arXiv:2301.07580v1 [math.RT] 18 Jan 2023

SYLOW 分支系数与钩分拆

EUGENIO GIANNELLI 和 GIADA VOLPATO

Abstract. 我们描述了由钩分拆标记的对称群不可约特征在 Sylow 2-子群上的限制的不可约成分。

1. Introduction

设 $n \in \mathbb{N}$，并令 $\mathfrak{S}_n$ 为次数为 n 的有限对称群。令 p 为一个素数，并令 P_n 为 $\mathfrak{S}_n$ 的 Sylow p-子群。令 $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 和 $\phi \in \mathrm{Irr}(P_n)$ 分别为 $\mathfrak{S}_n$ 和 P_n 的不可约特征。相应的 Sylow 分支系数 Z_ϕ^χ 定义为 ϕ 作为 $\chi\downarrow_{P_n}$ 的不可约成分的重数，其中 $\chi\downarrow_{P_n}$ 是将 χ 限制到 P_n 上所得的特征。关于对称群和奇素数下的 Sylow 分支系数，已有大量研究 [INOT17、GL18、GL21]。此外，近期在 [GLLV22] 中利用关于这些整数的新信息，证明了 Malle 和 Navarro 在 [MN12] 中提出的一个猜想。如今，对于奇素数下 Sylow 分支系数所积累的知识，与素数 p 等于 2 时该主题信息的匮乏之间，存在明显的断层。例如，奇素数下 Sylow 置换特征 $1_{P_n}\uparrow^{\mathfrak{S}_n}$ 的不可约成分已有完整描述 [GL18、定理 A]，但尽管取得了一些近期进展 [LO 22],，当 $p = 2$ 时，我们对其仍远未充分理解。

本文旨在推进对素数 2 处 Sylow 分支系数的研究。具体而言，我们聚焦于由钩分拆标记的不可约特征。从现在起，我们将 $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 的这一子集记为 $\mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_n)$。为介绍主要结果，我们首先回顾一下，$P_{2^k}$ 同构于由 2 阶循环群构成的 k 重花环积。因此，P_{2^k} 的线性特征自然由长度为 k 的 $\{0,1\}$ 序列标记（见第 2.1 节末尾）。受 McKay 猜想研究的启发，[G17] 证明了，对于每个 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_{2^k})$，$\chi$ 在 P_{2^k} 上的限制都含有唯一的线性成分。下文定理 3.2 通过描述相应的 $\{0,1\}$ 序列，确定了这一唯一成分。该结果随即用于第 4 节，以计算一大类 Sylow 分支系数。具体而言，在定理 4.4 中，我们计算了所有 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_n)$ 和所有 $\phi \in \mathrm{Lin}(P_n)$ 对应的 Z_ϕ^χ。这是对 [G17, 定理 1.1] 的广泛推广；目前，它也是少数几个针对任意大的对称群对 Sylow 分支系数进行显式数值确定的例子之一。在文章的第二部分，我们从线性成分转向任意组成成分。具体而言，给定 $n, k \in \mathbb{N}$，我们研究哪些 $\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_n)$ 使得 $\chi\downarrow_{P_n}$ 含有次数为 2^k的不可约成分。定理 5.11 讨论了这一问题。第 5 节中的观察还带来一个有趣的推论：只要 $\chi\downarrow_{P_n}$ 含有次数为 2^k的组成成分，它就必然对每个 $0 \le \ell \le k$都含有次数为 2^ℓ的组成成分。

2. Notation and background

给定整数 $n \le m$，我们用 $[n, m]$ 表示集合 $\{n, n+1, \dots, m\}$。如果 $n < m$，则将 $[m, n]$ 视为空集。我们令 $\mathcal{C}(n)$ 表示 n的所有合成构成的集合，即由

Key words and phrases. 特征标理论、对称群、Sylow 分支系数。

所有有限序列 $(a_1, a_2, \dots, a_z)$ 构成的集合，其中 a_i 对所有 $i \in [1, z]$都是非负整数，且满足 $a_1 + \cdots + a_z = n$。给定 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_z) \in \mathcal{C}(n)$，我们有时用 $l(\lambda) = z$ 表示 λ的项数。按照惯例，给定有限群 G，我们用 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G的所有不可约复特征标构成的集合，并用 $\mathrm{Lin}(G)$ 表示线性特征的子集。最后，$\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ 表示 G的不可约特征标次数集合。

2.1. 群绕积与西洛子群。这里我们固定群绕积的特征标记号。更多详情请参见 [JK81，第 4]章。设 G 为一个有限群，且 H为 $\mathfrak{S}_n$的一个子群。我们将 $G^{\times n}$ 记作 n 个 G的直积。$\mathfrak{S}_n$ 在 $G^{\times n}$ 的直因子上的自然作用，通过自同构诱导出 $\mathfrak{S}_n$ （因而也诱导出 $H \leq \mathfrak{S}_n$）对 $G^{\times n}$的作用，从而得到群绕积 $G \wr H := G^{\times n} \rtimes H$。我们称 $G^{\times n}$ 为群绕积 $G \wr H$的基群。我们将 $G \wr H$ 中的元素记作（g_1, ..., g_n; h），其中 $g_i \in G$ 和 $h \in H$。设 V 为一个 $\mathbb{C}G$-模，并假设它实现特征标 ϕ。令$V^{\otimes n} := V \otimes \cdots \otimes V$（$n$ 个副本）为相应的 $\mathbb{C}G^{\times n}$-模。通过线性延拓定义的 $G \wr H$ 在$V^{\otimes n}$ 上的左作用

$$(g_1, \dots, g_n; h) : v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto g_1 v_{h^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes g_n v_{h^{-1}(n)},$$

使 $V^{\otimes n}$ 成为一个 $\mathbb{C}(G \wr H)$-模，我们将其记为 $\tilde{V}^{\otimes n}$。我们用 $\tilde{\phi}$ 表示由 $\mathbb{C}(G \wr H)$-模 $\tilde{V}^{\otimes n}$所赋予的特征标。对于 H的任意特征标 ψ，我们也用 ψ 表示其膨胀到 $G \wr H$ 上的 ˜膨胀，并令 $\mathcal{X}(\phi; \psi) := \phi \cdot \tilde{\psi}$表示由 $G \wr H$得到的特征标，它是 ϕ与 ψ的乘积。令 $\phi \in \in \mathrm{Irr}(G)$，并令 $\phi^{\times n} := \phi \times \cdots \times \phi$ 为相应的不可约特征标$G^{\times n}$。注意，$\phi \in \in \mathrm{Irr}(G \wr H)$是 $\phi^{\times n}$的一个扩张。给定 $K \leq G$，我们用 $\mathrm{Irr}(G|\psi)$ 表示满足以下条件的特征标集合：$\chi \in \in \mathrm{Irr}(G)$，且 ψ 是限制 $\chi\downarrow_K$的一个不可约成分。因此，根据 Gallagher定理 [I76，推论 6.17]，我们有

$$\mathrm{Irr}(G \wr H | \phi^{\times n}) = \{\, \mathcal{X}(\phi; \psi) \mid \psi \in \mathrm{Irr}(H) \,\}.$$

If $H = C_p$ 是一个阶为素数 p的循环群，每个 $\psi \in \mathrm{Irr}(G \wr C_p)$要么具有以下形式

(i) $\psi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_p \uparrow^{G \wr C_p}_{G^{\times p}}$，其中 $\phi_1, \dots \phi_p \in \mathrm{Irr}(G)$并非全都相等；或

(ii) $\psi = \mathcal{X}(\phi; \theta)$，其中 $\phi \in \mathrm{Irr}(G)$且 $\theta \in \mathrm{Irr}(C_p)$。

我们指出，在情形 (i) 中，有 $\mathrm{Irr}(G \wr C_p | \phi_1 \times \cdots \times \phi_p) = \{\psi\}$。

最后，我们记录一些关于对称群的西洛子群的事实；更多细节请参见JK81，第 4] 章，或 [O76] 。固定 p 一个素数。记 P_n 为 $\mathfrak{S}_n$的一个 Sylow p-子群。显然，P_1 是平凡群，而 $P_p \cong C_p$ 是阶为 p的循环群。若 $i \geq 2$，则 $P_{p^i} = \left(P_{p^{i-1}}\right)^{\times p} \rtimes P_p = P_{p^{i-1}} \wr P_p \cong P_p \wr \cdots \wr P_p$（$i$重花环积）。令$n = \sum_{i=1}^{r} p^{n_i}$为 n的 p进制展开，其中 $n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 0$。于是 $P_n \cong P_{p^{n_1}} \times \cdots \times P_{p^{n_r}}$。当 $p = 2$时，令 $\{\phi_0, \phi_1\} = \mathrm{Irr}(P_2)$，其中 ϕ_0 表示 P_2的平凡特征。利用上述关于花环积的表示的事实，很容易看出，P_{2^n} 的线性特征自然地由 $\{0, 1\}^{\times n}$中的元素标记。事实上，令 $\mathcal{X}(0) = \phi_0$、$\mathcal{X}(1) = \phi_1$，并给定$(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^{\times n}$，我们递归地将 $\mathcal{X}(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n) \in \mathrm{Lin}(P_{2^n})$定义为 $\mathcal{X}(i_1, \dots, i_{n-1}, i_n) = \mathcal{X}(\mathcal{X}(i_1, \dots, i_{n-1}); \phi_{i_n})$。

2.2. Littlewood-Richardson 系数。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 与 $\mathcal{P}(n)$ 自然双射，其中 $\mathcal{P}(n)$ 是 n 的所有分拆构成的集合。对于 $\lambda \in \mathcal{P}(n)$，相应的不可约特征记作 χ^λ。设 $m, n \in \mathbb{N}$ 满足 $m < n$。给定 $\chi^\mu \times \chi^\nu \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{n-m})$，归纳所得的不可约成分分解

$$(\chi^\mu \times \chi^\nu) \uparrow^{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu) \chi^\lambda$$

由 Littlewood-Richardson 规则描述（参见 [F97，第 5] 章，或 [J78，第 16] 章）。这里，自然数 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu)$ 称为 Littlewood-Richardson 系数。

对于所有 $j\in[1,k]$，给定 $(n_1,\dots,n_k)\in\mathcal{C}(n)$、$\lambda\in\mathcal{P}(n)$ 和 $\mu_j\in\mathcal{P}(n_j)$，我们将 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\dots,\mu_k)$ 定义为 χ^λ 作为 $(\chi^{\mu_1}\times\cdots\times\chi^{\mu_k})\uparrow_Y^{\mathfrak{S}_n}$ 的不可约成分时的重数。这里，Y 表示 $\mathfrak{S}_n$ 的 Young 子群 $\mathfrak{S}_{n_1}\times\mathfrak{S}_{n_2}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{n_k}$。在本文后文中，我们有时也会将子群 Y 记为 $\mathfrak{S}_{(n_1,\dots,n_k)}$。下面的引理描述了非零 Littlewood-Richardson 系数所涉及分拆的首项的性质。这将在后续章节中发挥作用。

