arXiv:2301.07578v1 [math.KT] 18 Jan 2023

有限张量范畴上的复形的同调

PETTER ANDREAS BERGH

Abstract. 我们将 J.F. Carlson 最近的一项结果推广到具有有限生成上同调的有限张量范畴。具体而言，我们证明，若上同调环的 Krull 维数足够大，则存在无穷多个彼此不同构且非平凡的有界投射对象复形，并且其同调很小。我们还证明了一个适用于具有有限生成上同调的有限维代数的版本。

1. Introduction

设 p 为素数， G 为秩为 d 的初等阿贝尔 p-群，即 $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$。在 [15], G. Carlsson 猜想，若 G 在一个非平凡有限 CW 复形X上自由作用，则

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(X;k) \geq 2^d$$

其中 $k = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。在 [16], 中，他解决了 $p = 2$ 且 $d \leq 3$的情形，文献中也证实了一些其他孤立情形。然而，该猜想在一般情形下仍未解决。

该猜想的代数版本——同样出自 [15] ——指出，若 D 是由有限生成自由 kG-模构成的非平凡有限复形，则

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) \geq 2^d$$

如同一文献中针对 $p = 2$所作的说明，代数版本实际上蕴含 CW 版本。此外，在 [16], 中，Carlsson 也解决了 $p = 2$ 且 $d \leq 3$的这一版本。这里也有其他部分结果，例如复形 D 长度为二的情形，适用于任意素特征；参见 [1, 推论 2.1]。

然而，代数版本在一般情形下并不成立。具体而言，在 [24],中，S. Iyengar 和 M. Walker 给出了一个反例，其中 p 为奇数且 $d \geq 8$。他们给出的构造基于外代数的性质，特别是当生成元个数为偶数时所谓 Lefschetz 元的存在性。自然会想到，能否利用这一构造为 Carlsson 猜想的 CW 版本构造反例；但在 [26] 中，已有研究证明这是不可能的。

在近期的一篇论文 [14], 中，J. Carlson 将 [24] 中的反例推广到了任意群。更确切地说，对于一个特征 p为奇数的域 k ，以及任意一个 p-秩 d 至少为 8 的有限群 G ，他证明存在无穷多个彼此非同构且非平凡的

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16E40, 16T05, 18E10, 18G35, 18M05.

Key words and phrases. 有限张量范畴；有限维代数；复形的同调。1

有限复形 D，其项为投射的 kG-模，且 $\sum_{i\in\mathbb{Z}}\dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^d$。当然，当 G 是一个 p-群时，投射的 kG-模就是自由模，因此 Carlson 的结果提供了一系列反例，反驳 Carlsson 的代数猜想。此外，[24] 中的反例也由此得到重现；Iyengar 和 Walker 构造的复形与 [14]中构造的复形拟同构。

本文证明了 Carlson 的结果在有限张量范畴中的一个类似版本。对于基域 k 上的这类范畴 $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{1})$，不能用向量空间维数来衡量一个复形的同调大小，因为同调本身是 $\mathscr{C}$ 中的一个对象，因此一般而言并非向量空间。取而代之的是，我们用 $\mathscr{C}$ 上任意非平凡的加性函数来衡量同调。换言之，我们使用函数 f，它为每个对象 $M \in \mathscr{C}$ 赋予一个非负实数 $f(M)$，使得 f 在短正合列上具有可加性，并且 $f(\mathbf{1}) \neq 0$。我们证明，当 k 的特征为奇数，且 $\mathscr{C}$ 足够良好、其上同调环的 Krull 维数 d 至少为 8 时，存在无穷多个非同构的非平凡有界复形 D，其项为投射对象，且

$$\frac{1}{f(\mathbf{1})}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(\mathrm{H}_i(D)) < 2^d$$

两个重要的此类加性函数是 Frobenius-Perron 维数和长度函数。对于任意对象 $M \in \mathscr{C}$，不等式 $\ell(M) \leq \mathrm{FPdim}_{\mathscr{C}}(M)$ 成立，且 $\ell(\mathbf{1}) = \mathrm{FPdim}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) = 1$。因此，当 $\mathscr{C}$ 如上所述时，存在无穷多个非同构且非平凡的有界投射对象复形 D，满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \ell(\mathrm{H}_i(D)) \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{FPdim}_{\mathscr{C}}(\mathrm{H}_i(D)) < 2^d$$

特别地，我们可以将这一结果应用于 k 上性质良好的有限维霍普夫代数，因为在这种情况下，有限生成模的 Frobenius-Perron 维数与向量空间维数一致。因此，对于这样的霍普夫代数，存在无穷多个非同构且非平凡的有界投射模复形 D，满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^d$$

Carlson 在 [14] 中的结果是将最后一个结果应用于有限维霍普夫代数 kG 的一个特例。

我们还证明了主要结果的一个版本，适用于具有有限生成上同调的有限维代数。此时我们所研究的上同调环是 Hochschild 上同调环；与有限张量范畴的上同调环一样，它是分次交换的。当上同调有限生成，且该代数存在一个复杂度足够大的模时，定理表明，存在无限多个两两非同构且非平凡的有界投射模复形，其同调很小。同调模的大小以向量空间维数衡量。

致谢。我谨向 Jon F. Carlson 致谢，感谢他就这一主题提出的宝贵意见并与我交流。我还要感谢在挪威科学与文学院高级研究中心举办的表示论项目的组织者；我曾于 2022 年秋季期间在该项目中参与了一段时间。

2. Preliminaries

我们固定一个域 k ——不必是代数闭的——以及一个有限张量k范畴（$\mathscr{C}, \otimes, \mathbf{1}$）。因此， $\mathscr{C}$是一个局部有限的 k-线性阿贝尔范畴，其中简单对象的同构类构成有限集。该范畴具有足够多的投射对象，并且每个对象都有一个投射覆盖，因而都有一个极小投射分解。此外，还存在一个结合的（在函子同构意义下）双函子

$$\mathscr{C} \times \mathscr{C} \xrightarrow{\otimes} \mathscr{C}$$

称为张量积，它与 $\mathscr{C}$ 的阿贝尔结构相容；同时还有一个单位对象 $\mathbf{1} \in \mathscr{C}$（相对于 $\otimes$），它作为 $\mathscr{C}$ 的对象是简单对象。最后，范畴 $\mathscr{C}$ 是刚性的，这意味着所有对象都有左对偶和右对偶。

一个典型例子是有限生成左 kG-模范畴，其中 G 是一个有限群。在这种情况下，该有限张量范畴是对称的，这意味着张量积在某种强意义下是交换的。更一般地，如果 A 是一个有限维霍普夫代数，那么有限生成左 A- 模范畴是一个有限张量范畴，其张量积通常是非交换的。最近，文献 [4, 6, 18] 引入了一类非常有趣的对称有限张量范畴。

注 2.1. (1) 有限张量范畴具有一系列重要性质。首先，由于其底层阿贝尔范畴是局部有限的——也就是说，态射空间是有限维的，且每个对象都具有有限长度——Krull-Schmidt 定理和 Jordan-H¨older 定理成立，参见 [20, 第 1.5] 节。换言之，每个对象都能唯一地（在同构意义下）分解为有限个不可分解对象的直和，并且具有一条 Jordan-H¨older 列，其简单对象重数是唯一的。其次，对偶对象的存在会带来深远的影响。例如，根据[20, 命题 4.2.1 和命题 4.2.12], ，这意味着张量积 $\otimes$ 是双正合的，且投射对象构成一个双边理想：投射对象与任意其他对象的张量积仍是投射对象。此外，根据 [20,命题 6.1.3 和注 6.1.4], ，对偶对象的存在意味着该范畴是拟弗贝尼乌斯范畴，也就是说，投射对象与内射对象重合。

（2）由于 1 是简单对象， k-代数 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 是一个除环。此外，这个环实际上是交换的（见下文），因此它是 k 的有限域扩张。特别地，当 k 代数闭时，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = k$。

给定对象 $M, N \in \mathscr{C}$，我们用 $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M, N)$ 表示分次 k-向量空间$\oplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{C}}(M, N)$。当 $M = N$ 时，这是一个分次 k-代数，其乘法为 Yoneda 复合。单位对象 $\mathbf{1}$ 的上同调代数 $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ 记为 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$；它是 $\mathscr{C}$ 的上同调环，并且根据[29, 定理 1.7]，它是分次交换的。张量积诱导出一个同态

$$\mathrm{H}^*(\mathscr{C}) \xrightarrow{- \otimes M} \mathrm{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M, M)$$

