arXiv:2301.07582v1 [math.PR] 18 Jan 2023

由伴随雅可比多项式生成的双边生灭链

MANUEL D. DE LA IGLESIA 和 CLAUDIA JU AREZ

Abstract. 我们为伴随雅可比多项式给出一种概率解释。这类多项式可通过将经典雅可比多项式的三项递推关系中的整数指标 n 平移一个实数 t而构造得到。在某些限制条件下，这将产生一个双向无限的三对角随机矩阵，它可解释为状态空间为 $\mathbb{Z}$的离散时间双边生灭链的一步转移概率矩阵。我们还研究转移概率矩阵唯一的 UL 和 LU 随机分解，以及离散达布变换和相应的谱矩阵。最后，我们利用所有这些结果，为伴随雅可比多项式给出一个定义在整数上的抽签模型。

1. Introduction

离散时间或连续时间生灭链与正交多项式之间的联系早已广为人知。这一研究始于 S. Karlin 和 J. McGregor 在20世纪50年代发表的一系列论文 [32, 33, 34] ，他们通过谱表示建立了相应转移概率函数之间的重要联系，这种表示称为*Karlin-McGregor* 积分表示公式。这一公式源于离散时间生灭链的一步转移概率矩阵 P 是一个三对角（或雅可比）矩阵，因此我们可以应用 Favard 定理或谱定理，求得与该过程相对应的谱测度。许多概率方面的问题都可以用相应的正交多项式来分析，例如 n步转移概率、过程的不变测度或常返性，以及其他应用。过去60年来，许多作者都研究了这种联系及其他概率方面的问题，其中包括 M.E.H. Ismail、G. Valent、P. Flajolet、F. Guillemin、H. Dette 和 E. van Doorn 等。关于这些关系的详细介绍，见近期出版的专著 [10]。

生灭链的谱分析通常在非负整数$\mathbb{Z}_{\geq 0}$的状态空间上进行。然而，在物理学、化学或工程学中，有些情形下状态空间是所有整数的集合 $\mathbb{Z}$ （见 [6, 9, 40, 43]）。这类过程通常称为双边生灭链（文献中也可见无约束生灭链或双端系统等其他名称）。离散时间双边生灭链的谱分析最早由 S. Karlin 和 J. McGregor 在 [34], 的最后一节中研究，而连续时间的情形则由 W.E. Pruitt 随后在 [41, 42]中考察。在这种情况下，一步转移概率矩阵 P 是一个双无限雅可比矩阵。应用谱定理将得到一个 2×2 测度矩阵，通常称为双边生灭链的谱矩阵。与常规生灭链的情形一样， n步转移概率矩阵 $P^{(n)}$ 可以用该谱矩阵及相应的（两组线性无关）正交多项式作积分表示。

Date: 2023年1月19日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 60J10、33C45、42C05。*Key words and phrases.* 双边生灭链。伴随雅可比多项式。达布变换。正交多项式。抽球模型。本研究部分获得了 PAPIIT-DGAPA-UNAM 基金 IN106822（M´exico）和 CONACYT 基金 A1-S-16202（M´exico）的资助。

与 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$上的生灭链情形不同，尽管许多例子的谱测度及相应的正交多项式都已得到研究（见 [10, 第 2]章），但谱矩阵及相应正交多项式已被明确计算出来的双边生灭链显式例子却寥寥无几（离散时间的例子见 [34, 15, 25, 26] ，连续时间的例子见 [28, 24] ）。迄今研究过的例子都是 $\mathbb{Z}$上随机游走的变体，其转移概率为常数。本文旨在首次研究一个非平凡离散时间双边生灭链的谱分析；该链的转移概率是随链的状态变化的有理函数，而非常数。这个链由所谓伴随雅可比多项式对应的双无限雅可比矩阵给出。

伴随正交多项式（对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$）这一研究主题十分经典。最早有人在[3, 39] 对其进行了研究，随后 D. Askey 和 J. Wimp 在一篇论文 [1], 中对伴随拉盖尔多项式和埃尔米特多项式的谱测度进行了计算。J. Wimp 在 [44]中研究了伴随雅可比多项式的情形。关于这一主题的后续研究还可参见 [27, 29, 30]。其思想非常简单：考虑满足埃尔米特、拉盖尔、雅可比或贝塞尔多项式这些经典族的三项递推关系的多项式，但将 n 替换为 $n+t$，其中 t 是任意实参数。这一构造可以推广到 $n \in \mathbb{Z}$的情形，此时我们得到一个双无限雅可比矩阵。F.A. Gr¨unbaum 和 L. Haine 在 [18], 中研究了这一问题，得到了与伴随埃尔米特、拉盖尔、雅可比或贝塞尔多项式相对应的双无限三对角矩阵的 双谱问题或博赫纳问题的所有解（更多信息见下文注释 2.3），相应的微分算子阶数为二。在 [18] 中，通过允许将 n 平移 $n+t$，出现了一个额外参数 t。这些是这些对象偏离其在 $t=0$ 处的取值时最简单的演化。

尽管文献 [18], 已对这一博赫纳问题扩展所涉及的双谱问题给出了完整分类，但关于这些伴随多项式的谱矩阵，我们所知甚少。例如，文献[36] 探讨了其中一些问题，但并未计算谱矩阵。不过，在文献 [19,的定理 1], 中，F.A. Gr¨unbaum 和 L. Haine 成功计算出了在 $[0,1]$ 上支撑、且参数取某些特殊值时的伴随雅可比多项式的谱矩阵的显式表达式。这将成为本文的出发点。我们已经获得该谱矩阵的显式表达式，这一点是推导相应双边生灭链 n步转移概率矩阵的 Karlin-McGregor 表示公式的关键。近几年，研究者还分析了更多双向无限雅可比矩阵的例子（见 [31, 7, 25, 26, 24]），并计算了相应的谱矩阵。

本文结构如下。第2节将回顾 [19], 中的一些结果，尤其是伴随雅可比多项式的谱矩阵的显式表达式。第3节将把 [19] 给出的双无限矩阵转化为随机矩阵 P。为此，我们将在命题 3.1 中分析在什么条件下可以选择实参数 t ，使得 P 是一个随机矩阵。本节末尾将特别讨论由 P 构造的矩阵值正交多项式的双谱性。第4节将运用 [25] 的一些结果（另见 [20]），以获得转移概率矩阵 P的随机UL和LU分解。这些分解通常带有一个自由参数（见 [25]），但我们将证明，对于伴随雅可比多项式，在参数满足某些假设的条件下，这些随机分解是唯一的（见定理4.1和定理4.2）。第5节将讨论 P的UL或LU分解的离散达布变换，即调换因子的顺序。我们将再次利用 [25] 的一些结果，以所谓的原谱矩阵的*Geronimus* 变换 来表示与这些达布变换相关的谱矩阵。最后，在第6节，我们将为伴随雅可比多项式给出一个抽签模型。该模型不同于例如 [16, 20, 21], 中所考虑的模型，因为在此情形下，我们允许抽签模型的状态空间遍及整个整数集 $\mathbb{Z}$。

2. The spectral matrix of the associated Jacobi polynomials

本节将回顾 F.A. Gr¨unbaum 和 L. Haine 在 [19], 中得到的一些结果。他们展示了双谱问题的离散−连续版本的一个解与伴随多项式概念之间的联系。他们还得到了对应于伴随雅可比多项式的谱矩阵的显式表达式；这一工具将在本文其余部分得到广泛应用。

在 [19], 中，作者使用参数 a, b, c（根据高斯超几何方程的标准记号），并对其施加了某些限制。本文将使用参数 α, β, t（这种记号更适用于雅可比多项式），并满足以下关系

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta + t + 1, \\ b &= -t, \\ c &= \alpha + 1. \end{aligned}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+t)(n+t+\alpha)(n+t+\beta)(n+t+\alpha+\beta)}{(2n+2t+\alpha+\beta-1)(2n+2t+\alpha+\beta)^2(2n+2t+\alpha+\beta+1)}, \\ b_n &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2-\beta^2}{(2n+2t+\alpha+\beta-2)(2n+2t+\alpha+\beta)}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

根据这些系数，我们可以通过带有初始条件的三项递推关系，定义两族线性无关多项式（P_n^η）$_{n\in\mathbb{Z}}$，$\eta = 1$，2，

$$\begin{aligned} &P_0^1(x) = 1, \quad P_0^2(x) = 0, \\ &P_{-1}^1(x) = 0, \quad P_{-1}^2(x) = 1, \\ &xP_n^\eta(x) = \sqrt{a_{n+1}}P_{n+1}^\eta(x) + b_{n+1}P_n^\eta(x) + \sqrt{a_n}P_{n-1}^\eta(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \eta = 1, 2. \end{aligned}$$

这两族多项式构成特征值方程 xp^η（x） $= Jp^\eta$（x）的特征向量，其中p^η（x） $=$（$\cdots$， P_{-1}^η（x） P_0^η（x） P_1^η（x） $\cdots$）^{T}，$\eta = 1$，2，并且 J是双无限雅可比矩阵

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \sqrt{a_{-2}} & b_{-1} & \sqrt{a_{-1}} & & & \\ & & \sqrt{a_{-1}} & b_0 & \sqrt{a_0} & & \\ \hline & & & \sqrt{a_0} & b_1 & \sqrt{a_1} & \\ & & & & \sqrt{a_1} & b_2 & \sqrt{a_2} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right). \tag{2.2}$$

这个算子 J 在 [19] 中被称为关联雅可比矩阵。为了应用谱定理，我们需要假设 $a_n > 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。正如 [19] 中指出的，只需假设 α 和 β 位于正方形 $-1 < \alpha$，$\beta < 1$内。在这种情况下，可以找到某个 t，从而保证正性（下一节将进一步讨论）。在这个正方形之外，可以看出不存在任何 t 能使所有 a_n 均为正。在 [19, 定理 1] 中，明确计算了支撑在 $[0, 1]$ 上的谱矩阵 $\boldsymbol{W}$，使得（P_n^η）$_{n\in\mathbb{Z}}$，$\eta = 1$，2 在以下意义下是正交归一的

$$\int_0^1 \left(P_n^1(x), P_n^2(x)\right) \boldsymbol{W}(x) \begin{pmatrix} P_m^1(x) \\ P_m^2(x) \end{pmatrix} dx = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

在参数 α, β, t 满足使所有 a_n均为正的条件下，雅可比矩阵 J 没有离散谱。因此，谱矩阵仅由绝对连续部分构成

$$\boldsymbol{W}(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}(x) & \Sigma_{12}(x)\\ \Sigma_{12}(x) & \Sigma_{22}(x)\end{pmatrix}, \quad x\in[0,1], \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_{11}(x) &= \gamma L\left(G_1^2(x) - \mu K^2 x^{-2\alpha} G_2^2(x)\right),\\ \Sigma_{12}(x) &= -L\left(G_1(x)G_3(x) - \mu\nu K^2 x^{-2\alpha} G_2(x)G_4(x)\right),\\ \Sigma_{22}(x) &= \frac{L}{\gamma}\left(G_3^2(x) - \mu\nu^2 K^2 x^{-2\alpha} G_4^2(x)\right),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}G_1(x) &= {}_2F_1\left(\alpha+\beta+t+1, -t; \alpha+1; x\right), \quad G_2(x) = {}_2F_1\left(\beta+t+1, -\alpha-t; 1-\alpha; x\right),\\ G_3(x) &= {}_2F_1\left(\alpha+\beta+t, 1-t; \alpha+1; x\right), \qquad G_4(x) = {}_2F_1\left(\beta+t, 1-t-\alpha; 1-\alpha; x\right),\\ \mu &= \frac{\sin(\pi t)\sin(\pi(\beta+t))}{\sin(\pi(\alpha+\beta+t))\sin(\pi(\alpha+t))}, \quad \nu = \frac{(\alpha+t)(\alpha+\beta+t)}{t(\beta+t)},\\ K &= -\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(t+1)\Gamma(-\alpha-\beta-t)\sin(\pi\alpha)\sin(\pi(\alpha+\beta+t))}{\pi\Gamma(\alpha+t+1)\Gamma(-\beta-t)\sin(\pi(\beta+t))},\\ L &= \frac{t(\beta+t)\sin(\pi\alpha)}{\pi\sqrt{a_0}(\alpha+\beta+2t)\alpha(\mu-1)K}, \quad \gamma = \frac{(\alpha+t)(\alpha+\beta+t)}{\sqrt{a_0}(\alpha+\beta+2t-1)(\alpha+\beta+2t)}.\end{aligned}$$

