强加性与强乘性算术函数的极值估计

Victor Volfson

摘要 本文研究若干关于素数函数的和与乘积的估计，并证明了这一主题的若干命题。此外，我们还研究了强加性与强乘性算术函数的极值估计，证明了若干相关命题，并讨论了一些例子。

关键词：加性算术函数、乘性算术函数、强加性算术函数、强乘性算术函数、算术函数的极值估计。

1. 引言

算术函数是在自然数集上定义、取值于复数集的函数。算术函数这一名称源于这种函数表达了自然数序列的某种算术性质。

估计算术函数的渐近性以及算术函数的矩，一直以来并且至今仍是一个迫切的问题[1,...,3]。

算术函数通常具有内部变化不规则且混乱的特性，因此，经典分析方法往往无法恰当地描述其行为。

在这种情况下，概率数论应运而生，用于对这一行为进行统计研究。算术函数服从正态分布这一概念，旨在反映其“几乎必然”的行为。实际操作中，这需要忽略一个零密度整数集（显然该集合取决于所讨论的函数），以排除异常值。

这一“几乎处处”方法曾用于 [4] 确定加性和乘性算术函数的渐近性。

这一方法的主要缺点是，算术函数的渐近性只能以概率为 1 确定，而不能精确确定。

本文将从算术函数极值估计的角度探讨一种不受这一缺陷影响的方法。这种方法能给出精确的估计。

让我们来看一些算术函数的性质。

设一个自然数 具有标准分解，其中 是素数，而 是一个自然数。 p_i α_i

于是，加性算术函数的性质得以满足：。

$$= \quad {}_1{}^1 \quad = \quad {}_1{}^1 + \quad + \quad = \sum \quad {}^{\alpha} \quad (\ ) \ (\ \ldots$$

$$(\ ) \ \ldots \ (\ ) \ (\ ) \quad t\,t\,a\,a\,a\,a\,t\,t\,f \quad m \quad f \quad p \quad p \quad f \quad p \quad f \quad p \quad f \quad p \quad p\,m^{\alpha}$$

相应的强可加函数具有以下性质：。

$$= \quad {}_{1}{}^{1} \quad = \sum^{**}(\ ) \ (\ \dots \ )$$
$$(\ ) \ {}_{taat} f \ m \ f \ p \ p \ f \ p \ |p \ m$$

乘性算术函数满足以下性质：。

$$= \quad {}_{1}{}^{1} \quad = \prod \quad {}^{\alpha} \ (\ ) \ (\ .$$
$$) \ (\ ) \ {}_{taat} g \ m \ g \ p \ p \ g \ p |p \ m^{\alpha}$$

相应的强乘性函数满足以下性质：。

$$= \quad {}_{1}{}^{1} \quad = \prod^{**}(\ ) \ (\ \dots \ ) \ ($$
$$) \ {}_{taat} g \ m \ g \ p \ p \ g \ p \ |p \ m$$

乘性算术函数 通过对数运算转换为加性算术函数：

$$\ln(g(m)) = \ln(g(p_1^{a_1} \dots p_t^{a_t})) = \ln(\prod_{p^{\alpha}|m} g(p)) = \sum_{p^{\alpha}|m} \ln(g(p)) \ .$$

加性算术函数通过乘方运算转换为乘性算术函数：。

$$= \quad {}_{1}{}^{1} \quad = \quad {}_{1}{}^{1} + + \quad = \prod \quad {}^{\alpha} \ (\dots)$$
$$( ) \dots ( ) ( ) ( ) a \ a \ a \ a \ t \ t \ t \ t \ f \ p \ p \ f \ p \ f \ p \ f \ m \ f \ p \ e \ e \ e \ e \ |p \ m^{\alpha}$$