分次 k-代数，使 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,N)$ 通过 $-\otimes N$ 和 $-\otimes M$ 再接 Yoneda 复合，成为 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 上的左模和右模。通过修改 [27, 定理 1.1], 的证明，可以证明对于元素 $\eta\in\mathrm{H}^m(\mathscr{C})$ 和 $\theta\in\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{C}}(M,N)$，有如下等式

$$(\eta\otimes N)\circ\theta=(-1)^{mn}\theta\circ(\eta\otimes M)$$

其中，符号 $\circ$ 表示 Yoneda 复合。换言之，对于齐次元素，$\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 在 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,N)$ 上的左、右标量作用相差一个符号。

在 [21], Etingof 和 Ostrik 提出了以下猜想，该猜想至今仍未解决：

猜想。上同调环 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 是有限生成的，并且对于所有对象 $M\in\mathscr{C}$，$\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,M)$ 都是有限生成的 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$-模。

注意，当 $\mathscr{C}$ 具有如猜想所述的有限生成上同调时，对于所有对象 $M,N\in\mathscr{C}$，$\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$-模 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,N)$ 都是有限生成的，而不仅仅是两个模 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,M)$ 和 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(N,N)$。也就是说，$\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$-模 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M\oplus N,M\oplus N)$ 是有限生成的，并且 $\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,N)$ 是它的一个直和项。

定义。若上同调环 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 是有限生成的，并且对所有对象 $M\in\mathscr{C}$，$\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,M)$ 都是有限生成的 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$-模，则称有限张量范畴 $\mathscr{C}$ 满足有限生成条件 Fg。

当 $\mathscr{C}$ 是有限群 G 的有限生成左 kG-模范畴时，根据 Evens 和 Venkov 的经典结果，Fg 成立；参见 [22, 30, 31]。然而，对于任意有限维 Hopf 代数的模范畴，这一猜想仍未解决。最近，Benson 和 Etingof 在 [5] 中证明，对于 [4, 6, 18] 中引入的对称有限张量范畴，Fg 成立。

当有限张量范畴具有有限生成上同调时，便有一套丰富的上同调支撑簇理论。定义 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$：当 k 的特征不为 2 时，取 $\mathrm{H}^{2*}(\mathscr{C})$；当特征为 2 时，取 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$。由于 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 是分次交换的，代数 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 在通常意义下是交换的。此外，当 k 的特征不为 2 时，$\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 中奇数次数的齐次元素是幂零的。因此，当 Fg 成立时，$\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 是有限生成的，并且对所有对象 $M\in\mathscr{C}$，$\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,M)$ 都是有限生成的 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$-模。

我们将 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的唯一齐次极大理想记为 $\mathfrak{m}_0$，即 $\mathfrak{m}_0=\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})\cap\mathrm{H}^{\geq 1}(\mathscr{C})$；回顾注 2.1(2)，$\mathrm{H}^0(\mathscr{C})$ 是一个域。$\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的所有极大理想的集合记为 $\operatorname{MaxSpec}\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$。现在将对象 $M\in\mathscr{C}$ 的支撑簇定义为

$$V_{\mathscr{C}}(M)=\{\mathfrak{m}_0\}\cup\{\mathfrak{m}\in\operatorname{MaxSpec}\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})\mid\operatorname{Ann}_{\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})}\operatorname{Ext}^*_{\mathscr{C}}(M,M)\subseteq\mathfrak{m}\}$$

当 Fg 成立时，这些支撑簇能够编码对象的重要同调信息，如 [10, 11] 所示。关于群代数上的模的支撑簇的许多经典结果也适用于这一情形。

3. The main result

对于有限张量范畴 $\mathscr{C}$，我们用 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 表示 $\mathscr{C}$ 上有界复形构成的三角范畴，其通常的悬移 $\Sigma\colon\mathrm{K}^b(\mathscr{C})\longrightarrow\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 将复形向左平移一步，并改变微分的符号。可区别

三角是根据链映射的映射锥定义的。张量积 $\otimes$ 在 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 上诱导出一种幺半结构，该结构与三角结构相容，使得 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 按照 [13]，的定义成为一个三角张量范畴，也就是说，一个可能非交换的张量三角范畴。张量积是正合的；当我们将一个可区别三角与一个对象作张量积时，所得结果仍是一个可区别三角。在这一过程中，我们隐式地使用了一些特定的同构。具体而言，给定复形 $X, Y \in \mathrm{K}^b(\mathscr{C})$，存在典范同构

$$\Sigma\left(X \otimes Y\right) \xrightarrow{\lambda_{X,Y}} \Sigma X \otimes Y \qquad \Sigma\left(X \otimes Y\right) \xrightarrow{\rho_{X,Y}} X \otimes \Sigma Y$$

关于 X 和 Y是自然的，并且具有如下性质：该图表

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^2\left(X \otimes Y\right) & \xrightarrow{\Sigma\lambda_{X,Y}} & \Sigma\left(\Sigma X \otimes Y\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma\rho_{X,Y}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{\Sigma X,Y}} \\ \Sigma\left(X \otimes \Sigma Y\right) & \xrightarrow{\lambda_{X,\Sigma Y}} & \Sigma X \otimes \Sigma Y \end{array}$$

反交换。利用这些，对于所有整数 m 和 $d \geq 2$，以及所有复形X_1，……，X_d，属于 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$，都可得到一个自然同构

$$\Sigma^m\left(X_1 \otimes \cdots \otimes X_d\right) \xrightarrow{\sigma^m_{d,i}} X_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma^m X_i \otimes \cdots \otimes X_d$$

对每个 $1 \leq i \leq d$均成立。此外，给定另一个整数 n，该图表

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{m+n}\left(X_1 \otimes \cdots \otimes X_d\right) & \xrightarrow{\Sigma^n\sigma^m_{d,i}} & \Sigma^n\left(X_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma^m X_i \otimes \cdots \otimes X_d\right) \\ \downarrow{\scriptstyle \Sigma^m\sigma^n_{d,j}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^n_{d,j}} \\ \Sigma^m\left(X_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma^n X_j \otimes \cdots \otimes X_d\right) & \xrightarrow{\sigma^m_{d,i}} & X_1 \otimes \cdots \otimes \Sigma^m X_i \otimes \cdots \otimes \Sigma^n X_j \otimes \cdots \otimes X_d \end{array}$$

在 $i < j$ 时，以因子 $(-1)^{mn}$ 反交换。

现在，我们构造 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 中的一些特定复形和链映射，以便在主要结果的证明中使用。该构造类似于[3,第 3] 节中所述的构造。

构造 3.1。(1) 设 ζ 是 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 中一个非零的齐次元素，其次数为 $n \geq 2$，并固定单位对象 $\mathbf{1}$ 的一个极小投射分解 (P_i, d_i)。该元素 $\hat{}$ 对应于一个非零态射 $\zeta\colon \Omega^n_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbf{1}$，其中 $\Omega^n_{\mathscr{C}}(\mathbf{1})$ 是 $\mathbf{1}$ 的第 n 个 Syzygy，也就是态射 d_n 的像。由此态射可得一个交换推出图

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^n_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) & \longrightarrow & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & P_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\zeta}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{1} & \xrightarrow{\mu} & K_\zeta & \xrightarrow{\rho} & P_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其行正合，进而得到一个复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow K_\zeta \xrightarrow{\rho} P_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

长度为 n，记作 C_ζ（若 $n=2$，则 $d_1=\rho$ 在此复形中）。

（2）复合 $\mu\circ d_0$ 诱导出一个链映射 $\nu\colon \Sigma^{n-1}C_\zeta \longrightarrow C_\zeta$，如图 a 所示 s

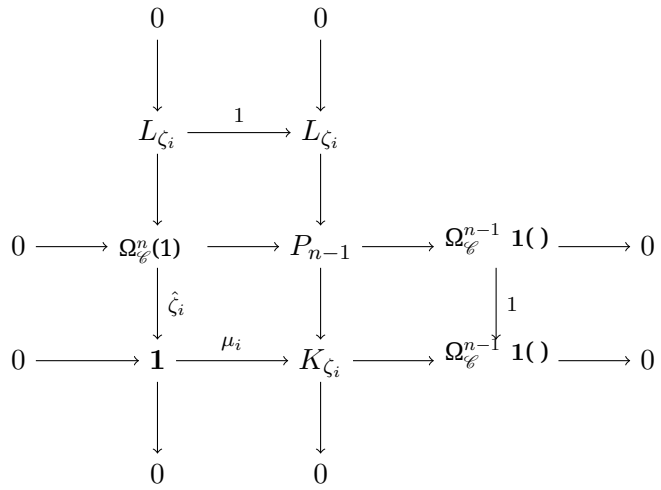
$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{(-1)^{n-1}d_1} & P_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu\circ d_0} & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & K_\zeta & \xrightarrow{\rho} & P_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots
\end{array}$$

