arXiv:2301.07586v1 [math.GR] 18 Jan 2023

自由亚交换群具有置换稳定性

Hiroki Ishikura

2023年1月18日

摘要

我们证明，所有有限生成自由亚交换群都是置换稳定的。这部分回答了 Levit 和 Lubotzky 提出的问题：所有有限生成亚交换群是否都具有置换稳定性。我们的证明拓展了 Levit-Lubotzky 方法的适用范围。该方法用于证明 [LL22], 中有限生成阿贝尔群的置换亚交换群的置换稳定性；我们将其拓展至非分裂亚交换群和非置换型亚交换群。

1 引言

近年来，群的置换稳定性受到关注，许多群已被发现是置换稳定的。本文旨在给出这类群的一个新例子。

定义 1.1. 设 Sym(n) 为 n 次对称群。Sym(n) 上的汉明度量 d_{H} 定义为 $d_{\mathrm{H}}(\sigma, \tau) = \frac{1}{n}|\{k \in \{1, ..., n\} \mid \sigma(k) \neq \tau(k)\}|$。

定义 1.2. 设 G 为可数群。近似同态是一个映射序列 $(\phi_n : G \to \mathrm{Sym}(n))_n$，满足对于每个 $g, h \in G$，都有 $d_{\mathrm{H}}(\phi_n(gh)\ \phi_n(g)\phi_n(h)) \to 0\ (n \to \infty)$。

若对每个近似同态 $(\phi_n : G \to \mathrm{Sym}(n))_n$，都存在一个同态序列 $(\psi_n : G \to \mathrm{Sym}(n))_n$，使得对每个 $g \in G$，都有 $d_{\mathrm{H}}(\phi_n(g)\ \psi_n(g)) \to 0\ (n \to \infty)$，则称 G 为置换稳定（简称 P-稳定）。

设 F 是一个自由群，F'' 是它的二阶导出子群。群 F/F'' 称为自由亚交换群。我们的主要定理如下：

定理 1.3. 所有有限生成自由亚交换群都是 P-稳定的。

此外，可以去掉有限生成这一假设。

推论 1.4. 所有可数自由亚交换群都是 P-稳定的。

从历史上看，“几乎交换”的矩阵是否“接近”交换矩阵，是算子理论中的一个经典问题。例如，设 $U(n)$ 为 n 次酉群，$\|\cdot\|$ 为 $n \times n$ 矩阵集合上的一个范数。

若 $A_n, B_n \in U(n)$ 满足 $\|A_nB_n - B_nA_n\| \to 0\,(n \to \infty)$，那么是否存在 $A'_n, B'_n \in U(n)$，使得 $A'_nB'_n = B'_nA'_n$ 且 $\|A_n - A'_n\| + \|B_n - B'_n\| \to 0\,(n \to \infty)$? 这是在酉矩阵和范数的意义下，关系 $xy = yx$ 是否稳定的问题。对于算子范数 [V83], ，答案是“否”；但对于归一化 Hilbert-Schmidt 范数 [G10]，答案是“是”。P-稳定性是这种稳定性的离散版本，也就是说，它考虑的是置换而非矩阵。事实上，若将 $(U(n)\ \|\cdot\|)$ 替换为 $(\mathrm{Sym}(n)\ d_{\mathrm{H}})$，那么问题就是群 $\mathbb{Z}^2 = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$ 是否 P- 稳定。

最早的 P-稳定群例子见于 [GR09], ，其中证明了所有有限群都是 P-稳定的。在 [AP15], 中，证明了所有有限生成阿贝尔群（例如 $\mathbb{Z}^2$）都是 P-稳定的。

最近， [BLT19], 取得了重大进展，揭示了 P-稳定性与不变随机子群之间的联系。

定理 1.5（[BLT19，定理 1.3]）。设 G 是一个有限生成可和群。那么， G 是 P-稳定的，当且仅当 G的每个不变随机子群都是余 sofic。

相关术语的定义见第 2.1 节。不变随机子群这一概念同时推广了正规子群和格，由 [AGV14]引入。余 sofic 性由 [G18]引入。定理 1.5 被用于找出大量 P-稳定群，例如几乎多项式循环群、鲍姆斯拉格–索利塔尔群 $B(1, n)$（对所有 $n \in \mathbb{Z}$ [BLT19], ）、Grigorchuk 群 [Z19], 以及其他不可数多个群 [LL19]。

然而，即使对于可解群，刻画任意不变随机子群的余 sofic 性仍然很困难。Levit 和 Lubotzky [LL22] 结合定理 1.5 与逐点遍历定理，给出了以下 P-稳定的有限生成亚交换群示例：

定理 1.6（[LL22，定理 1.4]）。设 A 和 Q 是有限生成阿贝尔群， X 是一个集合， Q 在其上作用且只有有限多个轨道。那么，由 Q 在 X 上的作用诱导的半直积 $Q \ltimes \bigoplus_X A$ 是 P-稳定的。

在 [LL22 第 1.5], 节中，作者提出了一个问题：所有有限生成亚交换群是否都是 P-稳定的。我们的定理 1.3 对这一问题给出了肯定回答，适用于所有作为非分裂亚交换群基本示例的自由亚交换群。

备注 1.7。设 A、Q、X 与定理 1.6 中相同。我们将 $N = \bigoplus_X A$ 视为一个 $\mathbb{Z}[Q]$-模。若 Q 对 N 的扩张所诱导的共轭作用在 N 上给出指定的 $\mathbb{Z}[Q]$-结构，则称该扩张为 [LL22]中的置换亚交换群。他们猜想所有置换亚交换群都是 P-稳定的。群 F_2/F_2''是置换亚交换群，但若 $d \geq 3$，则 F_d/F_d''不是（见定理 4.4）。

注记 1.8. 已经证明，有限生成自由亚交换群是 Hilbert-Schmidt 稳定的，也就是说，相对于酉群和归一化 Hilbert-Schmidt 范数 [LV22]，它们是稳定的。

我们对定理 1.3 的证明基本沿用了 [LL22] 的方法。主要部分是构造一个具有特殊性质的 Følner 序列（见第 2.1 节）。不过， [LL22] 的情形与我们的情形有两点不同。首先，自由亚交换群不是可分裂亚交换群，也就是说，商群 $Q = F_d/F_d'$ 到 F_d/F_d'' 不存在自然的提升。因此，我们必须选取一个提升并据此进行研究。引理 5.1 是一个简单但有用的观察。第二，如果 $d \geq 3$，那么 F_d/F_d'' 就不是置换亚交换的，这使得交换子子群 $N = F_d'/F_d''$ 上的 $\mathbb{Z}[Q]$ 结构变得复杂。要应用 [LL22], 的方法，我们需要找到定理 2.14 中所述的一列子群 $M_n \leq N$，这是最具挑战性的部分。命题 4.14 对于找到这样的子群至关重要。

推论 1.4 由定理 1.3 和自由亚交换群的普适性推出。我们注意到，P-稳定群的递增并未必仍是 P-稳定群。例如，存在一个非残有限的无限生成阿贝尔群。它是由有限生成阿贝尔群递增并而成的，而这些群都是 P-稳定的；但它本身不是 P-稳定的，因为可 amenable 的 P-稳定群必须是残有限的 [GR09]。

本文结构。第 2 节回顾 [LL22] 建立的术语和工具。第 3 节考察变量有限、系数取自 $\mathbb{Z}$ 的 Laurent 多项式环中的除法。这是第 4 节研究自由亚交换群的交换子子群的准备工作。随后，我们在第 5 节证明定理 1.3，并在第 6 节证明推论 1.4。

致谢。感谢我的导师木田芳孝教授在我攻读硕士学位期间一直给予支持。

2 Levit-Lubotzky 方法

2.1 Weiss 逼近

定义 2.1（[G18，定义 15]）。设 G 是一个可数群。令 Sub(G) 为 G的子群集合，并将其视为 2^G 在乘积拓扑下的一个闭子空间。赋予集合 C(Sub(G))* 弱*拓扑。G 的不变随机子群（简称 IRS）是 Sub(G上的一个博雷尔概率测度，且在 G的共轭作用下不变。G 的有限指数不变随机子群是 G 的一个不变随机子群，其支撑包含于 G的有限指数子群集合中。G 的余 sofic 不变随机子群是 G的有限指数不变随机子群的弱*极限。

定义 2.2（[LL22，第 3] 节）。设 G 是一个可数群， $H \leq G$ 是一个子群。令 $\delta_H \in$ C(Sub(G))* 表示 H上的狄拉克测度。对于一个非空有限子集 $F \subset G$，令 $F * H = \frac{1}{|F|}\sum_{g\in F} \delta_{gHg^{-1}} \in$ C(Sub(G))*。令 N$_G$(H) 表示 H 在 G中的正规化子。

若 $G = \bigsqcup_{g\in F} gH$，则子集 $F \subset G$ 是 H 在 G 中的横截集。此外，若 F 是 H 在 G 中的有限个横截集的不交并，则称 F 是 H 在 G 中的有限对一横截集。

设 $F_n \subset G$ 是一列非空有限子集，$K_n \leq G$ 是一列有限指数子群。若对于每个 n 以及 C(Sub(G))* 中的 $F_n * H - F_n * K_n \to 0$，$F_n$ 都是 $\mathrm{N}_G(K_n)$ 在 G 中的有限对一横截集，则称二元组序列 (K_n, F_n) 是 H 的 Weiss 逼近。

定理 2.3（[LL22，定理 3.10]）。设 μ 是可和群G 的不变随机子群，且（F_n）是 G的 Følner 序列。假设对 μ-几乎处处的 $H \in$ Sub(G)，存在一列有限指数子群 $K_n \leq G$，使得偶对序列（K_n，F_n）是 H的 Weiss 逼近。那么，μ 是 G的余 sofic 不变随机子群。

命题 2.4（[LL22，命题 5.3]）。设 G 是有限生成群。假设正规子群 $N \trianglelefteq G$ 和商群 G/N 都是阿贝尔群。设μ 是 G的不变随机子群。那么，对 μ-几乎处处的 $H \in$ Sub(G)，$[N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty$ 成立。

以下推论用于 [LL22 的第 11] 节，以证明其主要定理。我们明确陈述该推论，以简化论证，并为方便读者给出证明。

推论 2.5（[LL22]）。设 G 是一个有限生成群。假设 $N \trianglelefteq G$ 和 $Q = G/N$ 是阿贝尔群。再假设每个子群 $R \leq Q$ 都存在一个 Følner 序列（F_n），其中 G 满足以下性质（#$_R$）：（#$_R$）若 $H \leq G$ 是一个满足 $HN/N = R$ 和 $[N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty$ 的子群，则存在一个有限指数子群序列 $K_n \leq G$，使得成对序列（K_n，F_n）是 H 的 Weiss 逼近。