引理 2.1. 若 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\dots,\mu_k)\neq 0$，则 $\lambda_1\leq\sum_{j=1}^k(\mu_j)_1$。

证明。当 $k=2$ 时，该结论可直接由 Littlewood-Richardson 系数 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\mu_2)$ 的组合描述推出，参见 [F97，第 5 节。2]。然后通过迭代证明该引理。□

与 [GL21]，中一样，我们将 $\mathcal{B}_n(t)$ 定义为这样一些分拆的集合：其 Young 图包含在一个 $t\times t$ 方格网中；也就是说，对于 $n,t\in\mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{B}_n(t):=\{\,\lambda\in\mathcal{P}(n)\mid\lambda_1\leq t,\ l(\lambda)\leq t\,\}.$$

此外，对于 $(n_1,\dots,n_k)\in\mathcal{C}(n)$，并且对所有 $j\in[1,k]$ 都有 $A_j\subseteq\mathcal{P}(n_j)$，我们令

$$A_1\star A_2\star\cdots\star A_k:=\{\,\lambda\in\mathcal{P}(n)\mid\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\dots,\mu_k)>0,\ \text{其中某些 }\mu_1\in A_1,\dots,\mu_k\in A_k\,\}.$$

容易验证，$\star$ 既是交换的，也是结合的。以下引理最初由 [GL21 命题 3.3] 证明。

引理 2.2. 设 $n,n',t,t'\in\mathbb{N}$ 满足 $\frac{n}{2}<t\leq n$ 和 $\frac{n'}{2}<t'\leq n'$。那么

$$\mathcal{B}_n(t)\star\mathcal{B}_{n'}(t')=\mathcal{B}_{n+n'}(t+t').$$

3. On the McKay bijection for symmetric groups

从现在起，我们固定 $p=2$，并令 P_n 为 $\mathfrak{S}_n$ 的 Sylow 2-子群。受对称群的 McKay 双射研究的启发，[G17 定理 1.1] 表明，$\mathfrak{S}_{2^n}$ 的每个奇次数不可约特征在 P_{2^n} 上的限制都恰有一个线性成分。本节将通过明确确定相应的$\{0,1\}$-序列，来说明这个成分是哪一个，具体如第 2.1 节所述。我们回顾一下，根据 [G17 引理 3.1]，$\mathfrak{S}_{2^n}$ 的奇次数不可约特征恰好是由 2^n 的钩分拆标记的。换言之，我们有 $\mathrm{Irr}_{2'}(\mathfrak{S}_{2^n})=\mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_{2^n})$。我们引入下面这条最后但有用的记号。对于自然数 n，令 $\mathcal{H}(n)$ 表示自然数 n 的钩分拆集合。为简化记号，我们用 $(n-x,1^x)$ 表示钩分拆 $(n-x,1,\dots,1)\in\mathcal{H}(n)$。为方便读者，我们在此记下 [G17 定理 1.1]。

定理 3.1. 设 $n\in\mathbb{N}$，并设 $\lambda\in\mathcal{H}(2^n)$。那么 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 有唯一的线性成分。该成分的重数为 1。

从现在起，我们采用以下记号。给定 $z\in\mathbb{Z}$，令 $[z]\in\{0,1\}$ 满足 $z\equiv[z]$ 模 2。现在可以陈述我们的第一个结果了。

定理 3.2. 设 $n\in\mathbb{N}$，并设 $\lambda=(2^n-x,1^x)\in\mathcal{H}(2^n)$，其中 $x=a_n2^n+a_{n-1}2^{n-1}+\cdots+a_02^0$是其二进制展开。$\chi^\lambda\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 的唯一线性成分为

$$\mathcal{X}\left([a_n+a_{n-1}],[a_{n-1}+a_{n-2}],\dots,[a_1+a_0]\right).$$

证明。我们对 n使用归纳法。若 $n=1$，则 $\lambda \in \{(2),(1^2)\}$。若 $\lambda=(2)$，则 $x=0=0\cdot 2^1+0\cdot 2^0$, $[a_1+a_0]=[0+0]=0$ 且 $\chi^{(2)}\big\downarrow_{P_2}=\phi_0$。类似地，$\chi^{(1^2)}\big\downarrow_{P_2}=\phi_1$。现在设 $n\geq 2$，并设 $\lambda=(2^n-x,1^x)$。我们将 $\chi^{\lambda}\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 的唯一线性成分记为 L_λ，如定理 3.1 所述。由 Littlewood-Richardson 规则可得

$$\chi^{\lambda}\big\downarrow_{\mathfrak{S}_{2^{n-1}}\times\mathfrak{S}_{2^{n-1}}}=\left(\chi^{(2^{n-1}-y,1^y)}\times\chi^{(2^{n-1}-y,1^y)}\right)+\Delta,$$

其中，若 x 为偶数，则 $y=\frac{x}{2}$；若 x 为奇数，则 $\frac{x-1}{2}$；而 Δ 是形如 $\phi\times\psi$ 的不可约成分之和，

其中 $\phi\neq\psi$。由此可得 $L_\lambda=\mathcal{X}\left(L_{(2^{n-1}-y,1^y)};\right.$ 对于某个 $\alpha\in\{0,1\}$，有 $\left.\phi_\alpha\right)$。为了求得 α，我们考虑一个 2^n-循环 $g\in P_{2^n}$。由于 $P_{2^n}=P_{2^{n-1}}\wr P_2$，我们可以选取 $g=(h,1;\ \gamma)$，其中 $h\in P_{2^{n-1}}$ 是一个 2^{n-1}-循环，而 $\gamma\in P_2$ 是一个 2-循环。利用 [JK81, 4.3.9] 和 [GN18, 引理 3.11]，我们有

$$\chi^{\lambda}(g)=L_\lambda(g)=L_{(2^{n-1}-y,1^y)}(h)\cdot\phi_\alpha(\gamma)=\chi^{(2^{n-1}-y,1^y)}(h)\cdot\chi^{(2-\alpha,\alpha)}(\gamma).$$

Murnaghan-Nakayama 规则 [JK81, 2.4.7] 表明 $(-1)^x=(-1)^y(-1)^\alpha$。由此可得

$$\alpha=\begin{cases}0, & \text{if } x\equiv y \bmod 2,\\ 1, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 $x=a_n2^n+\cdots+a_02^0$ 是 $x\in[0,2^n-1]$的二进制展开，因此 $y=a_n2^{n-1}+\cdots+a_12^0$ 是 $y\in\left[0,2^{n-1}-1\right]$的二进制展开。因此，$\alpha=[a_1+a_0]$ 并且我们有$L_\lambda=\mathcal{X}\left(L_{(2^{n-1}-y,1^y)};\phi_{[a_1+a_0]}\right)$。利用 y 的二进制展开和归纳假设，我们完成证明。□

4. Computing Linear Sylow Branching Coefficients

本章节的目标是计算所有 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_n)$ 和所有 $\phi\in\mathrm{Lin}(P_n)$ 对应的 Sylow 分支系数 Z_ϕ^χ。这将定理 3.1 推广到任意自然数。

给定 $t\in\mathbb{N}$和 $y\in\mathbb{Z}$，我们令 $\binom{t}{y}$ 表示通常的二项式系数。特别地，当 $y\notin[0,t]$时，将其视为 0。

引理 4.1. 设 $\alpha=(n_1,\ldots,n_t)\in\mathcal{C}(n)$ 且 $h\in\mathcal{H}(n)$。设对所有 $i\in[1,t]$，$\lambda_i\in\mathcal{P}(n_i)$。若$\mathcal{LR}(h;\lambda_1,\ldots,\lambda_t)\neq 0$，则对所有 $i\in[1,t]$，$\lambda_i\in\mathcal{H}(n_i)$。

证明。由 Littlewood-Richardson 规则可直接得到。□

引理 4.2. 设 $\alpha=(n_1,\ldots,n_t)\in\mathcal{C}(n)$ 且 $h=(n-x,1^x)\in\mathcal{H}(n)$。对每个 $i\in[1,t]$，令$h_i=(n_i-x_i,1^{x_i})\in\mathcal{H}(n_i)$，其中 $x_i\in[0,n_i-1]$为某个值。最后，设 $y=x-\sum_{i=1}^t x_i$。则

$$\mathcal{LR}(h;h_1,\ldots,h_t)=\binom{t-1}{y}.$$

证明。我们对 t 使用归纳法。若 $t=2$，根据 Littlewood-Richardson 规则，我们有$\mathcal{LR}(h;\,h_1,h_2)=0$，除非 $x_1+x_2\in\{x-1,x\}\cap\mathbb{N}$。在这种情况下，我们有 $\mathcal{LR}(h;\,h_1,h_2)=1$。由于 $t-1=1$，这些事实与所需结论一致。现在假设 $t\geq 3$，并令 $K_1=(n_2+\cdots+n_t-(x-x_1)\ 1^{x-x_1})$ $K_2=(n_2+\cdots+n_t-(x-x_1-1)\ 1^{x-x_1-1})\in\mathcal{H}(n_2+\cdots+n_t)$。利用 Littlewood-Richardson 规则，我们注意到 $\mathcal{LR}(h;\,h_1,\theta)=0$，除非$\theta\in\{K_1,K_2\}$。此外，$\mathcal{LR}(h;h_1,K_1)=\mathcal{LR}(h;\,h_1,K_2)=1$。根据归纳假设，我们知道 $\mathcal{LR}(K_1;\,h_2,\ldots,h_t)=\binom{t-2}{y}$，且 $\mathcal{LR}(K_2;\,h_2,\ldots,h_t)=\binom{t-2}{y-1}$。于是，我们可以得出结论：

$$\mathcal{LR}(h;h_1,\ldots,h_t)=\binom{t-2}{y}+\binom{t-2}{y-1}=\binom{t-1}{y}.$$

□

我们举例说明在 $\lambda \in \mathcal{H}(2^n)$ 和 $\mu, \nu \in \mathcal{H}(2^{n-1})$ 的情况下，如何计算 Littlewood-Richardson 系数 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu)$。在接下来的章节中将会反复用到这个例子。

例 4.3. 设 $n > 1$ 和 $\lambda = (2^n - x, 1^x) \in \mathcal{H}(2^n)$，其中 $x \in [1, 2^n]$。我们希望将 χ^λ 限制到 $Y := \mathfrak{S}_{2^{n-1}} \times \mathfrak{S}_{2^{n-1}}$。利用 Littlewood-Richardson 规则，我们得到如下分解:

$$\chi^\lambda\big\downarrow_Y = \chi^{(2^{n-1}-x,1^x)} \times \chi^{(2^{n-1})} + \sum_{y=0}^{x-1} \chi^{(2^{n-1}-y,1^y)} \times \left(\chi^{(2^{n-1}-(x-y),1^{x-y})} + \chi^{(2^{n-1}-(x-y-1),1^{x-y-1})}\right).$$