遵循以下约定：若 $n=2$：$d_{n-2}=0$，则 $d_1=\rho$，且 $P_1=K_\zeta$。

回顾第2节，当 $\mathscr{C}$ 是特征为 $p\neq 2$ 的域上的有限张量范畴时，$\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 表示上同调环 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$ 的偶次部分，即 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C}) = \mathrm{H}^{2*}(\mathscr{C})$。当 $p=2$ 时，$\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 则表示其本身，即 $\mathrm{H}^*(\mathscr{C})$。此外，$\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的唯一齐次极大理想记作 $\mathfrak{m}_0$。若 $\mathscr{C}$ 满足 Fg，且 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的 Krull 维数为 d，则由 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 中一列非零齐次元素（次数为正）$\zeta_1,\dots,\zeta_d$ 构成的序列称为齐次参数系，若理想 $(\zeta_1,\dots,\zeta_d)$ 是 $\mathfrak{m}_0$-初等的，因此其根基为 $\mathfrak{m}_0$。在下述引理中，我们证明，对于这样的序列，对象 $K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}$ 在 $\mathscr{C}$ 中是投射的，其中 K_{ζ_i} 是构造 3.1 中复形 C_{ζ_i} 里出现的对象。

引理 3.2. 设 k 是一个域，且 $(\mathscr{C},\otimes,\mathbf{1})$ 是一个有限张量 k-范畴。假设 $\mathscr{C}$ 满足 Fg，且 $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ 是 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 中的齐次参数系，其中 d 是 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的 Krull 维数。那么对象 $K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}$ 是投射的。

证明。如构造 3.1 中所述，每个 ζ_i 都对应一个非零态射 $\hat{\zeta}_i\colon \Omega^n_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow \mathbf{1}$。由于 $\mathbf{1}$ 是简单对象，此态射必为满态射；我们将其核记为 L_{ζ_i}。根据 [10, 定理 5.2], ，对每个对象 $M\in\mathscr{C}$，等式 $V_{\mathscr{C}}(L_{\zeta_i}\otimes M) = V_{\mathscr{C}}(M)\cap Z(\zeta_i)$ 均成立，其中 $Z(\zeta_i)$ 是所有包含 ζ_i 的 $\hat{\mathfrak{m}}\in$ 极大谱 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的集合。现在，由于 K_{ζ_i} 是满态射 ζ_i 与单态射 $\Omega^n_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) \longrightarrow P_{n-1}$ 的推出，因此存在一个正合交换图



由此可知，对支撑簇而言，对象 K_{ζ_i} 具有与对象 L_{ζ_i} 相同的性质。因为若 M 是任意对象，对右侧的垂直正合序列应用 $-\otimes M$，便得到一个正合序列

$$0 \longrightarrow L_{\zeta_i}\otimes M \longrightarrow P_{n-1}\otimes M \longrightarrow K_{\zeta_i}\otimes M \longrightarrow 0$$

由于对象 $P_{n-1}\otimes M$ 是投射的，由 [10, 命题 3.3(vii)] 可知，对象 $L_{\zeta_i}\otimes M$ 和 $K_{\zeta_i}\otimes M$ 具有相同的支撑簇，因此 $V_{\mathscr{C}}(K_{\zeta_i}\otimes M) = V_{\mathscr{C}}(M)\cap Z(\zeta_i)$。反复应用这一等式，并利用$V_{\mathscr{C}}(\mathbf{1}) =$极大谱 $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathscr{C})$这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} V_{\mathscr{C}}\left(K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}\right) &= V_{\mathscr{C}}\left(K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}\otimes\mathbf{1}\right)\\ &= V_{\mathscr{C}}\left(\mathbf{1}\right)\cap Z\left(\zeta_1\right)\cap\cdots\cap Z\left(\zeta_d\right)\\ &= Z\left(\zeta_1,\ldots,\zeta_d\right)\\ &= \{\mathfrak{m}_0\}\end{aligned}$$

因为理想 $(\zeta_1,\ldots,\zeta_d)$ 的根基是 $\mathfrak{m}_0$。因此，根据 [10, 推论 4.3]，对象 $K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}$是投射的。□

现在我们证明主要结果：当 Fg 成立且同调环的 Krull 维数足够大时，存在无穷多个非同构且非平凡的有界投射对象复形，并且具有小同调。我们所说的 $\mathscr{C}$ 上的加性函数，是指从 $\mathscr{C}$ 的格罗滕迪克群到非负实数的群同态。等价地，这样的函数 f 为每个对象 $M\in\mathscr{C}$ 指定一个实数 $f(M)\geq 0$；只要存在一个短正合列，就有 $f(M) = f(L) + f(N)$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

在 $\mathscr{C}$ 中。我们称 f 为非平凡的，如果 $f(\mathbf{1})\neq 0$。

定理 3.3. 设 k 是特征不为 2 的域，且 $(\mathscr{C},\otimes,\mathbf{1})$ 是有限张量k-范畴。假设 $\mathscr{C}$ 满足 Fg，且 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 的 Krull 维数 d 至少为 8。那么，对于 $\mathscr{C}$ 上任意非平凡加性函数 f，都存在无穷多个非同构且非平凡的有界复形 $D\in \mathrm{K}^b(\mathscr{C})$，其项为投射对象，且

$$\frac{1}{f(\mathbf{1})}\sum_{i\in\mathbb{Z}} f(\mathrm{H}_i(D)) < 2^d$$

证明。给定任意正实数 α，函数 αf 在 $\mathscr{C}$上也是非平凡的加法函数。因此，我们不妨设 $f(\mathbf{1}) = 1$。

根据 Noether 归一化引理的分次版本（参见 [12, 定理 1.5.17]），存在齐次参数系 $\zeta_1,\dots,\zeta_d$，属于 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$。给定任意正整数序列 $n_1,\dots,n_d$，理想 $(\zeta_1^{n_1},\dots,\zeta_d^{n_d})$ 也是 $\mathfrak{m}_0$-初理想，因此不失一般性，可假设元素 $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ 在 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$中具有相同的（偶）次数，记为 n。

对于每个 $1\leq i\leq d$，考虑长度为 n的复形 C_{ζ_i}，以及来自构造 3.1 的链映射 $\nu_i\colon \Sigma^{n-1}C_{\zeta_i}\longrightarrow C_{\zeta_i}$。由于 μ_i是单态射且d_0 非零，复合映射 $\mu_i\circ d_0$ 非零，因此链映射 ν_i 不是零伦的。因此，ν_i （的同伦等价类）是 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^b(\mathscr{C})}(\Sigma^{n-1}C_{\zeta_i},C_{\zeta_i})$中的非零态射，其中 $\nu_i^2 = 0$属于 $\mathrm{Hom}^*\mathbf{K}^b(\mathscr{C})(C_{\zeta_i},C_{\zeta_i})$。此外，注意到 C_{ζ_i}的同调恰好在两个次数上非零：$\mathrm{H}_0(C_{\zeta_i})\simeq\mathrm{H}_{n-1}(C_{\zeta_i})\simeq\mathbf{1}$。因此，我们看到 ν_i 诱导出一个同构 $\bar{\nu}_i\colon \mathrm{H}_0(C_{\zeta_i})\longrightarrow\mathrm{H}_{n-1}(C_{\zeta_i})$。

为使证明其余部分的记号稍微简便一些，我们设 $m=n-1$；因此 m 是奇数。现在考虑 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 中长度为 $dm+1$ 的复形 $C=C_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes C_{\zeta_d}$，其非零对象位于次数 0、1、…、$dm$。在次数 0、1、…、$dm-1$，这些对象都是投射对象，因为它们是张量积的直和，且每个张量积都至少含有一个 P_j 作为因子（回想一下，$\mathscr{C}$ 的投射对象构成一个双边理想）。次数 dm 上的对象是张量积 $K_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes K_{\zeta_d}$，正如我们在引理 3.2 中所证明的，它也是投射的。因此，C 是一个由投射对象组成的复形。现在，对于每个 i，链映射 ν_i 诱导出链映射 $\theta_i\colon \Sigma^m C\longrightarrow C$，其定义为以下复合

$$\Sigma^m C\xrightarrow{\sigma^m_{d,i}} C_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes\Sigma^m C_{\zeta_i}\otimes\cdots\otimes C_{\zeta_d}\xrightarrow{\hat{\nu}_i} C$$