对数和乘方可以在任意底数下进行 。本文中我们将更常考虑 。

$$a = e$$

根据这些性质，强加性算术函数和强乘性算术函数的极值估计取决于对某些素数函数的和与积的估计，这些内容将在本文下一章中讨论。

2. 某些素数函数和与积的估计

关于形如 的素数函数之和的渐近估计，已有文献 [5],[6] 对其进行了研究。然而，要对强加性算术函数作出极值估计，就需要考虑形如 的和，其中 是相应的加性算术函数。

$$( ) \qquad f$$
$$f \ p \sum |p \ n$$

按如下形式估计这些和： 是一种粗略估计。因此，有必要寻找更精确的极值估计，用于估计素数函数的和

形如 的数。此外，要求 为加性算术函数是可选的。 f

$f \quad p\sum p\,n$

断言1

$$\sum_{p|n} f(p) \le \omega(n)\sup_{2\le x\le n}\{f(x)\}. \tag{2.1}$$

证明

Let $n=\sum_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ then:

$$\sum_{p|n} f(p) = f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_k)=\sum_{i=1}^{k} f(p_i). \tag{2.2}$$

根据（2.2），并考虑到我们得到: $\le \quad 2\le \le ()$ 上确界 $\{()\}\ i\ x\ n$

$f\,n\,f\,x$

$$\sum_{p|n} f(p) \le k\sup_{2\le x\le n}\{f(x)\}. \tag{2.3}$$

由于，因此根据（2.3）可得（2.1）。

来看一个例子。根据断言1，我们估计:

$$\sum_{p|n}\ln\varphi(p) \le \omega(n)\sup_{x\in\{2,n]}\{\ln\varphi(x)\} \le \omega(n)\ln(n) = O\left(\frac{\ln^2(n)}{\ln\ln(n)}\right). \tag{2.4}$$

现在我们用另一种方法进行计算:

$$\sum_{p|n}\ln\varphi(p)=\sum_{p|n}\ln(p-1)\le\sum_{p\le n}\ln(p-1)=\sum_{p\le n}\ln p(1-1/p)=\sum_{p\le n}\ln p+\sum_{p\le n}\ln(1-1/p)=n+O(n/\ln(n)). \tag{2.5}$$

A c比较估计式（2.4）和（2.5）可知，估计式（2.4）更准确。

断言2

如果一个算术函数 是单调递减的，那么

$$\sum_{p|n} f(p) \leqslant \sum_{p\leqslant p_{\omega(n)}} f(p), \tag{2.6}$$

其中 是第 个素数，且 。

证明

估计 ，这是因为两个和的项数相同，但右边和中的项不小于左边和中的项（由于单调递减）。

该估计由以下不等式得出：

$$\ln n \geqslant \ln \prod_{p \leqslant p_{\omega(n)}} p = \sum_{p \leqslant p_{\omega(n)}} \ln p = \theta\left(p_{\omega(n)}\right) = p_{\omega(n)}(1+o(1))$$

（其中 是切比雪夫θ函数），以及素数分布的渐近定律，其形式为 当值 。

断言2的例子。我们来计算以下算术函数：

$$\sum_{p|n} \ln \frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{p|n} \ln \frac{p}{p-1} = \sum_{p|n} \ln(1+\frac{1}{p-1}) = \sum_{p|n} (\frac{1}{p-1} + O(\frac{1}{(p-1)^2})) = \sum_{p|n} \frac{1}{p-1} + O(1) . \quad (2.7)$$

根据（2.7）和断言2，我们得到：

$$\sum_{p|n} \ln \frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{p|n} \frac{1}{p-1} + O(1) \leq \sum_{p \leq \ln(n)(1+o(1))} \frac{1}{p-1} + O(1) = \ln\ln\ln(n)(1+o(1)) + O(1) . \quad (2.8)$$

断言3

设算术函数那么

$$\prod_{p|n} g(p) \leq e^{\omega(n) \sup_{x \in [2,n]} \{\ln g(x)\}} . \quad (2.9)$$

证明

我们对算术函数的乘积取对数：

$$\ln(\prod_{p|n} g(p)) = \sum_{p|n} \ln g(p) . \quad (2.10)$$

将断言1应用于 (2.10)：

$$\sum_{p|n} \ln g(p) \leq \omega(n) \sup_{x \in [2,n]} \{\ln g(x)\} . \quad (2.11)$$

利用 (2.11) 可得:

$$e^{\sum_{p|n}\ln g(p)} = \prod_{p|n} g(p) \le e^{\omega(n)\sup_{x\in[2,n]}\{\ln g(x)\}},$$