因此，我们可以计算 Littlewood-Richardson 系数 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu)$。设 $\mu = (2^{n-1} - t, 1^t)$ 且 $\nu = (2^{n-1} - z, 1^z)$。定义 $V := \{(x, 0)\} \cup \{(y, x - y), (y, x - y - 1) \mid y \in [0, x - 1]\}$。那么

$$\mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu) = \begin{cases} 1, & \text{if } (t, z) \in V; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，如果 $x = 0$, $\lambda = (2^n)$ 且 $\chi^\lambda\big\downarrow_Y = \chi^{(2^{n-1})} \times \chi^{(2^{n-1})}$。

设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_t}$ 为其二进制展开。给定 $\phi \in$ 线性特征标集(P_n)，存在唯一的 $(h_1, \ldots, h_t) \in \mathcal{H}(n_1) \times \mathcal{H}(n_2) \times \cdots \times \mathcal{H}(n_t)$，使得 $\phi = L_{h_1} \times \cdots \times L_{h_t}$。这里，对所有 $i \in [1, t]$，L_{h_i} 表示 $\chi^{h_i}\big\downarrow_{P_{2^{k_i}}}$ 的唯一线性成分，如定理 3.1 和定理 3.2 所述。在这种情况下，我们将 ϕ 记为 $\phi(h_1, \ldots, h_t)$。

定理 4.4。设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $k_1 > \cdots > k_t \geq 0$ 满足 $n = 2^{k_1} + \cdots + 2^{k_t}$。设 $x \in [0, n - 1]$，并设 $h = (n - x, 1^x) \in \mathcal{H}(n)$。对每个 $i \in [1, t]$，令 $x_i \in [0, 2^{k_i} - 1]$，并令 $h_i = (2^{k_i} - x_i, 1^{x_i})$。最后设 $y = x - \sum_{i=1}^t x_i$。则

$$[\chi^h\big\downarrow_{P_n}, \phi(h_1, \ldots, h_t)] = \binom{t-1}{y}.$$

证明。对每个 $i \in [1, t]$，令 $n_i = 2^{k_i}$。设 $\alpha = (n_1, \ldots, n_t) \in \mathcal{P}(n)$，并令 $Y = \mathfrak{S}_\alpha$ 满足 $P_n \leq Y$。令 $\mathcal{H} = \mathcal{H}(n_1) \times \mathcal{H}(n_2) \times \cdots \times \mathcal{H}(n_t)$ 和 $\phi = \phi(h_1, \ldots, h_t)$。由引理 4.1 可知

$$(\chi^h)\big\downarrow_Y = \sum_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{H}} \mathcal{LR}(h; \lambda_1, \ldots, \lambda_t)(\chi^{\lambda_1} \times \cdots \times \chi^{\lambda_t}).$$

根据定理 3.1, $[(\chi^{\lambda_1} \times \cdots \times \chi^{\lambda_t})\big\downarrow_{P_n}$，除非 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t) = (h_1, \ldots, h_t)$。后一种情况下，我们有 $[(\chi^{h_1} \times \cdots \times \chi^{h_t})\big\downarrow_{P_n}, \phi] = 1$。结合引理 4.2 使用这些观察可得

$$[(\chi^h)\big\downarrow_{P_n}, \phi] = [((\chi^h)\big\downarrow_Y)\big\downarrow_{P_n}, \phi] = \mathcal{LR}(h; h_1, \ldots, h_t) = \binom{t-1}{y}.$$

□

特别是，该定理说明，对于每个自然数 n 和每个钩分拆 $h \in \mathcal{H}(n)$，限制 $\chi^h\big\downarrow_{P_n}$ 有一个线性成分。这也见于 GN18，定理 3.1]。

我们以一个引理结束本章节，该引理将在论文的第二部分发挥作用。

引理 4.5。设 $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = (2^n - 1, 1)$。那么存在特征标 $\theta_k \in \mathrm{Irr}(P_{2^n})$，使得对于每个 k 和 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_k$，都有 $k \in [0, n - 1]$ $\theta_k(1) = 2^k$。

证明。我们对 n 使用归纳法。若 $n=1$，则 $\lambda=(1^2)$ 且 $\chi^\lambda\downarrow_{P_2}=\phi_1$，如所需。若$n\geq 2$，根据 Littlewood-Richardson 规则，我们有

$$\chi^\lambda\downarrow_{\mathfrak{S}_{2^{n-1}}\times\mathfrak{S}_{2^{n-1}}}=\chi^{(2^{n-1})}\times\chi^{(2^{n-1})}+\chi^{(2^{n-1})}\times\chi^{(2^{n-1}-1,1)}+\chi^{(2^{n-1}-1,1)}\times\chi^{(2^{n-1})}.$$

然而，$\chi^{(2^{n-1})}\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}=1_{P_{2^{n-1}}}$ 根据归纳假设，$\chi^{(2^{n-1}-1,1)}\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}=\sum_{i=0}^{n-2}\psi_i$，其中 $\psi_i\in\mathrm{Irr}(P_{2^{n-1}})$ 且 $\psi_i(1)=2^i$。另请注意，$\psi_0\neq L_{(2^{n-1})}=1_{P_{2^{n-1}}}$。因此

$$\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^{n-1}}\times P_{2^{n-1}}}=\left(1_{P_{2^{n-1}}}\times 1_{P_{2^{n-1}}}\right)+\sum_{i=0}^{n-2}\left(1_{P_{2^{n-1}}}\times\psi_i+\psi_i\times 1_{P_{2^{n-1}}}\right).$$

因此 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}=L_\lambda+\sum_{i=0}^{n-2}\left(1_{P_{2^{n-1}}}\times\psi_i\right)\uparrow^{P_{2^n}}$。最后，观察到 $L_\lambda(1)=2^0$ 且对每个 $i\in[0,n-2]$ 都有 $\left(1_{P_{2^{n-1}}}\times\psi_i\right)\uparrow^{P_{2^n}}(1)=2^{i+1}$，即可完成证明。 □

5. On non-linear Sylow Branching Coefficients

在第 3 节和第 4 节中，我们完整描述了由钩分拆标记的不可约特征的 Sylow 限制的线性成分。本节旨在继续我们的研究，重点考察次数较高的不可约成分。更确切地说，对于任意满足 $2^k\in\mathrm{cd}(P_n)$ 的$k\in\mathbb{N}$，我们将着重研究如下定义的集合 $\mathcal{H}_n^k$ 的结构：

$$\mathcal{H}_n^k=\left\{\lambda\in\mathcal{H}(n)\;\middle|\;\chi^\lambda\downarrow_{P_n}\text{has an irreducible constituent of degree }2^k\right\}.$$

定理 5.5 给出了一个令人惊讶的首要结果，我们证明，只要 $\ell\leq k$，就有 $\mathcal{H}_n^k\subseteq\mathcal{H}_{n^\circ}^\ell$。随后，我们在定理 5.11 中证明，这些集合具有非常规则的结构。更确切地说，我们证明，对于任意如上所述的 $k\in\mathbb{N}$，都存在一个值 $t\leq n$，使得 $\mathcal{H}_n^k=\mathcal{B}_n(t)\cap\mathcal{H}(n)$。

¯为简化记号，从现在起，给定满足 $t\leq n$ 的 n、$t\in\mathbb{N}$，我们将用 $\mathcal{B}_n(t)$ 表示 $\mathcal{H}(n)$ 的如下子集：

$$\bar{\mathcal{B}}_n(t):=\mathcal{B}_n(t)\cap\mathcal{H}(n).$$

值得注意（而且很容易看出），集合 $\mathcal{H}_n^k$ 和 $\bar{\mathcal{B}}_n(t)$ 在分拆共轭下封闭。

本节以一个简短的例子开篇。一方面，这有助于读者理解当 n 取较小值时集合 $\mathcal{H}_n^k$ 的性质；另一方面，这也将作为后续一些归纳论证的基础情形。

例 5.1。这里我们计算 n 为较小的 2 的幂时的 $\mathcal{H}_n^k$。更具体地说，我们只考虑以下情形：$n\in\{2,4,8\}$。

若 $n=2$，则没什么可说的，因为 $\mathfrak{S}_2=P_2$。我们只需回顾第 2.1 节中引入的记号，并写作 $\mathrm{Irr}(P_2)=\{\phi_0,\phi_1\}$，其中 ϕ_0 是 P_2 的平凡特征。

现在设 $n=4$。那么 $P_4\cong C_2\wr C_2$ 有四个线性特征 $\mathcal{X}(i,j)$，分别对应 i、$j\in\{0,1\}$，以及一个次数为 2 的唯一不可约特征 φ。特别地，$\varphi=(\phi_0\times\phi_1)\uparrow^{P_4}$。由此可得 $\mathrm{cd}(P_4)=\{1,2\}$，因此我们将关注集合 $\mathcal{H}_4^0$ 和 $\mathcal{H}_4^1$ 的计算。为此，我们将研究 $\mathfrak{S}_4$ 中由属于集合 $\mathcal{H}(4)=\{(4),(3,1),(2,1^2),(1^4)\}$ 的分拆标记的那些不可约特征在 P_4 上的限制。不难看出：

$$\chi^{(4)}\big\downarrow_{P_4}=1_{P_4}=\mathcal{X}(0,0)\text{ and }\chi^{(3,1)}\big\downarrow_{P_4}=\mathcal{X}(0,1)+\varphi.$$

S由于集合 $\mathcal{H}_4^0$ 和 $\mathcal{H}_4^1$ 在分拆共轭下封闭，我们得出 th at

$$\mathcal{H}_4^0=\mathcal{H}(4)=\bar{\mathcal{B}}_4(4),\text{ and }\mathcal{H}_4^1=\{(3,1),(2,1^2)\}=\bar{\mathcal{B}}_4(3)$$

最后，我们考虑 $n = 8$ 的情形。这里 $P_8 = (P_4 \times P_4) \rtimes P_2 \cong P_4 \wr P_2$。由于基群 $P_4 \times P_4$ 自然是适当选取的 Young 子群 $Y \cong \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_4$ （属于 $\mathfrak{S}_8$）的子群，我们的策略是将 $\mathfrak{S}_8$ 的不可约特征限制到 Y，归纳地推导它们在 $P_4 \times P_4$ 上的限制所包含的信息，最后得出它们在 P_8 上的限制结果。以 $\lambda = (6, 1^2)$ 为例，令 $\chi = \chi^\lambda$。根据 Littlewood-Richardson 规则，我们知道 $\chi^{(4)} \times \chi^{(2,1^2)}$ 是 $\chi\big\downarrow_Y$ 的一个不可约成分。结合这一点以及我们对 $n = 4$ 情形所做的计算（归纳步骤），可推知 $\mathcal{X}(0, 0) \times \varphi$ 是 $\chi\big\downarrow_{P_4 \times P_4}$ 的一个不可约成分。由此得出，$(\mathcal{X}(0, 0) \times \varphi)\big\uparrow^{P_8}$ 是 $\chi\big\downarrow_{P_8}$ 的一个不可约成分（次数为 4）。这表明 $(6, 1^2) \in \mathcal{H}_8^2$。用完全类似的论证，我们得到

$$\mathcal{H}_8^0 = \bar{\mathcal{B}}_8(8) \text{ and that } \mathcal{H}_8^1 = \mathcal{H}_8^2 = \bar{\mathcal{B}}_8(7).$$

