\ \Omega_{3^4}^9 = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 5), \ldots, \Omega_{3^4}^{13} = \mathcal{B}_{3^4}(3^4 - 9).$$

这些集合记录在表 1 的第四列中。

我们用这个例子的第二部分来说明定理 4.2 证明中的一个关键步骤。设 $n = k = 4$。我们希望计算 t_4^4。沿用定理 4.2 的证明中引入的记号，我们有

$$\mathcal{L}(3) = \{(j_1, j_2, j_3) \in \mathcal{C}(3) \mid j_i \in [0, \alpha_{3^3}] = [0,4],\ \text{for all } i \in [1,3]\} = \{(3,0,0), (2,1,0), (1,1,1)\}.$$

通过归纳法，我们可以假设已知每个 $j \in [0,4]$ 对应的值 t_3^j。这些值可以从表 1 的第三列轻松读出。我们令

$$M = \max\{t_3^3 + t_3^0 + t_3^0, t_3^2 + t_3^1 + t_3^0, t_3^1 + t_3^1 + t_3^1\} = \max\{3^4 - 2, 3^4 - 2, 3^4 - 3\} = 3^4 - 2.$$

由此可得 $t_4^4 = M = 3^4 - 2$。

TABLE 1. 令 $p = 3$。根据定理 4.6，$\Omega_{p^n}^k$ 的结构记录在行 k 和列 n对应的条目中。

$\Omega_{p^n}^k$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$k=0$	$\mathcal{B}_3(3)$	$\mathcal{B}_{3^2}(3^2)$	$\mathcal{B}_{3^3}(3^3)$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4)$
$k=1$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^2}(3^2-1)$	$\mathcal{B}_{3^3}(3^3-1)$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-1)$
$k=2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^3}(3^3-1)$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-1)$
$k=3$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^3}(3^3-2)$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-1)$
$k=4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^3}(3^3-3)$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-2)$
$k=5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-2)$
$k=6$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-3)$
$k=7$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-3)$
$k=8$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-4)$
$k=9$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-5)$
$k=10$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-6)$
$k=11$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-7)$
$k=12$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-8)$
$k=13$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_{3^4}(3^4-9)$
$k=14$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

5. ARBITRARY NATURAL NUMBERS

本节旨在通过将定理 4.6 推广到任意自然数，完成我们的研究。为此，我们先推广定理 4.2。回顾一下，p 是一个固定的奇素数。

定理 5.1. 设 $n \in \mathbb{N}$且令 $k \in [0, \alpha_n]$。存在 $T_n^k \in [1, n]$使得 $\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(T_n^k)$。此外，对于所有 $k \in [0, \alpha_n - 1]$.，都有 $T_n^{k+1} \in \{T_n^k - 1, T_n^k\}$

证明。我们对 $n \in \mathbb{N}$进行归纳。若 $n = 1$，则必有 $k = 0$ 且 $\Omega_1^0 = \mathcal{B}_1(1)$。若 $n \geq 2$，令 $n = \sum_{i=1}^t p^{n_i}$为 n的 p-进展开，其中 $n_1 \geq \cdots \geq n_t \geq 0$。根据定理 4.2，对于每个 $i \in [1, t]$和每个 $d_i \in [0, \alpha_{p^{n_i}}]$，都存在 $t_{n_i}^{d_i} \in [\frac{p^{n_i}}{2} + 1, p^{n_i}]$使得 $\Omega_{p^{n_i}}^{d_i} = \mathcal{B}_{p^{n_i}}\left(t_{n_i}^{d_i}\right)$。与证明定理 4.2 时所用的方法类似，我们定义

$$\mathcal{J}(k) = \{(j_1, \ldots, j_t) \in \mathcal{C}(k) \mid j_i \in [0, \alpha_{p^{n_i}}] \text{ for all } i \in [1, t]\}.$$

此外，我们定义

$$M = \max\left\{ \sum_{i=1}^t t_{n_i}^{d_i} \;\middle|\; (d_1, \ldots, d_t) \in \mathcal{J}(k) \right\}.$$