其中，$\sigma^m_{d,\,i}$是自然同构，且 $\hat{\nu}_i = 1\otimes\cdots\otimes\nu_i\otimes\cdots\otimes 1$。由于 ν_i 在 $\mathrm{Hom}^*\mathbf{K}^b(\mathscr{C})(C_{\zeta_i},C_{\zeta_i})$ 中平方为零，我们可知 $\theta_i^2=0$属于 $\mathrm{Hom}^*\mathbf{K}^b(\mathscr{C})(C,C)$。此外，当$i<j$时，我们得到

$$\begin{aligned}
\theta_i\cdot\theta_j &= \theta_i\circ\Sigma^m(\theta_j)\\
&= \hat{\nu}_i\circ\sigma^m_{d,i}\circ\Sigma^m\hat{\nu}_j\circ\Sigma^m\sigma^m_{d,j}\\
&= \hat{\nu}_i\circ\hat{\nu}_j\circ\sigma^m_{d,i}\circ\Sigma^m\sigma^m_{d,j}\\
&= (-1)^{m^2}\hat{\nu}_j\circ\hat{\nu}_i\circ\sigma^m_{d,j}\circ\Sigma^m\sigma^m_{d,i}\\
&= -\hat{\nu}_j\circ\sigma^m_{d,j}\circ\Sigma^m\hat{\nu}_i\circ\Sigma^m\sigma^m_{d,i}\\
&= -\theta_j\cdot\theta_i
\end{aligned}$$

这里我们用到了这样一个事实：$\sigma_{d,\,i}^{m}$ 和 $\sigma_{d,\,j}^{m}$ 是自然的，因此它们与 $\hat{}\nu_j$和 $\hat{}\nu_i$可交换。此外，我们还用到了 $\sigma_{d,\,i}^{m}\circ\Sigma^{m}\sigma_{d,\,j}^{m}=(-1)^{m^2}\sigma_{d,\,j}^{m}\circ\Sigma^{m}\sigma_{d,\,i}^{m}$——正如本节开头所解释的那样——以及 m 是奇数这一事实。最后，我们用到了 $\hat{}\nu_i$和 $\hat{}\nu_j$ 可交换这一事实。

上述结果表明，链映射 $\theta_1,\ldots,\theta_d$ 生成一个 d重外代数$\Lambda\subseteq\mathrm{Hom}^{*}\,\mathbf{K}^{b(\mathscr{C})}(C,C)$，其集中在次数 $0,m,2m,\ldots,dm$ 上。它们如何作用于 C 的同调？由于每个 C_{ζ_i} 只有两个非零同调对象 $\mathrm{H}_0(C_{\zeta_i})$ 和 $\mathrm{H}_m(C_{\zeta_i})$，且张量积在每个变量上都是正合的，因此由 K¨unneth 定理可知， C 仅在次数 $0,m,2m,\ldots,dm$ 上有同调，其中

$$\mathrm{H}_{tm}\left(C\right)\simeq\bigoplus_{i_1+\cdots+i_d=t}\mathrm{H}_{mi_1}\left(C_{\zeta_1}\right)\otimes\cdots\otimes\mathrm{H}_{mi_d}\left(C_{\zeta_d}\right)$$

此外，由于 $\mathrm{H}_0(C_{\zeta_i})\simeq\mathrm{H}_m(C_{\zeta_i})\simeq\mathbf{1}$，我们看到 $\mathrm{H}_{tm}(C)$ 是 $\binom{d}{t}$ 个 $\mathbf{1}$ 的直和；将它们记为 $\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_d}$，其中 i_1 中的 $t,\ldots,i_d$ 等于 m，其余的都等于零。因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0\left(C\right) &\simeq \mathbf{1}_{0,\ldots,0}\\
\mathrm{H}_m\left(C\right) &\simeq \mathbf{1}_{m,0,\ldots,0}\oplus\mathbf{1}_{0,m,\ldots,0}\oplus\cdots\oplus\mathbf{1}_{0,\ldots,0,m}\\
\mathrm{H}_{2m}\left(C\right) &\simeq \mathbf{1}_{m,m,0,\ldots,0}\oplus\mathbf{1}_{m,0,m,0\ldots,0}\oplus\cdots\oplus\mathbf{1}_{0,\ldots,0,m,m}\\
&\vdots\\
\mathrm{H}_{dm}\left(C\right) &\simeq \mathbf{1}_{m,\ldots,m}
\end{aligned}$$

此外，由于对于每个 j ，链映射$\nu_j\colon\Sigma^{m}C_{\zeta_j}\longrightarrow C_{\zeta_j}$ 都会诱导一个同构$\bar{\nu}_j\colon\mathrm{H}_0(C_{\zeta_j})\longrightarrow\mathrm{H}_m(C_{\zeta_j})$，我们看到链映射 $\theta_j\colon\Sigma^{m}C\longrightarrow C$在 $\mathrm{H}_*(C)$ 上的作用为

$$\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_d}\longrightarrow\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_j+m,\ldots,i_d}$$

约定$\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_j+m,\ldots,i_d}=0$ ，若 $i_j=m$。换言之，诱导的¯态射 $\theta_j\colon\mathrm{H}_{tm}(C)\longrightarrow\mathrm{H}^{(t+1)m}(C)$ 将 $\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_d}$ 同构地映射到 $\mathbf{1}_{i_1,\ldots,i_j+m,\ldots,i_d}$ ，若 _ _$i_j=0$；若 $i_j=m$，则映射为零。因此，$\mathrm{H}_{tm}(C)$ 是$\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_t}\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$的直和，其中求和遍历所有 $1\leq i_1<\cdots<i_t\leq d$。由于 f是一个满足 $f(1)=1$的加性函数，我们看到 $f\left(\mathrm{H}_{tm}(C)\right)=\binom{d}{t}$。

现在我们调整 [24, 第 2] 节中的技巧。根据假设 $d\geq 8$，因此令 Λ' 为由 θ_1、……、θ_8生成的 Λ 的外子代数，并令 $w\in\Lambda'$为 Lefschetz 元$\theta_1\cdot\theta_2+\theta_3\cdot\theta_4+\theta_5\cdot\theta_6+\theta_7\cdot\theta_8$。此外，令 $C'=C_{\zeta_1}\otimes\cdots\otimes C_{\zeta_8}$，并令$C''=C_{\zeta_9}\otimes\cdots\otimes C_{\zeta_d}$，约定若 $d=8$，则 C'' 是单位对象 $\mathbf{1}$ 上的茎复形。根据 [17,命题 A.2], ，乘法映射

$$\Lambda'_i\xrightarrow{\;w\;}\Lambda'_{i+2m}$$

对于 $i\in\{0,m,2m,3m\}$ 是单射，对于 $i\in\{3m,4m,5m,6m\}$ 是满射。我们声称，同样地，链映射 $w\colon\Sigma^{2m}C'\longrightarrow C'$ 诱导出一个态射

$$\mathrm{H}_i\left(C'\right) \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_{i+2m}\left(C'\right)$$

它对于 $i \in \{0, m, 2m, 3m\}$ 是单态射，对于 $i \in \{3m, 4m, 5m, 6m\}$ 是满态射。为此，我们结合上述对 $\mathrm{H}_*(C)$ 的解释（同样适用于 $\mathrm{H}_*(C')$），以及这样一个事实：作为一个 k-线性阿贝尔范畴，$\mathscr{C}$ 等价于某个有限维代数上的有限生成左模范畴；参见 [20,第 9–10] 页。

满态射的断言可由将 $\mathrm{H}_{tm}(C')$ 解释为 $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_t} \mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 的直和得到，其中求和遍历所有 $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq 8$。具体而言，由于 w 对 Λ'_i 到 Λ'_{i+2m} 诱导了一个满射 $i \in \{3m, 4m, 5m, 6m\}$，因此诱导态射 $\bar{w}$ 必定将 $\mathrm{H}_i(C')$ 满射地映到 $\mathrm{H}_{i+2m}(C')$，对相同的 i亦如此。注意，对于 $i = 3m$，该映射必定是同构，因为

$$\dim_k \mathrm{H}_{3m}(C') = \binom{8}{3} \dim_k \mathbf{1} = \binom{8}{5} \dim_k \mathbf{1} = \dim_k \mathrm{H}_{5m}(C')$$