其中 a_0 可由 (2.1) 得到， ${}_2F_1$ 表示标准高斯超几何函数。

表示 $(P_n^{\eta})_{n\in\mathbb{Z}}, \eta = 1, 2,$的正交归一性，另一种方式是运用矩阵值正交多项式理论，因为类似于 (2.2) 中的双无限雅可比矩阵可以视为一个半无限 2×2分块Jacobi矩阵（见 [4]）。事实上，在对指标 n重新标记之后

$$\{0,1,2,\ldots\}\to\{0,2,4,\ldots\}, \quad \text{and} \quad \{-1,-2,-3,\ldots\}\to\{1,3,5,\ldots\}, \tag{2.4}$$

所有关于 J 的信息都可以汇集在一个形式如下的半无限分块三对角矩阵 $\boldsymbol{J}$ 中

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} B_1 & A_1 & & & \\ A_1 & B_2 & A_2 & & \\ & A_2 & B_3 & A_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

其中

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & \sqrt{a_0}\\ \sqrt{a_0} & b_0\end{pmatrix}, \quad B_{n+1} = \begin{pmatrix} b_{n+1} & 0\\ 0 & b_{-n}\end{pmatrix}, \quad n\geq 1, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix}\sqrt{a_{n+1}} & 0\\ 0 & \sqrt{a_{-n-1}}\end{pmatrix}, \quad n\geq 0.$$

如果我们定义矩阵值多项式

$$\boldsymbol{P}_n(x) = \begin{pmatrix} P_n^1(x) & P_n^2(x)\\ P_{-n-1}^1(x) & P_{-n-1}^2(x)\end{pmatrix}, \quad n\geq 0, \tag{2.5}$$

那么我们有

$$x\boldsymbol{P}_0(x) = A_1\boldsymbol{P}_1(x) + B_1\boldsymbol{P}_0(x), \quad \boldsymbol{P}_0(x) = I_{2\times 2},$$
$$x\boldsymbol{P}_n(x) = A_{n+1}\boldsymbol{P}_{n+1}(x) + B_{n+1}\boldsymbol{P}_n(x) + A_n\boldsymbol{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

其中 $I_{2\times 2}$ 表示 2×2 单位矩阵。矩阵正交归一性是通过（矩阵值）内积定义的

$$\int_0^1 \boldsymbol{P}_n(x)\boldsymbol{W}(x)\boldsymbol{P}_m^*(x)dx = I_{2\times 2}\delta_{nm},$$

其中 M^* 表示矩阵 M 的厄米转置。

注记 2.1. 请注意，在 [19] 中，作者在（2.5）中对矩阵值正交多项式 $\boldsymbol{P}_n$ 采用了不同的表示方式。很容易看出，这两种记法通过对泡利矩阵（尺寸为 2×2）进行共轭变换而相互关联。因此，（2.3）中的谱矩阵已根据我们的记法作了相应修改。

˜注记 2.2. 注意，若将区间 $[0,1]$，上经典雅可比正交多项式的三项递推关系˜的系数记为 $\tilde{a}_n, b_n, n \geq 1$, 则对于 $n \in \mathbb{Z}$，有 $a_n = \tilde{a}_{n+t}$ 和 $b_n = b_{n+t}$；这一点已在 [19] 中指出。

注记 2.3. 在 [18]，中，以下双谱问题的离散—连续版本已得到完整解答：描述所有满足下列条件的函数 $f_n(z)$ $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}$,

$$(Jf)_n(z) = zf_n(z), \quad \text{and} \quad Bf_n(z) = \lambda_n f_n(z), \quad \text{for all } z \text{ and } n,$$

其中 J 是如 (2.2) 中的双无限雅可比矩阵，而 B 是系数与 n 无关的二阶微分算子。对于伴随雅可比多项式的情形， J 是系数如 (2.1) 所示的雅可比矩阵 (2.2)，函数 $f_n(z)$ 可用高斯超几何方程的任意一个解表示（参见 [19] 中的 (2.1)–(2.6) ）。相应的二阶微分算子 B 及特征值 λ_n 由下式给出

$$B = z(1-z)\frac{d^2}{dz^2} + (\alpha+1+(\alpha+\beta+2)z)\frac{d}{dz}, \quad \lambda_n = -(n+t)(n+t+\alpha+\beta+1).$$

我们将在第3节末尾回到双谱性的概念，并在那里证明，(2.5) 中相应的矩阵值正交多项式 $\boldsymbol{P}_n$ 也具有双谱性质。

3. Stochastic associated Jacobi matrix

现在，我们希望将 (2.2) 中的双无限雅可比矩阵 J 转化为随机矩阵 P。为此，我们将遵循注2.2以及 [20, 第 5] 节（另见 [16]）。对于 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{(n+t+\beta+1)(n+t+\alpha+\beta+1)}{(2n+2t+\alpha+\beta+1)(2n+2t+\alpha+\beta+2)}, \\ r_n &= \frac{(n+t+\beta+1)(n+t+1)}{(2n+2t+\alpha+\beta+1)(2n+2t+\alpha+\beta+2)} + \frac{(n+t+\alpha)(n+t+\alpha+\beta)}{(2n+2t+\alpha+\beta)(2n+2t+\alpha+\beta+1)}, \\ q_n &= \frac{(n+t)(n+t+\alpha)}{(2n+2t+\alpha+\beta)(2n+2t+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

注意到 $p_n + r_n + q_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$。如果我们将 $[0,1]$ 上经典雅可比多项式的三项递推关系的系数记为 $\tilde{p}_n$, $\tilde{r}_n$, $\tilde{q}_n$，使得相应的雅可比矩阵是一个随机

矩阵（在 [20] 中，它们记作 a_n，b_n，c_n），那么我们有 $p_n = \tilde{p}_{n+t}$，$r_n = \tilde{r}_{n+t}$，$q_n = \tilde{q}_{n+t}$，$n \in \mathbb{Z}$。相应的双无限雅可比矩阵可以写成以下形式

$$P = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & q_{-2} & r_{-2} & p_{-2} & & & & \\ & & q_{-1} & r_{-1} & p_{-1} & & & \\ \hline & & & q_0 & r_0 & p_0 & & \\ & & & & q_1 & r_1 & p_1 & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right). \tag{3.2}$$

我们定义所谓的 势系数 如下

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \quad \pi_{-n} = \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-n+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-n}}, \quad n \geq 1.$$

由 (3.1) 可知，$\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 可显式表示为

$$\pi_n = \frac{(\alpha+\beta+t+1)_n (-t)_{-n} (2n+2t+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+t+1)_n (-\beta-t)_{-n} (2t+\alpha+\beta+1)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

其中 $(a)_0 = 1, (a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ $n \geq 1$, 表示波赫哈默符号，而 $(a)_{-n} = 1/(a-n)_n, n \geq 1$。若记 $\Pi = \mathrm{diag}\left(\cdots, \sqrt{\pi_{-1}}, \sqrt{\pi_0}, \sqrt{\pi_1}, \cdots\right)$，则由 (2.2) 和 (3.2) 分别给出的雅可比矩阵 J 和 P 之间的关系为 $J\Pi = \Pi P$。在下面的结果中，我们将看到在什么条件下可以确保对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，$p_n, r_n, q_n > 0$。回忆第2节，α 和 β 位于方形 $-1 < \alpha, \beta < 1$ 内。

命题 3.1. 如果 $0 \leq \beta < 1$，那么无法找到 t，使得 $p_n, r_n, q_n > 0$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。因此，假设 $-1 < \alpha < 1$ 且 $-1 < \beta < 0$。那么，按照 (3.1) 定义的系数 p_n, r_n, q_n，若根据以下 *8* 个区域之一选择 t，则它们均为正（见图 *1*）：

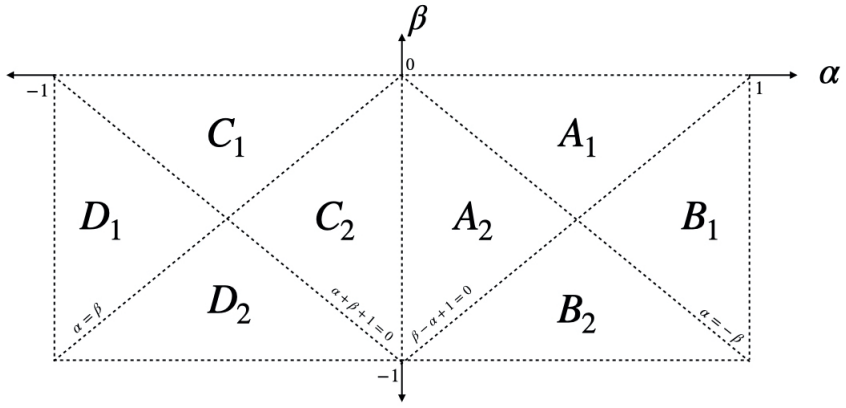


FIGURE 1. 命题 3.1 中各区域的示意图。

$\boldsymbol{A_1}$：$\{\beta - \alpha + 1 > 0, \alpha > -\beta, \beta < 0\}$。那么，$t$ 必须从以下实数集中选取：

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n-\beta) \cup (n-\alpha, n-\alpha-\beta). \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{A_2}$: $\{\beta-\alpha+1>0, \alpha<-\beta, \alpha>0\}$。那么， t 必须从以下实数集中选取 :

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-\alpha, n) \cup (n-\alpha-\beta, n-\beta).$$

$\boldsymbol{B_1}$: $\{\beta-\alpha+1<0, \alpha>-\beta, \alpha<1\}$。那么， t 必须从以下实数集中选取 :

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n-\alpha+1) \cup (n-\beta, n-\alpha-\beta+1).$$

$\boldsymbol{B_2}$: $\{\beta-\alpha+1<0, \alpha<-\beta, \beta>-1\}$。那么， t 必须从以下实数集中选取:

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-\beta-1, n) \cup (n-\alpha-\beta, n-\alpha+1).$$

$\boldsymbol{C_1}$: $\{\beta+\alpha+1>0, \alpha>\beta, \alpha<0\}$。那么， t 必须从以下实数集中选取:

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n-\alpha) \cup (n-\beta, n-\alpha-\beta).$$

$\boldsymbol{C_2}$: $\{\beta+\alpha+1>0, \alpha<\beta, \beta<0\}$。然后， t 必须从以下实数集中选取:

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n-\beta) \cup (n-\alpha, n-\alpha-\beta).$$