这对应于（2.9）。

现在我们将考虑一个关于断言3的例子。我们来估计算术函数的乘积:

$$\prod_{p|n}\varphi(p) \le e^{\omega(n)\sup_{x\in[2,n]}\{\ln\varphi(x)\}} \le e^{\omega(n)\ln(n)} = n^{\omega(n)} \le n^{c\ln(n)/\ln\ln(n)}, \tag{2.12}$$

其中 c 是一个常数。

断言4

设算术函数和，其中，那么，若单调递减，则满足以下上界:

$$\prod_{p|n} g(p) \le A(n), \tag{2.13}$$

证明

我们取算术函数乘积的对数:

$$\ln\prod_{p|n} g(p) = \sum_{p|n}\ln g(p). \tag{2.14}$$

如果单调递减，那么也单调递减，因此，根据断言2和（2.14），我们得到:

$$\ln\prod_{p|n} g(p) = \sum_{p|n}\ln g(p) \le \sum_{p\le|p_\omega}\ln g(p). \tag{2.15}$$

根据 (2.15)，我们有:

$$e^{\ln\prod_{p|n} g(p)} = \prod_{p|n} g(p) \le e^{\sum_{p\le p_\omega}\ln g(p)},$$

这与（2.13）相对应。

断言4的一个例子。

我们来看一个断言4的例子。

该算术函数为正且单调递减，因此可以对其应用断言4：

$$\prod_{p|n}\frac{p}{p-1}\le \mathrm{e}^{\sum_{p\le p_\omega}\ln\frac{p}{p-1}}. \tag{2.16}$$

根据 (2.7)、(2.8) 和 (2.16)，我们得到：

$$\frac{n}{\varphi(n)}=\prod_{p|n}\frac{p}{p-1}\le \mathrm{e}^{\sum_{p\le p_\omega}\ln\frac{p}{p-1}}=e^{\ln\ln\ln n(1+o(1))+O(1)}\le e^{c}\ln\ln n(1+o(1)), \tag{2.17}$$

其中 c 是一个常数。

考虑到 (2.17)，我们得到欧拉函数的下界估计：

$$\varphi(n)\ge\frac{e^{-c}n(1+o(1))}{\ln\ln n}. \tag{2.18}$$

N现在来讨论素数函数的若干和与乘积的下界 .