（这里我们已转而考虑某个有限维代数上的模，因此 C' 和 $\mathbf{1}$ 是范畴等价下的像。）

对于单态射的断言，我们分别处理三种情形 $i = 0$、m、$2m$。首先，假设 $x \in \mathbf{1}_{0,\ldots,0}$，其中 $0 = \bar{w}(x) = \theta_1 \circ \theta_2(x) + \cdots + \theta_7 \circ \theta_8(x)$。每个 $\theta_s \circ \theta_{s+1}(x)$ 都属于 $\mathrm{H}_{2m}(C')$ 中的直和项 $\mathbf{1}_{0,\ldots,s,s+1,\ldots,0}$；又由于 $\theta_s \circ \theta_{s+1}$ 将 $\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 同构地映到该直和项，我们可知 $x = 0$。类似地，若 $x_1, \ldots, x_8$ 是 $\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 中的元素，且元素 $\theta_1(x_1) + \cdots + \theta_8(x_8) \in \mathrm{H}_m(C')$ 属于 $\bar{w}$的核，那么从 $\mathrm{H}_{3m}(C') = \oplus \theta_{i_1}\theta_{i_2}\theta_{i_3}\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 的分解不难看出 $x_1 = \cdots = x_8 = 0$。因此，对于 $i = 0$ 和 $i = m$，单态射的断言成立。最后，对于 $i = 2m$，考虑将 $\mathrm{H}_{2m}(C')$ 分解为所有 28 直和项 $\theta_r\theta_s\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 的直和，其中 $1 \leq r < s \leq 8$。对于所有这样的 r, s，令 $x_{r,s} \in \mathbf{1}_{0,\ldots,0}$，并假设元素 $\sum \theta_r \circ \theta_s(x_{r,s}) \in \mathrm{H}_{2m}(C')$ 属于 $\bar{w}$的核。如果 $s \neq r+1$，那么取一个映射 $\theta_u\theta_{u+1} \in \{\theta_1\theta_2, \theta_3\theta_4, \theta_5\theta_6, \theta_7\theta_8\}$，使得指标 $r, s, u, u+1$ 各不相同。那么 $\theta_u \circ \theta_{u+1} \circ \theta_r \circ \theta_s(x_{r,s})$ 属于 $\mathrm{H}_{4m}(C')$ 的直和项 $\theta_u\theta_{u+1}\theta_r\theta_s\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$，并且它是来自 $\bar{w}\left(\sum \bar{\theta}_r \circ \bar{\theta}_s(x_{r,s})\right)$ 且属于该直和项的唯一项（注意，直和项 $\theta_u\theta_{u+1}\theta_r\theta_s\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 的指标未必按正确的升序排列）。由此可知，对于 $s \neq r+1$，$x_{r,s} = 0$。对元素 $x_{2,3}, x_{4,5}, x_{6,7}$，同样的推理也成立。例如，元素 $\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_6 \circ \theta_7(x_{6,7})$ 是来自 $\bar{w}\left(\sum \bar{\theta}_r \circ \bar{\theta}_s(x_{r,s})\right)$ 且属于直和项 $\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\bar{\theta}_6\bar{\theta}_7\mathbf{1}_{0,\ldots,0}$ 的唯一项。对于其余元素 $x_{1,2}, x_{3,4}, x_{5,6}, x_{7,8}$，注意这三个元素

$$\bar{\theta}_1 \circ \bar{\theta}_2 \circ \bar{\theta}_3 \circ \bar{\theta}_4(x_{1,2} + x_{3,4}),\ \bar{\theta}_3 \circ \bar{\theta}_4 \circ \bar{\theta}_5 \circ \bar{\theta}_6(x_{3,4} + x_{5,6}),\ \bar{\theta}_5 \circ \bar{\theta}_6 \circ \bar{\theta}_1 \circ \bar{\theta}_2(x_{5,6} + x_{1,2})$$

是 $\bar{w}\left(\sum \bar{\theta}_r \circ \bar{\theta}_s(x_{r,s})\right)$ 中属于 $\mathrm{H}_{4m}(C')$ 相应三个直和项的唯一项。因此

$$x_{1,2} + x_{3,4} = x_{3,4} + x_{5,6} = x_{5,6} + x_{1,2} = 0$$

因此，由于 k 的特征不为 2，我们得到 $x_{1,2} = x_{3,4} = x_{5,6} = 0$。最后，这也迫使 $x_{7,8}$ 为零。这就证明了最后一种情形下的单态射断言$i = 2m$。

现在令 D' 为链映射 w 的映射锥，并考虑相应的长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_i\left(C'\right) \longrightarrow \mathrm{H}_i\left(D'\right) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-2m-1}\left(C'\right) \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_{i-1}\left(C'\right) \longrightarrow \cdots$$

在同调中。由 $\mathrm{H}_*(C')$ 仅在次数 $0, m, 2m, \ldots, 8m$ 上非零这一事实，我们得到同构

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0\left(D'\right) &\simeq \mathrm{H}_0\left(C'\right) \\ \mathrm{H}_m\left(D'\right) &\simeq \mathrm{H}_m\left(C'\right) \\ \mathrm{H}_{9m+1}\left(D'\right) &\simeq \mathrm{H}_{7m}\left(C'\right) \\ \mathrm{H}_{10m+1}\left(D'\right) &\simeq \mathrm{H}_{8m}\left(C'\right) \end{aligned}$$

和短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{im}\left(C'\right) \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_{(i+2)m}\left(C'\right) \longrightarrow \mathrm{H}_{(i+2)m}\left(D'\right) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{(6+i)m+1}\left(D'\right) \longrightarrow \mathrm{H}_{(4+i)m}\left(C'\right) \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_{(6+i)m}\left(C'\right) \longrightarrow 0$$

对 $i \in \{0,1,2\}$。 D' 的所有其他同调对象均为零。结合以上所有结果以及 $f\left(\mathrm{H}_{im}(C')\right) = \binom{8}{i}$ 这一事实，我们可以计算

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\mathrm{H}_i(D')\right) = \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = 2^8 - 4$$

由于 $\mathrm{K}^b(\mathscr{C})$ 是一个具有正合张量积的三角张量范畴，我们可以将 $-\otimes C''$ 应用于可区别三角

$$\Sigma^{2m}C' \xrightarrow{w} C' \longrightarrow D' \longrightarrow \Sigma^{2m+1}C'$$

并得到一个可区别三角

$$\Sigma^{2m}C \xrightarrow{w} C \longrightarrow D' \otimes C'' \longrightarrow \Sigma^{2m+1}C$$

其中我们通过包含映射 $\Lambda' \subseteq \Lambda$ 将 w 视为链映射 $\Sigma^{2m}C \longrightarrow C$。令 D 为该链映射的映射锥。由于 C 中的所有对象都是投射的，因此其中所有

对象也都是投射的。此外，它与复形 $D' \otimes C''$ 同伦等价，从而得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\mathrm{H}_i(D)\right) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\mathrm{H}_i(D'\otimes C'')\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\bigoplus_{s+t=i} \mathrm{H}_s(D')\otimes \mathrm{H}_t(C'')\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\bigoplus_{t=0}^{d-8} \mathrm{H}_{i-tm}(D')\otimes \mathrm{H}_{tm}(C'')\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{t=0}^{d-8} \binom{d-8}{t} f\left(\mathrm{H}_{i-tm}(D')\right)\right) \\
&= \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} f\left(\mathrm{H}_i(D')\right)\right)\left(\sum_{t=0}^{d-8}\binom{d-8}{t}\right) \\
&= \left(2^8-4\right)2^{d-8} \\
&< 2^d
\end{aligned}$$

这里我们用到了 K¨unneth 定理、复形C''的同调集中在次数 0、 m、 $2m$、.....、$(d-8)m$这一事实，以及 $\mathrm{H}_{tm}(C'')$ 是 $\binom{d-8}{t}$ 个单位对象 1 的直和这一事实。

现在我们构造了一个复形 D，它是由链映射$\Sigma^{2(n-1)}C \longrightarrow C$ 的映射锥构成的，该链映射由 w给出，其中 n 是 $\mathrm{H}^\bullet(\mathscr{C})$ 中齐次元素 ζ_1、.....、ζ_d的共同偶次数。复形 C的长度为 $d(n-1)+1$；它在次数 0、1、.....、$d(n-1)$ 上有非零对象。因此，复形 D 在次数 0、1、.....、$(d+2)(n-1)+1$ 上有非零对象，故其长度为 $(d+2)(n-1)+2$。现在取任意正整数 s。如果回到开头，并将元素 ζ_1、.....、ζ_d 替换为ζ_1^s、.....、ζ_d^s，就会得到一个长度为 $(d+2)(sn-1)+2$的复形 D^s。因此，对每个 $s\geq 1$，我们都得到一个由投射对象构成的复形 D^s，且满足 $f(\sum \mathrm{H}_i(D^s)) < 2^d$。此外，当$s\neq t$ 时，复形 D^s 和 D^t 不同构。□