那么 G 是 P-稳定的。

证明。根据定理 1.5，只需证明 G 的每个不变随机子群都是余 sofic。设μ 是 G 的一个不变随机子群。根据 Krein-Milman 定理，μ 是 G 的遍历不变随机子群的凸组合的弱*极限。因此，我们不妨假设 μ 是遍历的。由于映射 $H \in$ Sub(G) $\mapsto HN/N \in$ Sub(Q) 是 G-不变的，它在一个 μ-余测集上为常值。设 $R \in$ Sub(Q) 为该常值。根据命题 2.4，集合

$$A := \{H \in \mathrm{Sub}(G) \mid HN/N = R \text{ and } [N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty\}$$

是 μ-余零的。根据性质 (#$_R$)，对于每个 $H \in A$，都存在一个有限指数子群序列 $K_n \leq G$，使得 (K_n, F_n) 是 H 的 Weiss 逼近。根据定理 2.3，μ 是余 sofic 的。□

2.2 成为 Weiss 逼近的充分条件

设 G 是一个群，$N \trianglelefteq G$ 是一个正规子群。令 $Q = G/N$。

记号 2.6（[LL22，第 4 节.1]）。对于子群 $H \leq G$，我们定义

- $Q_H = HN/N \leq Q$,
- $N_H = N \cap H$，并且
- 令 $\alpha_H : Q_H \to H/N_H$ 为自然同构。

我们记作 $[H]=[Q_H,N_H,\alpha_H]$。注意，对于每个 $\overline{q\in Q_H}$，都有 $\alpha_H(q)=q$，其中 $\xi\in H/N_H\mapsto\overline{\xi}\in G/N$ 表示自然商映射。

命题 2.7（[LL22，命题 4.1]）。令 $R\leq Q$，$M\leq N$ 为子群，且 $\alpha\colon R\to \mathrm{N}_G(M)/M$ 为满足以下条件的同态：对于每个 $q\in R$，都有 $\alpha(q)=q$。那么存在唯一的子群 $H\leq G$，使得 $[H]=[R,M,\alpha]$。

令 $q\in Q\mapsto\widehat{q}\in G$ 为商映射的一个（集合论）截面。对于一个子集 $I\subset Q$，我们定义 $I=\{\widehat{q}\in G\mid q\in I\}$。

命题 2.8（[LL22，命题 4.3]）。令 $H\leq G$ 为一个子群，并令$I\subset Q$ 和 $T\subset N$ 分别为 Q_H 在 Q 中以及 N_H 在 N 中的横截集。那么，IT 是 H 在 G 中的一个横截集。

假设 G 是有限生成的，并且在本节余下部分中，Q 和 N 均为阿贝尔群。我们对 N 中的群运算使用加法记号（对 Q 使用乘法记号）。Q 对 N 的作用由 G 的共轭作用诱导。

命题 2.9（[LL22，命题 5.2]）。设 $H\leq G$ 是一个子群，且 HN 是有限生成的。那么对于任意有限子集 $T\subset N$，存在一个有限指数子群 $M\leq N$，使得 $N_H\cap T=M\cap T$、$N_H\leq M$，并且 M 是Q_H-不变的。

定义 2.10。设 Γ 和 Λ 是群，Δ、$\Delta_n\leq\Lambda$ 是 $n\in\mathbb{N}$ 的子群。按照 [LL22，定义 6.1]，，若同态序列 $\phi_n\colon\Gamma\to\mathrm{N}_\Lambda(\Delta_n)/\Delta_n$ 与同态 $\phi\colon\Gamma\to\mathrm{N}_\Lambda(\Delta)/\Delta$ 相容，则称其相容；也就是说，对于每个 $\gamma\in\Gamma$，都存在 $\lambda\in\Lambda$，使得对于每个 n，$\phi_n(\gamma)=\lambda\Delta_n$ 且 $\phi(\gamma)=\lambda\Delta$。

命题 2.11（[LL22，推论 6.3]）。设 $H\leq G$ 是一个子群，且 $N_n\leq N$ 是由 Q_H-不变子群组成的序列，并满足 $N_n\to N_H$ 属于 $\mathrm{Sub}(N)$。那么存在同态 $\alpha_n\colon Q_H\to\mathrm{N}_G(N_n)/N_n$，对所有充分大的 n 均有定义，使得序列 α_n 与 α_H 相容。

定义 2.12（[LL22，定义 7.2]）。设 $T_n\subset N$和 $F_n\subset G$为非空有限子集序列。若对每个 $g\in G$ 和每个有限子集 $\Phi\subset N$，都有 T_n 适配于序列 F_n，则称序列 T_n 适配于序列 F_n，

$$\frac{|\{h\in F_n\mid [g,h]+\Phi\subset T_n\}|}{|F_n|}\to 1\ (n\to\infty). \tag{2.1}$$

注 2.13。令 g 为 G的恒等元，则收敛 (2.1) 蕴含对每个充分大的 n 都有 $\Phi\subset T_n$。因此，若 T_n 适配于某个 F_n，则$\bigcup_n\bigcap_{k\geq n}T_k=N$成立。

定理 2.14（[LL22，定理 7.5]）。设 $H\leq G$ 是一个满足 $[N:\mathrm{N}_N(H)]<\infty$ 的子群。对于每个 $n\in\mathbb{N}$，设 $K_n\leq G$ 是一个满足$[K_n]=[Q_n,N_n,\alpha_n]$的有限指数子群，$M_n\leq N$ 是一个子群，且 $I_n\subset Q$ 和 $T_n\subset M_n$ 是非空有限子集。假设它们满足以下条件：

(i) $Q_H \le Q_n$ 和 $Q_n \to Q_H$ 属于 Sub(Q)。
(ii) M_n 是 Q_H-不变的。(iii) 序列 $\alpha_n|_{Q_H}$ 与 α_H 相容。(iv) $N_H \cap T_n = N_n \cap T_n$ 和 $N_H \cap M_n \le N_n$.$\widehat{\ }$ (v) 序列 T_n 适配于序列 I_n

.

那么对于任意非空有限子集序列 $P_n \subset M_n$，我们有

$$(\widehat{I_n P_n}) * H - (\widehat{I_n P_n}) * K_n \to 0 \ in \ \mathrm{C}(\mathrm{Sub}(G))^*$$

注记 2.15。 [LL22, 定理 7.5] 的原始陈述与上述内容不同。他们假设以下两个条件（见 [LL22, 定义 7.1 和 7.3]）：

(a) (K_n, M_n, T_n) 是 H 的受控逼近。

$\widehat{\ }$(b) $I_n P_n$ 适配于 (K_n, M_n, T_n)。
条件 (a) 声称条件 (i)-(iv) 和 $\bigcup_n \bigcap_{k \ge n} T_k = N$ 成立。最后一个条件由注记 2.13 根据条件 (v) 得出。条件 (b) 强于条件 (v)，但他们在证明该定理时只使用条件 (v)。

3 Laurent 多项式的除法

全文中，若无歧义，我们将区间 $I \subset \mathbb{R}$ 理解为交集 $I \cap \mathbb{Z}$。令 $\mathbb{N}$ 为正整数集合。令$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ 为上取整函数，$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ 为下取整函数。

定义 3.1. 设 $\phi \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$ 为非零多项式。令 m 为 s 在 ϕ 中的最小次数，并令 n 为非负整数，使得 $m + n$ 为 s 在 ϕ中的最大次数。我们称整数 n 为 ϕ的次数。若 s^m 和 s^{m+n} 的所有系数均属于 $\{\pm 1\}$，则称 ϕ 为首一的。

对于 $n \in \mathbb{N}$，定义

$$M(n; s) = \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{s^m \mid -\lceil n/2 \rceil < m \le \lfloor n/2 \rfloor\} \subset \mathbb{Z}[s^{\pm 1}].$$

引理 3.2. 设 $\phi \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$ 为次数为 $n > 0$的首一多项式。那么对于每个 $\psi \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$, 都存在 $\theta \in \mathbb{Z}[s^{\pm 1}]$，使得 $\psi - \theta\phi \in M(n; s)$。

证明。设 m 是 ϕ 中 s 的最小次数。由于 $M(n; s)$ 对系数属于 $\mathbb{Z}$ 的线性组合封闭，我们不妨设 $\psi = s^k$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。假设 $k > 0$。我们不妨设 ϕ 中 s^{n+m} 的系数为 1。由于 $s^{-m}\phi \in \mathbb{Z}[s]$ 按通常意义是一个关于 s 的首一多项式，次数为 n，因此存在 $\theta \in \mathbb{Z}[s]$，使得多项式

$$s^{k+\lceil n/2 \rceil - 1} - \theta \cdot s^{-m}\phi \in \mathbb{Z}[s]$$

s 的次数小于 n。然后将 $s^{1-\lceil n/2\rceil}$ 乘以这个多项式，我们得到

$$s^k - s^{-m+1-\lceil n/2\rceil}\theta\cdot\phi \in M(n;s).$$

如所需。接下来，设 $k\le 0$。我们可以假设 s^m 在 ϕ 中的系数为 1。由于 $s^{-n-m}\phi\in\mathbb{Z}[s^{-1}]$ 是关于 s^{-1} 的首一多项式，且按通常意义其次数为 n，因此存在 $\theta\in\mathbb{Z}[s^{-1}]$，使得多项式

$$s^{k-\lfloor n/2\rfloor} - \theta\cdot s^{-n-m}\phi \in \mathbb{Z}[s^{-1}]$$

s^{-1} 的次数小于 n。于是将 $s^{\lfloor n/2\rfloor}$ 乘以这个多项式，得到

$$s^k - s^{-n-m+\lfloor n/2\rfloor}\theta\cdot\phi \in M(n;s)$$

如所需。 □

设 $d\in\mathbb{N}$。现在考虑环 $\mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$。对于 $n_1,...,n_d\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，令

$$\begin{aligned} M(n_1,...,n_d;s_1,...,s_d) &= \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\{s_1^{m_1}...s_d^{m_d} \mid m_i\in(-\lceil n_i/2\rceil,\lfloor n_i/2\rfloor] \text{ for every } i\} \\ &\subset \mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}], \end{aligned}$$

其中 $(-\lceil\infty/2\rceil,\lfloor\infty/2\rfloor]$ 表示 $(-\infty,\infty)$。

命题 3.3。设 $1\le c\le d$。对于每个 $1\le i\le c$，令 $\phi_i\in\mathbb{Z}[s_i^{\pm1}]$ 为次数为 $n_i>0$ 的首一多项式。那么对于每个 $\psi\in\mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$，存在 $\theta_i\in\mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$（对应 $1\le i\le c$）以及 $\lambda\in M(n_1,...,n_c,\infty,...,\infty;\ s_1,...,s_d)$，使得

$$\psi=\sum_{i=1}^{c}\theta_i\phi_i+\lambda.$$

此外，这样的 $\lambda\in M(n_1,...,n_c,\infty,...,\infty;\ s_1,...,s_d)$ 是唯一的，也就是说，若

$$\psi=\sum_{i=1}^{c}\theta_i'\phi_i+\lambda'$$

满足 $\theta_i'\in\mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$ 且 $\lambda'\in M(n_1,...,n_c,\infty,...,\infty;\ s_1,...,s_d)$，则 $\lambda=\lambda'$。