$\boldsymbol{D_1}$: $\{\beta+\alpha+1<0, \alpha>\beta, \beta>-1\}$。然后， t 必须从以下实数集中选取: t:

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-\beta-1, n) \cup (n-\alpha-\beta, n-\alpha+1).$$

$\boldsymbol{D_2}$: $\{\beta+\alpha+1<0, \alpha<\beta, \alpha>-1\}$。然后， t 必须从以下实数集中选取: t:

$$t \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n-\alpha-1, n) \cup (n-\alpha-\beta, n-\beta+1).$$

证明。 将（3.1）中的系数 p_n, r_n, q_n 以如下更方便的方式表示:

$$p_n = x_n s_{n+1}, \quad r_n = x_n t_{n+1} + y_n s_n, \quad q_n = t_n y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

其中，对于 $n \in \mathbb{Z}$

$$x_n = \frac{n+t+\beta+1}{2n+2t+\alpha+\beta+1},\ y_n = \frac{n+t+\alpha}{2n+2t+\alpha+\beta+1},\ s_n = \frac{n+t+\alpha+\beta}{2n+2t+\alpha+\beta},\ t_n = \frac{n+t}{2n+2t+\alpha+\beta}. \tag{3.6}$$

这种表示方式的灵感来自双无限矩阵 P（3.2）的UL分解。出于我们将在下一节第4.1节中解释的原因，我们希望（3.6）中的数列对于所有 $n \in \mathbb{Z}$ 都是概率，因为我们关注的是与转移概率矩阵 P（3.2）相关的抽签模型（见第6节）。

现在证明该命题的第一部分。为简单起见，我们只考虑区域 $R = \{\alpha > \beta \geq 0,\ \beta < 1-\alpha\}$。其余情形类似。在区域 R 的条件下，对于每个因子（3.6）中零点的值（以 $n+t$ 为变量）均如图2所示（图中未按比例绘制）。只需考察区间 $[-1, 0]$内的情况，因为对于某个整数 n， $n+t$ 可以移至任何其他同样大小的区间。以下分析将重点关注（3.6）中 x_n， y_n， s_n， t_n 的符号，进而关注（3.5）中 p_n， r_n， q_n 的符号。根据 $n+t$ 的位置，有4种可能（见图2）：

(1) 若 $-1 < n+t < -\frac{\alpha+\beta+1}{2}$，则有 $x_n = (+)\ (-)$ 和 $s_{n+1} = (+)\ (+)$。因此 $p_n = x_n s_{n+1} < 0$。(2) 若 $-\frac{\alpha+\beta+1}{2} \leq n+t < -\alpha$，则有 $t_n = (-)\ (-)$ 和 $y_n = (-)\ (+)$。因此 $q_n = t_n y_n < 0$。(3) 若 $-\alpha < n+t < -\frac{\alpha+\beta}{2}$，则有 $y_n = (+)\ (+)$ 和 $s_n = (+)\ (-)$。因此 $y_n s_n < 0$，并且 (3.5) 的 r_n 中第二个加项为负。

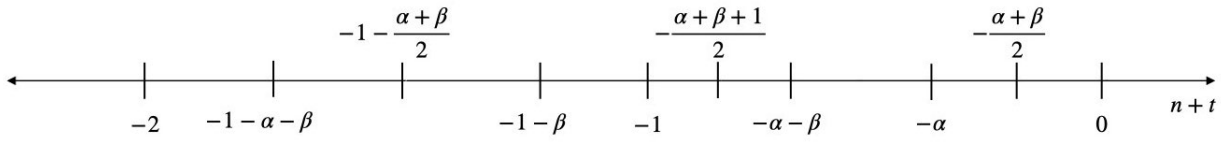


FIGURE 2. 命题 3.1 第一部分中，当 $n+t$ 在 (3.1) 的各因子中分别取零时，零点不同取值的位置。

(4) 若 $-\frac{\alpha+\beta}{2} < n+t < 0$，则有 $t_n = (-)$ $(+)$ 以及 $y_n = (+)$ $(+)$。因此 $q_n = t_n y_n < 0$。

在下面的 4 种情形中，都不可能找到 t，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$，p_n、r_n、$q_n > 0$ 均成立。最后，若 $n+t > 0$，则 (3.6) 中所有的 x_n、y_n、s_n、t_n 均为正，并且对所有 $n \in \mathbb{Z}$，p_n、r_n、$q_n > 0$ 均成立。但此时我们必须选择 t，使得 $t > -n$。由于 $|n| \to \infty$，因此不可能找到有限的 t，使得对所有 $n \in \mathbb{Z}$，p_n、r_n、$q_n > 0$ 均成立。若 $n+t < -1-\alpha-\beta$，也可作同样的推理；此时 (3.6) 中所有的 x_n、y_n、s_n、t_n 均为负，并且对所有 $n \in \mathbb{Z}$，p_n、r_n、$q_n > 0$ 均成立。矩形 $-1 < \alpha < 1$、$0 \le \beta < 1$ 可像图 1 中那样以类似方式划分。区域R 只是其中一个三角形。其余区域的证明类似，只需改变图2中零点的位置。

对于命题的第二部分，我们将聚焦于区域 $\boldsymbol{A}_1$。其余情形类似。和之前一样，各因子 (3.6) 的零点取值（以 $n+t$ 为变量）位于图 3 所示的位置（非按比例绘制），因此只需考察区间 $[-1, 0]$ 中的情况。现在有 6 种可能性

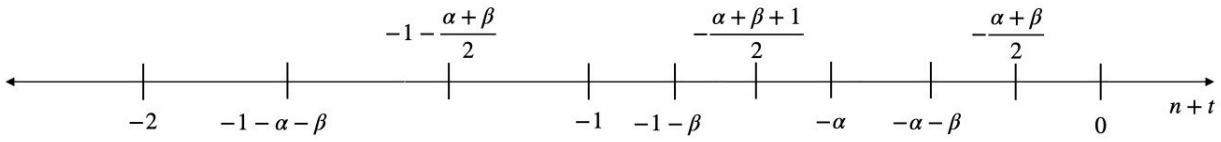


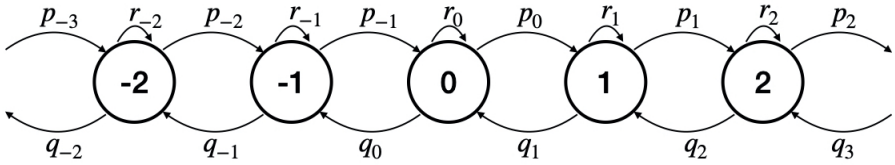
FIGURE 3. 命题 3.1 第二部分中，当 $n+t$ 在 (3.1) 的各因子中分别取零时，零点不同取值的位置。

根据 $n+t$ 的位置：

(1) 若 $-1 < n+t < -1-\beta$，则有 $x_n = (-)$ $(-)$，$s_{n+1} = (+)$ $(+)$，$t_{n+1} = (+)$ $(+)$，$y_n = (-)$ $(-)$，$s_n = (-)$ $(-)$ 以及 $t_n = (-)$ $(-)$。因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 $p_n, r_n, q_n > 0$。(2) 若 $-1-\beta < n+t < -\frac{\alpha+\beta+1}{2}$，则有 $x_n = (+)$ $(-)$ 和 $s_{n+1} = (+)$ $(+)$。因此 $p_n = x_n s_{n+1} < 0$。(3) 若 $-\frac{\alpha+\beta+1}{2} < n+t < -\alpha$，则有 $t_n = (-)$ $(-)$ 和 $y_n = (-)$ $(+)$。因此 $q_n = t_n y_n < 0$。(4) 若 $-\alpha < n+t < -\alpha-\beta$，则有 $x_n = (+)$ $(+)$，$s_{n+1} = (+)$ $(+)$，$t_{n+1} = (+)$ $(+)$，$y_n = (+)$ $(+)$，$s_n = (-)$ $(-)$ 以及 $t_n = (-)$ $(-)$。因此，对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，有 p_n, r_n，$q_n > 0$。(5) 若 $-\alpha-\beta < n+t < -\frac{\alpha+\beta}{2}$，则有 $y_n = (-)$ $(-)$ 和 $s_n = (+)$ $(-)$。因此 $y_n s_n < 0$，且 (3.5) 的 r_n 中第二个加项为负。(6) 若 $-\frac{\alpha+\beta}{2} < n+t < 0$，则有 $t_n = (-)$ $(+)$ 和 $y_n = (+)$ $(+)$。因此 $q_n = t_n y_n < 0$。

前面的情形 (1) 和 (4) 对应于我们在 (3.4) 中想要证明的内容。其余区域的证明类似，只需改变图3中各个数值的位置。□

在前述命题的条件下，我们可以确保 (3.2) 中的双无限雅可比矩阵 P 是随机的。因此，它可以被解释为一个非平凡双边生灭链 $\{Z_t$ 的一步转移概率矩阵：$t=0,\ 1,\ \ldots\}$ 在 $\mathbb{Z}$ 上，其示意图如下：



依赖于三个参数 $\alpha,\ \beta,\ t$。与第2节中一样，我们可以通过带有初始条件的三项递推关系定义两组线性无关多项式 $(Q_n^\eta(x))_{n\in\mathbb{Z}},\ \eta=1,\ 2$，

$$\begin{aligned} Q_0^1(x)&=1, \quad Q_0^2(x)=0,\\ Q_{-1}^1(x)&=0, \quad Q_{-1}^2(x)=1,\\ xQ_n^\eta(x)&=p_nQ_{n+1}^\eta(x)+r_nQ_n^\eta(x)+q_nQ_{n-1}^\eta(x), \quad n\in\mathbb{Z}, \quad \eta=1,2. \end{aligned}$$

利用 [44, 定理 1]，可以用 ${}_4F_3$ 超几何函数计算其中一些多项式的闭式（另见 [2, 第4节.4]）。这些多项式在以下意义下正交

$$\int_0^1 \left(Q_i^1(x),Q_i^2(x)\right)\boldsymbol{\Psi}(x)\begin{pmatrix}Q_j^1(x)\\ Q_j^2(x)\end{pmatrix}dx=\frac{\delta_{ij}}{\pi_j}, \quad i,j\in\mathbb{Z},$$

其中 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 由 (3.3) 定义，而（见 (2.3)）

$$\boldsymbol{\Psi}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{\pi_{-1}}\end{pmatrix}\boldsymbol{W}(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{\pi_{-1}}\end{pmatrix}=x^\alpha(1-x)^\beta\begin{pmatrix}\Sigma_{11}(x) & \frac{1}{\sqrt{\pi_{-1}}}\Sigma_{12}(x)\\ \frac{1}{\sqrt{\pi_{-1}}}\Sigma_{12}(x) & \frac{1}{\pi_{-1}}\Sigma_{22}(x)\end{pmatrix}, \quad x\in[0,1]. \tag{3.7}$$

利用这些信息，我们可以计算双边生灭链$\{Z_t$的 n 步转移概率：$t=0,\ 1,\ \ldots\}$，其由 Karlin-McGregor 积分表示公式给出（见 [34]）

$$P_{ij}^{(n)}\doteq\mathbb{P}(Z_n=j\,|Z_0=i)=\pi_j\int_0^1 x^n\left(Q_i^1(x),Q_i^2(x)\right)\boldsymbol{\Psi}(x)\begin{pmatrix}Q_j^1(x)\\ Q_j^2(x)\end{pmatrix}dx, \quad i,j\in\mathbb{Z}.$$