我们声称 $\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(M)$。

设 $(d_1, \ldots, d_t) \in \mathcal{J}(k)$ 满足 $M = \sum_{i=1}^t t_{n_i}^{d_i}$。那么利用引理 2.3、定理 4.2 和引理 3.7，我们得到

$$\mathcal{B}_n(M) = \mathcal{B}_{p^{n_1}}\left(t_{n_1}^{d_1}\right) \star \cdots \star \mathcal{B}_{p^{n_t}}\left(t_{n_t}^{d_t}\right) = \Omega_{p^{n_1}}^{d_1} \star \cdots \star \Omega_{p^{n_t}}^{d_t} \subseteq \Omega_n^k.$$

现在反设 $\lambda \in \Omega_n^k \setminus \mathcal{B}_n(M)$。不失一般性，我们可以假设 $\lambda_1 \geq M + 1$。令 $\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_t$为 $(\chi^\lambda)_{P_n}$的一个不可约成分，其中

$\phi_i(1)$ 对每个 $i \in [1,t]$ 和 $\sum_{i=1}^{t} d_i = k$ 都成立。注意到 $(d_1,\dots,d_t) \in \mathcal{J}(k)$。对每个$i \in [1,t]$, 令 $\mu_i \in \mathcal{P}(p^{n_i})$ 满足 $[(\chi^{\mu_i})^{P_{p^{n_i}}}, \phi_i] \neq 0$，并且使得 $\chi^{\mu_1} \times \cdots \times \chi^{\mu_t}$ 是 $(\chi^{\lambda})_Y$的一个不可约成分。这里选择 $Y = \mathfrak{S}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{p^{n_t}} \leq \mathfrak{S}_n$ 使得 $P_n \leq Y$。因此，根据定理 4.6，对每个 $i \in [1,t]$, 都有 $\mu_i \in \Omega_{p^{n_i}}^{d_i} = \mathcal{B}_{p^{n_i}}\left(t_{n_i}^{d_i}\right)$。于是,

$$\lambda \in \mathcal{B}_{p^{n_1}}\left(t_{n_1}^{d_1}\right) \star \cdots \star \mathcal{B}_{p^{n_t}}\left(t_{n_t}^{d_t}\right) = \mathcal{B}_n\left(\sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{d_i}\right).$$

由引理 2.2 和我们的假设可得

$$M+1 \leq \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{d_i} \leq M,$$

这与结论矛盾。

综上，对于 $k \in [0, \alpha_n - 1]$，有:

$$\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(M), \text{ where } M = \max\left\{ \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{d_i} \;\middle|\; (d_1,\dots,d_t) \in \mathcal{J}(k) \right\}, \text{ and}$$

$$\Omega_n^{k+1} = \mathcal{B}_n(T), \text{ where } T = \max\left\{ \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{f_i} \;\middle|\; (f_1,\dots,f_t) \in \mathcal{J}(k+1) \right\}.$$

设 $(d_1,\dots,d_t) \in \mathcal{J}(k)$ 满足 $M = \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{d_i}$。由于 $k \leq \alpha_n - 1$，存在 $i \in [1,t]$ 使得 $d_i \leq \alpha_{p^{n_i}} - 1$。因此，根据定理 4.2，$(d_1,\dots,d_{i-1},d_i+1,d_{i+1},\dots,d_t) \in \mathcal{J}(k+1)$ 且 $t_{n_i}^{d_i+1} \in \left\{ t_{n_i}^{d_i} - 1, t_{n_i}^{d_i} \right\}$。于是,

$$M - 1 = -1 + \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{d_i} \leq t_{n_1}^{d_1} + \cdots + t_{n_{i-1}}^{d_{i-1}} + t_{n_i}^{d_i+1} + t_{n_{i+1}}^{d_{i+1}} + \cdots + t_{n_t}^{d_t} \leq T.$$