这就是我们所需的全部计算，因为 $\mathsf{cd}(P_8) = \{1, 2, 4\}$。最后提及，$\chi^{(6,1^2)}\big\downarrow_{P_8}$ 有唯一的线性成分、两个不同的次数为 2 的不可约成分，以及三个不同的次数为 4 的不可约成分。另一方面，$\chi^{(5,1^3)}\big\downarrow_{P_8}$ 有唯一的线性成分、三个不同的次数为 2 的不可约成分，以及五个不同的次数为 4 的不可约成分。根据上述针对 $\lambda = (6, 1^2)$ 的情形所概述的策略，可以轻松验证这一点。具体计算留给有兴趣的读者。

从现在起，我们用 α_n 表示满足以下条件的最大整数 k： 2^k 是 P_n 的一个不可约特征的次数。其形式化定义和说明见下文的定义5.2和命题 5.3。

De义5.2. 对任意自然数 t，我们定义整数 α_{2^t} 如下。令

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_4 = 1 \text{ and } \alpha_{2^t} = 2^{t-2} + 2^{t-3} - 1 \text{ for every } t \geq 3.$$

特别要注意，对于任意 $t \geq 4$，$\alpha_{2^t} = 2\alpha_{2^{t-1}} + 1$。现在令 $n \in \mathbb{N}$，并令 $n = \sum_{i=1}^r 2^{n_i}$ 为其二进制展开。我们将 $\alpha_n \in \mathbb{N}$ 定义为 $\alpha_n := \sum_{i=1}^r \alpha_{2^{n_i}}$。

命题 5.3. 给定 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathsf{cd}(P_n) = \left\{ 2^j \,\middle|\, j \in [0, \alpha_n] \right\}$。此外，若 $n \geq 8$，则 $|\{\theta \in \mathsf{Irr}(P_n) \mid \theta(1) = 2^{\alpha_n}\}| \geq 3$。

证明。首先假设 $n = 2^t$ 是 2 的幂。我们对 t使用归纳法。若$t \in \{1, 2, 3\}$，则由例 5.1 可知该命题成立。现在固定 $t \geq 4$，并回忆 $\alpha_{2^t} = 2\alpha_{2^{t-1}} + 1$。令 $k \in [0, \alpha_{2^t} - 1]$，并令 $q \in [0, \alpha_{2^{t-1}}]$、$r \in \{0, 1\}$ 满足 $k = 2q + r$。首先假设 $r = 0$，由归纳假设，存在 $\phi \in \mathsf{Irr}(P_{2^{t-1}})$，使得 $\phi(1) = 2^q$。因此，对于每个 $\psi \in \mathsf{Irr}(P_2)$，$\mathcal{X}(\phi; \psi) \in \mathsf{Irr}(P_{2^t})$ 的次数为 2^k。若$r = 1$，则 $q < \alpha_{2^{t-1}}$。若 $q = 0$，则 $k = 1$，且 $|\mathsf{Lin}(P_{2^t})| = 2^t > 2$。因此，我们可以选取$L$、$L' \in \mathsf{Lin}(P_{2^t})$，$L \neq L'$，且 $(L \times L')\big\uparrow^{P_{2^t}}$是次数为 $2 = 2^k$ 的不可约特征。若$1 \leq q < \alpha_{2^{t-1}}$，由归纳假设，存在 ϕ、$\psi \in \mathsf{Irr}(P_{2^{t-1}})$，使得 $\phi(1) = 2^{q-1}$、$\psi(1) = 2^{q+1}$。因此，$(\phi \times \psi)\big\uparrow^{P_{2^t}} \in \mathsf{Irr}(P_{2^t})$，且其次数为 2^k。若 $k = \alpha_{2^t}$，由归纳假设，存在 ψ_1、ψ_2，以及 $P_{2^{t-1}}$ 的 ψ_3 个互不相同的不可约特征，其次数为 $2^{\alpha_{2^{t-1}}}$。由于 $\alpha_{2^t} = 2\alpha_{2^{t-1}} + 1$，我们得到 $(\psi_1 \times \psi_2)\big\uparrow^{P_{2^t}}$、$(\psi_2 \times \psi_3)\big\uparrow^{P_{2^t}}$、$(\psi_1 \times \psi_3)\big\uparrow^{P_{2^t}} \in \mathsf{Irr}(P_{2^t})$ 是三个互不相同、次数为 $2^{\alpha_{2^t}}$ 的不可约特征。

现在假设 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的，并设 $n = \sum_{i=1}^r 2^{n_i}$ 的二进制展开为 $n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 0$。由第 2.1 节可知 $P_n = P_{2^{n_1}} \times \cdots \times P_{2^{n_r}}$，因此 $\mathsf{Irr}(P_n) = \{ \phi_1 \times \cdots \times \phi_r \mid \phi_i \in \mathsf{Irr}(P_{2^{n_i}}) \quad i = 1, \ldots, r \}$。结合这一点与上述在 2 的幂情形下获得的信息，我们很容易得到 $\mathsf{cd}(P_n) = \left\{ 2^j \,\middle|\, j \in [0, \alpha_n] \right\}$，并且对于任意 $n \geq 8$，$|\{\theta \in \mathsf{Irr}(P_n) \mid \theta(1) = 2^{\alpha_n}\}| \geq 3$。□

现在陈述一个引理，我们将在证明本章节的主要定理时用到。为简化记号，我们将用 Z_ϕ^λ（而不是 $Z_\phi^{\chi^\lambda}$）表示与特征标 $\chi^\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$ 和 $\phi \in \mathrm{Irr}(P_n)$ 对应的 Sylow 分支系数。

这里，我们首先给出关于 Sylow 分支系数 Z_ϕ^λ 的一些确切信息，其中 ϕ 是次数为 2 的 Sylow 子群的一个不可约特征。为此，引入以下记号会很方便。对于满足 $x \in [0, 2^n-1]$ 的 $\lambda = (2^n - x, 1^x) \in \mathcal{H}(2^n)$，我们定义 $a_n^x \in \mathbb{N}$ 如下：

$$a_n^x := |\left\{ \phi \in \mathrm{Irr}(P_{2^n}) \;\middle|\; \phi(1) = 2 \text{ and } Z_\phi^\lambda \neq 0 \right\}|.$$

引理 5.4. 设 $n \geq 2$，且 $\lambda = (2^n - x, 1^x) \in \mathcal{H}(2^n)$。则 $a_n^x = \min\{x, 2^n - 1 - x\}$。

证明。回忆 $P_{2^n} = B \rtimes P_2$，其中 $B \leq \mathfrak{S}_{2^n}$ 满足 $B \cong P_{2^{n-1}} \times P_{2^{n-1}}$。取 $Y = \mathfrak{S}_{2^{n-1}} \times \mathfrak{S}_{2^{n-1}} \leq \mathfrak{S}_{2^n}$ 使得 $B \leq Y$。令 $\phi \in \mathrm{Irr}(P_{2^n})$ 满足 $\phi(1) = 2$。则 $\phi = (L_1 \times L_2)\uparrow_B^{P_{2^n}}$，其中 $L_1, L_2 \in \mathrm{Lin}(P_{2^{n-1}})$ 满足 $L_1 \neq L_2$。特别地，我们有 $Z_\phi^\lambda \neq 0$ 当且仅当 $\left[\chi^\lambda\downarrow_B, L_1 \times L_2\right] \neq 0$。利用这一观察以及 Littlewood-Richardson 规则和定理 3.1，我们推得 $Z_\phi^\lambda \neq 0$ 当且仅当 $\left[\chi^\lambda\downarrow_Y, \chi_1 \times \chi_2\right] \neq 0$，其中 χ_i 是 $\mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_{2^{n-1}})$ 中唯一满足 $\left[\chi_i\downarrow_{P_{2^{n-1}}}, L_i\right] \neq 0$ 的特征标。

首先假设 $x \leq 2^n - 1 - x$，换言之 $x \in \left[0, 2^{n-1} - 1\right]$。若 $x = 0$，则 $\lambda = (2^n)$ 且 $a_n^0 = 0$。否则，利用 Littlewood-Richardson 规则，我们得到

$$\begin{aligned}\chi^\lambda\downarrow_Y = &\sum_{y=0}^{m} \chi^{\left(2^{n-1}-y,1^y\right)} \times \left[\chi^{\left(2^{n-1}-(x-y),1^{x-y}\right)} + \chi^{\left(2^{n-1}-(x-y-1),1^{x-y-1}\right)}\right] \\ &+ \sum_{y=0}^{m} \left[\chi^{\left(2^{n-1}-(x-y),1^{x-y}\right)} + \chi^{\left(2^{n-1}-(x-y-1),1^{x-y-1}\right)}\right] \times \chi^{\left(2^{n-1}-y,1^y\right)},\end{aligned} \tag{1}$$

其中 $m = \lfloor x/2 \rfloor$。由方程 (1) 可知，恰有 x 个互不相同的无序对 $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{H}(2^{n-1}) \times \mathcal{H}(2^{n-1})$，使得 $\mu_1 \neq \mu_2$ 且 $\left[\chi^\lambda\downarrow_Y, \chi^{\mu_1} \times \chi^{\mu_2}\right] \neq 0$。利用证明开头讨论的观察，我们推得 $a_n^x = x$。

若 $x \geq 2^n - 1 - x$，则我们处于情形 $x \in \left[2^{n-1}, 2^n - 1\right]$，并考虑 λ'，即 λ 的共轭分拆。我们注意到 $\lambda' = \left(x+1, 1^{2^n-x-1}\right)$ 且 $0 \leq 2^n - x - 1 \leq 2^{n-1} - 1$。由于 $\chi^{\lambda'}\downarrow_{P_{2^n}} = \chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}} \cdot \chi_{(1^{2^n})}\downarrow_{P_{2^n}}$，我们便得到 $a_n^x = a_n^{2^n-x-1} = 2^n - x - 1$，正如所需。□

利用这个引理，我们可以注意到，$a_n^x \neq 0$ 当且仅当 $x \notin \{0, 2^n - 1\}$，也就是说 $\lambda \notin \{(2^n), (1^{2^n})\}$。由此可得，对于每个自然数 $n \geq 2$，$\mathcal{H}_{2^n}^1 = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n - 1)$。