长度函数 ℓ 在 $\mathscr{C}$上是加性的，且 $\ell(\mathbf{1}) = 1$，因此该定理适用于此函数。不过，另一个同样十分重要的加性函数也值得关注。设 $S_1, \ldots, S_t$ 是 $\mathscr{C}$中简单对象的同构类的一组完整代表；根据假设，这样的代表只有有限个。由于单位对象是简单对象，我们可以假设 $S_1 = \mathbf{1}$，但这对下文没有影响。给定一个对象$M \in \mathscr{C}$，我们用 $[M : S_i]$ 表示简单对象 S_i 在 M的 Jordan- H¨older 序列中的重数；由于所有此类序列中的重数都相同，该重数是良定义的。给定一个简单对象 S，考虑由 S左乘所对应的矩阵，即 $t\times t$-矩阵，其 ij项为 $[S\otimes S_i : S_j]$。该矩阵的元素均为非负整数，因此根据弗罗贝尼乌斯-佩龙定理，它有一个非负实特征值。最大实特征值称为 S的 Frobenius-Perron 维数，记作 $\mathrm{FPdim}_{\mathscr{C}}(S)$。它至少为 1。详情请参见 [20, 第 3] 章

通过加性，可以将 Frobenius-Perron 维数的定义推广到任意对象。具体而言，给定 $M \in \mathscr{C}$，我们令

$$\operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(M) = \sum_{i=1}^{t} [M : S_i] \operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(S_i)$$

我们立即看到，对于非零对象 M，有 $\operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(M) \geq 1$，因为该不等式对所有简单对象都成立。此外，我们看到 $\operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(M) \geq \ell(M)$。另外，给定一个短正合列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

对象的短正合列，对于每个简单对象 S，重数满足等式 $[M\colon S] = [L\colon S] + [N\colon S]$，因此

$$\operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(M) = \operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(L) + \operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(N)$$

也就是说，Frobenius-Perron 维数在 $\mathscr{C}$ 中具有可加性。最后，由于单位对象 1 的左乘矩阵就是 $[S_i\colon S_j]$，也就是 $t \times t$ 单位矩阵，我们得到 $\operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(1) = 1$。

推论 3.4. 设 k 是一个特征不为 2 的域，且 $(\mathscr{C}, \otimes, 1)$ 是一个有限张量k-范畴。假设 $\mathscr{C}$ 满足 Fg，且 $\mathrm{H}^{\bullet}(\mathscr{C})$ 的 Krull 维数 d 至少为 8。那么存在无穷多个两两非同构且非平凡的有界复形 $D \in \mathrm{K}^b(\mathscr{C})$，其项为投射对象，且

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \ell(\mathrm{H}_i(D)) \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{FPdim}_{\mathscr{C}}(\mathrm{H}_i(D)) < 2^d$$

当 $\mathscr{C}$ 是有限维霍普夫代数 A 上有限生成左模的范畴 $\operatorname{mod} A$ 时，Frobenius-Perron 维数与通常的向量空间维数一致，正如在群代数的情形下 [20, 例 4.55] 中所解释的。因此我们得到以下推论。

推论 3.5. 设 k 是特征不为 2 的域，A 是 k 上的有限维霍普夫代数。假设 A 满足 Fg，且偶次上同调环 $\mathrm{H}^{\bullet}(A) = \mathrm{H}^{2*}(A)$ 的 Krull 维数 d 至少为 8。那么存在无穷多个两两不同构且非平凡的有界复形 $D \in \mathrm{K}^b(\operatorname{mod} A)$，其项为左投射模，且

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^d$$

特别地，我们得到有限群的群代数的以下结果，该结果最近由 Carlson 在 [14] 中证明。回顾一下，对于素数 p 和有限群 G，G 的 p-秩是其初等阿贝尔 p-子群的最大秩。根据 Quillen 的结果（参见 [25]），当基域 k 的特征为 p 时，这等于上同调环 $\mathrm{H}^*(G, k)$ 的 Krull 维数（偶次部分）。还需回顾的是，当 G 是 p-群时，每个投射模都是自由模。

推论 3.6。 [14, 定理] 设 k 为特征为 $p \geq 3$的域，G 为 p-秩为 $d \geq 8$的有限群。那么存在无穷多个彼此非同构且非平凡的

有界复形 $D \in \mathrm{K}^b$(模 kG)，其项为左投射模，且

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^d$$

特别地，当 G 是一个 p-群时，这些复形都是由自由模构成的复形。

4. Finite dimensional algebras

本节中，我们简要概述某些代数的定理 3.3 的一个版本。与前文一样，我们固定一个域 k，它不一定是代数闭的，并取一个有限维不可分解的 k-代数 A。假设所有模均为有限生成模；我们用 $\operatorname{mod} A$ 表示这类左模所构成的范畴。

与有限张量范畴的情形一样，左 A-模也有支撑簇理论；详情参见 [19, 27, 28] 。令 $\mathrm{HH}^*(A)$ 表示A的 Hochschild 上同调环，即 $\mathrm{HH}^n(A) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$，其中 $A^e = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ 是包络代数。根据 Gerstenhaber 的经典结果（参见 [23]），这个环是分次交换的。对于每个$M \in \operatorname{mod} A$，都有一个同态

$$\mathrm{HH}^*(A) \xrightarrow{-\otimes_A M} \mathrm{Ext}^*_A(M, M)$$

分次 k-代数的，且 $\mathrm{Ext}^*_A(M, M)$ 上相应的左、右 $\mathrm{HH}^*(A)$-模结构相差一个符号。现在定义：当 k 的特征不为 2 时，H 取 $\mathrm{HH}^{2*}(A)$；当特征为 2 时，H 取 $\mathrm{HH}^*(A)$。注意，由于 A 作为 k-代数不可分解，其中心 $Z(A)$ 是一个交换局部环，记其极大理想为 $\mathfrak{n}$。由于 $\mathrm{HH}^0(A) = Z(A)$，可知 H 有唯一的齐次极大理想$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{n} \oplus H \cap \mathrm{HH}^{\geq 1}(A)$。 M 的支撑簇是

$$V_H(M) = \{\mathfrak{m}_0\} \cup \{\mathfrak{m} \in \operatorname{MaxSpec} H \mid \operatorname{Ann}_H \mathrm{Ext}^*_A(M, M) \subseteq \mathfrak{m}\}$$

定义。若 $\mathrm{HH}^*(A)$ 是有限生成的，且对每个 $M \in$ 模 A，$\mathrm{Ext}^*_A(M, M)$ 都是有限生成的 $\mathrm{HH}^*(A)$-模，则代数 A 满足 Fg。

如 [28, 命题 5.7], 的证明中所述，这个有限性条件等价于以下条件： H 是有限生成的，并且对每个 A-模 M，$\mathrm{Ext}^*_A(M, M)$ 都是有限生成的 H-模。此外，只需要求 H-模 $\mathrm{Ext}^*_A(A/\mathfrak{r}_A, A/\mathfrak{r}_A)$ 是有限生成的，其中 $\mathfrak{r}_A$ 是 A 的根基。如[19], 中所示，当 Fg 条件成立时，与有限张量范畴的情形一样，许多关于群代数上支撑簇的结果都适用。

注记 4.1. 若 A 是 k上的有限维 Hopf 代数，那么现在我们有两种不同版本的条件 Fg: 一种以 A的上同调环 H^*和作为有限张量范畴的 $\operatorname{mod} A$ 为表述对象，另一种以 A的 Hochschild 上同调环 HH^*和仅视为普通模范畴的 $\operatorname{mod} A$ 为表述对象。然而，根据 [8, 引理 4.2] ，二者等价。因此，推论 3.5 也可以由本节的结果推出。

现在我们按照构造 3.1 构造复形。固定一个 A 的极小投射双模分解 (Q_n, d_n)，并令 $\eta \in \mathrm{HH}^*(A)$ 为一个次数为 $n \geq 2$ 的非零齐次元素。此元素对应于一个映射 $\hat{}\eta\colon \Omega^n_{A^e}(A) \longrightarrow A$，与包含映射 $\Omega^n_{A^e}(A) \longrightarrow Q_{n-1}$ 作推出，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Omega^n_{A^e}(A) & \longrightarrow & Q_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & Q_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & Q_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\eta}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\mu} & M_\eta & \xrightarrow{\rho} & Q_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_1} & Q_0 & \xrightarrow{d_0} & A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中各行正合。我们将相应的双模复形记为