另一方面，设 $(f_1,\dots,f_t) \in \mathcal{J}(k+1)$ 满足 $T = \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{f_i}$。不失一般性，我们可以假设 $f_1 \geq 1$。那么，根据定理 4.2，$(f_1 - 1, f_2, \dots, f_t) \in \mathcal{J}(k)$，且 $t_{n_1}^{f_1} \in \left\{ t_{n_1}^{f_1-1} - 1, t_{n_1}^{f_1-1} \right\}$。因此

$$T = \sum_{i=1}^{t} t_{n_i}^{f_i} \leq t_{n_1}^{f_1-1} + t_{n_2}^{f_2} + \cdots + t_{n_t}^{f_t} \leq M.$$

由此可得 $T = M$ 或 $T = M - 1$。证明至此完成。 □

定理 5.1 表明，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in [0, \alpha_n]$，都存在一个整数，记作 T_n^k，使得 $\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(T_n^k)$。为了证明我们的主要结果，即精确计算所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in [0, \alpha_n]$对应的值 T_n^k，我们先固定一些贯穿本节的记号。注意，对于 $n < p^2$， P_n 是阿贝尔群，且 $\Omega_n^0 = \mathcal{P}(n)$。因此，我们着重考虑情形 $n \geq p^2$。

记号 5.2. 设 $n \geq p^2$ 为自然数，且 $n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$ 为 n的 p-进展开，其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq 0$。设 $\mathcal{R} := \{(i,y) \mid i \in [1,t], \text{ 且 } y \in [1, p^{n_i - 2}]\}$。我们在 $\mathcal{R}$ 上定义全序 $\triangleright$如下。给定 $\mathcal{R}$ 中的 (i,y) 和 (j,z)，若且唯若满足以下条件之一，我们称 $(i,y) \triangleright (j,z)$:

(i) $\ell(n_i, y) > \ell(n_j, z)$，或 (ii) $\ell(n_i, y) = \ell(n_j, z)$ 且 $i < j$，或 (iii) $\ell(n_i, y) = \ell(n_j, z)$ 且 $i = j$ 且 $y < z$。

令 $N := \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$，并注意到 $N = |\mathcal{R}|$。令 $\phi\colon \mathcal{R} \longrightarrow [1, N]$ 为双射，当且仅当有序对 (i, y) 是全序集 $(\mathcal{R}, \triangleright)$ 中第 x 大的元素时，该双射将 (i, y) 映射为 $\mapsto x$。我们用此双射重新标记整数 $\ell(n_i, y)$，其中对所有 $(i, y) \in \mathcal{R}$ 均成立。特别地，若 $\phi((i, y)) = x$，则令 $\ell(x) := \ell(n_i, y)$。回顾定义 4.3，我们观察到，$\triangleright$ 的定义意味着 $\ell(1) \geq \ell(2) \geq \cdots \geq \ell(N)$。

最后，对于任意 $\alpha \in [1, N]$，我们令 $F_n(\alpha) = \sum_{a=1}^{\alpha} \ell(a)$ 和 $A_\alpha = [\{F_n(\alpha - 1) + 1, F_n(\alpha)\}]$。我们注意到，$\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ 是 $[1, \alpha_n]$ 的一个划分（这可由引理 4.4 轻易得出）。有关这些对象在一个具体情形下的明确描述，请参见例 5.6。

Th定理 5.3. 设 $n \in \mathbb{N}_{\geq p^2}$ 和 $k \in [1, \alpha_n]$。设 $x \in [1, N]$ 满足 $k \in A_x$。那么

$$\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(n - x).$$

证明。与记号 5.2 中一样，设 $n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$ 为 n的 p-进展开，其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq 0$。我们对 x使用归纳法。若 $x = 1$，则 $k \in A_1 = [1, \ell(1)] = [1, \ell(n_1, 1)],$，因为$\phi((n_1, 1)) = 1$。由定理 4.6 可知 $\Omega_{p^{n_1}}^k = \mathcal{B}_{p^{n_1}}(p^{n_1} - 1)$。此外，根据 GN18 定理 3.1]，对所有 $m \in \mathbb{N}$，都有 $\Omega_{p^m}^0 = \mathcal{B}_{p^m}(p^m)$。因此，先使用引理 3.8，再使用引理 2.3，我们得到

$$\Omega_n^k \supseteq \Omega_{p^{n_1}}^k \star \Omega_{p^{n_2}}^0 \star \cdots \star \Omega_{p^{n_t}}^0 = \mathcal{B}_{p^{n_1}}(p^{n_1} - 1) \star \mathcal{B}_{p^{n_2}}(p^{n_2}) \star \cdots \star \mathcal{B}_{p^{n_t}}(p^{n_t}) = \mathcal{B}_n(n - 1).$$