现在我们可以陈述并证明本章节的一项主要结果了。

定理 5.5. 设 $n \in \mathbb{N}$。对于每个 $l, k \in [0, \alpha_n]$ 使得 $\ell \leq k$，我们有

$$\mathcal{H}_n^k \subseteq \mathcal{H}_n^\ell.$$

证明。首先假设 $n = 2^t$，其中 $t \in \mathbb{N}$。显然，只需证明 tha t

$$\mathcal{H}_{2^t}^k \subseteq \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}, \text{ for every } k \in [1, \alpha_{2^t}].$$

我们对 $t \geq 2$ 进行归纳。若 $t = 2$，则由直接计算可知结论成立（见例 5.1）。令 $t \geq 3$，并设 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^k$。根据定义，存在 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^t}}$ 的一个次数为 2^k 的不可约组成成分 θ。若 $\theta = \mathcal{X}(\psi; \alpha)$，其中 $\psi \in \mathrm{Irr}(P_{2^{t-1}})$，$\psi(1) = 2^{\frac{k}{2}}$，且 $\alpha \in \mathrm{Lin}(P_2)$，则

存在 μ、$\nu \in \mathcal{H}(2^{t-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu) \neq 0$，且 ψ 同时是 $\chi^{\mu}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$ 和 $\chi^{\nu}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$ 的组成成分。特别地，$\mu,\nu \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{\frac{k}{2}}$。若 $\frac{k}{2} > 1$，先对 $\frac{k}{2}$ 再对 $\frac{k}{2}-1$ 运用归纳假设，可得 $\mu \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{\frac{k}{2}-2}$。因此，存在 $\chi^{\mu}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$ 的一个次数为 $2^{\frac{k}{2}-2}$ 的不可约组成成分 ψ'。于是，$(\psi' \times \psi)\uparrow^{P_{2^t}}$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^t}}$ 的一个次数为 2^{k-1} 的不可约组成成分，由此得出 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$。否则，若 $\frac{k}{2}=1$，则 $k=2$ 且 $\lambda \notin \{(2^t),(1^{2^t})\}$。因此 $\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^t}(2^t-1)$。由引理 5.4 可知 $\bar{\mathcal{B}}_{2^t}(2^t-1) = \mathcal{H}_{2^t}^{1}$。由此可得 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{k-1} = \mathcal{H}_{2^t}^{1}$。

现在假设 $\theta = (\theta_1 \times \theta_2)\uparrow^{P_{2^t}}$ 其中 $\theta_1,\theta_2 \in$ 不可约特征标集$(P_{2^{t-1}})$，$\theta_1 \neq \theta_2$ 且 $\theta_1(1) = 2^{h_1}$，$\theta_2(1) = 2^{h_2}$ 其中 $h_1+h_2 = k-1$。那么存在 $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{H}(2^{t-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\mu_2) \neq 0$，并且 θ_1（分别为 θ_2）是 $\chi^{\mu_1}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$（分别为 $\chi^{\mu_2}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$）的一个不可约成分。特别地，对于 $i=1$，$\mu_i \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h_i}$。2. 假设 $h_1 = h_2 = \frac{k-1}{2} := h$。如果 $h=0$，那么 $k=1$，根据定理 4.4，我们知道 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{0} = \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$。如果 $h>0$，那么由归纳法可得 $\mu_1 \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h} \subseteq \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h-1}$。因此，$\chi^{\mu_1}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$ 存在一个次数为 2^{h-1} 的不可约成分 ψ。所以，$(\psi \times \theta_2)\uparrow^{P_{2^t}}$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^t}}$ 的一个次数为 2^{k-1} 的不可约成分，从而 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$。

若 $h_1 \neq h_2$，则不失一般性地假设 $h_1 > h_2$。特别地，$h_1 \geq 1$，因此我们可以使用归纳假设，得到 $\mu_1 \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h_1-1}$。于是，存在 $\chi^{\mu_1}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}$ 的一个不可约成分 ψ，其次数为 2^{h_1-1}。若 $\psi \neq \theta_2$，则考虑 $(\psi\times\theta_2)\uparrow^{P_{2^t}}$，可推出 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$，因为 $\theta_2(1) = 2^{h_2}$ 且 $h_1+h_2 = k-1$。若 $\psi = \theta_2$，则特别地有 $h_2 = h_1 - 1$。假设 $h_2 > 0$ 并使用归纳假设。我们有 $\mu_2 \in \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h_2} \subseteq \mathcal{H}_{2^{t-1}}^{h_2-1}$。于是，存在 $\psi' \in$ Irr$(P_{2^{t-1}})$，使得 $\left[\psi',\ \chi^{\mu_2}\downarrow_{P_{2^{t-1}}}\right] \neq 0$ 且 $\psi'(1) = 2^{h_2-1}$。我们得出结论 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$，因为 $(\theta_1\times\psi')\uparrow^{P_{2^t}}$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^t}}$ 的一个不可约成分，其次数为 2^{k-1}。若 $h_2 = 0$，则 $k=2$；按照前述方法并使用引理 5.4，可推出 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^t}^{1} = \mathcal{H}_{2^t}^{k-1}$。

现在设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{n_i}$ 为其二进制展开。设 $\lambda \in \mathcal{H}_n^k$，则存在 $\phi \in$ Irr(P_n)，使得 $\left[\phi,\ \chi^{\lambda}\downarrow_{P_n}\right] \neq 0$，且 $\phi(1) = 2^k$。根据第 2.1 节中 P_n 的不可约特征标的结构，$\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_r$，其中 $\phi_i \in$ Irr$(P_{2^{n_i}})$，且对于每个$i = 1, \ldots, r$，都有 $\phi_i(1) = 2^{j_i}$，其中 $j_1 + \cdots + j_r = k$。因此，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，都存在 $\mu_i \in \mathcal{H}(2^{n_i})$，使得 ϕ_i 是 $\chi^{\mu_i}\downarrow_{P_{2^{n_i}}}$ 的一个不可约成分，且 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\ldots,\mu_r) \neq 0$。设 $\ell \leq k$，并且对于每个 $i = 1, \ldots, r$，设 $d_i \in [0,\alpha_{2^{n_i}}]$、$d_i \leq j_i$，使得 $d_1 + \cdots + d_r = \ell$。根据前一种情形，对于每个 $i = 1, \ldots, r$，都有 $\mu_i \in \mathcal{H}_{2^{n_i}}^{j_i} \subseteq \mathcal{H}_{2^{n_i}}^{d_i}$。因此，存在 $\chi^{\mu_i}\downarrow_{P_{2^{n_i}}}$ 的一个不可约成分 ψ_i，其次数为 2^{d_i}。所以，$\psi_1 \times \cdots \times \psi_r$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_n}$ 的一个不可约成分，其次数为 2^{ℓ}，从而 $\lambda \in \mathcal{H}_n^{\ell}$。□

我们在此介绍一种钩分拆之间的组合运算，它与引理 2.2 之前描述的 $\star$ 运算非常相似。

定义 5.6. 设 n、$m \in \mathbb{N}$ 和 $A \subseteq \mathcal{P}(n)$、$B \subseteq \mathcal{P}(m)$。

$$A \diamond B := (A \star B) \cap \mathcal{H}(n+m).$$

引理 5.7. 设 n、n'、t、$t' \in \mathbb{N}$ 满足 $\frac{n}{2} < t \leq n$ 和 $\frac{n'}{2} < t' \leq n'$。那么

$$\bar{\mathcal{B}}_n(t) \diamond \bar{\mathcal{B}}_{n'}(t') = \bar{\mathcal{B}}_{n+n'}(t+t').$$

¯证明。根据定义，我们有 $\mathcal{B}_n(t) \subseteq \mathcal{B}_n(t)$，且 $\mathcal{B}_{n'}(t') \subseteq \mathcal{B}_{n'}(t')$。因此

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}}_n(t)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{n'}(t') &\subseteq \mathcal{B}_n(t)\diamond\mathcal{B}_{n'}(t') = \big(\mathcal{B}_n(t)\star\mathcal{B}_{n'}(t')\big)\cap\mathcal{H}(n+n')\\ &= \mathcal{B}_{n+n'}(t+t')\cap\mathcal{H}(n+n') = \bar{\mathcal{B}}_{n+n'}(t+t'),\end{aligned}$$

其中第二个等式由引理 2.2 得出。要证明另一个包含关系，只需¯ ¯证明 $\mathcal{B}_n(t)\diamond\mathcal{B}_{n'}(t') \subseteq \mathcal{B}_n(t)\diamond\mathcal{B}_{n'}(t')$。设 $\lambda \in \mathcal{B}_n(t)\diamond\mathcal{B}_{n'}(t')$，则 $\lambda \in \mathcal{H}(n+n')$，并且存在 $\mu \in \mathcal{B}_n(t)$ $\mu' \in \mathcal{B}_{n'}(t')$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\mu') \neq 0$。然而，根据引理 4.1， μ 和 μ' 必须是钩分拆。因此 $\mu \in \mathcal{B}_n(t)$， $\mu' \in \mathcal{B}_{n'}(t')$ 且 $\lambda \in \mathcal{B}_n(t)\diamond\mathcal{B}_{n'}(t')$。□

引理 5.8. 设 $n \geq 2$ 和 $i,j \in [0,\alpha_{2^{n-1}}]$ 满足 $i \neq j$。则

$$\mathcal{H}^i_{2^{n-1}}\diamond\mathcal{H}^j_{2^{n-1}} \subseteq \mathcal{H}^{i+j+1}_{2^n}.$$

证明。设 $\lambda \in \mathcal{H}^i_{2^{n-1}}\diamond\mathcal{H}^j_{2^{n-1}}$。根据定义 $\lambda \in \mathcal{H}(2^n)$，且存在 $\mu \in \mathcal{H}^i_{2^{n-1}}$，$\nu \in \mathcal{H}^j_{2^{n-1}}$满足 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu) \neq 0$。因此存在 $\phi,\psi \in \mathrm{Irr}(P_{2^{n-1}})$，使得 $\left[\phi,\chi^\mu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}\right] \neq 0$,$\left[\psi,\chi^\nu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}\right] \neq 0$且 $\phi(1) = 2^i$, $\psi(1) = 2^j$。由于 $i \neq j$，我们有 $\theta = (\phi\times\psi)\uparrow^{P_{2^n}}$ ∈不可约特征标集(P_{2^n})。此外，$\theta(1) = 2^{i+j+1}$且 $\left[\theta,\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}\right] \neq 0$。由此可得 $\lambda \in \mathcal{H}^{i+j+1}_{2^n}$。□

引理 5.9. 设 $n \in \mathbb{N}$，并设 $n = \sum_{i=1}^r 2^{n_i}$ 为其二进制展开。假设对于每个$i = 1$，……，r，$j_i \in [0,\alpha_{2^{n_i}}]$ 都满足 $j_1 + \cdots + j_r = k \in [0,\alpha_n]$。那么

$$\mathcal{H}^{j_1}_{2^{n_1}}\diamond\cdots\diamond\mathcal{H}^{j_r}_{2^{n_r}} \subseteq \mathcal{H}^k_n.$$