同样，经过重新标记（2.4）后，P 的全部信息都可以汇集在一个分块大小为 2×2 的半无限分块三对角矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中，该矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}E_0 & D_0 & & & \\ F_1 & E_1 & D_1 & & \\ & F_2 & E_2 & D_2 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

其中

$$E_0 = \begin{pmatrix} r_0 & q_0 \\ p_{-1} & r_{-1} \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} r_n & 0 \\ 0 & r_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

$$D_n = \begin{pmatrix} p_n & 0 \\ 0 & q_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \quad F_n = \begin{pmatrix} q_n & 0 \\ 0 & p_{-n-1} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 生成的生灭链可解释为一个取值于二维状态空间 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \{1, 2\}$ 中的过程，其中第一个分量通常称为层级，第二个分量称为相位。这类过程也称为离散时间拟生灭过程。一般而言，这些过程允许在所有相邻状态层级和所有相位之间发生转移（一般性参考资料见 [35, 38]）。与之前一样，如果我们定义矩阵值多项式

$$\boldsymbol{Q}_n(x) = \begin{pmatrix} Q_n^1(x) & Q_n^2(x) \\ Q_{-n-1}^1(x) & Q_{-n-1}^2(x) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0, \tag{3.9}$$

那么我们有

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{Q}_0(x) &= D_0\boldsymbol{Q}_1(x) + E_0\boldsymbol{Q}_0(x), \quad \boldsymbol{Q}_0(x) = I_{2\times 2}, \\ x\boldsymbol{Q}_n(x) &= D_n\boldsymbol{Q}_{n+1}(x) + E_n\boldsymbol{Q}_n(x) + F_n\boldsymbol{Q}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.10}$$

and

$$\int_0^1 \boldsymbol{Q}_n(x)\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{Q}_m^*(x)dx = \begin{pmatrix} 1/\pi_n & 0 \\ 0 & 1/\pi_{-n-1} \end{pmatrix} \delta_{nm}.$$

关系 式 (3.9) 中的矩阵值多项式 $\boldsymbol{Q}_n(x)$ 与式 (2.5) 中的 $\boldsymbol{P}_n(x)$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{P}_n(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi_n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi_{-n-1}} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q}_n(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\pi_{-1}} \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

在这种情况下，我们有（见 [8, 14]）Karlin-McGregor 积分表示公式，其中 2×2 块矩阵项 (i, j) 为

$$\boldsymbol{P}_{ij}^{(n)} = \left(\int_0^1 x^n \boldsymbol{Q}_i(x)\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{Q}_j^*(x)dx \right) \begin{pmatrix} \pi_j & 0 \\ 0 & \pi_{-j-1} \end{pmatrix}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.11}$$

最后，我们对这一族离散时间双边生灭链的常返性和不变测度作一些说明。根据 [8] 的推论 4.1 和 4.2（另见 [25, 的注 3.1]），可以推出，定义在 $\mathbb{Z}$ 上的生灭链是常返的，当且仅当积分 $\int_0^1 \boldsymbol{\Psi}(x)/(1-x)dx$ 的至少一个分量发散；而它是正常返的，当且仅当 $\boldsymbol{\Psi}(x)$ 的某个分量在点 1 处有跳跃。考察谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$（见（3.7）和（2.3））可知，在命题 3.1 的条件下，矩阵中的函数在点 $x = 1$ 处有界。因此，积分 $\int_0^1 \boldsymbol{\Psi}(x)/(1-x)dx$ 是否发散，仅取决于标量测度中的部分 $(1-x)^\beta$。在命题 3.1 的条件下，即 $-1 < \beta < 0$，$\int_0^1 \boldsymbol{\Psi}(x)/(1-x)dx$ 的所有分量总是发散。因此，双边生灭链总是常返的。由于谱测度只有绝对连续部分，在点 1 处没有跳跃。因此，生灭链总是零常返的。至于不变测度，它由向量 $\boldsymbol{\pi} = (\cdots, \ \pi_{-1}, \ \pi_0, \ \pi_1, \ \cdots)$ 直接给出，其中 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 由（3.3）给出。

注3.2。我们也可以考虑由三项递推系数 p_n， q_n 和 $r_n = -p_n - q_n$， $n \in \mathbb{Z}$ 生成的多项式 $(Q_n^\eta(x))_{n\in\mathbb{Z}}$， $\eta = 1$, 2, ，而不采用（3.1）；这样得到的将是一个连续时间双边生灭过程，并且可以进行类似的谱分析（见 [24]）。对于状态空间为 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的情形， [29] 已经进行了这项研究。本文聚焦于离散时间双边生灭链，以便从抽球模型的角度给出概率解释（见第6节）。

注3.3. 让我们回到备注 2.3 中指出的双谱性 这一主题。矩阵值正交多项式 $(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq 0}$ (3.9) 是双谱的。它们不仅是分块三对角雅可比算子 $\boldsymbol{P}$ 的特征函数（如 (3.8) 所示；另见 (3.10)），也是以下矩阵值二阶微分算子的特征函数

$$\boldsymbol{B} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (C - xU)\frac{d}{dx}, \tag{3.12}$$

即 $\boldsymbol{Q}_n(x)\boldsymbol{B} = \Lambda_n \boldsymbol{Q}_n(x)$，其中

$$\begin{gathered} C = \begin{pmatrix} \alpha+1+\dfrac{2t(\beta+t)}{\alpha+\beta+2t} & 2t - \dfrac{2t(\beta+t)}{\alpha+\beta+2t} \\ -2(\beta+t) + \dfrac{2t(\alpha+t)}{\alpha+\beta+2t} & 1-\alpha-\dfrac{2t(\beta+t)}{\alpha+\beta+2t} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \alpha+\beta+2t+2 & 0 \\ 0 & -\alpha-\beta-2t+2 \end{pmatrix}, \\ V = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta-2t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_n = \begin{pmatrix} -(n+1)(n+\alpha+\beta+2t) & 0 \\ 0 & -n(n-\alpha-\beta-2t+1) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

注意， $\boldsymbol{B}$ 的系数（与 n 无关）在右侧相乘，而特征值 Λ_n 在左侧相乘。这与 A.J. Dur´an、F.A. Gr¨unbaum、I. Pacharoni 和 J.A. Tirao 开创的满足二阶微分方程的矩阵值正交多项式理论相一致（见 [11, 12, 22, 23]）。对于两族线性无关的多项式 $(Q_n^\eta(x))_{n\in\mathbb{Z}}$， $\eta = 1$， 2，我们有两个耦合的二阶微分方程，其形式为

$$\begin{aligned} &x(1-x)\left(Q_n^\eta(x)\right)'' + \left(1 + \varepsilon\left(\alpha + \frac{2t(\beta+t)}{\alpha+\beta+2t}\right) - x(2+\varepsilon(\alpha+\beta+2t))\right)\left(Q_n^\eta(x)\right)' \\ &\quad + \left(-\beta(1+\varepsilon) + 2\varepsilon t\left(-1 + \frac{\beta+t}{\alpha+\beta+2t}\right)\right)\left(Q_n^{\eta+\varepsilon}(x)\right)' - \frac{1}{2}(1+\varepsilon)(\alpha+\beta+2t)Q_n^\eta(x) = \lambda_n^{\pm} Q_n^\eta(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \eta = 1 \\ -1, & \text{if} \quad \eta = 2 \end{cases}, \quad \lambda_n^{\pm} = \begin{cases} -(n+1)(n+\alpha+\beta+2t), & \text{if} \quad n \geq 0 \\ -n(n-\alpha-\beta-2t+1), & \text{if} \quad n < 0 \end{cases}.$$

最后，我们指出，J. Wimp [44] 为多项式族 $(Q_n^1(x))_{n\geq 0}$找到了一个四阶微分方程，其系数取决于 n 。

4. Stochastic factorizations of the associated Jacobi matrix

我们现在的目标是，探讨如何将具有转移概率矩阵P (3.2)的双边生灭链应用于抽球模型（见下文第6节）。为此，我们将遵循 [20] （另见[25, 26]）的思路，把与 P 相关的抽球模型分解为两个不同且更简单的抽球实验，再将它们结合起来，从而更简洁地描述原抽球模型。为此，我们将研究转移概率矩阵 P (3.2)的随机 UL 和 LU 分解。这类分解通常带有一个自由参数，但我们将看到，对于伴随雅可比多项式，这些分解若存在，便是唯一的。

4.1. **随机 c UL 分解**。 让我们按以下方式对 P (3.2)进行 UL 分解 ay

$$P = \left(\begin{array}{cc|ccc} \ddots & \ddots & & & \\ 0 & y_{-1} & x_{-1} & & \\ \hline & 0 & y_0 & x_0 & \\ & & 0 & y_1 & x_1 \\ & & & & \ddots \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & & & & \\ & t_{-1} & s_{-1} & 0 & & \\ \hline & & t_0 & s_0 & 0 & \\ & & & t_1 & s_1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right) = P_U P_L, \tag{4.1}$$

其中 P_U 和 P_L 也都是 随机矩阵。这意味着 P_U 和 P_L 的所有元素均非负，且

$$x_n + y_n = 1, \quad s_n + t_n = 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} p_n &= x_n s_{n+1}, \\ r_n &= x_n t_{n+1} + y_n s_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ q_n &= y_n t_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

这个 UL分解通常取决于一个自由参数 y_0。如果我们还希望因子 P_U 和 P_L 也是随机矩阵，那么就必须应用 [25, 定理 2。1], 该定理指出（在某些条件下），当且仅当我们选择的 y_0 落在以下范围内时，分解才是随机的

$$H' \le y_0 \le H,$$

其中 H 和 H' 是通过沿不同方向交替选取 p_n 和 q_n 生成的以下连分数，即

$$H = 1 - \cfrac{p_0}{1 - \cfrac{q_1}{1 - \cfrac{p_1}{1 - \cfrac{q_2}{1 - \cdots}}}}, \quad H' = \cfrac{q_0}{1 - \cfrac{p_{-1}}{1 - \cfrac{q_{-1}}{1 - \cfrac{p_{-2}}{1 - \cdots}}}}. \tag{4.3}$$

定理 4.1。 假设 $\alpha > 0$。则有

$$H = H' = \frac{\alpha + t}{\alpha + \beta + 2t + 1}. \tag{4.4}$$

因此，参数 y_0 $(y_0 = H)$只有一个取值能使我们得到形式为 (4.1) 的随机 UL 分解，且每个因子 P_U 和 P_L 的系数为

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{n + t + \alpha}{2n + 2t + \alpha + \beta + 1}, & x_n &= \frac{n + t + \beta + 1}{2n + 2t + \alpha + \beta + 1}, \\ s_n &= \frac{n + t + \alpha + \beta}{2n + 2t + \alpha + \beta}, & t_n &= \frac{n + t}{2n + 2t + \alpha + \beta}, \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

证明。 我们将沿用证明 [20, 命题 5.1]中的相同思路。首先，对于 H，交替数序列 $p_0, q_1, p_1, q_2, \ldots$ 是一个链序列。我们称 $\alpha_n, n \ge 1,$ 为部分分子序列。于是 $\alpha_n = (1 - m_{n-1})m_n$，其中

$$m_{2n} = \frac{n + t}{2n + 2t + \alpha + \beta + 1}, \quad m_{2n+1} = \frac{n + t + \beta + 1}{2n + 2t + \alpha + \beta + 2}.$$

根据 [5,定理 3.1] ，我们有

$$H = m_0 + \frac{1-m_0}{1+L}, \quad L = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{m_k}{1-m_k}.$$