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M_\eta \xrightarrow{\rho} Q_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} Q_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

由 C_η。与我们之前使用的复形一样，这个复形有两个非零同调模 $\mathrm{H}_0(C_\eta) \simeq \mathrm{H}_{n-1}(C_\eta) \simeq A$，自然链映射 $\nu\colon \Sigma^{n-1}C_\eta \longrightarrow C_\eta$ 由复合 $\mu \circ d_0$ 给出，并在它们之间诱导出一个同构 $\bar{\nu}$。

注 4.2。每个投射双模作为单侧（左或右） A-模也是投射的。这一点可由自由双模 A^e 是左投射且右投射看出。现在考虑上图中的底部正合序列。由于 A 显然是左投射且右投射，所有底层短正合列都分裂。因此，复形 C_η 中的所有模都是单侧投射的，所有圈和边界也同样如此。

令 $\mathscr{P}$ 为 $\operatorname{mod} A^e$ 的满子范畴，其中包含作为单侧（左、右） A-模投射的模。这是 $\operatorname{mod} A^e$的一个加性（甚至是正合）子范畴，并具有由关于 A的张量积诱导的幺半结构。事实上，若B_1 和 B_2 是 $\mathscr{P}$中的模，也就是说，是单侧投射双模，那么根据 Hom-张量伴随， $B_1 \otimes_A B_2$也为单侧投射。范畴 $\mathbf{K}^b(\mathscr{P})$是一个三角张量范畴，具有正合张量积。此外，它按 [13]的意义作用于三角范畴 $\mathbf{K}^b(\operatorname{mod} A)$。此作用是正合的，也就是说，给定一个复形 $C \in \mathbf{K}^b(\operatorname{mod} A)$，函子

$$\mathbf{K}^b(\mathscr{P}) \xrightarrow{- \otimes_A C} \mathbf{K}^b(\operatorname{mod} A)$$

是正合的。作为 $\mathbf{K}^b(\operatorname{mod} A)$ 上的三角自函子，它在另一个变量上也正合。

现在我们证明定理 3.3 的类似结论。我们用 $\operatorname{cx}_A(M)$ 表示 A-模 M 的复杂度，即其极小投射分解中各模维数的增长速率。最大复杂度由 $A/\mathfrak{r}_A$ （因而也由某个简单模）取得；当 Fg 成立时，有不等式 $\operatorname{cx}_A(A/\mathfrak{r}_A) \leq \dim H$。如定理 [7, 推论 3.6], 的证明中所述，当$A/\mathfrak{r}_A \otimes_k A/\mathfrak{r}_A$ 是半单环时等号成立，例如当 k 代数闭时。

定理 4.3. 设 k 为一个特征不为 2 的域， A 为一个有限维不可分解自内射 k-代数。假设 A满足 Fg，且存在一个复杂度为 $c \geq 8$的简单 A-模 S。那么存在无穷多个非同构且非平凡的有界复形 $D \in \mathbf{K}^b(\operatorname{mod} A)$，其项为投射模，且

$$\frac{1}{\dim_k S} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^c$$

特别地，如果存在一个复杂度为 $c \geq 8$的简单一维模，那么存在无穷多个非同构且非平凡的此类复形 D，且

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^c$$

证明。该证明与定理 3.3 的证明类似，因此我们只概述如何构造一个这样的复形 D。随后，定理 3.3 证明的最后一部分仍然适用，并可得到一族其他复形。我们将应用[19], 中的一些结果，这些结果假设基域是代数闭的。然而，我们所用结果的证明并不需要这一假设。

设 $H = \mathrm{HH}^{2*}(A)$，并将齐次理想 $\mathrm{Ann}_H \mathrm{Ext}^*_A(M,M)$ 记为 $\mathfrak{a}$。根据[19, 命题 2.1], , $H/\mathfrak{a}$ 的 Krull 维数为 c，因此它包含一个由 c 个元素构成的齐次参数系。将这些元素提升到 H 后，我们得到正次数的齐次元素 η_1、.....、η_c，并且可以假设它们的次数均为同一个偶数 n；我们将奇整数 $n-1$ 记为 m。

对于每个 $1 \leq i \leq 8$，考虑本节前面定义的双模复形 C_{η_i} 和链映射 ν_i （回忆一下， $c \geq 8$）。根据注 4.2， C_{η_i} 中的圈和边界作为单边模都是投射的，因此两个非零同调模 $\mathrm{H}_0(C_{\eta_i})$ 和 $\mathrm{H}_m(C_{\eta_i})$ 也都是投射的，因为它们都同构于 A。因此，根据 [2, 定理 2.7.1 和推论 2.7.2], , 只要将 C_{η_i} 与 $\mathrm{K}^b(\mathscr{P})$ 或 $\mathrm{K}^b(\mathrm{mod}\, A)$ 中的复形张量，就有 K¨unneth 定理成立。现在考虑 $\mathrm{K}^b(\mathrm{mod}\ A)$ 中的复形 $C_{\eta_8} \otimes_A \cdots \otimes_A C_{\eta_1} \otimes_A S$；记作 C'。它在次数 0、m、$2m$、.....、$8m$上有同调，并且 $\mathrm{H}_{tm}(C')$ 是 S的 $\binom{8}{t}$ 份直和。

链映射 ν_i在 $C_{\eta_8} \otimes_A \cdots \otimes_A C_{\eta_1}$上诱导链映射，进而得到链映射$\theta_i$： $\Sigma^m C' \longrightarrow C'$。这些映射在 $\mathrm{Hom}^*{}_{\mathbf{K}^b(\text{模 } A)}(C,C)$ 中生成一个 8 重外代数，而 Lefschetz 元 $w = \theta_1\cdot\theta_2 + \theta_3\cdot\theta_4 + \theta_5\cdot\theta_6 + \theta_7\cdot\theta_8$ 诱导一个同态

$$\mathrm{H}_i\left(C'\right) \xrightarrow{\bar{w}} \mathrm{H}_{i+2m}\left(C'\right)$$

它在 $i \in \{0, m, 2m, 3m\}$时是单射，在 $i \in \{3m, 4m, 5m, 6m\}$时是满射。映射锥 D' 的同调满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i\left(D'\right) = \left(2^8 - 4\right)\dim_k S$$

现在令 $C'' = C_{\eta_c} \otimes_A \cdots \otimes_A C_{\eta_9}$，约定当 $c = 8$时，这是 A 上的茎复形，并设 $C = C'' \otimes_A C'$。由链映射w对应的可区别三角，我们得到一个可区别三角

$$\Sigma^{2m} C \xrightarrow{\ w\ } C \longrightarrow C'' \otimes_A D' \longrightarrow \Sigma^{2m+1} C$$

在 $\mathrm{K}^b(\mathrm{mod}\, A)$ 中，我们也将 $1 \otimes_A w$ 在 $C = C'' \otimes_A C'$ 上的链映射记作 w。令 D 为此链映射的映射锥。复形 C'' 在次数 0、m、$2m$、.....、$(c-8)m$ 上具有非零同调，其中 $\mathrm{H}_{tm}(C'')$ 是 $\binom{c-8}{t}$ 个 A 的直和。这给出

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(C'' \otimes_A D') = 2^{c-8}\left(2^8 - 4\right)\dim_k S < 2^c \dim_k S$$