证明。设 $\lambda \in \mathcal{H}^{j_1}_{2^{n_1}}\diamond\cdots\diamond\mathcal{H}^{j_r}_{2^{n_r}}$。根据定义，对于每个 $i = 1$，……，r，都存在 $\mu_i \in \mathcal{H}^{j_i}_{2^{n_i}}$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\ldots\ldots,\mu_r) \neq 0$。因此，对于每个 $i = 1$，……，r，$\chi^{\mu_i}\downarrow_{P_{2^{n_i}}}$ 都有一个次数为 2^{j_i} 的不可约成分 ϕ_i。由于 $P_n = P_{2^{n_1}}\times\cdots\times P_{2^{n_r}} \leq \mathfrak{S}_{2^{n_1}}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{2^{n_r}} \leq \mathfrak{S}_n$，可知 $\chi^\lambda\downarrow_{P_n}$ 有一个次数为 2^k 的不可约成分 $\phi_1\times\cdots\times\phi_r$。因此 $\lambda \in \mathcal{H}^k_n$。□

现在我们可以陈述本章节的第二个主要结果了。特别地，我们能够证明集合 $\mathcal{H}^k_n$ 具有非常规整的结构。在定理 5.10 中，我们首先处理 n 是 2 的幂的情形。接着，在定理 5.11 中，我们证明，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和任意 $k \in [0,\alpha_n]$，都存在 $T^k_n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{H}^k_n = \bar{\mathcal{B}}_n(T^k_n)$。

定理 5.10. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $k \in [0,\alpha_{2^n}]$。则：

(1) 存在 $t^k_n \in \left[2^{n-1}+1, 2^n\right]$，使得 $\mathcal{H}^k_{2^n} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(t^k_n)$；(2) 若 $k > 1$，则对每个 $\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(t^k_n - 1)$，$\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 至少有三个不同的次数为 2^k 的不可约成分。

证明。我们对 n 使用归纳法。若 $n \in \{1,2\}$，则定理成立（见例 5.1）。对于 $n \geq 3$，我们对 k 使用归纳法。由定理 3.1 可知 $\mathcal{H}^0_{2^n} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n)$，因此 $t^0_n = 2^n$。若 $k = 1$，则由引理 5.4 可得 $\mathcal{H}^1_{2^n} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-1)$，因此 $t^1_n = 2^n - 1$。现在假设 $k = 2$。我们要证明 $\mathcal{H}^2_{2^n} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-1)$。我们有

$$\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-1) = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1})\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1}-1) = \mathcal{H}^0_{2^{n-1}}\diamond\mathcal{H}^1_{2^{n-1}} \subseteq \mathcal{H}^2_{2^n},$$

其中，第一个等式由引理 5.7 得出，最后一个包含关系则由引理 5.8 得出。另一方面，显然有 $\mathcal{H}^2_{2^n} \subseteq \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-1)$，因为 (2^n)、$(1^{2^n}) \notin \mathcal{H}^2_{2^n}$。总之，我们需要证明，对于每个 $\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(t^2_n - 1) = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-2)$， $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 有三个不同的次数为 2^2 的不可约成分。如果 $\lambda_1 < 2^n - 2$，那么根据引理 5.7， $\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2^n-3) = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1}-3)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1})$。因此，存在 $\mu \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1}-3)$ 和 $\nu \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu) \neq 0$。特别地，如果 $\mu_1 = 2^{n-1} - x \leq 2^{n-1} - 3$，那么

利用引理 5.4，我们推得存在三个不同的不可约成分 θ_1、θ_2 和θ_3，它们是 $\chi^{\mu}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的次数为 2 的成分。另一方面，$\nu \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(2^{n-1}) = \mathcal{H}^0_{2^{n-1}}$。因此，存在一个线性成分 L，它是 $\chi^{\nu}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的成分。因此，$(\theta_1 \times L)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\theta_2 \times L)\uparrow^{P_{2^n}}$和 $(\theta_3 \times L)\uparrow^{P_{2^n}}$是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个不同的、次数为 2^2 的不可约成分。现在考虑 $\lambda_1 = 2^n - 2$ 的情形，此时 $\mathcal{LR}(\lambda; (2^{n-1}-1, 1), (2^{n-1}-1, 1)) \neq 0 \neq \mathcal{LR}(\lambda; (2^{n-1}-2, 12), (2^{n-1}))$。由引理 4.5 可知，$\chi^{(2^{n-1}-1,1)}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 有一个次数为 2 的不可约成分 θ。因此，存在$\alpha \in \mathrm{Irr}(P_2)$，使得 $\mathcal{X}(\theta; \alpha)$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^n}}$ 的一个次数为 4 的不可约成分。此外，由引理 5.4 可知，$\chi^{(2^{n-1}-2,1^2)}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 有两个不同的次数为 2 的不可约成分 ψ_1 和ψ_2。由此可得，$\left(\psi_1 \times 1_{P_{2^{n-1}}}\right)\uparrow^{P_{2^n}}$、$\left(\psi_2 \times 1_{P_{2^{n-1}}}\right)\uparrow^{P_{2^n}}$和 $\mathcal{X}(\theta; \alpha)$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个不同的、次数为 2^2 的不可约成分。

现在假设 $k \geq 3$。从现在起，我们将记 $w := \frac{k-1}{2}$。我们定义 $M \in \mathbb{N}$ 如下。

$$M := \max\left\{ t^i_{n-1} + t^j_{n-1}, 2t^w_{n-1} + \delta^w_{n-1} \;\middle|\; i, j, w \in [0, \alpha_{2^{n-1}}],\ i + j = k-1 \text{ and } i \neq j \right\},$$

where for $h \in [0, \alpha_{2^{n-1}}]$,

以归纳方式定义 t^h_{n-1}，使得 $\mathcal{H}^h_{2^{n-1}} = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^h_{n-1})$;

$\lambda^h_{n-1} := \left(t^h_{n-1}, 1, \ldots, 1\right) \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^h_{n-1})$; and

$$\delta^h_{n-1} := \begin{cases} 0, & \text{if } \chi^{\lambda^h_{n-1}}\downarrow_{P_{2^{n-1}}} \text{ has two distinct irreducible constituents of degree } 2^h; \\ -1, & \text{if } \chi^{\lambda^h_{n-1}}\downarrow_{P_{2^{n-1}}} \text{ has a unique irreducible constituent of degree } 2^h. \end{cases}$$

现在我们将证明 $M = t^k_n$，或等价地证明 $\mathcal{H}^k_{2^n} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$。为证明 $\mathcal{H}^k_{2^n} \supseteq \mathcal{B}_{2^n}(M)$，我们需要根据 M 的取值，将讨论分为三种情况。

(1) 首先，假设对于某些 $i, j \in [0, \alpha_{2^{n-1}}]$, $i + j = k-1$ 和$i \neq j$，有 $M = t^i_{n-1} + t^j_{n-1}$。我们有

$$\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M) = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^i_{n-1}) \diamond \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^j_{n-1}) = \mathcal{H}^i_{2^{n-1}} \diamond \mathcal{H}^j_{2^{n-1}} \subseteq \mathcal{H}^k_{2^n},$$

分别由引理 5.7、归纳假设和引理 5.8 得出。此外，由于 $k \geq 3$，不失一般性，我们可以假设 $i > 1$。因此，由引理 5.7，$\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M-1) = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^i_{n-1} - 1) \diamond \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^j_{n-1})$。若 $\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M-1)$，则存在 $\mu \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^i_{n-1} - 1)$ 和 $\nu \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(t^j_{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu, \nu) \neq 0$。由归纳假设，存在 $\chi^{\mu}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的三个互不相同的不可约成分 θ_1、θ_2 和 θ_3，其次数为 2^i；根据定义，存在 $\chi^{\nu}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的一个不可约成分 ψ，其次数为 2^j。由此可知，$(\theta_1 \times \psi)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\theta_2 \times \psi)\uparrow^{P_{2^n}}$ 和 $(\theta_3 \times \psi)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个互不相同的不可约成分，其次数为 2^k。

(2) 对于第二种情况，我们假设 $\delta^w_{n-1} = 0$ 和 $M = 2t^w_{n-1}$。在这种情况下，我们注意到 k 必须严格大于 3。事实上，若 $k = 3$，则由例 5.1 和引理 5.4 可知 $M = 2t^1_{n-1} = 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 2$。另一方面，根据 M 的定义，我们知道 $M = \max\left\{ t^0_{n-1} + t^2_{n-1}, 2^n - 2 \right\} = t^0_{n-1} + t^2_{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$，这就产生了矛盾。因此，我们可以假设 $k > 3$。令 $\lambda \in \mathcal{B}_{2^n}(M)$。若

$\lambda_1 = M$，则 $\mathcal{LR}\left(\lambda;\ \lambda^w_{n-1},\ \lambda^w_{n-1}\right) \neq 0$。回想一下，$\delta^w_{n-1} = 0$ 表示 $\chi^{\lambda}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$

有两个不同的次数为 2^w 的不可约成分 θ_1 和 θ_2。因此，$(\theta_1\times\theta_2)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 的次数为 2^k 的不可约成分，从而 $\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}$。

若 $t^w_{n-1}\le\lambda_1<M$，则 $\mathcal{LR}\left(\lambda;\ \text{对于某个}\ \mu\in\mathcal{H}(2^{n-1}),\ \text{有}\ \lambda^w_{n-1},\mu\right)\neq 0$，且 $\mu_1=\lambda_1-t^w_{n-1}<M-t^w_{n-1}=t^w_{n-1}$。特别地，$\mu\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right)$。由于 $w=\frac{k-1}{2}>1$，根据归纳假设，存在三个互不相同的次数为 2^w 的不可约成分 ψ_1,ψ_2 和 ψ_3，它们都是 $\chi^\mu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的组成成分。令 θ_1 和 θ_2 如前一种情形所示，并不失一般性地假设 $\theta_1\notin\{\psi_2,\psi_3\}$ 且 $\theta_2\neq\psi_1$。那么 $(\theta_1\times\psi_2)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\theta_1\times\psi_3)\uparrow^{P_{2^n}}$ 和 $(\theta_2\times\psi_1)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个互不相同的、次数为 2^k 的不可约成分。特别地，$\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}$。

现在假设 $1\le\lambda_1<t^w_{n-1}$，那么我们有

$$\begin{aligned}(\lambda')_1&=2^n+1-\lambda_1>2^n+1-t^w_{n-1}\ge 2^n+1-2^{n-1}\\&=2^{n-1}+1\ge t^{\frac{k+1}{2}}_{n-1}+1>t^{\frac{k+1}{2}}_{n-1}.\end{aligned}$$

由于 $\lambda'\in\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$，由前面的情形可推得 $\lambda'\in\mathcal{H}^k_{2^n}$，从而得出 $\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}$，因为 $\mathcal{H}^k_{2^n}$ 在分拆共轭下封闭。