可以证明，只要 $\alpha > 0$， L 就收敛，此时有 $L = (\beta + t + 1)/\alpha$。直接计算可得（4.4）中的 H 值。另一方面，对于 H'，我们再次得到，交替数列$\alpha'_n = (1 - m'_{n-1})m'_n$， $n \geq 1$ q_0， p_{-1}， q_{-1}， p_{-2}，.....是一个链序列，其中

$$m'_{2n} = \frac{-n + t + \alpha + \beta + 1}{-2n + 2t + \alpha + \beta + 1}, \quad m'_{2n+1} = \frac{-n + t + \alpha}{-2n + 2t + \alpha + \beta}.$$

因此

$$1 - H' = m'_0 + \frac{1-m'_0}{1+L'}, \quad L' = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{m'_k}{1-m'_k}.$$

可以证明，只要 $\alpha > 0$， L' 就收敛，此时有 $L' = -(\alpha + t)/\alpha$。直接计算可得（4.4）中的 H' 值。最后，利用（4.5）和（4.2）直接计算可得（3.1）。□

4.2. **随机 LU 分解**。 现在考虑由 (3.2) 给出的随机矩阵 P 的 LU 分解，形式如下

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & & & & \\ & \tilde{t}_{-1} & \tilde{s}_{-1} & 0 & & \\ \hline & & \tilde{t}_0 & \tilde{s}_0 & 0 & \\ & & & \tilde{t}_1 & \tilde{s}_1 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \tilde{y}_{-1} & \tilde{x}_{-1} & & & \\ \hline & 0 & & \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & \\ & & & 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array}\right) = \widetilde{P}_L \widetilde{P}_U, \tag{4.6}$$

其中， P_L 和 P_U 同样是随机矩阵，即 P_L 和 P_U 的所有元素均非负，并且

$$\tilde{t}_n + \tilde{s}_n = 1, \quad \tilde{y}_n + \tilde{x}_n = 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

现在，直接计算可得

$$\begin{aligned} p_n &= \tilde{s}_n \tilde{x}_n, \\ r_n &= \tilde{t}_n \tilde{x}_{n-1} + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ q_n &= \tilde{t}_n \tilde{y}_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

同样，通常这种分解取决于一个自由参数 $\tilde{r}_0$，应用 [25, 定理 2.2] 时，为了得到随机 LU 分解，我们需要满足 $H' \leq \tilde{r}_0 \leq H$，其中 H 和 H' 由 (4.3) 定义。

定理 4.2。 假设 $\alpha > 0$。则 $H = H'$ 收敛于 (4.4)，并且参数 $\tilde{r}_0$ （$\tilde{r}_0 = H$）只有一个取值，使得我们得到形式为 (4.6) 的随机 *LU* 分解；各因子 P_L 和 P_U 的系数 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 为

$$\tilde{y}_n = t_{n+1}, \quad \tilde{x}_n = s_{n+1}, \quad \tilde{s}_n = x_n, \quad \tilde{t}_n = y_n \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.8}$$

其中， x_n、 y_n、 s_n、 t_n 由（4.5）定义。

证明。 与定理 4.1 的证明相同，但使用 (4.7)。 □

备注 4.3。可以看出，若选择 t 取自命题 3.1 中针对区域 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ 所描述的范围，则总有 $0<H<1$，并且总能进行随机 UL 或 LU 分解。相反，在区域 $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ 中，由于 $\alpha<0$，且无法保证 H 和/或 H' 收敛，因此无法进行随机 UL 或 LU 分解。

注记 4.4。在 [26] 中，我们引入了所谓的反射-吸收（或 RA）分解。我们没有像 UL 和 LU 分解那样将双边生灭链分解为纯生过程和纯灭过程，而是将其中一个因子视为吸收到状态 0 的吸收过程，另一个因子视为从状态 0 出发的反射过程。在这种情况下会有 2 个自由参数（a 和 x_0），为了保证随机 RA 分解，我们需要 $a\geq H'$ 和 $x_0\geq 1-H$。由于 $a+x_0=1$（$H=H'$），这意味着 $y_0=0$, 因此 RA 分解将无法实现（详情请参见 [26]）。

5. Stochastic Darboux transformations and the associated spectral matrices

一旦得到 UL（或 LU）分解，我们就可以进行所谓的离散达布变换。达布变换历史悠久，但我们研究的这类离散达布变换，最早的相关文献可能出现在 [37]，并与托达晶格有关。若 $P=P_UP_L$ 如 (4.1) 所示，那么通过反转~因子的顺序，我们可以得到另一个形如 $P=P_LP_U$ 的三对角矩阵。矩阵~ P 的新系数为

$$\begin{aligned}\tilde{p}_n&=s_nx_n,\\ \tilde{r}_n&=t_nx_{n-1}+s_ny_n,\quad n\in\mathbb{Z},\\ \tilde{q}_n&=t_ny_{n-1}.\end{aligned}$$

~矩阵 P 是随机矩阵，因为两个随机矩阵的乘积仍然是随机矩阵。实际上，利用 (4.5)，我们有 $\tilde{p}_n$, $\tilde{r}_n$, $\tilde{q}_n$ 是在 (3.1) 中将 α 替换为 $\alpha-1$ 后所得的系数 p_n, r_n, q_n。换言之，

$$\tilde{p}_n=p_n|_{\alpha=\alpha-1},\quad \tilde{r}_n=r_n|_{\alpha=\alpha-1},\quad \tilde{q}_n=q_n|_{\alpha=\alpha-1}.$$

~因此，新的离散时间双边生灭链 $\{Z_t\colon\ t=0,\ 1,\ \ldots\}$ 定义在整数 $\mathbb{Z}$ 上，其系数为 $(\tilde{p}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$、$(\tilde{r}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $(\tilde{q}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$；它与原来的生灭链 Z_t 相同，只是将参数 α~ ~替换为 $\alpha-1$。与 P 相关联的谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 因而为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{\Psi}(x)|_{\alpha=\alpha-1},$$

~其中，$\boldsymbol{\Psi}$ 是谱矩阵（3.7）。注意，由于我们假设 $\alpha>0$~以得到随机 UL 分解（见定理 4.1），$\boldsymbol{\Psi}$ 在 $[0,1]$ 上是良定义的。此外，$\boldsymbol{\Psi}$ 没有离散部分，正如~$\boldsymbol{\Psi}$一样。$\boldsymbol{\Psi}$ 的另一种表示来自 [25, 定理 3.5],，其由谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$的*Geronimus* 变换给出。该表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{S}_0(x)\boldsymbol{\Psi}_S(x)\boldsymbol{S}_0^*(x),$$

其中（参见（4.5））

$$\boldsymbol{S}_0(x)=\begin{pmatrix}s_0 & t_0\\ -\dfrac{x_{-1}s_0}{y_{-1}} & \dfrac{x-x_{-1}t_0}{y_{-1}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t+\alpha+\beta}{2t+\alpha+\beta} & \dfrac{t}{2t+\alpha+\beta}\\ -\dfrac{(t+\beta)(t+\alpha+\beta)}{(2t+\alpha+\beta)(t+\alpha-1)} & \dfrac{2t+\alpha+\beta-1}{t+\alpha-1}x-\dfrac{t(t+\beta)}{(2t+\alpha+\beta)(t+\alpha-1)}\end{pmatrix},$$

and

$$\boldsymbol{\Psi}_S(x)=\frac{y_0}{s_0}\frac{\boldsymbol{\Psi}(x)}{x}+\left[\begin{pmatrix}1/s_0 & 0\\ 0 & 1/t_0\end{pmatrix}-\frac{y_0}{s_0}\boldsymbol{M}_{-1}\right]\delta_0(x).$$

此处 $\boldsymbol{M}_{-1}=\int_0^1 x^{-1}\boldsymbol{\Psi}(x)dx$。由于 $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$ 没有离散谱，这意味着在 $\boldsymbol{\Psi}$ 中， $\delta_0(x)$ 前面的矩阵应为零矩阵。定理 3.5] 中假设 $\boldsymbol{M}_{-1}$ （逐项）定义良好。但简单计算表明，一般而言，对于 $\alpha>0$， $\boldsymbol{M}_{-1}$ 并未定义良好。然而，这一假设实际上过于严格。只需假设 $\boldsymbol{S}_0(0)\boldsymbol{M}_{-1}\boldsymbol{S}_0^*(0)$ 定义良好即可。事实上， $\boldsymbol{S}_0(0)$ 是一个奇异矩阵，经过化简后可知， $x^{-1}\boldsymbol{S}_0(0)\boldsymbol{\Psi}(x)\boldsymbol{S}_0^*(0)$ 在 $[0,1]$ 上的积分总是定义良好的。事实上，我们有

$$\frac{y_0}{s_0}\boldsymbol{S}_0(0)\boldsymbol{M}_{-1}\boldsymbol{S}_0^*(0)=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{t+\beta}{t+\alpha-1}\\ -\dfrac{t+\beta}{t+\alpha-1} & \left(\dfrac{t+\beta}{t+\alpha-1}\right)^2\end{pmatrix}.$$

简单计算可得

$$\boldsymbol{S}_0(0)\begin{pmatrix}1/s_0 & 0\\ 0 & 1/t_0\end{pmatrix}\boldsymbol{S}_0^*(0)$$

$\widetilde{}$与之前的矩阵相同，因此我们有， $\boldsymbol{\Psi}$ 中 $\delta_0(x)$前面的矩阵是零矩阵。由此可得，$\widetilde{}$谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 的另一种表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\frac{y_0}{s_0}\boldsymbol{S}_0(x)\frac{\boldsymbol{\Psi}(x)}{x}\boldsymbol{S}_0^*(x).$$

$\widetilde{}$最后，如果我们按照与式（3.9）相同的方法构造矩阵值多项式（$\boldsymbol{Q}_n$）$_{n\geq 0}$，但用$_{\sim}P$ 代替 P，则有

$$\int_0^1 \widetilde{\boldsymbol{Q}}_n(x)\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(x)\widetilde{\boldsymbol{Q}}_m^*(x)dx=\begin{pmatrix}1/\tilde{\pi}_n & 0\\ 0 & 1/\tilde{\pi}_{-n-1}\end{pmatrix}\delta_{nm},$$

其中，$(\tilde{\pi}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$是由（3.3）定义的势系数（$\pi_n$）$_{n\in\mathbb{Z}}$，其中以 $\alpha-1$ 替换 α。与 P相关的双向生灭链 $\{Z_t\colon\ t=0,\ 1,\ \ldots\}$，将具有与（3.11）中类似的 Karlin-McGregor 表示公式，并且与原链一样，它总是零常返的（见注 3.2 之前的段落）。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$对于形式为 $P=P_LP_U$ 的 LU 分解（4.6），也可以进行同样的操作。通过颠倒这些$\widehat{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widehat{}$因子的顺序，我们得到另一个形式为 $P=P_UP_L$ 的三对角矩阵。矩阵 P 的新系数由下式给出（见（4.8））：

$$\begin{aligned}\hat{p}_n&=s_{n+1}x_{n+1},\\ \hat{r}_n&=s_{n+1}y_{n+1}+t_{n+1}x_n,\quad n\in\mathbb{Z}.\\ \hat{q}_n&=t_{n+1}y_n.\end{aligned}$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$同样，矩阵 P是随机矩阵，因此我们得到一个新的双边生灭链 $\{Z_t\colon\ t=0,\ 1,\ \ldots\}$定义在整数上$\mathbb{Z}$，其系数为 $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$、$(\hat{r}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $(\hat{q}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$。利用 (4.8) 和 (4.5) 可进行简单计算，得到

$$\hat{p}_n=p_{n+1}|_{\alpha=\alpha-1},\quad \hat{r}_n=r_{n+1}|_{\alpha=\alpha-1},\quad \hat{q}_n=q_{n+1}|_{\alpha=\alpha-1}.$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$现在，我们无法先验地确定与 P 相关联的谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$。此前的移位$\widetilde{}$系数给出了一个谱矩阵，但它不像前面 UL 分解的情形 $\boldsymbol{\Psi}$ 那样容易辨认$\widehat{}$。不过，我们仍然可以应用 [25, 定理 39]，通过对谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 进行 Geronimus 变换来计算 $\boldsymbol{\Psi}$。 $\boldsymbol{\Psi}$ 由下式给出：

$$\widehat{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\boldsymbol{T}_0(x)\boldsymbol{\Psi}_T(x)\boldsymbol{T}_0^*(x),$$