由于 $(n) \notin \Omega_n^k$，我们得出 $\Omega_n^k = \mathcal{B}_n(n - 1)$，这正是所需的结论。现在令 $x \geq 2$，并假设该结论对任意 $s \in A_{x-1} = [F_n(x - 1) + 1, F_n(x)]$ 都成立。由定理 5.1 可知

$$\Omega_n^{F_n(x-1)+1} \subseteq \Omega_n^k \subseteq \Omega_n^{F_n(x)},$$

因此，只需证明:

$$(1)\ \Omega_n^{F_n(x-1)+1} = \mathcal{B}_n(n - x), \text{ and that } (2)\ \Omega_n^{F_n(x)} = \mathcal{B}_n(n - x).$$

这里 $F_n(y) = \sum_{j=1}^{y} \ell(j)$，正如记号 5.2 中所解释的那样。

为证明 (1)，我们首先注意到，根据归纳假设，$\Omega^{F_n(x-1)n} = \mathcal{B}_n(n - (x - 1))$。因此，定理 5.1 蕴含，对于某个 $T \in \{n - x, n - (x - 1)\}$，有 $\Omega_n^{F_n\ x-1\ +1} = \mathcal{B}_{n()}(T)$。所以只需证明 $\lambda = (n - (x - 1)\ x - 1) \notin \Omega_n^{F_n\ x-1\ +1}{}_{()}$。令 $\{G_1, G_2, \ldots, G_t\}$ 为由 $[1, x - 1]$ 定义的划分

$$G_i = \{y \in [1, x - 1] \mid \phi^{-1}(y) = (i, z), \text{ for some } z \in [1, p^{n_i - 2}]\}, \text{ for all } i \in [1, t].$$

为简化记号，对于所有 $i \in [1, t]$，令 $g_i = |G_i|$，并注意到 $g_1 + g_2 + \cdots + g_t = x - 1$。设 $Y = \mathfrak{S}_{p^{n_1}} \times \mathfrak{S}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{p^{n_t}}$ 是包含 P_n 的 $\mathfrak{S}_n$ 的一个 Young 子群。对于每个 $i \in [1, t]$，令 $\mu^i \in \mathcal{P}(p^{n_i})$ 满足 $\mathcal{LR}(\lambda;\ \mu^1, \ldots, \mu^t) \neq 0$。那么引理 2.2 蕴含存在 $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \mathbb{Z}$，使得

$$(\mu^i)_1 = p^{n_i} - (g_i + a_i) \text{ for all } i \in [1, t], \text{ and such that } \sum_{i=1}^{t} a_i \leq 0.$$

特别地，利用定理 4.6，我们有，对于每个 $i \in [1, t]$,

$$\mu^i \in \mathcal{B}_{p^{n_i}}(p^{n_i} - (g_i + a_i)) \setminus \mathcal{B}_{p^{n_i}}(p^{n_i} - (g_i + a_i + 1)) = \Omega_{p^{n_i}}^{f_{n_i}(g_i + a_i)} \setminus \Omega_{p^{n_i}}^{f_{n_i}(g_i + a_i)+1}.$$

沿用定理 4.6 证明中使用的记号，这里 $f_m(a) := \sum_{j=1}^{a} \ell(m, j)$。由此可得

$$\partial_{P_{p^{n_i}}}(\chi^{\mu^i}) = \sum_{j=1}^{g_i + a_i} \ell(n_i, j) = \begin{cases} \sum_{y \in G_i} \ell(y) + \sum_{j=g_i+1}^{g_i+a_i} \ell(n_i, j) & \text{if } a_i \geq 0, \\ \sum_{y \in G_i} \ell(y) - \sum_{j=g_i+a_i}^{g_i} \ell(n_i, j) & \text{if } a_i < 0. \end{cases}$$