证明。首先，我们用关于 c 的归纳法证明其存在性。根据归纳假设，存在 $\theta_i\in\mathbb{Z}[s_1^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$ 使得

$$\psi-\sum_{i=1}^{c-1}\theta_i\phi_i\in M(n_1,...,n_{c-1},\infty,...,\infty;s_1,...,s_d).$$

因此，我们可以假设 $\psi\in M(n_1,...,n_{c-1},\infty,...,\infty,s_1,...,s_d)$ 且 $\psi=s_1^{m_1}...s_{c-1}^{m_{c-1}}\psi'$，$m_i\in(-\lceil n_i/2\rceil,\lfloor n_i/2\rfloor]$，$\psi'\in\mathbb{Z}[s_c^{\pm1},...,s_d^{\pm1}]$，并进一步令 $\psi'=\sum_k s_c^k\psi_k'$，由于 $\mathbb{Z}$ 中的多项式均具有这种形式，且系数属于 $\mathbb{Z}$，因此 $M(n_1,...,n_{c-1},\infty,...,\infty;\ s_1,...,s_d)$ 中的每个元素都是这类多项式的线性组合。于是 ψ' 可表示为

对于某个 $\psi'_k \in \mathbb{Z}[s_{c+1}^{\pm 1}, ..., s_d^{\pm 1}]$。由于 $M(n_1, ..., n_c, \infty, ..., \infty; s_1, ..., s_d)$ 在乘以 $\mathbb{Z}[s_{c+1}^{\pm 1}, ..., s_d^{\pm 1}]$ $\psi' = s_c^k$ $k \in$ 中的元 $\mathbb{Z}$ 3 2, $\theta \in \mathbb{Z}[s_c^{\pm 1}]$ $\psi' - \theta\phi_c \in M$ n_c s_c 素后仍保持封闭，因此我们可以假设令 。由引理 ，存在 使得 (;)。于是我们得到

$$\psi - s_1^{m_1} \cdots s_{c-1}^{m_{c-1}} \theta \cdot \phi_c = s_1^{m_1} \cdots s_{c-1}^{m_{c-1}} (\psi' - \theta\phi_c) \in M(n_1, ..., n_c, \infty, ..., \infty; s_1, ..., s_d).$$

存在性得证。

现在证明唯一性。只需证明，若 $\psi = \sum_{i=1}^c \theta_i \phi_i \in$ M ... ∞ ... ∞ ... $(n_1, , n_c, , , ; s_1,$ $, s_d)$ 满足 $\theta_i \in \mathbb{Z}[s_1^{\pm 1}, ..., s_d^{\pm 1}]$，则 $\psi = 0$。我们称这样的 $\Theta := (\theta_i)_{i=1}^c$ 为 ψ 的一个表示。设 $\psi \neq 0$。令 $\sigma(\Theta)$ 为满足 $\theta_i \neq 0$ 的最小整数 $i \in [1, c]$ 。不妨设 $\sigma(\Theta)$ 在 ψ 的所有表示中最大。令 $j = \sigma(\Theta)$。令 $\tau(\Theta) \geq 0$ 为 s_j 在 θ_j 中的最大次数与最小次数之差。不妨设 $\tau(\Theta)$ 是满足 $\sigma(\Theta) = j$ 的 ψ 的所有表示中最小的。令 l 和 m 分别为 s_j 在 θ_j 和 ϕ_j 中的最小次数。对于 $j \leq i \leq c$，令 $\theta_i = \sum_k s_j^k \mu_{i,k}$ 满足 $\mu_{i,k} \in \mathbb{Z}[s_1^{\pm 1}, ..., s_{j-1}^{\pm 1}, s_{j+1}^{\pm 1}, ..., s_d^{\pm 1}]$。注意，$\theta_j = \sum_{k=m}^{m+\tau(\Theta)} s_j^k \mu_{j,k}$。另令 $\phi_j = \sum_{k=l}^{l+n_j} a_k s_j^k$ 满足 $a_k \in \mathbb{Z}$。

为导出矛盾，我们先假设 $m + l \leq -\lceil n_j/2 \rceil$。那么， $\theta_j\phi_j$ 中次数为 $m + l$ 的 s_j 的各项之和为 $a_l s_j^{m+l} \mu_{j,\ m}$。对于 $i > j$， $\theta_i\phi_i$ 中次数为 $m + l$ 的 s_j 的各项之和为 $s_j^{m+l} \mu_{i,\ m+l} \phi_i$。由于 $\psi = \sum_{i=j}^c \theta_i\phi_i \in M(n_1, ..., n_c, \infty, ..., \infty; s_1, ..., s_d)$， ψ 中次数为 $m + l$ 的 s_j 的各项之和必为 0。因此我们有

$$a_l \mu_{j,m} + \sum_{i=j+1}^{c} \mu_{i,m+l} \phi_i = 0.$$

注意，由于 ϕ_j 是首一的， $a_l \in \{\pm 1\}$ 。因此我们有

$$\begin{aligned} \psi &= \psi - (\mu_{j,m} + a_l^{-1} \sum_{i=j+1}^{c} \mu_{i,m+l} \phi_i) s_j^m \phi_j \\ &= (\theta_j - s_j^m \mu_{j,m}) \phi_j + \sum_{i=j+1}^{c} (\theta_i - a_l^{-1} s_j^m \mu_{i,m+l} \phi_j) \phi_i. \end{aligned}$$

这给出了 ψ 的一个新表示 $\Theta' = (\theta'_i)_{i=1}^c$ ，满足：若 $i < j$，则 $\theta'_i = 0$ ；并且 $\theta'_j = \theta_j - s_j^m \mu_{j,\ m} = \sum_{k=m+1}^{m+\tau(\Theta)} s_j^k \mu_{i,\ k}$。由于 $\sigma(\Theta) = j$ 最大，我们有 $\sigma(\Theta') = j$。然而，此时 $\tau(\Theta') < \tau(\Theta)$ 成立，这与 $\tau(\Theta)$ 最小的假设矛盾。

接下来我们假设 $m + l > -\lceil n_j/2 \rceil$. 论证过程类似。 s_j 在 θ_j 和 ϕ_j 中的最大次数分别为 $m' := m + \tau(\Theta)$ 和 $l' := l + n_j$。于是

$$m' + l' \geq m + l + n_j > -\lceil n_j/2 \rceil + n_j = \lfloor n_j/2 \rfloor$$

成立。由于 $\psi \in M(n_1, ..., n_c, \infty, ..., \infty; s_1, ..., s_d)$， ψ 中各项之和

s_j 的次数为 $m'+l'$ 的项必定为 0。因此我们有

$$a_{l'}\mu_{j,m'}+\sum_{i=j+1}^{c}\mu_{i,m'+l'}\phi_i=0$$

and

$$\psi=(\theta_j-s_j^{m'}\mu_{j,m'})\phi_j+\sum_{i=j+1}^{c}(\theta_i-a_{l'}^{-1}s_j^{m'}\mu_{i,m'+l'}\phi_j)\phi_i$$

与上文相同。这给出了一个新的 ψ 的表示 $\Theta'=(\theta_i')_{i=1}^{c}$，使得若 $i<j$，则 $\theta_i'=0$，且 $\theta_j'=\theta_j-s_j^{m'}\mu_{j,\ m'}=\sum_{k=m}^{m+\tau(\Theta)-1}s_j^k\mu_{i,\ k}$。同样，我们有 $\sigma(\Theta')=j$ 和 $\tau(\Theta')<\tau(\Theta)$，这就产生了矛盾。 □

4 自由亚交换群的交换子子群

设 G 是一个群，$N\trianglelefteq G$ 是一个正规阿贝尔子群。令 $Q=G/N$。

记号 4.1. 设 $g\in G\mapsto\overline{g}\in Q$ 是商映射。我们对 N 中的群运算采用加法记号。右作用 $N\curvearrowleft Q$ 由 G 的共轭所诱导，记作 $f^{\overline{g}}:=g^{-1}fg$，其中 $f\in N$ 且 $g\in G$。关于此作用，我们将 N 视为右 $\mathbb{Z}[Q]$- 模，$f\in N$ 乘以 $\phi\in\mathbb{Z}[Q]$ 记作 f^{ϕ}。也就是说，若 $\phi=\sum_{q\in Q}n_q\cdot q\in\mathbb{Z}[Q]$ 且 $n_q\in\mathbb{Z}$，则 $f^{\phi}=\sum_{q\in Q}n_qf^q$ 成立。

注 4.2。即使 Q 是阿贝尔的，我们仍然对Q 中的群运算使用乘法记号。此时，对于 q_1、$q_2\in Q$，$\mathbb{Z}[Q]$中的元素 q_1+q_2 和 q_1q_2是不同的。对于 $f\in N$，注意 $f^{q_1+q_2}=g_1^{-1}fg_1+g_2^{-1}fg_2$和$f^{q_1q_2}=g_2^{-1}g_1^{-1}fg_1g_2$，其中 g_1、$g_2\in G$满足$\overline{g_1}=q_1$和 $\overline{g_2}=q_2$。

引理 4.3。对于所有 g、h、$k\in G$，我们有

$$[g,hk]=[g,k]+[g,h]^{\overline{k}}.\tag{4.1}$$

此外，对于所有 g、$h\in G$ 和 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$[g,h^n]=[g,h]^{1+\overline{h}+\cdots+\overline{h}^{n-1}}.\tag{4.2}$$

证明。一般而言

$$[g,hk]=g^{-1}k^{-1}h^{-1}ghk=g^{-1}k^{-1}gk\cdot k^{-1}g^{-1}h^{-1}ghk=[g,k]\cdot k^{-1}[g,h]k$$

成立，并且我们有方程 (4.1)。于是我们得到

$$\begin{aligned}[g,h^n]&=[g,h^{n-1}]+[g,h]^{\overline{h}^{n-1}}\\&=[g,h^{n-2}]+[g,h]^{\overline{h}^{n-2}}+[g,h]^{\overline{h}^{n-1}}\\&=\cdots\\&=[g,h]^{1+\overline{h}+\cdots+\overline{h}^{n-1}}.\end{aligned}$$