其中（参见（4.8）和（4.5））

$$\boldsymbol{T}_0(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{x-s_0y_0}{x_0} & -\dfrac{y_0t_0}{x_0}\\ s_0 & t_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2t+\alpha+\beta+1}{t+\beta+1}x-\dfrac{(t+\alpha)(t+\alpha+\beta)}{(2t+\alpha+\beta)(t+\beta+1)} & -\dfrac{t(t+\alpha)}{(2t+\alpha+\beta)(t+\beta+1)}\\ \dfrac{t+\alpha+\beta}{2t+\alpha+\beta} & \dfrac{t}{2t+\alpha+\beta}\end{pmatrix},$$

and

$$\boldsymbol{\Psi}_T(x)=\frac{x_0}{t_1}\frac{\boldsymbol{\Psi}(x)}{x}+\left[\frac{x_0}{y_0t_1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & s_0/t_0\end{pmatrix}-\frac{x_0}{t_1}\boldsymbol{M}_{-1}\right]\delta_0(x).$$

$\widehat{\ }$ P 的谱与 P 的谱相同（我们只是将系数向前移动一步，并用 $\alpha-1$替换 α）。因此，与 UL分解的情形一样，我们应当预期， $\boldsymbol{\Psi}$ 中 $\delta_0(x)$前面的矩阵$\widehat{\ }$是零矩阵。按照之前的方法，我们得到

$$\frac{x_0}{t_1}\boldsymbol{T}_0(0)\boldsymbol{M}_{-1}\boldsymbol{T}_0^*(0)=\frac{(2t+\alpha+\beta+2)(t+\alpha+\beta)(t+\alpha)}{(t+1)(2t+\alpha+\beta)(t+\beta+1)}\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{t+\beta+1}{t+\alpha}\\ -\dfrac{t+\beta+1}{t+\alpha} & \left(\dfrac{t+\beta+1}{t+\alpha}\right)^2\end{pmatrix},$$

这与下列矩阵相同

$$\frac{x_0}{y_0t_1}\boldsymbol{T}_0(0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & s_0/t_0\end{pmatrix}\boldsymbol{T}_0^*(0).$$

$\widehat{\ }$因此， $\boldsymbol{\Psi}$ 中 $\delta_0(x)$前面的矩阵是零矩阵。由此可得，谱矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ $\widehat{\ }$为

$$\widehat{\boldsymbol{\Psi}}(x)=\frac{x_0}{t_1}\boldsymbol{T}_0(x)\frac{\boldsymbol{\Psi}(x)}{x}\boldsymbol{T}_0^*(x).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$最后，如果我们按照构造式 (3.9) 中的方法构造矩阵值多项式 $(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq0}$，但使用 P代替 P，则有

$$\int_0^1\widehat{\boldsymbol{Q}}_n(x)\widehat{\boldsymbol{\Psi}}(x)\widehat{\boldsymbol{Q}}_m^*(x)dx=\begin{pmatrix}1/\hat{\pi}_n & 0\\ 0 & 1/\hat{\pi}_{-n-1}\end{pmatrix}\delta_{nm},$$

此处

$$\hat{\pi}_n=\frac{(\alpha+\beta+t+1)_n(-t-1)_{-n}(2n+2t+\alpha+\beta+2)}{(\alpha+t+1)_n(-\beta-t-1)_{-n}(2t+\alpha+\beta+2)},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$与 P 相关联的生灭链 $\{Z_t\colon\ t=0,\ 1,\ \ldots\}$ 将具有与 (3.11) 中类似的 Karlin-McGregor 表示公式，并且同样始终是零常返的。

$\widetilde{\ }$ $\widehat{\ }$注5.1：由 UL 和 LU 达布变换构造的新矩阵值正交多项式族 $(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq0}$ 和 $(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq0}$ 同样是形如 (3.12) 的矩阵值二阶微分算子的特征函数。第一族$\widetilde{\ }$$(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq0}$ 所对应微分算子的系数和特征值由 (3.13) 给出，其中用 $\alpha-1$替换 α。另一方面，第二族 $(\boldsymbol{Q}_n)_{n\geq0}$ 所对应$\widehat{\ }$微分算子的系数和特征值由 (3.13) 给出，其中用 $\alpha-1$ 替换 α，并用 $t+1$替换 t。特别地，这两个族都具有双谱性质。在标量情形下，取所涉及参数的特殊值时，经过达布变换后微分算子的阶总是高于 2。在矩阵情形下，经过一步达布变换后，微分算子的阶可以与原算子的阶相同。这一现象并不新颖，首次出现于 [13]中，当时使用了一种不同于达布变换的方法

。关于达布变换后具有双谱性质的其他例子，参见 [17, 21]。

6. An urn model for the associated Jacobi polynomials

现在，我们为前几节研究的伴随雅可比多项式给出一种瓮模型。为简单起见，我们将把参数 α 和 β 限制在命题 3.1 给出的区域 $\boldsymbol{A}_1 = \{\beta - \alpha + 1 > 0, \alpha > -\beta, \beta < 0\}$ 内（对于其余区域，可以用类似的方法处理）。我们回顾该命题中的结论：为了得到随机矩阵 P，需要将参数 t 选在实数集 (3.4) 中。由于 $-1 < \alpha < 1$, $-1 < \beta < 0$ 且 t 是一个实参数，为了找到一种包含非负数量蓝球或红球的瓮模型，本节将假设

$$\alpha = \frac{1}{A}, \quad \beta = -\frac{1}{B}, \quad t = \frac{1}{T} + K, \quad A, B, T \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \quad K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{6.1}$$

一方面，对区域 $\boldsymbol{A}_1$ 的限制等价于 $AB > A + B$ 和 $A < B$。另一方面，限制条件 (3.4) 给出两种可能：

- $n < t < n - \beta, n \in \mathbb{Z}$。将 (6.1) 代入前面的不等式，可得我们需要 $n < 1/T + K < n + 1/B, n \in \mathbb{Z}$。事实证明，由于 $A, B, T \geq 2$ 和 $K \geq 0$ 都是非负整数，使前面两个不等式同时成立的 $n \in \mathbb{Z}$ 只有一种取值，即 $n = K$；此时我们需要 $T > B$。若 $n < K$，则第一个不等式不可能成立；若 $n > K$，则第二个不等式不成立。
- $n - \alpha < t < n - \alpha - \beta, n \in \mathbb{Z}$。将 (6.1) 代入前面的不等式，可得我们需要 $n - 1/A < 1/T + K < n - 1/A + 1/B, n \in \mathbb{Z}$。同样，事实证明，由于 $A, B, T \geq 2$ 和 $K \geq 0$ 都是非负整数，使前面两个不等式同时成立的 $n \in \mathbb{Z}$ 只有一种取值，即$n = K$；此时我们需要 $B < AT/$（$A + T$）。若 $n < K$，则第一个不等式不可能成立；若 $n > K$，则第二个不等式不成立。

我们将按照第一种可能性来选择 T（对于第二种可能性，我们可以采用类似的方法）。总之，我们的非负参数 A, B, T, K 将受到以下限制

$$A, B, T \geq 2, \quad K \geq 0, \quad AB > A + B, \quad \text{and} \quad A < B < T. \tag{6.2}$$

现在我们重点讨论 (4.1) 中的 UL随机分解 $P = P_U P_L$，其系数 $x_n, y_n, s_n, t_n, n \in \mathbb{Z}$ 由 (4.5) 给出。将 (6.1) 代入这些系数，我们得到

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{B(AT(n+K) + A + T)}{ABT(2n + 2K + 1) + 2AB + T(B - A)}, & x_n &= \frac{A(BT(n+K+1) + B - T}{ABT(2n + 2K + 1) + 2AB + T(B - A)}, \\ s_n &= \frac{ABT(n+K) + AB + T(B - A)}{2ABT(n+K) + 2AB + T(B - A)}, & t_n &= \frac{AB(T(n+K) + 1)}{2ABT(n+K) + 2AB + T(B - A)}, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.3}$$

为简化记号，我们记

$$\begin{aligned} Y_n &= B(AT(n+K) + A + T), & X_n &= A(BT(n+K+1) + B - T, \\ S_n &= ABT(n+K) + AB + T(B - A), & T_n &= AB(T(n+K) + 1), \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.4}$$

于是我们有

$$y_n = \frac{Y_n}{X_n + Y_n}, \quad x_n = \frac{X_n}{X_n + Y_n}, \quad s_n = \frac{S_n}{S_n + T_n}, \quad t_n = \frac{T_n}{S_n + T_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

引理 6.1. 假设 A、B、T、K 是满足 (6.2) 的非负整数。如果 $n + K \geq 0$，那么对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 Y_n、X_n、S_n、$R_n \geq 0$；如果 $n + K < 0$，那么对于所有 $n \in \mathbb{Z}$，都有 Y_n、X_n、S_n、$R_n < 0$。

证明. 由 (6.4) 可知， $Y_n, X_n, S_n, R_n \geq 0$ if

$$n+K \geq \begin{cases} -\frac{1}{T}-\frac{1}{A}, & \text{for } Y_n, \\ -1-\frac{1}{T}+\frac{1}{B}, & \text{for } X_n, \\ -\frac{1}{T}-\frac{1}{A}+\frac{1}{B}, & \text{for } S_n, \\ -\frac{1}{T} & \text{for } T_n. \end{cases}$$

利用 (6.2) 进行直接计算可得

$$-1 < -1-\frac{1}{T}+\frac{1}{B} < -\frac{1}{T}-\frac{1}{A}+\frac{1}{B} < -\frac{1}{T}-\frac{1}{A} < -\frac{1}{T} < 0.$$

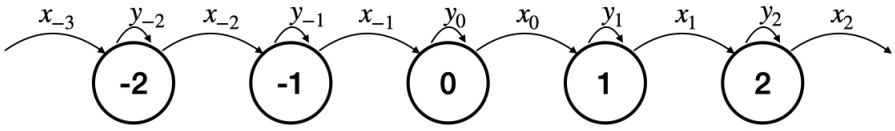
由前面的不等式，现在很容易看出，若 $n+K \geq 0$，则 Y_n， X_n， S_n， $R_n \geq 0$；而若 $n+K < 0$，则对所有 $n \in \mathbb{Z}$, Y_n， X_n， S_n， $R_n < 0$。□