因此，令 $\chi = \chi^{\mu^1} \times \chi^{\mu^2} \times \cdots \times \chi^{\mu^t}$，我们有

$$\partial_{P_n}(\chi) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{y \in G_i} \ell(y) + E - F, \text{ where } E = \sum_{\substack{i=1 \\ a_i > 0}}^{t} \sum_{j=g_i+1}^{g_i+a_i} \ell(n_i, j), \text{ and } F = \sum_{\substack{i=1 \\ a_i < 0}}^{t} \sum_{j=g_i+a_i}^{g_i} \ell(n_i, j).$$

我们断言 $E - F \leq 0$。为此，我们注意到，集合 G_i 的定义意味着，对于所有 $y \geq g_i + 1$，$\phi((i, y)) > x - 1$。另一方面，基于相同的理由，对于所有 $z \leq g_j$，有 $\phi((j, z)) \leq x - 1$。因此，出现在 E 中的每个项 $\ell(n_i, y)$ 都小于或等于出现在 F 中的任意项 $\ell(n_j, z)$。由于 $\sum_{i=1}^{t} a_i \leq 0$，我们得到 $E - F \leq 0$，如所需。利用命题 3.6，我们得出

$$\partial_{P_n}(\chi^{\lambda}) \leq \sum_{i=1}^{t} \sum_{y \in G_i} \ell(y) = \sum_{y=1}^{x-1} \ell(y) = F_n(x-1) < F_n(x-1) + 1.$$

因此 $\lambda \notin \Omega_n^{F_n\ x-1\ +1}()$，从而 $\Omega_n^{F_n\ x-1\ +1} = \mathcal{B}_{n()}(n-x)$，如所需。

为证明 (2)，我们注意到，上文给出的等式 (1) 意味着，根据定理 5.1，$\Omega^{F_{n(x)n}} \subseteq \mathcal{B}_n(n-x)$。为证明反向包含关系，我们采用一种与证明 (1) 时类似的思路。具体而言，我们令 $\{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ 为由 $[1, x]$ 定义的划分，其定义如下

$$H_i = \{y \in [1, x] \mid \phi^{-1}(y) = (i, z), \text{ for some } z \in [1, p^{n_i - 2}]\}, \text{ for all } i \in [1, t].$$

为简化记号，对于所有 $i \in [1, t]$，我们记 $h_i = |H_i|$，并注意到 $h_1 + h_2 + \cdots + h_t = x$。我们还引入以下记号。对于每个 $i \in [1, t]$，记

$$\Gamma_i := \sum_{y \in H_i} \ell(y) = \sum_{j=1}^{h_i} \ell(n_i, j) = f_{n_i}(h_i).$$

我们注意到（Γ_1，Γ_2，...，Γ_t）$\in \mathcal{C}$（F_n（x））-1，并且对于所有 $i \in [1, t]$，有 $\Gamma_i \in [0, \alpha_{p^{n_i}}]$。现在我们可以依次使用引理 3.8、定理 4.6 和引理 2.3，从而得到

$$\Omega_n^{F_n(x)} \supseteq \Omega_{p^{n_1}}^{\Gamma_1} \star \Omega_{p^{n_2}}^{\Gamma_2} \star \cdots \star \Omega_{p^{n_t}}^{\Gamma_t} = \mathcal{B}_{p^{n_1}}(p^{n_1} - h_1) \star \mathcal{B}_{p^{n_2}}(p^{n_2} - h_2) \star \cdots \star \mathcal{B}_{p^{n_t}}(p^{n_t} - h_t) = \mathcal{B}_n(n-x).$$

我们得到 $\Omega^{F_n\ (x)\ n} = \mathcal{B}_n(n-x)$，证明得证。 □

正如我们在推论 4.7 的素数幂情形中所做的那样，为了更好地理解对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in [0, \alpha_n]$ 的集合 Ω_n^k，我们记录一些事实。沿用 5.2 中引入的记号，我们回顾 $N = \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$。