□

在本节余下部分，令 $G = F_d/F_d''$满足 $d \geq 2$且 $N = G' = F_d'/F_d''$。令 $\{a_1, ..., a_d\}$为 G的一个自由生成元，并对 $1 \leq i \leq d$令 $s_i = \overline{a_i} \in Q$。那么$Q$是以 Σ_Q为基的自由阿贝尔群：$= \{s_1, ..., s_d\}$，而群环 $\mathbb{Z}[Q]$可与 $\mathbb{Z}[s_1^{\pm 1}, ..., s_d^{\pm 1}]$等同。由于 N是G的交换子子群，它由集合生成

$$X := \{[a_i, a_j] \mid 1 \leq i < j \leq d\}$$

作为一个 $\mathbb{Z}[Q]$-模。

定理 4.4（[B65，定理 3]）。$\mathbb{Z}[Q]$-模 N 自然同构于 $(\bigoplus_X \mathbb{Z}[Q])/\mathfrak{I}$，其中 $\mathfrak{I}$ 是由子集生成的 $\bigoplus_X \mathbb{Z}[Q]$ 的 $\mathbb{Z}[Q]$-子模

$$\{[a_i, a_j]^{1-s_k} + [a_i, a_k]^{s_j - 1} + [a_j, a_k]^{1-s_i} \mid 1 \leq i < j < k \leq d\}.$$

特别地，若 $d = 2$，则 $\mathfrak{I} = 0$ 与 N 同构于 $\mathbb{Z}[Q]$。

推论 4.5。对于所有 $1 \leq i < j < k \leq d$，我们有

$$[a_i, a_j]^{1-s_k} + [a_i, a_k]^{s_j - 1} + [a_j, a_k]^{1-s_i} = 0 \quad in\ N.$$

引理 4.6。对于所有 $1 \leq i < j < k \leq d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$[a_i, a_j]^{s_k^n} = [a_i, a_j] + [a_i, a_k]^{(s_j - 1)(1 + s_k + ... + s_k^{n-1})} + [a_j, a_k]^{(1-s_i)(1+s_k+...+s_k^{n-1})} \tag{4.3}$$

and

$$[a_i, a_j]^{s_k^{-n}} = [a_i, a_j] + [a_i, a_k]^{(1-s_j)(s_k^{-1} + s_k^{-2} + ... + s_k^{-n})} + [a_j, a_k]^{(s_i - 1)(s_k^{-1} + s_k^{-2} + ... + s_k^{-n})} \tag{4.4}$$

在 N中。

证明。由推论 4.5，我们有

$$\begin{aligned} [a_i, a_j]^{s_k^n - 1} &= [a_i, a_j]^{(s_k - 1)(1 + s_k + ... + s_k^{n-1})} \\ &= [a_i, a_k]^{(s_j - 1)(1 + s_k + ... + s_k^{n-1})} + [a_j, a_k]^{(1-s_i)(1+s_k+...+s_k^{n-1})} \end{aligned}$$

并得到方程 (4.3)。将方程 (4.3) 乘以 s_k^{-n}，即可得到方程 (4.4)。

□

对于每个 $1 \leq j \leq d$，令 $Q^{(j)}$ 为由 $\{s_i\}_{i=1}^{j}$生成的 Q 的子群。

命题 4.7。对于每个 $f \in N$，都存在唯一的由 $\mathbb{Z}[Q]$中的元素组成的族 $(\phi_{i,\ j})_{1 \leq i < j \leq d}$，满足

(i) $\phi_{i,\ j} \in \mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ 对所有 i 和 j，并且

(ii) $f = \sum_{1\le i<j\le d}[a_i, a_j]^{\phi_{i,\ j}}$.

证明。首先，我们证明其存在性。令

$$\widetilde{N} = \sum_{1\le i<j\le d}[a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]}.$$

~显然， $X \subset N$。由于 N 由 X 作为一个 $\mathbb{Z}[Q]$-模生成，只需证明 $\widetilde{N}$ 是 Q-不变的。设 $1 \le i < j \le d$ 和 $\phi \in \mathbb{Z}[Q^{(j)}]$。我们证明，对于每个 $1 \le k \le d$，都有 $[a_i, a_j]^{\phi s_k^{\pm 1}} \in \widetilde{N}$。若 $k \le j$，则 $\phi s_k^{\pm 1} \in \mathbb{Z}[Q^{(j)}]$，证毕。假设 $k > j$。于是由方程 (4.3) 和 (4.4)，可得

$$[a_i, a_j]^{\phi s_k} = [a_i, a_j]^{\phi} + [a_i, a_k]^{\phi(s_j-1)} + [a_j, a_k]^{\phi(1-s_i)} \quad \text{and}$$
$$[a_i, a_j]^{\phi s_k^{-1}} = [a_i, a_j]^{\phi} + [a_i, a_k]^{\phi(1-s_j)s_k^{-1}} + [a_j, a_k]^{\phi(s_i-1)s_k^{-1}}.$$

~观察右端可知，这些都是 N 中的元素，正如所需。

接下来证明唯一性。由定理 4.4，只需证明$\bigoplus_{1\le i<j\le d}[a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]} \cap \mathfrak{I} = 0$。假设 $0 \ne f \in \bigoplus_{1\le i<j\le d}[a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]} \cap \mathfrak{I}$。由于 $f \in \mathfrak{I}$，存在一个由 $\mathbb{Z}[Q]$中元素构成的族 $\Phi = (\phi_{i,j,k})_{1\le i<j<k\le d}$，使得

$$f = \sum_{1\le i<j<k\le d}([a_i, a_j]^{1-s_k} + [a_i, a_k]^{s_j-1} + [a_j, a_k]^{1-s_i})^{\phi_{i,j,k}}. \tag{4.5}$$

我们称这样的 Φ 为 f的一个表示。现在考虑 $\mathbb{N}^3$上的字典序，即

$$(i, j, k) \le (i', j', k') \Leftrightarrow i < i' \vee (i = i' \wedge j < j') \vee (i = i' \wedge j = j' \wedge k \le k').$$

令 $\sigma(\Phi)$为满足$\phi_{i,j,k} \ne 0$的最小的(i, j, k)。我们可以假设$\sigma(\Phi)$是 f的所有表示中最大的。令 $\sigma(\Phi) = (i_0, j_0, k_0)$。根据方程（4.5），$f$的第 $[a_{i_0}, a_{j_0}]$个坐标为

$$\sum_{l<i_0}(1 - s_l)\phi_{l,i_0,j_0} + \sum_{i_0<l<j_0}(s_l - 1)\phi_{i_0,l,j_0} + \sum_{l>j_0}(1 - s_l)\phi_{i_0,j_0,l}. \tag{4.6}$$

然而，根据 $\sigma(\Phi)$的定义，若 $l < i_0$, $\phi_{i_0,l,j_0} = 0$，则$\phi_{l,i_0,j_0} = 0$；若 $i_0 < l < j_0$，则 $\phi_{i_0,j_0,l} = 0$；若 $j_0 < l < k_0$，亦然。因此，多项式（4.6）等于

$$\sum_{l\ge k_0}(1 - s_l)\phi_{i_0,j_0,l}.$$

由于 $f \in \bigoplus_{1\le i<j\le d}[a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]}$，我们有 $\sum_{l\ge k_0}(1 - s_l)\phi_{i_0,j_0,l} \in \mathbb{Z}[Q^{(j_0)}]$,，而这必定为 0，将 $s_l = 1$ 代入 $l \ge k_0$ 即可验证（注意$s_l \notin Q^{(j_0)}$）。因此我们有

$$(1 - s_{k_0})\phi_{i_0,j_0,k_0} = -\sum_{l>k_0}(1 - s_l)\phi_{i_0,j_0,l}. \tag{4.7}$$

将命题 3.3 应用于 $\{1-s_l\}_{l>k_0}$ 和 ϕ_{i_0,j_0,k_0}，我们有

$$\phi_{i_0,j_0,k_0} = \sum_{l>k_0}(1-s_l)\psi_l + \lambda$$

对于某些 $\psi_l \in \mathbb{Z}[Q]$ 和 $\lambda \in \mathbb{Z}[Q^{(k_0)}]$。然后将其代入方程（4.7），得到

$$(1-s_{k_0})\sum_{l>k_0}(1-s_l)\psi_l + (1-s_{k_0})\lambda = -\sum_{l>k_0}(1-s_l)\phi_{i_0,j_0,l}.$$

由于 $(1-s_{k_0})\lambda \in \mathbb{Z}[Q^{(k_0)}]$,，根据命题 3.3（除以 $\{1-s_l\}_{l>k_0}$所得除法余数的唯一性），我们有 $\lambda = 0$。因此得到

$$\phi_{i_0,j_0,k_0} = \sum_{l>k_0}(1-s_l)\psi_l. \tag{4.8}$$

现在，对于 $1 \le i < j < k \le d$，我们令 $\alpha_{i,j,k} = [a_i,a_j]^{1-s_k} + [a_i,a_k]^{s_j-1} + [a_j,a_k]^{1-s_i}$。注意

$$\alpha_{i,j,k}^{1-s_l} + \alpha_{i,j,l}^{s_k-1} + \alpha_{i,k,l}^{1-s_j} + \alpha_{j,k,l}^{s_i-1} = 0$$

对于任意 $1 \le i < j < k < l \le d$。由方程（4.8），我们得到

$$\alpha_{i_0,j_0,k_0}^{\phi_{i_0,j_0,k_0}} = \sum_{l>k_0}\alpha_{i_0,j_0,k_0}^{(1-s_l)\psi_l} = \sum_{l>k_0}(\alpha_{i_0,j_0,l}^{1-s_{k_0}} + \alpha_{i_0,k_0,l}^{s_{j_0}-1} + \alpha_{j_0,k_0,l}^{1-s_{i_0}})^{\psi_l}.$$

将 $0 = -\alpha_{i_0,j_0,k_0}^{\phi_{i_0,j_0,k_0}} + \sum_{l>k_0}(\alpha_{i_0,j_0,l}^{1-s_{k_0}} + \alpha_{i_0,k_0,l}^{s_{j_0}-1} + \alpha_{j_0,k_0,l}^{1-s_{i_0}})^{\psi_l}$ 加到方程（4.5）上，得到

$$f = \sum_{\substack{1\le i<j<k\le d\\(i,j,k)\neq(i_0,j_0,k_0)}}\alpha_{i,j,k}^{\phi_{i,j,k}} + \sum_{l>k_0}(\alpha_{i_0,j_0,l}^{1-s_{k_0}} + \alpha_{i_0,k_0,l}^{s_{j_0}-1} + \alpha_{j_0,k_0,l}^{1-s_{i_0}})^{\psi_l}.$$

这给出了一个新的表示 $\Phi' = (\phi'_{i,j,k})$，其满足 f，使得 $\phi'_{i,j,k} = \phi_{i,j,k} = 0$，如果 $(i,j,k) < (i_0,j_0,k_0)$ 且 $\phi'_{i_0,j_0,k_0} = 0$。$\sigma(\Phi') > \sigma(\Phi)$，于是我们有 $\sigma(\Phi') = \sigma(\Phi)$，这与 $\sigma(\Phi)$ 为最大值的假设矛盾。□