设 $\{Z_t\colon\ t = 0,\ 1,\ \ldots\}$ 为与转移概率矩阵 P(3.2) 相关联的双边生灭链。考虑 (4.1) 中的 UL随机分解 $P = P_U P_L$。我们有，矩阵 P_U 和 P_L 各自都将产生一个基于瓮的抽签模型实验，分别称为实验1和实验 2。将分别与 P_U 和 P_L 相关联的链记为 $\{Z_t^{(i)}\colon\ t = 0,\ 1,\ \ldots\},\ i = 1,\ 2,$ 。在时刻 $t = 0,\ 1,$ ……，，这些链中每条链的状态 $n \in \mathbb{Z}$ 都由蓝球数量减去红球数量给出。因此，状态可以是非负整数，也可以是负整数。最后，我们假设瓮置于一个球池中，其中有无限多个蓝球和红球。

在每次实验开始时，对于 $t = 0,$ 1、……、，我们必须决定瓮中将有多少个蓝球和红球。这取决于状态 $n \in \mathbb{Z}$，具体规则如下:

(1) 如果初始状态 n 满足 $n \geq -K$，那么我们首先在瓮中放入 $n+K$ 个蓝球和 K 个红球。(2) 如果初始状态 n 满足 $n < -K$，那么我们首先在瓮中放入 K 个蓝球和 $-n+K$ 个红球。

实验1（对于 P_U）将给出一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的纯生链，其图示如下:



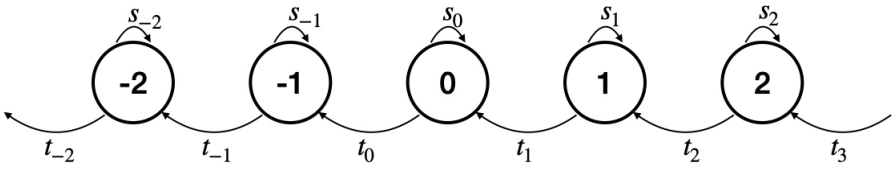
初始时， $Z_0^{(1)} = n$。一方面，如果 $n \geq -K$，那么我们在瓮中放入 $n+K$ 个蓝球和 K 个红球。随后，我们移除或添加球，直到有 X_n 个蓝球和 Y_n 个红球（根据引理 6.1，两者均为非负整数）。按照均匀分布从瓮中随机抽取一个球。我们有两种可能:

- 如果我们抽到一个蓝球（概率为 x_n （6.3）中的概率），就移除/添加球，直到瓮中有 $n+K+1$个蓝球和 K 个红球，然后重新开始。这样我们就有 $Z_{(1)\,1} = n+1$。
- 如果抽到红球（概率为 (6.3) 中的 y_n），那么我们就移除/添加球，直到瓮中有 $n+K$ 个蓝球和 K 个红球，然后重新开始。此时我们有 $Z_{(1)\,1} = n$。

另一方面，如果 $n < -K$，那么我们就在瓮中放入 K 个蓝球和 $-n+K$ 个红球。之后，我们移除/添加球，直到有 $-X_n$ 个蓝球和 $-Y_n$ 个红球（根据引理 6.1，它们都是非负整数）。从瓮中随机均匀地抽取一个球。我们有两种可能：

- 如果我们抽到一颗蓝球（概率为 x_n，见（6.3）），那么就不断移除或添加球，直到瓮中有 $K+1$ 颗蓝球和 $-n+K$ 颗红球，然后重新开始。于是我们得到 $Z_{(1)\,1} = n+1$。
- 如果我们抽到一颗红球（概率为 y_n，见（6.3）），那么就不断移除或添加球，直到瓮中有 K 颗蓝球和 $-n+K$ 颗红球，然后重新开始。于是我们得到 $Z_{(1)\,1} = n$。

实验 2（针对 P_L）将在 $\mathbb{Z}$ 上给出一条纯死亡链，其图示如下：



初始时，$Z_0^{(2)} = n$。另一方面，如果 $n \geq -K$，则将 $n+K$ 蓝球和 K 红球放入瓮中。之后，我们移除/添加球，直到瓮中有 S_n 个蓝球和 T_n 个红球（根据引理 6.1，它们都是非负整数）。从瓮中随机均匀抽取一个球。我们有两种可能：

- 如果抽到蓝球（概率为 s_n，见 (6.3)），则移除/添加球，直到瓮中有 $n+K$ 个蓝球和 K 个红球，然后重新开始。于是我们得到 $Z_{(2)\,1} = n$。
- 如果抽到红球（概率为 t_n，见 (6.3)），则移除/添加球，直到瓮中有 $n+K$ 个蓝球和 $K+1$ 个红球，然后重新开始。于是我们得到 $Z_{(2)\,1} = n-1$。

另一方面，如果 $n < -K$，则将 K 蓝球和 $-n+K$ 红球放入瓮中。之后，我们移除/添加球，直到瓮中有 $-S_n$ 个蓝球和 $-T_n$ 个红球（根据引理 6.1，它们都是非负整数）。从瓮中随机均匀抽取一个球。我们有两种可能：

- 如果抽到蓝球（概率为 s_n，见（6.3）），那么我们就不断取出/放入球，直到瓮中有 K 个蓝球和 $-n+K$ 个红球，然后重新开始。这样我们得到 $Z_{(2)\,1} = n$。
- 如果抽到红球（概率为 t_n，见（6.3）），那么我们就不断取出/放入球，直到瓮中有 K 个蓝球和 $-n+K+1$ 个红球，然后重新开始。这样我们得到 $Z_{(2)\,1} = n-1$。

通过依次反复进行实验1和实验2，可以得到 P（关于 $\mathbb{Z}$）的抽签模型。为方便读者，我们在下方列出了图4、图5和图6，它们说明了根据初始状态 $n \in \mathbb{Z}$的取值，可能出现的3种情况。图4和图5分别对应$n \geq -K$和 $n < -K-1$的情形，此时实验2开始时蓝球和红球的数量不会改变。对于 $n = -K-1$，图6展示了唯一一种在实验2开始时（状态为 $-K$）需要放入不同数量蓝球和红球的情形。

~类似地，达布变换的抽签模型 $P = P_L P_U$ 按相反顺序进行。稍作修改即可为 LU 分解 (4.6) 推导出类似的抽签模型。

References

[1] Askey, R. 和 Wimp, J.，*Associated Laguerre polynomials*, 爱丁堡皇家学会会刊 **96** (1984), 15–37. [2] Assche, W.，*Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project*, 第 I 卷（M. Ismail 编），Cambridge University Press，2020 年。[3] Barrucand, P. 和 Dickinson, D.,*On the associated Legendre polynomials*，载于《正交展开及其连续类比》（D.T. Haimo 编），南伊利诺伊大学出版社，爱德华兹维尔，1968 年，43–50 页。[4] Berezans'kii, Ju M.，*Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators*,《数学专著译丛》**17**，美国数学会，罗得岛，1968 年。

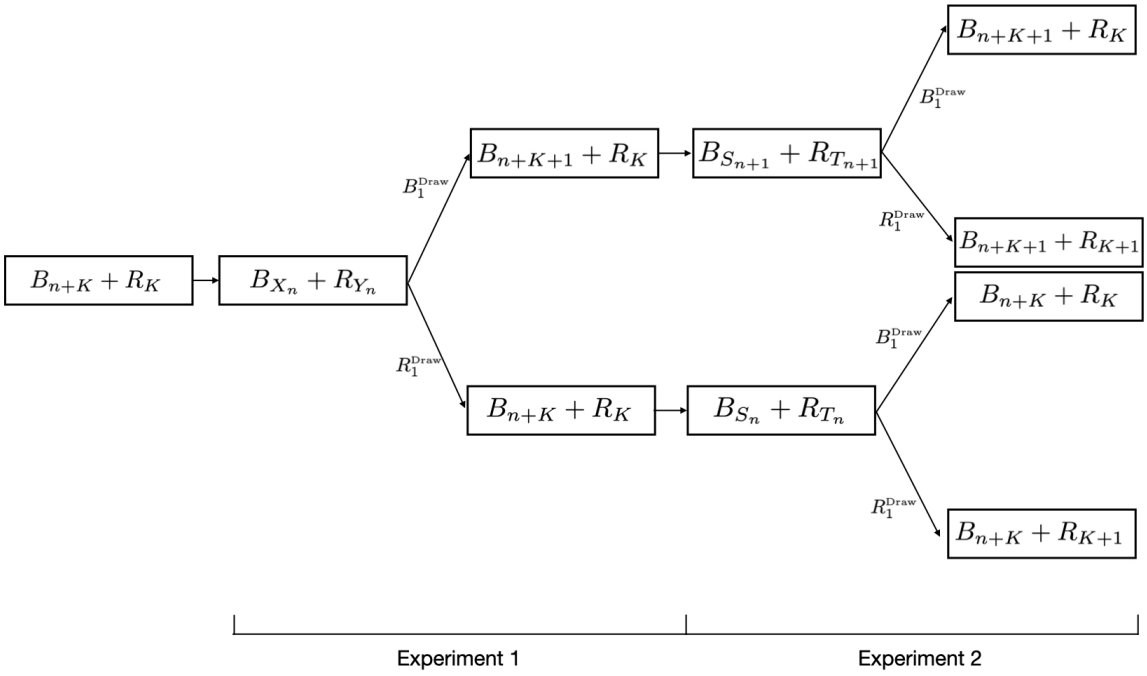


FIGURE 4. $n \geq -K$时实验1和实验2的示意图。方框区域表示瓮中所含蓝球 B_b 和红球 R_r 的数量，因此系统的状态为 $n = b - r$。从瓮中抽出一个球时，分别用 B_1^{Draw}或 R_1^{Draw}表示。

[5] Chihara, T.S., *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, 1968 年。[6] Conolly, B.W., *On randomized random walks*, SIAM Rev.**13** (1971), 81–99. [7] Dai, D., Ismail, M.E.H. 和 Wang, X., *Doubly infinite Jacobi matrices revisited: resolvent and spectral measure*, Adv. Math. **343** (2019), 157–192. [8] Dette, H., Reuther, B., Studden 和 Zygmunt, M., *matrix* **29** 2006 117 142 *Matrix measures and random walks with a block tridiagonal transition* , SIAM J. Matrix Anal. Applic. ( ), – . [9] Di Crescenzo, A., Iuliano 和 Martinucci, B., *On a bilateral birth-death process with alternating rates*, Ric. Mat.**61** (2012), 157–169. [10] Dom´ınguez de la Iglesia, M., , Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 。[11] Dur´an, A.J. 和 Gr¨unbaum, F.A., *Orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, Internat. Math. Research Notices, 2004: **10** (2004), 461–484. [12] Dur´an, A.J. 和 Gr¨unbaum, F.A., *A survey on orthogonal matrix polynomials satisfying second order differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **178** (2005), 169–190. [13] Dur´an, A.J. 和 de la Iglesia, M.D., , Int. Math. Res. Not. ( ) rnn . [14] Gr¨unbaum, F.A., *Random walks and orthogonal polynomials: some challenges*, Probability, Geometry and Integrable Systems, MSRI Publication, 卷 **55**, 2007 年。[15] Gr¨unbaum, F.A., *Second order differential operators having several families of orthogonal matrix polynomials as eigenfunctions* **2008** 2008 084 *Orthogonal polynomials in the spectral analysis of Markov processes. Birth-death models and diffusion* **181**, 2021 *QBD processes and matrix orthogonal polynomials: some new explicit examples*, Numerical Methods for Structured Markov Chains, 编者 D. Bini, B. Meini, V. Ramaswami, M.A. Remiche 和 P. Taylor, Dagstuhl Seminar Proceedings, 2008 年。