推论 5.4. 令 $n \in \mathbb{N}$ 和 $n = \sum_{i=1}^{t} p^{n_i}$ 为其 p-进展开，其中 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t \geq 0$。令 $1 \leq k < t \leq \alpha_n$。以下结论成立。

(i) $\mathcal{B}_n(n-N) = \Omega_n^{\alpha_n} \subseteq \Omega_n^t \subseteq \Omega_n^k$. (ii) $\Omega_n^k = \Omega_n^t$ 当且仅当存在 $x \in [1, N]$ 使得 $k, t \in A_x$. (iii) 给定 $x \in [1, N]$，我们有 $|\{k \in [1, \alpha_n] \mid \Omega_n^k = \mathcal{B}_n(n-x)\}| = \ell(x)$.

证明. 由于对每个 $x \in [1, N]$，$|A_x| = \ell(x)$，由定理 5.3 可得 (i)、(ii) 和 (iii)。 □

定理 5.3 的第二个推论是以下渐近结果。这基本上表明，当 n任意大时，$\mathfrak{S}_n$ 的几乎所有不可约特征标在限制到 Sylow p-子群时，都包含每一种可能次数的成分。

推论 5.5. 设 $\Omega_n = \bigcap_k \Omega_n^k$，其中 k 遍历 $[0, \alpha_n]$。那么

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\Omega_n|}{|\mathcal{P}(n)|} = 1.$$

证明. Erd˝os 和莱纳 [EL41, (1.4)] 的一个结果保证：给定 $f(n)$ 这样一个当 n 趋于无穷时发散的函数，对于除 $o(|\mathcal{P}(n)|)$ 个以外的所有 n 的分拆 λ，量 λ_1 和$l(\lambda)$ 都介于 $\sqrt{n}\cdot(\frac{\log n}{d}\pm f(n))$ 之间，其中 d 是一个常数。根据定理 5.3，我们观察到 $\Omega_n=\Omega_n^{\alpha_n}=\mathcal{B}(n-N)$，其中 $N=\lfloor\frac{n}{p^2}\rfloor$。由于 $n-N\geq n/2$，结论得证。□

例 5.6. 令 $p=3$ 和 $n=3^3+3^2+3$。根据记号 5.2，我们有 $n_1=3$、 $n_2=2$和 $n_3=1$。因此，$\mathcal{R}=\{(1,1)、(1,2)、(1,3)、(2,1)\}$，因为 $[1,3^{n_3-2}]=\emptyset$。注意， $|\mathcal{R}|=4=\lfloor\frac{n}{3^2}\rfloor$。根据定义 4.3，我们可以看出 $\ell(3,1)=2$， $\ell(3,2)=\ell(3,3)=1$ 和 $\ell(2,1)=1$。因此，全序 $\triangleright$ 在 $\mathcal{R}$ 上的定义意味着 $(1,1)\triangleright(1,2)\triangleright(1,3)\triangleright(2,1)$。于是$\ell(1)=2$， $\ell(2)=\ell(3)=\ell(4)=1$ 和

$$A_1=\{1,2\},\ A_2=\{3\},\ A_3=\{4\},\ A_4=\{5\}.$$

注意到 $\{A_1,\dots,A_4\}$是 $[1,\alpha_n]=[1,5]$的一个划分，符合要求。此外，根据定理 5.3，我们有 $\Omega_n^1=\Omega_n^2=\mathcal{B}(n-1)$、$\Omega_n^3=\mathcal{B}(n-2)$、$\Omega_n^4=\mathcal{B}(n-3)$、$\Omega_n^5=\mathcal{B}(n-4)$。

使用定理 5.1 的记号，上述计算给出 $T_n^2=n-1$。按照定理 5.1 的证明，我们可以用另一种方式计算 T_n^2。我们有

$$\mathcal{J}(2)=\{(j_1,j_2,j_3)\in\mathcal{C}(2)\mid j_1\in[0,4],\ j_2\in[0,1],\ j_3\in\{0\}\}=\{(2,0,0),(1,1,0)\}.$$