复形 D 由投射模组成。为说明这一点，注意到 C 中每个非零项都是形如 $B_1 \otimes_A \cdots \otimes_A B_c \otimes_A C$ 的模的直和，其中双模 B_i 出现在复形 η_1、……、η_c 中。假设至少有一个 B_i 是投射双模 Q_j。一般而言，若 Q 是投射双模，且 M 是左 A-模，则 $Q \otimes_A M$ 是投射的 A-模；这是因为 $A^e \otimes_A M$ 是投射的。由此可知，若 B_1 是投射的，则 $B_1 \otimes_A \cdots \otimes_A B_c \otimes_A C$ 是投射的。否则，张量积的形式为 $M_{\eta_{i_1}} \otimes_A \cdots \otimes_A M_{\eta_{i_s}} \otimes_A Q \otimes_A \cdots \otimes_A C$，其中 M_{η_i} 是复形 C_{η_i} 中最左侧的非零双模，且 Q 是投射双模。由于 A-模 $Q \otimes_A \cdots \otimes_A C$ 是投射的，而双模 $M_{\eta_{i_1}} \otimes_A \cdots \otimes_A M_{\eta_{i_s}}$ 是单侧投射的，由 Hom-张量伴随可知，$M_{\eta_{i_1}} \otimes_A \cdots \otimes_A M_{\eta_{i_s}} \otimes_A Q \otimes_A \cdots \otimes_A C$ 也是投射的。最后，C 中唯一不是上述类型模的直和的模，是最左侧的非零模，即 $M_{\eta_c} \otimes_A \cdots \otimes_A M_{\eta_1} \otimes_A S$。然而，根据 [19, 命题 4.3],，该模的支撑簇为 $Z(\eta_1, \dots \eta_c) \cap V_H(S)$，这等于 $Z(\eta_1, \dots \eta_c) \cap Z(\mathfrak{a})$。根据构造，$\eta_i$ 的像在 $H/\mathfrak{a}$ 中构成一个齐次参数系，因此该模的支撑簇是平凡的。因此，由 [19, 命题 2.2] 以及 A 是自内射的这一事实可知，该模是投射的。这表明复形 C，因而 D 也由投射模构成。□

当 A 是局部代数时，它是不可分解的，并且每个投射模都是自由的。此外，如果这样的代数满足 Fg，那么它就是自内射的，因为根据 [19, 命题 2.2]，它是 Gorenstein 的。因此，该定理可表述如下。

推论 4.4. 设 k 是一个特征不为 2 的域，A 是一个有限维局部 k-代数，其极大左理想为 $\mathfrak{m}$。假设 A 满足 Fg，且 $\operatorname{cx}_A(A/\mathfrak{m}) = c \geq 8$。那么，存在无穷多个非同构且非平凡的有界复形 $D \in \mathrm{K}^b(\operatorname{mod} A)$，其项为自由模，并且

$$\frac{1}{\dim_k A/\mathfrak{m}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^c$$

特别地，如果 $\dim_k A/\mathfrak{m} = 1$，那么存在无穷多个非同构且非平凡的此类复形 D，并且

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^c$$

最后，我们举一个满足上一个结果假设的局部代数类的例子。

例 4.5. 设 k 是一个域，并固定整数 $c \geq 1$ 和 $a_1, \dots, a_c \geq 2$，以及非零元素 $q_{ij} \in k$（其中 $1 \leq i < j \leq c$）。相应的量子完全交叉是代数

$$A = k\langle x_1, \dots, x_c \rangle / (x_i^{a_i}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j)$$

它是有限维、局部且自内射的。单模 k 的复杂度为 c。根据 [9, 定理 5.5],，当且仅当所有交换子 q_{ij} 都是 k 中的单位根时，该代数满足 Fg。因此，在这种情况下，k 的特征不为 2，且

$c \geq 8$，存在无穷多个非同构且非平凡的自由模复形 D ，满足

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \dim_k \mathrm{H}_i(D) < 2^c$$

这类代数的例子包括外代数

$$k\langle x_1, \dots, x_c\rangle/(x_i^2, x_j x_i + x_i x_j)$$

以及有限维交换局部完全交

$$k[x_1, \dots, x_c]/(x_1^{a_1}, \dots, x_c^{a_c})$$

对应于 $c \geq 8$。请注意，在定理 4.3 的证明中计算同调维数时，我们实际上在单模为一维的情形下得到了精确的数值 $2^c - 2^{c-6}$ 。因此，对于上述完全交，我们得到（无穷多个）如 [24, 定理 3.1] 所示的自由模复形。

References

[1] A. Adem, R.G. Swan, *Linear maps over abelian group algebras*, J. Pure Appl. Algebra 104 (1995), no. 1, 1–7. [2] D.J. Benson, *Representations and cohomology. I. Basic representation theory of finite groups andassociative algebras*, 第二版，剑桥高等数学研究丛书第30卷，剑桥大学出版社，剑桥，1998年，xii+246 页。[3] D.J. Benson, J.F. Carlson, *Projective resolutions and Poincaré duality complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. 342 (1994), no. 2, 447–488. [4] D.J. Benson, P. Etingof, *Symmetric tensor categories in characteristic* 2, 《数学进展》 351 (2019), 967–999. [5] D.J. Benson, P. Etingof, *On cohomology in symmetric tensor categories in prime characteristic*, 《同调、同伦与应用》 24 (2022), no. 2, 163–193. [6] D.J. Benson, P. Etingof, V. Ostrik, *New incompressible symmetric tensor categories in positive characteristic* 172 2023 1, 105 200 , 《杜克数学杂志》 ( ), no. – . [7] P.A. Bergh, *Representation dimension and finitely generated cohomology*, 《数学进展》 219 (2008), no. 1, 389–400. [8] P.A. Bergh, *Separable equivalences, finitely generated cohomology and finite tensor categories*, 预印本。[9] P.A. Bergh, S. Oppermann, *Cohomology of twisted tensor products* 320 2008 8, , 《代数 3327 3338 杂志》 ( ), no. – . [10] P.A. Bergh, J. Plavnik, S. Witherspoon, *Support varieties for finite tensor categories: complexity, realization and connectedness* 225 2021 9, 106705, 21 , , J. Pure Appl. Algebra ( ), no. Paper No. pp. [11] P.A. Bergh, J. Plavnik, S. Witherspoon, *Support varieties for finite tensor categories: the tensor product property* , 进行中。

[12] W. Bruns, J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, 剑桥高等数学研究丛书第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993年，xii+403 页。[13] A.B. Buan, H. Krause, N. Snashall, Ø. Solberg, *Support varieties – an axiomatic approach*, 《数学杂志》 295 (2020), no. 1–2, 395–426. [14] J.F. Carlson, *The ranks of homology of complexes of projective modules over finite groups*, 即将在 Proc. Amer. Math. Soc. 上发表。[15] G. Carlsson, *Free* $(\mathbb{Z}/2)^k$*-actions and a problem in commutative algebra*, 变换群，波兹南 1985，79–83，数学讲义第1217卷，施普林格，柏林，1986年。[16] G. Carlsson, *Free* $\mathbb{Z}/2^{\,3}$*-actions on finite complexes* *Algebraic topology and algebraic K-theory* ( ) , in , – *(Princeton, N.J., 1983)* 332 344, 113, Ann. of Math. Stud., 普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1987年。

[17] A. Conca, H.-C. Herbig, S.B. Iyengar, Srikanth, *Koszul properties of the moment map of some classical representations* 69 2018 3, 337 357 , Collect. Math. ( ), no. – . [18] K. Coulembier, *Monoidal abelian envelopes*, Compos. Math. 157 (2021), no. 7, 1584–1609. [19] K. Erdmann, M. Holloway, N. Snashall, Ø. Solberg, R. Taillefer, *Support varieties for selfinjective algebras* 33 2004 1, 67 87 , K理论 ( ), no. – . [20] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Tensor categories*, Mathematical Surveys and Monographs 205, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。[21] P. Etingof, V. Ostrik, *Finite tensor categories*, Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 627–654, 782–783. [22] L. Evens, *The cohomology ring of a finite group*, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224–239. [23] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) 78 (1963), 267–288. [24] S.B. Iyengar, M.E. Walker, *Examples of finite free complexes of small rank and small homology*, Acta Math. 221 (2018), no. 1, 143–158. [25] D. Quillen, *The spectrum of an equivariant cohomology ring. I, II*, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 549–572；同上 (2) 94 (1971), 573–602. [26] H. R¨uping, M. Stephan, *Multiplicativity and nonrealizable equivariant chain complexes*, J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), no. 8, Paper No. 107023, 36 pp. [27] N. Snashall, Ø. Solberg, *Support varieties and Hochschild cohomology rings*, Proc. London Math. Soc. 88 (2004), no. 3, 705–732. [28] Ø. Solberg, *Support varieties for modules and complexes* *Trends in representation theory of* , in , – *algebras and related topics* 239 270, 406, Contemp. Math., 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。[29] M. Su´arez- ´Alvarez, *The Hilton-Eckmann argument for the anti-commutativity of cup products*, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (2004), no. 8, 2241–2246. [30] B.B. Venkov, *Cohomology algebras for some classifying spaces* (俄文), 苏联科学院通报 127 (1959), 943–944. [31] B.B. Venkov, *Characteristic classes for finite groups* (俄文), 苏联科学院通报 137 (1961), 1274–1277.

Petter Andreas Bergh, Institutt for matematiske fag, NTNU, N-7491 Trondheim, Nor-way*Email address*: petter.bergh@ntnu.no