设 $1 \le c \le d$。令 $U = Q^{(c)}$，并令 V 为由 $\Sigma_V := \{s_i\}_{i=c+1}^d$ 生成的 Q 的子群。固定 $n \in \mathbb{N}$。令 O 为由该集合生成的 N 的 $\mathbb{Z}[Q]$-子模

$$\{[g, a_i^{2n}] \mid g \in G,\ c+1 \le i \le d\}.$$

引理 4.8。若 $f \in N$ 且 $c+1 \le i \le d$，则 $f^{1-s_i^{2n}} = -[f, a_i^{2n}] \in O$ 成立。

证明。由此可得

$$f^{1-s_i^{2n}} = -f^{s_i^{2n}} + f = a_i^{-2n} f^{-1} a_i^{2n} f = [a_i^{2n}, f].$$

□

引理 4.9。对于 $1 \le i < j \le d$，令 $O_{i,\ j}$ 为由 $\mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ 生成的理想

$$\{1 - s_k^{2n} \mid k \in [c+1, j] \backslash \{i, j\}\} \cup \{1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1} \mid k \in [c+1, j] \cap \{i, j\}\}.$$

于是我们有

$$O = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{O_{i,j}}. \tag{4.9}$$

~证明。令 O 为方程 (4.9) 的右端。令 $1 \le i < j \le d$ 和$\phi \in O_{i,\ j}$。我们证明 $[a_i, a_j]^{\phi} \in O$。不妨设 ϕ 是理想 $O_{i,\ j}$的生成元，即 $\phi = 1 - s_k^{2n}$且 $k \in [c+1, j] \backslash \{i, j\}$, 或 $\phi = 1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1}$且 $k \in [c+1, j] \cap \{i, j\}$。在第一种情况下，由前一个引理可得 $[a_i, a_j]^{(1 - s_k^{2n})} \in O$。在第二种情况下，由方程 (4.2) 可得

$$\begin{aligned} [a_i, a_j]^{1 + s_j + \cdots + s_j^{2n-1}} &= [a_i, a_j^{2n}] \in O \quad \text{if } k = j, \text{ and} \\ [a_i, a_j]^{1 + s_i + \cdots + s_i^{2n-1}} &= -[a_j, a_i^{2n}] \in O \quad \text{if } k = i. \end{aligned}$$

~因此，$O \supset O$ 成立。

现在我们证明反向蕴含。注意，对于所有的 g、$h \in G$ 和 $c+1 \le k \le d$,

$$[gh, a_k^{2n}] = [g, a_k^{2n}]^{\bar{h}} + [h, a_k^{2n}]$$

由方程 (4.1) 可知成立，并且

$$[g^{-1}, a_k^{2n}] = -[g, a_k^{2n}]^{\bar{g}^{-1}}$$

成立。由于 G 由 $\{a_i\}_{i=1}^{d}$生成， O 由

$$A := \{[a_i, a_k^{2n}] = [a_i, a_k]^{1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1}} \mid 1 \le i \le d,\ c+1 \le k \le d\}$$

作为一个 $\mathbb{Z}[Q]$-模。令 $1 \le i \le d$ 和 $c+1 \le k \le d$。于是我们得到

$$\begin{aligned} 1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1} &\in O_{i,k} \quad \text{if } i < k, \text{ and} \\ 1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1} &\in O_{k,i} \quad \text{if } i > k. \end{aligned}$$

~若 $i = k$，则 $[a_i, a_k] = 0$。由此可得 $A \subset O$。因此，只需证明$\widetilde{O}$是 Q-不变的。令 $1 \le i < j \le d$和 $\phi \in O_{i,\ j}$。我们证明对每个 $1 \le k \le d$，都有 $[a_i, a_j]^{s_k^{\pm 1}\phi} \in \widetilde{O}$。由于 $O_{i,\ j}$是 $Q^{(j)}$-不变的，我们可以假设 $k > j$。于是由方程 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} [a_i, a_j]^{s_k \phi} &= [a_i, a_j]^{\phi} + [a_i, a_k]^{(s_j - 1)\phi} + [a_j, a_k]^{(1 - s_i)\phi} \quad \text{and} \\ [a_i, a_j]^{s_k^{-1} \phi} &= [a_i, a_j]^{\phi} + [a_i, a_k]^{(1 - s_j) s_k^{-1} \phi} + [a_j, a_k]^{(s_i - 1) s_k^{-1} \phi}. \end{aligned}$$

只需证明 $(1 - s_j)\phi \in O_{i,k}$ 和 $(1 - s_i)\phi \in O_{j,k}$。由于 $\phi \in O_{i,j}$，存在 $\psi_l \in \mathbb{Z}[Q^{(j)}]$，使得对于 $c+1 \le l \le d$，

$$\phi = \sum_{l \in [c+1, j] \backslash \{i, j\}} (1 - s_l^{2n}) \psi_l + \sum_{l \in [c+1, j] \cap \{i, j\}} (1 + s_l + \ldots + s_l^{2n-1}) \psi_l.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}(1-s_j)\phi = &\sum_{l\in[c+1,j]\setminus\{i,j\}}(1-s_j)(1-s_l^{2n})\psi_l\\ &+1_{[c+1,d]}(i)\cdot(1-s_j)(1+s_i+\cdots+s_i^{2n-1})\psi_i\\ &+1_{[c+1,d]}(j)\cdot(1-s_j^{2n})\psi_j,\end{aligned}$$

因此 $(1-s_j)\phi\in O_{i,\ k}$。同理，$(1-s_i)\phi\in O_{j,\ k}$ 成立。因此$[a_i,a_j]^{s_k^{\pm1}\phi}\in\widetilde{O}$ 成立。 □

定义 4.10。对于 $1\le i<j\le d$，定义子群 $M_{i,\ j}\le\mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ 如下:

(i) 若 $j\le c$，则令 $M_{i,\ j}=\mathbb{Z}[Q^{(j)}]$。

(ii) 若 $j\ge c+1$，则令 $M_{i,\ j}$为由以下元素生成的 $\mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ 的 $\mathbb{Z}[U]$-子模:

$$\left\{ s_{c+1}^{m_{c+1}}\cdots s_j^{m_j} \;\middle|\; \begin{array}{l} m_k\in[-n+1,n] \text{ for } k\in[c+1,j]\setminus\{i,j\}, \text{ and}\\ m_k\in[-n+1,n-1] \text{ for } k\in[c+1,j]\cap\{i,j\}\end{array}\right\}.$$

于是定义

$$M=\sum_{1\le i<j\le d}[a_i,a_j]^{M_{i,j}}. \tag{4.10}$$

我们称 M 为 O的 U-剩余。

注 4.11. 设 $1\le i<j\le d$。对于 $1\le k\le j$，定义 $n_k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 为

$$\begin{aligned}&n_k=\infty \quad \text{if } k\in[1,c],\\ &n_k=2n \quad \text{if } k\in[c+1,j]\setminus\{i,j\}, \text{ and}\\ &n_k=2n-1 \quad \text{if } k\in[c+1,j]\cap\{i,j\}.\end{aligned}$$

那么，$M_{i,j}=M(n_1,...,n_j;\ s_1,...,s_j)$ 成立。

记号 4.12. 设 A 是以基 $\Sigma_A=\{s_1,...,s_d\}$ 为基的有限生成自由阿贝尔群。对于 $m\in\mathbb{N}$，记

$$\mathrm{B}_A(m,\Sigma_A)=\{s_1^{k_1}\cdots s_d^{k_d}\in A\mid -\lceil m/2\rceil<k_i\le\lfloor m/2\rfloor \text{ for every } i\}.$$

引理 4.13. 子群 M 是 U-不变的，并且包含

$$\{x^v\mid x\in X,\ v\in\mathrm{B}_Q(2n-1,\Sigma_Q)\}.$$

证明。设 $1\le i<j\le d$和 $\phi\in M_{i,\ j}$。我们证明，对于每个 $1\le k\le c$，都有 $[a_i,a_j]^{s_k^{\pm1}\phi}\in M$。若 $j\ge c+1$，则 $s_k^{\pm1}\phi\in M_{i,\ j}$，因为 $M_{i,\ j}$是 U-不变的，结论得证。现在假设 $j\le c$。若 $k\le j\le c$，则 $s_k^{\pm1}\phi\in\mathbb{Z}[Q^{(j)}]=M_{i,\ j}$，结论得证。若 $j<k\le c$，则由方程 (4.3) 和 (4.4) 可得

$$\begin{aligned}&[a_i,a_j]^{s_k\phi}=[a_i,a_j]^{\phi}+[a_i,a_k]^{(s_j-1)\phi}+[a_j,a_k]^{(1-s_i)\phi} \quad \text{and}\\ &[a_i,a_j]^{s_k^{-1}\phi}=[a_i,a_j]^{\phi}+[a_i,a_k]^{(1-s_j)s_k^{-1}\phi}+[a_j,a_k]^{(s_i-1)s_k^{-1}\phi}.\end{aligned}$$

由于 $\phi, s_i, s_j, s_k \in \mathbb{Z}[Q^{(k)}] = M_{i,\ k} = M_{j,\ k}$，我们有 $[a_i, a_j]^{s_k^{\pm 1}\phi} \in M$。因此，$M$ 是 U-不变的。

对于剩下的断言，只需证明

$$\{x^v \mid x \in X,\ v \in \mathrm{B}_V(2n-1, \Sigma_V)\} \subset M$$

因为 M 是 U-不变的。令 $1 \le i < j \le d$ 和 $v = s_{c+1}^{m_{c+1}} \cdots s_d^{m_d} \in \mathrm{B}_V(\Sigma_V, 2n-1)$。我们证明 $[a_i, a_j]^v \in M$。若 v 是 Q 的恒等元，结论显然。否则，令 $k \in [c+1, d]$ 为满足 $m_k \neq 0$ 的最大整数。我们对 k 进行归纳法证明。若 $k \le j$，则 $v \in M_{i,\ j}$ 因为 m_{c+1}，.....，$m_k \in [-n+1, n-1]$，因此 $[a_i, a_j]^v \in M$ 成立。假设 $k > j$ 并令 $w = s_k^{-m_k} v = s_{c+1}^{m_{c+1}} \cdots s_{k-1}^{m_{k-1}}$。若 $m_k > 0$，则由方程 (4.3) 可得

$$\begin{aligned}[a_i, a_j]^v = [a_i, a_j]^{s_k^{m_k} w} =& [a_i, a_j]^w + [a_i, a_k]^{(s_j - 1)(1 + s_k + \cdots + s_k^{m_k - 1})w} \\ &+ [a_j, a_k]^{(1 - s_i)(1 + s_k + \cdots + s_k^{m_k - 1})w}.\end{aligned}$$

若 $m_k < 0$，则由方程 (4.4) 可得

$$\begin{aligned}[a_i, a_j]^v = [a_i, a_j]^{s_k^{m_k} w} =& [a_i, a_j]^w + [a_i, a_k]^{(1 - s_j)(s_k^{-1} + s_k^{-2} + \cdots + s_k^{m_k})w} \\ &+ [a_j, a_k]^{(s_i - 1)(s_k^{-1} + s_k^{-2} + \cdots + s_k^{m_k})w}.\end{aligned}$$