因此 $M=\max\{t_3^0+t_2^0+t_1^0,t_3^1+t_2^1+t_1^0\}=\max\{n-1,n-2\}=n-1$。由此可得 $T_n^2=M=n-1$，正如预期。注意， $n_3=1$ 完全没有参与计算。事实上，在$\mathcal{R}$ 中不存在形如 $(3,y)$ 的元素， $y\in\mathbb{N}$。此外，查看表 2 的第三列可知，对于每个 $k\in\mathbb{N}$， $T_n^k=T_{n-3}^k-3$。通过观察表 2 的前两列相等，也可以找到这一事实的另一个例子。

TABLE 2. 设 $p=3$。根据定理 5.3，Ω_n^k 的结构记录在对应于第 k 行、第 n列的表项中。

Ω_n^k	$n=3+3^3$	$n=2\cdot3+3^3$	$n=3^2+3^3$	$n=3^3+3^3$	$n=3^3+3^4$
$k=0$	$\mathcal{B}_n(n)$	$\mathcal{B}_n(n)$	$\mathcal{B}_n(n)$	$\mathcal{B}_n(n)$	$\mathcal{B}_n(n)$
$k=1$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$
$k=2$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$
$k=3$	$\mathcal{B}_n(n-2)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$	$\mathcal{B}_n(n-1)$
$k=4$	$\mathcal{B}_n(n-3)$	$\mathcal{B}_n(n-3)$	$\mathcal{B}_n(n-3)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$
$k=5$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-4)$	$\mathcal{B}_n(n-3)$	$\mathcal{B}_n(n-2)$
$k=6$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-4)$	$\mathcal{B}_n(n-3)$
$k=7$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-5)$	$\mathcal{B}_n(n-3)$
$k=8$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-6)$	$\mathcal{B}_n(n-4)$
$k=9$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-4)$
$k=10$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-5)$
$k=11$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-6)$
$k=12$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-7)$
$k=13$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-8)$
$k=14$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-9)$
$k=15$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-10)$
$k=16$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-11)$
$k=17$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\mathcal{B}_n(n-12)$
$k=18$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

References

[EL41] P. Erdős and J. Lehner, 《正整数分拆中项数的分布》, *Duke Math. J.* 8 (1941), 335–345。[F97] W. Fulton, *Young tableaux*, 伦敦数学会学生教材, 第 35 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1997。附有表示论与几何方面的应用。[G17] E. Giannelli, 《对称群的奇数次特征》, *J. London Math. Soc.* (1), 96 (2017), 1–14。[G21] E. Giannelli, 《对称群与交错群的麦凯双射》, *Algebra Number Theory*, 15 (2021), 第 7 期, 1809–1835。[GL21] E. Giannelli and S. Law, 《对称群的西洛分支系数数》, *Journal of the London Mathematical Society* 2 103 2021 697 728 , ( ) ( ), –。[GN18] E. Giannelli and G. Navarro, 《将不可约特征限制到西洛 *p* *Proc. Amer.* -子群》, *Math. Soc.* 146 2018 5, 1963 1976 ( ), 第 – 期。[I76] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover, 纽约, 1976。[INOT17] I. M. Isaacs, G. Navarro, J. B. Olsson and P. H. Tiep, 《对称群中的特征限制与重数》。*J. Algebra* 478 (2017) 271–282。[J78] G. James, *The representation theory of the symmetric groups*, 《数学讲义》, 第 682 卷, Springer, 柏林, 1978。[JK81] G. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, 《数学及其应用百科全书》, 第 16 卷, Addison-Wesley 出版公司, 马萨诸塞州雷丁, 1981。[N18] G. Navarro, *Character theory and the McKay conjecture*, 剑桥大学出版社, 2018。[O76] J. B. Olsson, 《麦凯数与特征高度》, *Math. Scand.* 38 (1976), 第 1 期, 25–42。[V23] G. Volpato, 《对称群与西洛子群的表示》, *PhD Thesis*, 佛罗伦萨大学。

(E. Giannelli) Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Viale Morgagni 67/a, Firenze,Italy(G. Volpato) Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Viale Morgagni 67/a, Firenze,Italy *Email address*: eugenio.giannelli@unifi.it, giada.volpato@unifi.it