(3) 最后考虑 $\delta^w_{n-1}=-1$ 且 $M=2t^w_{n-1}-1$ 的情形。完全按照上述方法推理，我们注意到 $k>3$，因此 $w=\frac{k-1}{2}>1$。此外，在这种情形下，$\chi^{\lambda^w_{n-1}}\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 有唯一的不可约成分 ψ，其次数为 2^w。固定 $\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$。若 $\lambda_1=M$，则 $\mathcal{LR}\left(\lambda;\ \lambda^w_{n-1},\ \mu\right)\neq 0$，其中某个 $\mu\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right)$。事实上，由引理 5.7，$\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}\right)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right)$。对 μ 使用归纳假设，可知存在 $\chi^\mu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的三个互不相同的不可约成分 θ_1、θ_2 和 θ_3，其次数均为 2^w。不失一般性，我们可以假设 $\psi\neq\theta_1$，因此 $(\psi\times\theta_1)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 的一个不可约成分，其次数为 2^k。因此$\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}$。

反之，$\lambda_1<M$，由引理 5.7 可得

$$\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M-1)=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right).$$

因此，存在 μ、$\nu\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t^w_{n-1}-1\right)$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu)\neq 0$。由归纳法，存在 $\chi^\mu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的三个互不相同的不可约成分 θ_1、θ_2 和 θ_3，以及 $\chi^\nu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的三个互不相同的不可约成分 σ_1、σ_2 和 σ_3，它们的次数均为 2^w。不失一般性，我们可以假设 $\theta_1\notin\{\sigma_2,\sigma_3\}$ 且 $\theta_2\neq\sigma_3$。因此，$(\theta_1\times\sigma_2)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\theta_1\times\sigma_3)\uparrow^{P_{2^n}}$ 和 $(\theta_2\times\sigma_3)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 中三个互不相同的次数为 2^k 的不可约成分。特别地，$\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}$。

现在我们需要证明 $\mathcal{H}^k_{2^n}\subseteq\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$。为此，采用反证法，假设存在 $\lambda\in\mathcal{H}^k_{2^n}\setminus\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$，并且不失一般性地，也假设 $\lambda_1\ge M+1$。根据定义，存在 $\phi\in\mathrm{Irr}(P_{2^n})$，使得 $\left[\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}},\phi\right]\neq 0$ 且 $\phi(1)=2^k$。

(1) 首先，假设 $\phi=\mathcal{X}(\psi,\alpha)$，其中 $\psi\in\mathrm{Irr}(P_{2^{n-1}})$，$\psi(1)=2^{\frac{k}{2}}$ 且 $\alpha\in\mathrm{Lin}(P_2)$。因此，存在 $\mu,\nu\in\mathcal{H}(2^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu,\nu)\neq 0$，并且 ψ 既是 $\chi^\mu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的不可约成分，也是 $\chi^\nu\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的不可约成分。因此 $\mu,\nu\in\mathcal{H}^{\overline{2}}_{2^{n-1}}$。根据归纳假设

并由定理 5.5，得到

$$\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)=\mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\frac{k}{2}}\subseteq\mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\frac{k}{2}-1}=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

特别地，$t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\leq t_{n-1}^{\frac{k}{2}-1}$，这意味着

$$2t_{n-1}^{\frac{k}{2}}=t_{n-1}^{\frac{k}{2}}+t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\leq t_{n-1}^{\frac{k}{2}}+t_{n-1}^{\frac{k}{2}-1}\leq M.$$

由此不等式可得 $\bar{\mathcal{B}}_{2^n}\left(2t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)\subseteq\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M)$。由于 $\mu,\nu\in\mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\frac{k}{2}}=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)$，我们有 $\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)$。利用引理 5.7，我们得出

$$\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)=\bar{\mathcal{B}}_{2^n}\left(2t_{n-1}^{\frac{k}{2}}\right)\subseteq\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M).$$

这是一个矛盾，因为 $\lambda_1\geq M+1$。

（2）反之，假设 $\phi=(\phi_1\times\phi_2)\uparrow^{P_{2^n}}$，其中 $\phi_1,\phi_2\in$不可约特征标集$(P_{2^{n-1}})$ 且 $\phi_1\neq\phi_2$。于是存在 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{H}(2^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\mu_2)\neq 0$，并且 ϕ_1（分别为 ϕ_2）是 $\mu_1\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$（分别为 $\mu_2\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$）的一个不可约成分。我们需要区分两种情况：第一种情况是 $\phi_1(1)=2^i$ 且 $\phi_2(1)=2^j$，其中 $i,j\in[0,\alpha_{2^{n-1}}],i\neq j$ 且 $i+j=k-1$。在这种情况下，$\mu_1\in\mathcal{H}_{2^{n-1}}^i$ 且 $\mu_2\in\mathcal{H}_{2^{n-1}}^j$。因此，根据归纳假设、引理 5.7 以及 M 的定义，我们得到

$$\lambda\in\mathcal{H}_{2^{n-1}}^i\diamond\mathcal{H}_{2^{n-1}}^j=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^i\right)\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^j\right)=\bar{\mathcal{B}}_{2^n}\left(t_{n-1}^i+t_{n-1}^j\right)\subseteq\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(M).$$

这与 $\lambda_1\geq M+1$ 矛盾。

(3) 最后需要考虑的情形是 $\phi_1\neq\phi_2$ 但 $\phi_1(1)=\phi_2(1)=2^w$。在这种情况下，我们有 $\mu_1,\mu_2\in\mathcal{H}_{2^{n-1}}^w$。根据归纳假设，$\mathcal{H}_{2^{n-1}}^w=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}\left(t_{n-1}^w\right)$。特别地，$(\mu_1)_1,(\mu_2)_1\leq t_{n-1}^w$。因此我们有

$$2t_{n-1}^w\leq M+1\leq\lambda_1\leq(\mu_1)_1+(\mu_2)_1\leq 2t_{n-1}^w,\tag{2}$$

其中，第一个等号由 M 的定义得出，第二个等号由假设得出，第三个等号由引理 2.1 得出。因此，(2) 是一串等式，特别地，$(\mu_1)_1=(\mu_2)_1=t_{n-1}^w$。因此 $\mu_1=\mu_2=\lambda_{n-1}^w$。于是 $\delta_{n-1}^w=0$，因为根据假设，ϕ_1 和 ϕ_2 是 $\lambda_{n-1}^w\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的两个不同的次数为 2^w 的不可约组成成分。根据定义，

$$M=\max\left\{t_{n-1}^i+t_{n-1}^j,2t_{n-1}^w\;\middle|\;i,j,w\in[0,\alpha_{2^{n-1}}],\ i+j=k-1\text{ and }i\neq j\right\}.$$

Sinc由（2）中的一系列等式可得 $M+1=\lambda_1=2t_{n-1}^w\leq M$，这就产生了矛盾。

□

定理 5.11. 设 $n\in\mathbb{N}$ 和 $k\in[0,\alpha_n]$。则：

(1) 存在 $T_n^k\in[1,n]$ 使得 $\mathcal{H}_n^k=\bar{\mathcal{B}}_n(T_n^k)$; (2) 若 $k>1$，则对每个 $\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_n(T_n^k-1)$，$\chi^\lambda\downarrow_{P_n}$ 有三个不同的、次数为 2^k 的不可约成分。

证明。我们对 n 使用归纳法：若 $n=1$，则 $k=0$，结论显然。令$n\geq 2$，并设 $n=\sum_{i=1}^{r}2^{n_i}$ 为其二进制展开。根据定理 5.10，对每个 $i\in[1,r]$ 及每个 $d_i\in[0,\alpha_{2^{n_i}}]$，存在 $t_{n_i}^{d_i}\in\left[2^{n_i-1}+1,2^{n_i}\right]$ 使得 $\mathcal{H}_{2^{n_i}}^{d_i}=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_i}}\left(t_{n_i}^{d_i}\right)$。定义

$$M:=\max\left\{\,t_{n_1}^{j_1}+\cdots+t_{n_r}^{j_r}\;\middle|\;j_i\in[0,\alpha_{2^{n_i}}]\text{ for every }i\in[1,r]\text{ and }j_1+\cdots+j_r=k\,\right\}.$$

我们要证明 $\mathcal{H}_n^k=\bar{\mathcal{B}}_n(M)$。令 $j_1\in[0,\alpha_{2^{n_1}}],\ldots,j_r\in[0,\alpha_{2^{n_r}}]$ 满足 $M=t_{n_1}^{j_1}+\cdots+t_{n_r}^{j_r}$。我们有

$$\bar{\mathcal{B}}_n(M)=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_1}}(t_{n_1}^{j_1})\diamond\cdots\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_r}}(t_{n_r}^{j_r})=\mathcal{H}_{2^{n_1}}^{j_1}\diamond\cdots\diamond\mathcal{H}_{2^{n_r}}^{j_r}\subseteq\mathcal{H}_n^k,$$

其中，第一个等式由引理 5.7 得出，第二个等式由定理 5.10 得出，而包含关系由引理 5.9 得出。

要证明定理的第 (1) 部分，还需证明 $\mathcal{H}_n^k\subseteq\bar{\mathcal{B}}_n(M)$。令 $\lambda\in\mathcal{H}_n^k$。那么存在 $\chi^\lambda\downarrow_{P_n}$ 的一个不可约成分 ϕ，其次数为 2^k。第 2.1 节中讨论的 P_n 的结构表明，对于每个满足 $\phi_i(1)=2^{j_i}$ 且满足 $j_1+\cdots+j_r=k$ 的 $i\in[1,r]$，都有 $\phi=\phi_1\times\cdots\times\phi_r$，其中某个 $\phi_i\in\mathrm{Irr}(P_{2^{n_i}})$。因此，对每个满足 $\mathcal{LR}(\lambda;\,\mu_1,\ldots,\mu_r)\neq 0$ 的 $i\in[1,r]$，都存在 $\mu_i\in\mathcal{H}(2^{n_i})$，使得 ϕ_i 是限制 $\chi^{\mu_i}\downarrow_{P_{2^{n_i}}}$ 的一个不可约成分。特别地，由定理 5.10，存在 $t_{n_i}^{j_i}\in\left[2^{n_i-1}+1,2^{n_i}\right]$ 使得 $\mu_i\in\mathcal{H}_{2^{n_i}}^{j_i}=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_i}}(t_{n_i}^{j_i})$。因此，由引理 5.7，

$$\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_1}}\left(t_{n_1}^{j_1}\right)\diamond\cdots\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_r}}\left(t_{n_r}^{j_r}\right)=\bar{\mathcal{B}}_n\left(t_{n_1}^{j_1}+\cdots+t_{n_r}^{j_r}\right)\subseteq\bar{\mathcal{B}}_n\left(M\right),$$