由归纳假设，$[a_i, a_j]^w \in M$。只需证明

$$(1 - s_j) s_k^m w \in M_{i,k} \text{ and } (1 - s_i) s_k^m w \in M_{j,k}$$

对每个 $m \in [-n+1, n-1]$ 都成立。这由下式可得

$$s_k^m w = s_{c+1}^{m_{c+1}} \cdots s_{k-1}^{m_{k-1}} s_k^m \in M_{i,k} \cap M_{j,k}, \tag{4.11}$$

$$s_j s_k^m w = s_j s_{c+1}^{m_{c+1}} \cdots s_{k-1}^{m_{k-1}} s_k^m \in M_{i,k} \text{ and} \tag{4.12}$$

$$s_i s_k^m w = s_i s_{c+1}^{m_{c+1}} \cdots s_{k-1}^{m_{k-1}} s_k^m \in M_{j,k}. \tag{4.13}$$

由于 m_{c+1}，...，$m_{k-1} \in [-n+1, n-1]$，断言（4.11）成立。若 $j \le c$，则 $s_j s_k^m w \in M_{i,\ k}$，因为 $M_{i,\ k}$ 是 U-不变的。若 $j \ge c+1$，则 $s_j s_k^m w \in M_{i,\ k}$，因为 $m_j + 1 \in [-n+1, n]$。因此断言（4.12）成立。断言（4.13）同理成立。由此证明了 $[a_i, a_j]^v \in M$。 □

命题 4.14。设 $\pi\colon\ N \to N/O$ 为商映射。则限制映射 $\pi|_M\colon\ M \to N/O$ 是一个双射。

证明。令 $1 \le i < j \le d$。对于 $1 \le k \le j$，我们定义 $\phi_k \in \mathbb{Z}[s_k^{\pm 1}]$ 和 $n_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 为

$$\begin{aligned}&\phi_k = 0,\ n_k = \infty \quad \text{if } k \in [1, c], \\ &\phi_k = 1 - s_k^{2n},\ n_k = 2n \quad \text{if } k \in [c+1, j] \backslash \{i, j\}, \text{ and} \\ &\phi_k = 1 + s_k + \cdots + s_k^{2n-1},\ n_k = 2n - 1 \quad \text{if } k \in [c+1, j] \cap \{i, j\}.\end{aligned}$$

那么 $O_{i,j}$ 是由 $\{\phi_k\}_{k=1}^{j}$生成的 $\mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ 的理想，而方程

$$M_{i,j} = M(n_1, ..., n_j; s_1, ..., s_j)$$

holds. By P命题 iti在....3上3 我们 have $M_{i,j} + O_{i,j} = \mathbb{Z}[Q^{(j)}]$ and $M_{i,j} \cap O$ 0 $_{i,\ j}$ =。现在我们来证明这个命题。由命题 4.7 可得

$$N = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]}.$$

此外，由方程（4.10）和（4.9），可得

$$M = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{M_{i,j}} \text{ and } O = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{O_{i,j}}.$$

因此，我们有

$$M + O = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{M_{i,j} + O_{i,j}} = \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{\mathbb{Z}[Q^{(j)}]} = N$$

并且满射性得证。

再次由命题 4.7（唯一性），我们有

$$\begin{aligned} M \cap O &= \left(\sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{M_{i,j}} \right) \cap \left(\sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{O_{i,j}} \right) \\ &= \sum_{1 \le i < j \le d} [a_i, a_j]^{M_{i,j} \cap O_{i,j}} = 0. \end{aligned}$$

单射性得证。 □

5 定理 1.3 的证明

令 $G = F_d/F_d''$ 为 $d \ge 2$。设 $N = G' = F_d'/F_d''$ 和 $Q = G/N$。我们沿用记号 4.1。

令 $R \le Q$ 为一个子群。由推论 2.5，只需构造一个 G 的 Følner 序列 (F_n)，使其满足推论 2.5 中的性质 $(\#_R)$。

5.1 Følner 序列的构造

取子群 U、$V \le Q$，使得 $Q = U \times V$，且 R 是 U 的有限指数子群。令 $c =$rank(U)。分别令 $\{s_1, ..., s_c\}$ 和 $\{s_{c+1}, ..., s_d\}$ 为 U 和 V 的生成元。通过选取 G 的一个适当的自由生成元 $\{a_1, ..., a_d\}$，我们可以假设对每个 $1 \le i \le d$ 都有 $\overline{a_i} = s_i$，因为自然映射 Aut$(F_d) \to$ Aut(F_d/F_d') 是满射［LS01，第一章，命题 4.4］。令$\Sigma_Q = \{s_1, ..., s_d\}$。

定义商映射的截面 $q \in Q \mapsto \widehat{q} \in G$，令 $\widehat{q} = a_1^{k_1} \cdots a_d^{k_d}$，若 $q = s_1^{k_1} \cdots s_d^{k_d}$，其中 k_1,..., $k_d \in \mathbb{Z}$。

引理 5.1. 设 $g \in G$ 和 $q = s_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d} \in Q$，其中 $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ 且 $k_i \geq 0$，对于 $1 \leq i \leq d$。那么我们有

$$[g, \widehat{q}] = \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ : k_i \geq 1}} \sum_{l=0}^{k_i - 1} [g, a_i^{\epsilon_i}]^{s_i^{\epsilon_i l} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}.$$

证明。由方程 (4.1)，我们有

$$\begin{aligned} [g, \widehat{q}] &= [g, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d}] \\ &= [g, a_1^{\epsilon_1 k_1}]^{s_2^{\epsilon_2 k_2} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}} + [g, a_2^{\epsilon_2 k_2} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d}] \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{d} [g, a_i^{\epsilon_i k_i}]^{s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}. \end{aligned}$$

那么对于每个 i 满足 $k_i \geq 1$的情形，我们有

$$[g, a_i^{\epsilon_i k_i}] = \sum_{l=0}^{k_i - 1} [g, a_i^{\epsilon_i}]^{s_i^{\epsilon_i l}}$$

由方程 (4.2) 可得。因此引理得证。 □

在本小节中，我们构造子群 $Q_n \leq Q$ 和 $M_n \leq N$，以及有限的 $\widehat{}$子集 $I_n \subset Q$ 和 T_n, $P_n \subset M_n$，使得 $F_n = I_n P_n$ 是G的 Følner 序列。下一小节中，我们将对它们应用定理 2.14。

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $m_n = n \cdot [U : R] \in \mathbb{N}$, $V_n = \{v^{2m_n} \mid v \in V\} \leq V$和 $Q_n = R \times V_n \leq Q$。回顾记号 4.12。显然有如下结论。

引理 5.2。

(i) 我们有 $R \leq Q_n$ 和 $Q_n \to R$ 属于 Sub(Q)。

(ii) 子集 $I_n := \mathrm{B}_Q(2m_n, \Sigma_Q)$ 是 Q 中 Q_n 的有限对一横截集。

令 O_n 为由下列元素生成的 N 的 $\mathbb{Z}[Q]$-子模

$$\{[g, a_i^{2m_n}] \mid g \in G,\ c+1 \leq j \leq d\}.$$

我们将 N/O_n 视为一个 $\mathbb{Z}[Q]$-模。令 $\pi_n : N \to N/O_n$ 为商映射。令 $M_n \leq N$ 为 O_n 的 U- 剩余类（定义 4.10 ）。以下是我们在第 4 节中的观察的推论。

引理 5.3。

(i) V_n 对 N/O_n 的作用是平凡的 .

（ii）子群 M_n 是 R-不变的。

（iii）映射 $\pi_n|_{M_n}\colon M_n \to N/O_n$ 是一个双射。

证明。(i) 由于 V_n 由 $\{s_i^{2m_n}\}_{i=}^{d}$生成 $_{c+1}$，由引理 4.8 可得。
(ii) 由引理 4.13， $R \le U$ 和 M_n 是 U-不变的，因此结论成立。
(iii) 这由命题 4.14 得出。 □

引理 5.4。设 $\pi'_n = (\pi_n|_{M_n})^{-1} \circ \pi_n\colon N \to M_n$。若 P 是群 $K \le M_n$ 在 M_n中的有限对一横截集，则 P 也是 $\pi_n'^{-1}(K)$在 N中的有限对一横截集。

证明。设 P 是群 $K \le M_n$ 在 M_n中的横截集。那么 $M_n = \bigsqcup_{p\in P} pK$ 成立。由于 $\pi'_n|_{M_n} = \mathrm{id}_{M_n}$，我们有

$$N = \pi_n'^{-1}(M_n) = \pi_n'^{-1}(\bigsqcup_{p\in P} pK) = \bigsqcup_{p\in P} p\cdot \pi_n'^{-1}(K).$$

因此， P 是 N中 $\pi_n'^{-1}(K)$的一个横截集。 □

我们定义

$$\begin{aligned} X &= \{[a_i, a_j] \in N \mid 1 \le i < j \le d\},\\ Z_n &= \{x^q \in N \mid x \in X,\ q \in \mathrm{B}_Q(2m_n - 1, \Sigma_Q)\} \text{ and}\\ T_n &= \left\{ \sum_{z\in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \le n^2 \text{ for every } z \in Z_n \right\}. \end{aligned}$$

注意，对每个 n 和$\bigcup_n T_n = N$， $T_n \subset T_{n+1}$。由引理 4.13， $Z_n \subset M_n$，因此 $T_n \subset M_n$ 成立。

^引理 5.5. 序列 T_n 适配于序列 I_n。

证明。设 $g \in G$，并设 $\Phi \subset N$ 为一个有限子集。取 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\{[g, a_i^{\pm 1}] \mid 1 \le i \le d\} \cup \Phi \subset T_{n_0}.$$

令 $J_n = \mathrm{B}_Q(2(m_n - m_{n_0}) + 1, \Sigma_Q) \subset I_n$，其中 $n > n_0$。注意，对每个 $q \in J_n$，都有 $Z_{n_0}^q \subset Z_n$，因为 $J_n\mathrm{B}_Q(2m_{n_0} - 1, \Sigma_Q) \subset \mathrm{B}_Q(2m_n - 1, \Sigma_Q)$。因此，对每个$q \in J_n$，我们有

$$T_{n_0}^q \subset \left\{ \sum_{z\in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \le n_0^2 \text{ for every } z \in Z_n \right\}.$$

由于 $n^2/m_n \to \infty$，我们有 $n_0^2(m_n d + 1) \le n^2$，对每个充分大的 n 都成立。固定这样一个 $n > n_0$。我们证明，对每个 $q \in J_n$，都有 $[g, \widehat{q}] + \Phi \subset T_n$。若 $q = s_1^{\epsilon_1 k_1} \ldots s_d^{\epsilon_d k_d} \in J_n$，且满足 $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ 和 $k_i \ge 0$，则由引理 5.1 可得

$$[g, \widehat{q}] = \sum_{\substack{1\le i\le d\\ :k_i \ge 1}} \sum_{l=0}^{k_i - 1} [g, a_i^{\epsilon_i}]^{s_i^{\epsilon_i l} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \ldots s_d^{\epsilon_d k_d}}. \tag{5.1}$$