断言 5

设函数 在 处单调递增，其中， 为素数，则： $p\ge a$ $p\ \ a$

$$\sum_{p|n}f(p)\ge f(a). \tag{2.19}$$

当取值为时，等号成立，其中是一个自然数。 m

证明

最小值 在某个值处取得 该值等于某个素数幂，因为当数具有多个不同的素因子时，和会增加，注意到 。 n

由于函数从最小素数开始单调递增，因此最小值在处取得，其中是一个自然数。因此，不等式（2.19）成立。

断言5的推论

设函数 和 随着 的增大而单调递增，其中 是素数，并且 。则下列不等式成立：

$$\sum_{i\le k}\sum_{p\mid n} f_i(p) \ge \sum_{i\le k} f_i(a),$$

其中 。

证明

由于 和 随着 的增大而单调递增，因此 且也随着 的增大而单调递增，因此满足断言5的条件。

断言 5 的示例。

函数 在 处单调递增，因此对以下和作如下下界估计：

$$\sum_{p\mid n} f(p) \ge f(3) = 6{,}5. \tag{2.20}$$

(2.20) 式中的等号在 处成立。

断言6

设函数在处单调递增，其中为素数，则：

$$\prod_{p\mid n} g(p) \ge g(a). \tag{2.21}$$

当该值为 时可取得等号，其中为自然数。

证明

取对数，得到：

$$\ln \prod_{p|n} g(p) = \sum_{p|n} \ln g(p). \tag{2.22}$$

由于函数并且随着单调递增，因此它也随着单调递增，所以函数满足断言9的所有条件。因此，根据（2.22），下界成立：

$$\sum_{p|n} \ln g(p) \geq \ln g(a). \tag{2.23}$$

考虑到（2.23），我们可以写成：

$$e^{\sum_{p|n} g(p)} = \prod_{p|n} g(p) \geq e^{\ln g(a)} = g(a),$$

这与（2.21）相对应。

断言6的推论

设函数在处单调递增，其中为素数，且，则下列不等式成立：

$$\prod_{i \leq k} \prod_{p|n} g_i(p) \geq \prod_{i \leq k} g_i(a),$$

其中。

证明

由于函数随单调递增，因此随单调递增，其中且满足断言6的条件。

$$p \geq a$$

断言6的示例。

该函数随.....单调递增，因此满足以下下界： $p \geq 5$

$$\prod_{p|n} g(p) \geq g(5) = \frac{31}{3}. \tag{2.24}$$

等式 (2.24) 在 处取等号。

3. 严格加性与乘性算术函数的极值估计

断言 7

设 是一个加性算术函数，若 ，则它适用于严格加性算术函数：

$$\sum_{p|n} f(p) \leq f(n), \tag{3.1}$$

若 ，则：

$$\sum_{p|n} f(p) \geq f(n). \tag{3.2}$$

证明

设 ，那么，根据加法性，我们得到：

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_k^{\alpha_k}) = \sum_{p|n} f(p^{\alpha}). \tag{3.3}$$

若 ，则根据 (3.3)：

$$f(n) = \sum_{p|n} f(p^{\alpha}) \geq \sum_{p|n} f(p) \text{ or } \sum_{p|n} f(p) \leq f(n),$$

这对应于 (3.1)。

如果 ，那么由 (3.3) 可得：

$$f(n)=\sum_{p|n} f(p^{\alpha}) \le \sum_{p|n} f(p) \text{ or } \sum_{p|n} f(p) \ge f(n),$$

这对应于（3.2）。

断言 7 的示例

算术函数 是一个加性算术函数，当其值为 时，该函数取值为：

$$\alpha \ge 2$$

$$\ln\varphi(p^{\alpha}) = \ln p^{\alpha-1}(p-1) \ge \ln(p-1) = \ln\varphi(p).$$

因此，根据断言 7 (3.1)，我们得到以下估计：

$$\sum_{p|n} \ln\varphi(p) \le \ln\varphi(n) \le \ln n. \tag{3.4}$$

估计 (3.4) 比估计 (2.4) 更精确，甚至比估计 (2.5) 更精确。

函数 并且随着 单调递增，因此，根据断言 5，可得到下界 适用于强加性算术函数 。当取值为 时，等号成立。

$$\sum \ln \varphi(p) \ge \ln \varphi(n)$$

$$\sum \ln \varphi(p)$$

再举一个例子。考虑算术函数 ，其值为 。该函数是一个加性算术函数，当取值为 时，该函数取值为：

$$\ln \frac{\tau(p^{\alpha})}{p^{\alpha}} = \ln \frac{\alpha+1}{p^{\alpha}} \le \ln \frac{2}{p} = \ln \frac{\tau(p)}{p}.$$

因此，基于断言 7 (3.2) 以及这一事实，可得：

$$\sum_{p|n} \ln \frac{\tau(p)}{p} \ge \ln \frac{\tau(n)}{n} \ge \ln \frac{2}{n}. \tag{3.5}$$

等号在取值 时成立。 $n = p$

另一方面，算术函数是单调递减的，因此 $\frac{\tau(p)}{\ln p}=\frac{2\ln p}{p}$

可以应用断言2：

$$\sum_{p|n}\ln\frac{\tau(p)}{p}\le\sum_{p\le\ln n(1+o(1))}\ln\frac{2}{p}=\ln 2\sum_{p\le p_{w(n)}}1-\sum_{p\le p_{w(n)}}\ln p=\ln 2\frac{p_{w(n)}}{\ln p_{w(n)}}-p_{w(n)}=-p_{w(n)}(1-\frac{\ln 2}{\ln p_{w(n)}}),\quad(3.6)$$

其中 $p_{w(n)}=\ln(1+o(1))$。

根据 (3.5) 和 (3.6)，我们得到关于值 $n\to\infty$ 的渐近估计：

$$\ln\frac{2}{n}\le\sum_{p|n}\ln\frac{\tau(p)}{p}\le\ln\frac{1}{n}(1-\frac{\ln 2}{\ln\ln n}).$$