其中最后一个包含关系由 M 的定义得出。

为证明命题 (2)，固定 $k>1$。由上述讨论可知，$\mathcal{H}_n^k=\bar{\mathcal{B}}_n(T_n^k)$，其中 $T_n^k=t_{n_1}^{j_1}+\cdots+t_{n_r}^{j_r}$，对于适当的 $j_1\in[0,\alpha_{2^{n_1}}]$、……、$j_r\in[0,\alpha_{2^{n_r}}]$，使得 $j_1+\cdots+j_r=k$。由于 $k>1$，我们不失一般性地假设 $j_1>1$。令 $\lambda\in\bar{\mathcal{B}}_n(T_n^k-1)$。根据引理 5.7，$\bar{\mathcal{B}}_n(T_n^k-1)=\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_1}}\left(t_{n_1}^{j_1}-1\right)\diamond\cdots\diamond\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_r}}\left(t_{n_r}^{j_r}\right)$。因此，对每个 $i\in[2,r]$，存在 $\mu_1\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_1}}\left(t_{n_1}^{j_1}-1\right)$ 和 $\mu_i\in\bar{\mathcal{B}}_{2^{n_i}}\left(t_{n_i}^{j_i}\right)$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda;\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r)\neq 0$。根据定义，对每个 $i\in[2,r]$，$\chi^{\mu_i}\downarrow_{P_{2^{n_i}}}$ 中存在一个次数为 2^{j_i} 的不可约成分 ψ_i。根据定理 5.10，$\chi^{\mu_1}\downarrow_{P_{2^{n_1}}}$ 中存在三个互不相同、次数为 2^{j_1} 的不可约成分 ϕ_1、ϕ_2 和 ϕ_3。因此，$\phi_1\times\psi_2\times\cdots\times\psi_r$、$\phi_2\times\psi_2\times\cdots\times\psi_r$ 和 $\phi_3\times\psi_2\times\cdots\times\psi_r$ 是 $\chi^\lambda\downarrow_{P_n}$ 中三个互不相同、次数为 2^k 的不可约成分。□

最后，我们将显式计算 $T_n^{\alpha_n}$。通过这样做，我们得以确定那些满足 $\chi\downarrow_{P_n}$ 含有每种可能次数的不可约成分的特征标 $\chi\in\mathrm{Irr}_{\mathcal{H}}(\mathfrak{S}_n)$。

定义 5.12。对于 $n\in\mathbb{N}$，定义 $\tau_n\in[2^{n-1}+1,2^n]$ 如下：

$$\tau_1=2,\ \tau_2=3,\tau_3=7,\ \tau_4=13,\ \tau_5=26,\ \text{and}$$
$$\tau_n=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-5}+2^{n-6}\text{ for }n\geq 6.$$

注意，对于任意 $n\geq 7$，都有 $\tau_n=2\tau_{n-1}$。

与往常一样，我们首先研究 n 是 2 的幂的情形。

命题 5.13。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $T_{2^n}^{\alpha_{2^n}}=\tau_n$。此外，若 $n\geq 6$ 且 $\lambda\in\mathcal{H}_{2^n}^{\alpha_{2^n}}$，则 $\chi^\lambda\downarrow_{P_{2^n}}$ 至少有三个互不相同的次数为 $2^{\alpha_{2^n}}$ 的不可约成分。

证明。我们对 n 进行归纳。若 $n\leq 6$，则通过直接计算可得结论成立。$n=1$、2、3 的情形见例 5.1，而 $n=4$、5、6 的情形可以计算得出

利用定理 5.10。注意，对于 $n \in [1,5]$，$\lambda = \left(t_n^{\alpha_{2^n}}, 1^{n-t_n^{\alpha_{2^n}}}\right) \in \mathcal{H}_{2^n}^{\alpha_{2^n}}$ 在 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 中没有三个次数为 $2^{\alpha_{2^n}}$ 的不同不可约成分。相反，这对 $n = 6$ 成立。

设 $n \geq 7$。我们要证明 $\mathcal{H}_{2^n}^{\alpha_{2^n}} = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(\tau_n)$。给定 $\lambda \in \mathcal{H}_{2^n}^{\alpha_{2^n}}$，存在 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_n}$ 的一个次数为 $2^{\alpha_{2^n}}$ 的不可约成分 ϕ。正如我们在命题 5.3 的证明中所看到的，$\phi = (\phi_1 \times \phi_2)\uparrow^{P_{2^n}}$，其中 $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Irr}(P_{2^{n-1}})$，$\phi_1 \neq \phi_2$，且 $\phi_1(1) = \phi_2(1) = 2^{\alpha_{2^{n-1}}}$。因此，存在 $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{H}(2^{n-1})$，使得 $\mathcal{LR}(\lambda; \mu_1, \mu_2) \neq 0$，并且对所有 $i \in \{1,2\}$ 都有 $\left[\chi^{\mu_i}\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}, \phi_i\right] \neq 0$。特别地，$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\alpha_{2^{n-1}}}$，根据归纳假设，我们知道 $\mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\alpha_{2^{n-1}}} = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(\tau_{n-1})$。结合这些观察和引理 5.7，我们得出

$$\lambda \in \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(\tau_{n-1}) \diamond \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(\tau_{n-1}) = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(2\tau_{n-1}) = \bar{\mathcal{B}}_{2^n}(\tau_n).$$

为了证明另一个包含关系，我们考虑 $\lambda \in \mathcal{B}_{2^n}(\tau_n)$。由引理 5.7 和归纳假设可知

$$\bar{\mathcal{B}}_{2^n}(\tau_n) = \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(\tau_{n-1}) \diamond \bar{\mathcal{B}}_{2^{n-1}}(\tau_{n-1}) = \mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\alpha_{2^{n-1}}} \diamond \mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\alpha_{2^{n-1}}}.$$

因此，存在 $\mu, \nu \in \mathcal{H}_{2^{n-1}}^{\alpha_{2^{n-1}}}$ 使得 $\chi^\mu \times \chi^\nu \mid (\chi^\lambda)\big\downarrow_{\mathfrak{S}_{2^{n-1}} \times \mathfrak{S}_{2^{n-1}}}$。归纳假设意味着 $\chi^\mu\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 和 $\chi^\nu\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 均有三个次数为 $2^{\alpha_{2^{n-1}}}$ 的不同不可约成分。将 $\chi^\mu\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的这些成分记为 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3，将 $\chi^\nu\big\downarrow_{P_{2^{n-1}}}$ 的这些成分记为 ψ_1, ψ_2, ψ_3。若对某个 $j \in [1,3]$ 有 $\psi_j \notin \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$，则 $(\phi_1 \times \psi_j)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\phi_2 \times \psi_j)\uparrow^{P_{2^n}}$ 和 $(\phi_3 \times \psi_j)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个不同的、次数为 $2^{\alpha_{2^n}}$ 的不可约成分。另一方面，若对所有 $j \in [1,3]$ 都有 $\psi_j \in \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$，则不失一般性，我们可以假设对所有 $i \in [1,3]$ 都有 $\phi_i = \psi_i$。此时，$(\phi_1 \times \psi_2)\uparrow^{P_{2^n}}$、$(\phi_2 \times \psi_3)\uparrow^{P_{2^n}}$ 和 $(\phi_3 \times \psi_1)\uparrow^{P_{2^n}}$ 是 $\chi^\lambda\big\downarrow_{P_{2^n}}$ 的三个不同的、次数为 $2^{\alpha_{2^n}}$ 的不可约成分。此外，$\lambda \in \mathcal{H}_{2^n}^{\alpha_{2^n}}$，正如所需。□

命题 5.14. 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $n = \sum_{i=1}^r 2^{n_i}$ 是其二进制展开，则 $T_n^{\alpha_n} = \sum_{i=1}^r \tau_{n_i}$。证明。完全仿照定理 5.11 的证明，我们有

$$T_n^{\alpha_n} = \max\{T_{n_1}^{j_1} + \cdots + T_{n_r}^{j_r} \mid j_i \in [0, \alpha_{2^{n_i}}] \text{ for } i \in [1,r], \text{ and } \sum_{i=1}^r j_i = \alpha_n\}.$$

由于 $\alpha_n = \sum_{i=1}^r \alpha_{2^{n_i}}$，我们推得 $T_n^{\alpha_n} = T_{n_1}^{\alpha_{2^{n_1}}} + \cdots + T_{n_r}^{\alpha_{2^{n_r}}}$。结论现由命题 5.13 得出。□

注 5.15. 由定理 5.5 和 5.11 可知，对于每个 $k \in [0, \alpha_n]$，都有 $\mathcal{B}_n(T_n^{\alpha_n}) = \mathcal{H}_n^{\alpha_n} \subseteq \mathcal{H}_n^k$。由命题 5.14 可见，$\mathcal{H}(n)$ 中的大多数元素都包含在 $\mathcal{B}_n(T_n^{\alpha_n})$ 中。这表明，大多数由钩分拆标记的不可约特征在限制到 P_n 时，都含有每一种可能次数的不可约成分。

References

[F97] W. Fulton, *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, 《伦敦数学会学生读物》，第 35 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。[G17] E. Giannelli, 对称群的奇数次特征标， *J. London Math. Soc.* (1), 96（2017），1–14。[GL18] E. Giannelli and S. Law, 关于置换特征标和 $\mathfrak{S}_n$ 的 Sylow p-子群，*J. Algebra* **506**（2018），409–428。[GL21] E. Giannelli and S. Law, 对称群的 Sylow 分支系数，*Journal of the London Mathematical Society* 2 103 2021 697 728 , () (), –。

[GLLV22] E. Giannelli, S. Law, J. Long and C. Vallejo Sylow 分支系数与 Malle 和 Navarro 猜想, *Bull. London Math. Soc.* 54 （2022）, 552-567。[GN18] E. Giannelli and G. Navarro p *Proc. Amer.*, 将不可 *Math. Soc.* 146 2018 5, 1963 1976 约特征标限制到 Sylow -子群, （）, 第 – 期。[I76] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, 多佛出版社, 纽约, 1976 年。[INOT17] I. M. Isaacs, G. Navarro, J. B. Olsson and P. H. Tiep, 对称群中的特征标限制与重数。 *J. Algebra* 478 （2017）271–282。[J78] G. James, *The representation theory of the symmetric groups*, 《数学讲义》, 第 682 卷, 施普林格, 柏林, 1978 年。[JK81] G. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, 《数学及其应用百科全书》, 第 16 卷, 艾迪生-韦斯利出版公司, 马萨诸塞州雷丁, 1981 年。[LO22] S. Law and Y. Okitani 关于复合积与 Sylow 分支系数, *submitted*。[MN12] G. Malle and G. Navarro p *J. Algebra*, 通过特 **370** 2012 402 406 征标次数刻画正规 Sylow -子群, （）–。[O76] J. B. Olsson, McKay 数与特征标高度, *Math. Scand.* 38 （1976）, 第 1 期, 25–42。

（E. Giannelli） Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Viale Morgagni 67/a, Firenze,Italy（G. Volpato） Dipartimento di Matematica e Informatica U. Dini, Viale Morgagni 67/a, Firenze,Italy*Email address*: eugenio.giannelli@unifi.it, giada.volpato@unifi.it