那么右端的每一项 $[g, a_i^{\epsilon_i}]^{s_i^{\epsilon_i l} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}$ 都属于集合

$$\left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \leq n_0^2 \text{ for every } z \in Z_n \right\}$$

因为 $[g, a_i^{\epsilon_i}] \in T_{n_0}$ 和 $s_i^{\epsilon_i l} s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d} \in J_n$。此外，由于方程 (5.1) 的右端至多有 $m_n d$ 项，

$$[g, \widehat{q}] \in \left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \leq n_0^2 m_n d \text{ for every } z \in Z_n \right\}.$$

由 $\Phi \subset T_{n_0}$ 和 $n_0^2(m_n d + 1) \leq n^2$ 可得

$$[g, \widehat{q}] + \Phi \subset \left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \leq n_0^2 (m_n d + 1) \text{ for every } z \in Z_n \right\} \subset T_n.$$

因此我们有

$$\frac{|\{q \in I_n \mid [g, \widehat{q}] + \Phi \subset T_n\}|}{|I_n|} \geq \frac{|J_n|}{|I_n|} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

□

令 L_n 为由 Z_n生成的 N 子群。令 $Y_n \subset L_n$ 为 L_n 作为自由阿贝尔群的一组基。注意，序列

$$\left\{ \sum_{y \in Y_n} k_y y \in L_n \;\middle|\; k_y \in [0, l] \text{ for every } y \in Y_n \right\} \quad (l = 1, 2, ...)$$

是 L_n的 Følner 序列。因此，我们可以选取 $l_n \in \mathbb{N}$，使得集合

$$P_n := \left\{ \sum_{y \in Y_n} k_y y \in L_n \;\middle|\; k_y \in [0, l_n n! - 1] \text{ for every } y \in Y_n \right\}$$

是 $(T_n, 1/n)$-不变的，也就是说，对于每个 $f \in T_n$，都有 $|P_n \cap (f + P_n)| \geq (1 - 1/n)|P_n|$。由于 $Z_n \subset M_n$，我们有 $P_n \subset L_n \subset M_n$。

引理 5.6。序列 $F_n := I_n P_n$ 是 G的 Følner 序列。

证明。由于 G 由 $\{a_i\}_{i=1}^d$生成，只需证明

$$\frac{|F_n \cap a_i F_n|}{|F_n|} \to 1 \; (n \to \infty)$$

对每个 $1 \leq i \leq d$。固定 $1 \leq i \leq d$。取 $n_0 \in \mathbb{N}$使得 $\{[a_i, a_j^{\pm 1}]\}_{j=1}^i \subset T_{n_0}$。令 $J_n = B_Q(2(m_n - m_{n_0}) + 1) \Sigma_Q) \subset I_n$，其中 $n > n_0$。于是对每个 $q \in J_n$，我们有

$$T_{n_0}^q \subset \left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \leq n_0^2 \text{ for every } z \in Z_n \right\}$$

如引理 5.5 的证明所示。由于 $n^2/m_n \to \infty$，对于充分大的每个 n，我们有 $n_0^2 m_n i \le n^2$。固定这样一个 $n > n_0$。令 $q = s_1^{\epsilon_1 k_1} ... s_d^{\epsilon_d k_d} \in Q$ 满足$\epsilon_j \in \{\pm 1\}$ 且 $k_j \ge 0$，其中 $1 \le j \le d$。于是我们有

$$\begin{aligned} a_i\widehat{q} &= a_i a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} \\ &= a_i a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i} \cdot a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} \\ &= a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i} a_i [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i}] \cdot a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} \\ &= a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i} a_i a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} \cdot [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i}]^{s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}, \end{aligned}$$

其中最后一个方程由

$$\begin{aligned} (a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d})^{-1} [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i}] (a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d}) \\ = [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i}]^{s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}. \end{aligned}$$

令 $f_q = [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i}]^{s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}$。则

$$a_i\widehat{q} = a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i} a_i a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} \cdot f_q \tag{5.2}$$

成立。我们证明，若 $q \in J_n$，则 $f_q \in T_n$。由引理 5.1，得

$$f_q = [a_i, a_1^{\epsilon_1 k_1} ... a_i^{\epsilon_i k_i}]^{s_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}} = \sum_{\substack{1 \le j \le i \\ : k_j \ge 1}} \sum_{l=0}^{k_j - 1} [a_i, a_j^{\epsilon_j}]^{s_j^{\epsilon_j l} s_{j+1}^{\epsilon_{j+1} k_{j+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}. \tag{5.3}$$

若 $q \in J_n$，则右端的每一项 $[a_i, a_j^{\epsilon_j}]^{s_j^{\epsilon_j l} s_{j+1}^{\epsilon_{j+1} k_{j+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d}}$ 都属于

$$\left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \le n_0^2 \text{ for every } z \in Z_n \right\}$$

因为 $[a_i, a_j^{\epsilon_j}] \in T_{n_0}$ 且 $s_j^{\epsilon_j l} s_{j+1}^{\epsilon_{j+1} k_{j+1}} \cdots s_d^{\epsilon_d k_d} \in J_n$。又由于方程（5.3）的右端至多有 $m_n i$ 项，因此有

$$f_q \in \left\{ \sum_{z \in Z_n} k_z z \in N \;\middle|\; |k_z| \le n_0^2 m_n i \text{ for every } z \in Z_n \right\} \subset T_n$$

如所需。最后一个包含关系由 $n_0^2 m_n i \le n^2$ 得出。

现在，由于 P_n 是（T_n，$1/n$）-不变的，我们有

$$|P_n \cap (-f_q + P_n)| \ge (1 - 1/n)|P_n| \tag{5.4}$$

对每个 $q \in J_n$ 都成立。另一方面，如果 $q \in s_i^{-1} I_n$，那么我们有

$$a_1^{\epsilon_1 k_1} \cdots a_i^{\epsilon_i k_i} a_i a_{i+1}^{\epsilon_{i+1} k_{i+1}} \cdots a_d^{\epsilon_d k_d} = \widehat{s_i q} \in \widehat{I_n}$$

因此

$$a_i\widehat{q}(-f_q+P_n)=a_1^{\epsilon_1k_1}\cdots a_i^{\epsilon_ik_i}a_ia_{i+1}^{\epsilon_{i+1}k_{i+1}}\cdots a_d^{\epsilon_dk_d}\cdot(f_q-f_q+P_n)\subset\widehat{I_n}P_n$$

根据方程 (5.2)，可得

$$\bigsqcup_{q\in I_n\cap s_i^{-1}I_n}a_i\widehat{q}(P_n\cap(-f_q+P_n))\subset F_n\cap a_iF_n.$$

由不等式 (5.4)，我们有

$$|F_n\cap a_iF_n|\geq\sum_{q\in J_n\cap s_i^{-1}I_n}|P_n\cap(-f_q+P_n)|\geq|J_n\cap s_i^{-1}I_n|\cdot(1-1/n)|P_n|.$$

因此我们有

$$\frac{|F_n\cap a_iF_n|}{|F_n|}\geq\frac{|J_n\cap s_i^{-1}I_n|}{|I_n|}\cdot(1-1/n)\to1\quad(n\to\infty).$$

□

下面的引理将在下一小节中用于证明，对于某些子群， F_n 是 G 中的有限对一横截集。证明受到 [LL22 中引理 10.9] 的证明启发。

引理 5.7. 若 $K\leq N$ 是有限指数子群，则对于每个充分大的 n， P_n 都是 M_n 中 $K\cap M_n$ 的有限对一横截集。

证明。设 $K\leq N$ 是有限指数子群，并令 $k=[N:\ K]$。由于 $L_n\to N$ 属于 Sub(N)，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得对于每个 $n\geq n_0$，都有 $[L_n:\ L_n\cap K]=k$。令 $n\geq\max\{k,n_0\}$。于是

$$kL_n=\left\{\sum_{y\in Y_n}k_yy\in L_n\ \middle|\ k_y\in k\mathbb{Z}\text{ for every }y\in Y_n\right\}\leq L_n\cap K$$

这是成立的，因为在 $L_n/(L_n\cap K)$ 中，所有 k 次幂都是平凡的。回想一下， Y_n 是自由阿贝尔群 L_n 的一组基，且

$$P_n=\left\{\sum_{y\in Y_n}k_yy\in L_n\ \middle|\ k_y\in[0,l_nn!-1]\text{ for every }y\in Y_n\right\}.$$

由于 $n\geq k$，整数 k 整除 $l_nn!$，因此 P_n 是 L_n 中 kL_n 的有限对一横截集。因此，它也是 L_n 中 $L_n\cap K$ 的有限对一横截集。现在我们有 $L_n\leq M_n$ 和 $k=[L_n:\ L_n\cap K]\leq[M_n:\ M_n\cap K]\leq[N:\ K]=k$。因此， $[L_n:\ L_n\cap K]=[M_n:\ M_n\cap K]$ 成立。由此可知， L_n 中 $L_n\cap K$ 的每个横截集也是 M_n 中 $M_n\cap K$ 的横截集。因此， M_n 中 $M_n\cap K$ 的有限对一横截集是 P_n。 □

5.2 有限指数子群的构造

回顾记号 2.6。在本小节中，我们证明引理 5.6 中构造的 Følner 序列 (F_n) 满足以下条件：

(#$_R$) 若 $H \leq G$ 是一个满足 $Q_H = R$ 且 $[N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty$ 的子群，则存在一列有限指数子群 $K_n \leq G$，使得这列二元组 (K_n, F_n) 是 H 的 Weiss 逼近。

这部分与 [LL22 的第 10], 节基本相同，下面的引理也以类似方式证明。不过，有些地方的设定有所改变，因此为方便读者，我们给出这些引理的证明。

设 $H \leq G$ 是一个满足 $Q_H = R$ 且 $[N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty$ 的子群。我们将构造一列满足 $K_n = [Q_n, N_n, \alpha_n]$ 的有限指数子群 $K_n \leq G$。子群 Q_n 已经定义。现在我们定义 N_n。

引理 5.8（[LL22，引理 10.4]）。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个有限指数子群 $N_n \leq N$，使得 $O_n \leq N_n$、$N_H \cap M_n \leq N_n$、$N_H \cap T_n = N_n \cap T_n$，并且 N_n 是 Q_n-不变的。