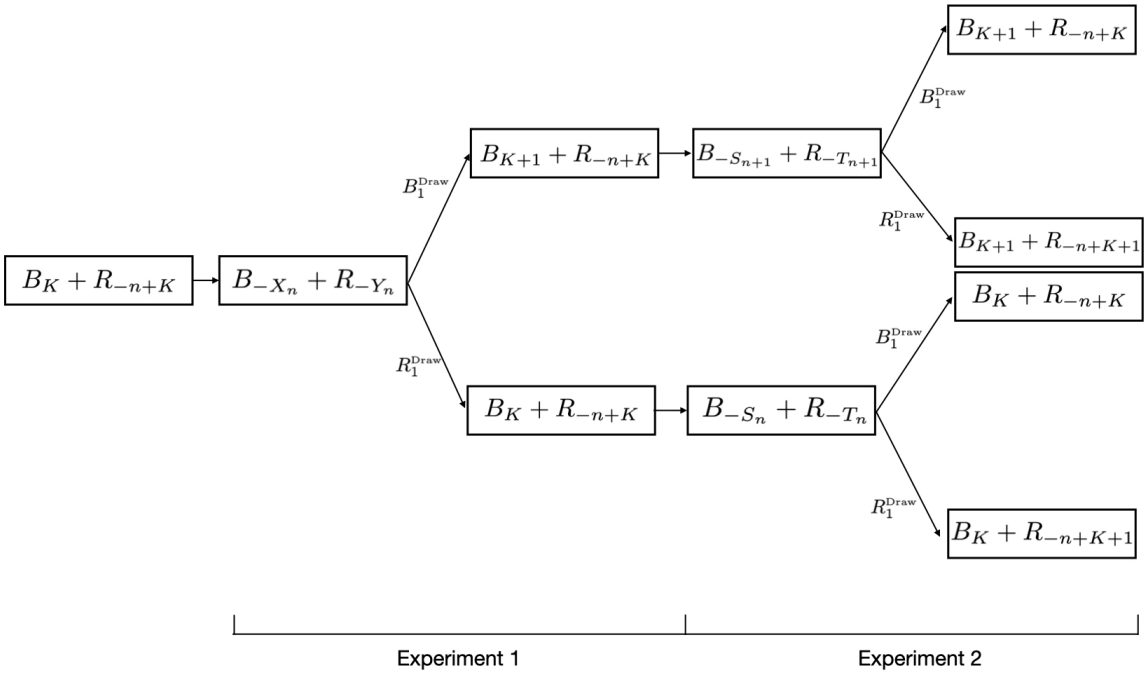


FIGURE 5. 当 $n < -K-1$ 时，实验1和实验2的示意图。方框区域表示瓮中蓝球 B_b 和红球 R_r 的数量，因此系统的状态为 $n = b - r$。从瓮中取出一个球时，用 B_1^{Draw} 或 R_1^{Draw} 表示。

[16] Gr¨unbaum, F.A., *An urn model associated with Jacobi polynomials*, 《应用数学与计算科学通讯》**5** （2010），55–63。[17] Gr¨unbaum, F.A., *The Darboux process and a noncommutative bispectral problem: some explorations and challenges*, 载于 E.P. van den Ban 和 J.A.C. Kolk（编），*Geometric Aspects of Analysis and Mechanics: In Honor of the 65th Birthday of Hans Duistermaat* 2011 ，《数学进展》第292卷，施普林格，。[18] Gr¨unbaum, F.A. 和 Haine, L., *A theorem of Bochner, revisited*, 载于《可积系统的代数方面》（A.S. Fokas 和 I.M.Gelfand 编），《非线性微分方程及其应用进展》，第26卷，Birkhauser，波士顿，1997，143–172。[19] Gr¨unbaum, F.A. 和 Haine, L., *Associated polynomials, spectral matrices and the bispectral problem*, 《分析方法与应用》**6** （1999），209–224。[20] Gr¨unbaum, F.A. 和 de la Iglesia, M.D., *Stochastic LU factorizations, Darboux transformations and urn models*, 《应用概率杂志》**55** （2018），862–886。[21] Gr¨unbaum, F.A. 和 de la Iglesia, M.D.，*Stochastic Darboux transformations for quasi-birth-and-death processes and urn models* **478** 2019 634 654 ，《数学分析与应用杂志》（），–。[22] Gr¨unbaum, F.A.、Pacharoni, I. 和 Tirao, J.A., *Matrix-valued spherical functions associated to the complex projective plane*, 《泛函分析杂志》**188** （2002），350–441。[23] Gr¨unbaum, F.A.、Pacharoni, I. 和 Tirao, J.A., *A matrix-valued solution to Bochner's problem*, 《物理学A：数学与普通》**34** （2001），10647–10656。[24] de la Iglesia, M.D., *Spectral analysis of bilateral birth-death processes: some new explicit examples*, 《应用概率进展》**54** （2022），1193–1221。[25] de la Iglesia, M.D. 和 Juarez, C., *The spectral matrices associated with the stochastic Darboux transformations of random walks on the integers* **258** 2020 105458 ，《逼近理论杂志》（），。

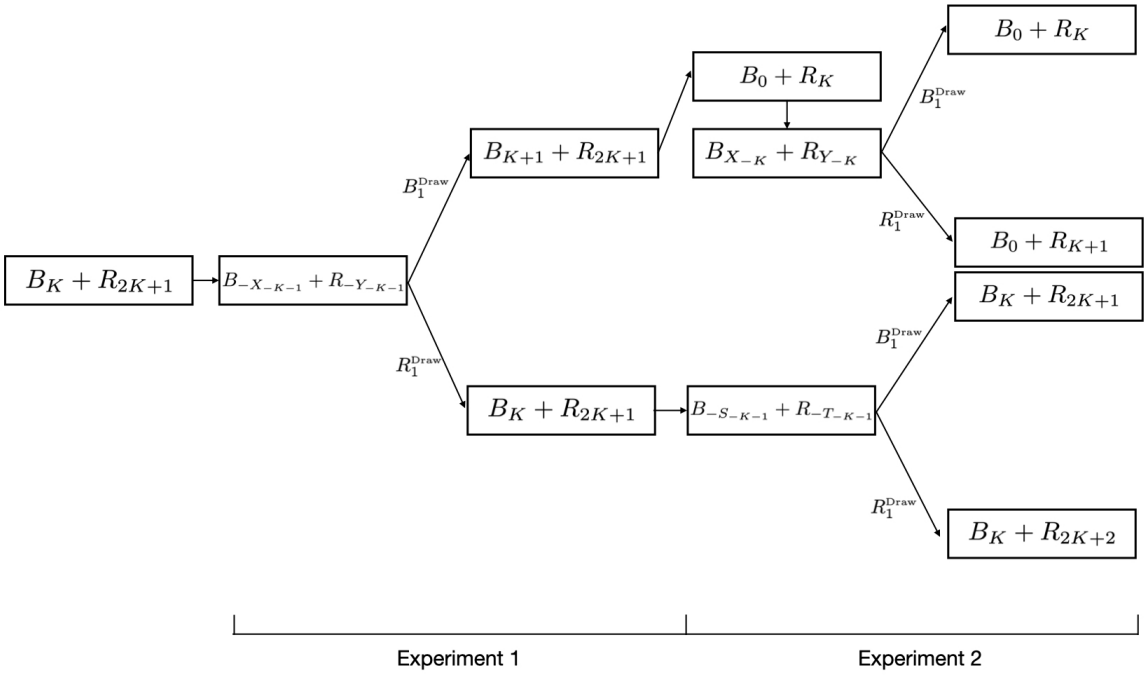


FIGURE 6. $n = -K-1$时实验1和实验2的示意图。方框区域表示瓮内蓝球 B_b 和红球 R_r 的数量，因此系统的状态为 $n = b - r$。从瓮中取出一个球时，用 B_1^{Draw}或 R_1^{Draw}表示。

[26] de la Iglesia, M.D. 和 Juarez, C., *Absorbing-reflecting factorizations for birth-death chains on the integers and their Darboux transformations* **266** 2021 105583, 27 ，《逼近理论杂志》（），第[27] Ismail, M.E.H.、Letessier, J.、Valent, G. 和 Wimp, J.， *Associated Wilson polynomials*，《加拿大数学杂志》**42**（1990），659–695。[28] Ismail, M.E.H.、Letessier, J.、Masson, D. 和 Valent, G.， *Birth and death processes and orthogonal polynomials*，载于《正交多项式》，P. Nevai（编），Kluwer学术出版社（1990），229–255。[29] Ismail, M.E.H. 和 Masson, D.， *Two families of orthogonal polynomials related to Jacobi polynomials*，《落基山数学杂志》**21**（1991），359–375。[30] Ismail, M.E.H. 和 Rahman, M.， *The associated Askey-Wilson polynomials*，《美国数学会汇刊》**328**（1991），201–237。[31] Ismail, M.E.H. 和 Stampach, F.， *Spectral analysis of two doubly infinite Jacobi matrices with exponential entries*，《泛函分析杂志》**276**（2019），1681–1716。[32] Karlin, S. 和 McGregor, J.， *The differential equations of birth and death processes, and the Stieltjes moment problem*，《美国数学会汇刊》，**85**（1957），489–546。[33] Karlin, S. 和 McGregor, J.， *The classification of birth-and-death processes*，《美国数学会汇刊》，**86**（1957），366–400。[34] Karlin, S. 和 McGregor, J.， *Random walks*，《伊利诺伊数学杂志》，**3**（1959），66–81。[35] Latouche, G. 和 Ramaswami, V.， *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling*，《ASA-SIAM统计与应用概率丛书》，1999。[36] Masson, D.R. 和 Repka, J.， *Spectral theory of Jacobi matrices in $\ell^2(\mathbb{Z})$ and the su(1,1) Lie algebra*，《SIAM数学分析杂志》，**22**（1991），1131–1146。[37] Matveev, V.B. 和 Salle, M.A.， *Differential-difference evolution equations II: Darboux transformation for the Toda lattice*，《数学物理快报》**3**（1979），425–429。[38] Neuts, M.F.， *Structured Stochastic Matrices of $M/G/1$ Type and Their Applications*，Marcel Dekker，纽约，1989。

[39] Palama, G. *Polinomi piu generali di altri classici e dei loro associati e relazioni tra essi funzioni di seconda specie*,《帕尔马大学数学杂志》**4** (1953), 363–383. [40] Parthasarathy, P.R. 和 Lenin, R.B.,

Birth and death process (BDP) models with applications: queueing communication ,,,. systems chemical models biological models: the state-of-the-art with a time-dependent perspective

数学与管理科学丛书第 51 卷，American Sciences Press，哥伦布，2004 年。[41] Pruitt, W.E., *Bilateral birth and death processes*, 技术报告，应用数学与统计实验室，斯坦福大学，加利福尼亚州，1960 年。[42] Pruitt, W.E., *Bilateral birth and death processes*,《美国数学会汇刊》**107** (1962), 508–525. [43] Tarabia, A.M.K. 和 El-Baz, A.H., *Transient solution of a random walk with chemical rule*, Physica A **382** (2007), 430–438. [44] Wimp, J., *Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some applications*,《加拿大数学杂志》**34** (1987), 983–1000.Manuel D. de la Iglesia, Instituto de Matemáticas,
Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior,C.U., 04510, Ciudad de México, México.*Email address*: mdi29@im.unam.mxClaudia Juarez, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,
Universidad Nacional Autóno

MA

de México, Circuito Escolar 3000, C.U., 04510, Ciudad de México, México.
Email address: claudiajrz@sigma.iimas.unam.mx