证明。令 $\Gamma_n := Q \ltimes N/O_n$ 为由 N/O_n 上的 $\mathbb{Z}[Q]$ 结构诱导的半直积。由于 N/O_n 是有限生成的 $\mathbb{Z}[Q]$-模，它是有限生成的。子群 $\pi_n(N_H \cap M_n) \leq N/O_n$ 是 $Q_n (= R \times V_n)$-不变的。事实上，N_H 是 R-不变的，因为 $Q_H = R$, M_n 根据引理 5.3 (ii) 是 R-不变的，而 V_n 根据引理 5.3 (i) 在 N/O_n 上平凡作用。因此

$$\widetilde{H_n} := Q_n \cdot \pi_n(N_H \cap M_n) \subset \Gamma_n$$

是一个子群。由于 Q_n 在 Q 中是有限指数的，子群 $Q_n \cdot N/O_n \leq \Gamma_n$ 是有限生成的。然后根据命题 2.9（取命题 2.9 的 G, N, H, T 为 $\Gamma_n, N/O_n, H_n, \pi_n(T_n)$），存在一个有限指数子群 $N_n \leq N/O_n$，使得 $\pi_n(N_H \cap M_n) \cap \pi_n(T_n) = N_n \cap \pi_n(T_n)$ $\pi_n(N_H \cap M_n) \leq N_n$，且 N_n 是 Q_n-不变的。现在令 $N_n = \pi_n^{-1}(N_n)$。显然，$N_H \cap M_n \leq N_n$，且 N_n 是Q_n-不变的。此外，$\ker \pi_n = O_n \leq N_n$ 成立。最后，由于 $T_n \subset M_n$ 且 $\pi_n|_{M_n}$ 根据引理 5.3 (iii) 是单射，$N_H \cap T_n = N_n \cap T_n$ 成立。 □

接下来我们定义 α_n 和 K_n。

引理 5.9（[LL22，引理 10.6]）。存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 和有限指数子群 $K_n \leq G$，其中 $[K_n] = [Q_n, N_n, \alpha_n]$ 为 $n \geq n_0$ 定义，使得序列 $\alpha_n|_R$ 与 α_H相容。

证明。由于 $N_H \cap T_n = N_n \cap T_n$ 且序列 T_n 递增至 N，我们有$N_n \to N_H$ 属于 Sub(N)。根据命题 2.11，对于所有充分大的 n，存在同态$\alpha'_n \colon R \to \mathrm{N}_G(N_n)/N_n$，使得序列 α'_n 与 α_H相容。接着，对每个 n，我们将 α'_n 延拓为 $\alpha_n \colon Q_n \to \mathrm{N}_G(N_n)/N_n$，其中 $\alpha_n(s_i^{2m_n}) = a_i^{2m_n} N_n$，对 $c+1 \leq i \leq d$成立。此定义良定。事实上，由于$Q_n = R \times V_n$ 且 V_n 是由 $\{s_i^{2m_n}\}_{i=c+1}^d$生成的自由阿贝尔群，只需证明对每个 $g \in G$ 和 $c+1 \leq i \leq d$，都有 $[g, a_i^{2m_n}] \in N_n$。根据O_n的定义，$[g, a_i^{2m_n}] \in O_n \leq N_n$ 成立，证毕。于是 α_n 满足 $\alpha_n(q) = q$，对

每个 $q \in Q_n$均成立。根据命题 2.7，存在唯一的 $K_n \leq G$ 使得 $[K_n] = [Q_n, N_n, \alpha_n]$。 □

现在我们证明序列（K_n, F_n）是 H的 Weiss 逼近。

引理 5.10. 我们有 $F_n * H - F_n * K_n \to 0$ in C(Sub(G))*。

证明. 只需验证定理 2.14 的条件 (i)-(v)。回顾一下，$Q_H = R$。条件 (i) 由引理 5.2 (i) 得出。条件 (ii) 由引理 5.3 (ii) 得出。条件 (iii) 由引理 5.9 得出。条件 (iv) 由引理 5.8 得出。最后，条件 (v) 由引理 5.5 得出。 □

引理 5.11（[LL22，引理 10.8]）。对于每个 $n \geq n_0$，$\mathrm{N}_N(H) \cap M_n \leq \mathrm{N}_N(K_n)$ 都成立。

证明. 设 $f \in \mathrm{N}_N(H) \cap M_n$且 $g \in K_n$。令 $q = \overline{g} \in Q_n$。那么 $g^f = g \cdot [g, f]$且 $[g, f] = f^{1-q} \in N$。只需证明 $f^{1-q} \in N_n$。将 $q = rv$写成 $r \in R$且 $v \in V_n$。我们有

$$f^{1-q} = f^{1-r} + f^{r(1-v)}.$$

由于 $Q_H = R$，我们可以取 $h \in H$，使得 $\overline{h} = r$。于是，由于 $f \in \mathrm{N}_N(H)$，$f^{1-r} = [h, f] = h^{-1} \cdot f^{-1}hf \in H$。此外，由于 $f \in M_n$且M_n是 R-不变的，我们还有 $f^{1-r} \in M_n$。因此 $f^{1-r} \in N_H \cap M_n \leq N_n$。另一方面，根据引理 5.3 (i)，$f^{r(1-v)} \in O_n \leq N_n$。所以 $f^{1-q} \in N_n$成立。 □

引理 5.12（[LL22，引理 10.9]）。对于每个充分大的 n，F_n 都是 G中 $\mathrm{N}_G(K_n)$ 的有限对一横截集。

证明。由于 $[N : \mathrm{N}_N(H)] < \infty$，根据引理 5.7，对于每个充分大的 n，子集 P_n 都是 M_n 中 $\mathrm{N}_N(H) \cap M_n$ 的有限对一横截集。固定这样的$n \geq n_0$。根据前一个引理，P_n 也是 M_n中 $\mathrm{N}_N(K_n) \cap M_n$ 的有限对一横截集。根据引理 5.4，P_n 是 N 中$\pi_n'^{-1}(\mathrm{N}_N(K_n) \cap M_n)$ 的有限对一横截集。由于 $\ker \pi_n' = O_n \leq N_n \leq \mathrm{N}_N(K_n)$ 且 $\pi_n'|_{M_n} = \mathrm{id}_{M_n}$，我们有 $\pi_n'^{-1}(\mathrm{N}_N(K_n) \cap M_n) \leq \mathrm{N}_N(K_n)$。因此，$P_n$ 是 N 中 $\mathrm{N}_N(K_n)$ 的有限对一横截集。另一方面，根据引理 5.2 (ii) 和 $Q_n \leq Q_{\mathrm{N}_G(K_n)}$，$I_n$是 Q 中 $Q_{\mathrm{N}_G(K_n)}$ 的有限对一横截集 $\widehat{}$。因此，根据命题 2.8，$F_n = I_nP_n$ 是 G 中 $\mathrm{N}_G(K_n)$ 的有限对一横截集。 □

由引理 5.10 和 5.12，序列（K_n，F_n）是忽略较小 n 后对 H 的 Weiss 逼近。因此，性质（$\#_R$）成立，定理 1.3 得证。

6 P-稳定群的局限

引理 6.1. 设 G 是一个可数群，$G_k \leq G$ 是一列子群，且 $G_k \to G$ 属于 Sub(G)。假设对于每个 k，都存在一个同态 $p_k : G \to G_k$，使得 $p_k|_{G_k} = \mathrm{id}_{G_k}$。如果对于每个 k，G_k 都是 P-稳定的，那么 G 是 P-稳定的。

证明。设 $(\phi_n : G \to \mathrm{Sym}(n))_n$ 是一个近似同态。设 $F \subset G$ 是一个有限子集。只需证明存在一列同态 $(\psi_n : G \to \mathrm{Sym}(n))_n$，使得对于每个$g \in F$，$d_{\mathrm{H}}(\phi_n(g)\ \psi_n(g)) \to 0$ $(n \to \infty)$。固定 k，使得 $F \subset G_k$。由于 $(\phi_n|_{G_k} : G_k \to \mathrm{Sym}(n))_n$ 是一个近似同态，因此存在一列同态 $(\psi'_n : G_k \to \mathrm{Sym}(n))_n$，使得对于每个 $g \in F$，$d_{\mathrm{H}}(\phi_n(g)\ \psi'_n(g)) \to 0$ $(n \to \infty)$。于是，同态序列 $\psi_n := \psi'_n \circ p_k$ 满足所需条件。 □

推论 1.4 的证明。令 $F_\infty = \langle s_1, s_2, ... \rangle$ 和 $F_k = \langle s_1, ..., s_k \rangle \leq F_\infty$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$成立。令 i_k：$F_k/F''_k \to F_\infty/F''_\infty$ 为由包含映射 $F_k \to F_\infty$诱导的同态。再令 p_k：$F_\infty/F''_\infty \to F_k/F''_k$ 为由自然投影 $F_\infty \to F_k$诱导的同态。于是我们有 $p_k \circ i_k = \mathrm{id}^{F_k/F''_k}$。根据定理 1.3，对于每个 k，F_k/F''_k都是 P-稳定的，因此根据引理 6.1，F_∞/F''_∞ 也是 P-稳定的。 □

参考文献

[AGV14] M. Ab´ert, Y. Glasner 和 B. Vir´ag，关于不变随机子群的 Kesten 定理，Duke Math. J. 163 (2014)，465–488.[AP15] G. Arzhantseva 和 L. P˘aunescu，近似交换置换近似于交换置换，J. Funct. Anal. 269 (2015)，745–757.[B65] S. Bachmuth，自由亚交换群的自同构，Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965)，93–104.[BLT19] O. Becker、A. Lubotzky 和 A. Thom，稳定性与不变随机子群，Duke Math. J. 168 (2019)，2207–2234.[G18] T. Gelander，关于不变随机子群与格的见解，国际数学家大会论文集——里约热内卢 2018。第 II 卷：特邀报告，1321–1344，World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2018.[G10]L. Glebsky，关于归一化 Hilbert-Schmidt 范数下的近似交换矩阵，预印本，arXiv:1002.3082.[GR09] L. Glebsky 和 L. M. Rivera，置换中方程的近似解，Taiwanese J. Math. 13 (2009)，493–500.[LL19]A. Levit 和 A. Lubotzky，不可数多个置换稳定群，预印本，arXiv:1910.11722.[LL22]A. Levit 和 A. Lubotzky，无穷呈置换稳定群与亚交换群的不变随机子群，Ergodic Theory Dynam. Systems 42 (2022)，2028–2063.[LV22] A. Levit 和 I. Vigdorovich，可解群的特征、Hilbert-Schmidt 稳定性与稠密周期测度，预印本，arXiv:2206.02268。

[LS01] R. C. Lyndon 和 P. E. Schupp，组合群论，1977年版重印，数学经典，施普林格出版社，柏林，2001年。[V83] D. Voiculescu，渐近可交换但没有可交换逼近的有限秩酉算子，*Acta Sci. Math. (Szeged)* **45**(1983年)，429–431。[Z19] T. Zheng，关于同胚群的刚性稳定子与不变随机子群，预印本，arXiv:1901.04428。

Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8914, Japan.*E-mail address*: ishikura8000@g.ecc.u-tokyo.ac.jp