基于断言 5的推论，可以得到强可加函数之和的下界。

例如，函数 $\ln(p-1)$ 大于或等于 0，且在 $p\ge 2$ 上单调递增。

函数 $\ln(p+1)$ 大于 0，并且在 $p\ge 2$ 上单调递增。

因此，根据断言 5 的推论，我们得到强加性算术函数之和的下界估计：

$$\sum_{p|n}\ln\varphi(p)+\sum_{p|n}\ln\sigma(p)=\prod_{p|n}\ln(p-1)+\prod_{p|n}\ln(p+1)\ge\ln 3.$$

断言 8

设 $g(p)$ 是一个乘性算术函数，且如果 $g(p)\le g(n)$，则对于一个严格乘性算术函数有：

$$\prod_{p|n}g(p)\le g(n)\quad(3.7)$$

反之，若 $g(p)\le g(n)$，则

$$\prod_{p|n} g(p) \geq g(n). \tag{3.8}$$

证明

设为乘性算术函数, 则为相应的加性算术函数，反之亦然。

因此，并且条件可写为:

$$g(p^{\alpha}) = \mathrm{e}^{f(p^{\alpha})} \geq g(p) = \mathrm{e}^{f(p)}. \tag{3.9}$$

由 (3.9) 可得，因此，根据断言 5，有:

$$\sum_{p|n} f(p) \leq f(n) \text{ or } e^{\sum_{p|n} f(p)} = \prod_{p|n} g(p) \leq e^{f(n)} = g(n),$$

这对应于 (3.7)。

条件可写为:

$$g(p^{\alpha}) = \mathrm{e}^{f(p^{\alpha})} \leq g(p) = \mathrm{e}^{f(p)}. \tag{3.10}$$

由 (3.10) 可得，因此，根据断言 5，我们有:

$$\sum_{p|n} f(p) \geq f(n) \text{ or } e^{\sum_{p|n} f(p)} = \prod_{p|n} g(p) \geq e^{f(n)} = g(n),$$

这对应于 (3.8)。

断言 8 的示例。

考虑一个积性函数 - 一个自然数的 次幂的因数和，注意，当:

$$\alpha \geq 2$$

$$\sigma_k(p^{\alpha}) = \frac{p^{(\alpha+1)k} - 1}{p^k - 1} \geq \frac{p^{2k} - 1}{p^k - 1} = p^k + 1 = \sigma_k(p). \tag{3.11}$$

根据断言 8 和 (3.11)，可得：

$$\prod_{p|n}\sigma_k(p)=\prod_{p|n}(p^k+1)\le\sigma_k(n). \tag{3.12}$$

考虑最大阶 [7], ，根据 (3.12)，我们得到

$$\prod_{p|n}\sigma_k(p)=\prod_{p|n}(p^k+1)\le\sigma_k(n)\le n^k\varsigma(k),\mathrm{k}>1, \tag{3.13}$$

其中是黎曼ζ函数在自然数值处的值。

根据 (3.12) 并考虑最大阶[7] 在值处，我们得到：

$$\prod_{p|n}\sigma(p)=\prod_{p|n}(p+1)\le\sigma(n)\le e^{\gamma}n\ln\ln(n). \tag{3.14}$$

Base根据 (3.12) 并考虑最大阶[7] 在值处，我们得到 :

$$\prod_{p|n}\tau(p)=\prod_{p|n}2\le\tau(n)\le n^{\frac{\ln 2}{\ln\ln(n)}}. \tag{3.15}$$

我们使用断言4得到估计：

$$\prod_{p|n}\tau(p)=\prod_{p|n}2\le e^{\sum_{p\le p_{w(n)}}\ln 2}=e^{\ln 2\frac{p_{w(n)}}{\ln p_{w(n)}}}, \tag{3.16}$$

其中 。

所得的渐近估计 (3.16) 在取值为 时对应于 (3.15)。

已知乘性算术函数 的一个下界估计。

然而，相应的强乘性算术函数 的下界远小于 ，当点处含有大于 1 的素数幂时（即不是无平方因子的情形） 。

利用函数大于或等于 0，且随着单调递增。

$$p\ge 2$$

根据断言6，强乘性算术函数的下界为：

$$\prod_{p|n}\sigma_k(p)=\prod_{p|n}(p^k+1)\geq 2^k+1.\tag{3.17}$$

强乘性算术函数的最小值在处取得，且等于。

基于断言6的推论，可以得到强乘性算术函数的乘积的下界估计。

例如，函数大于1，且随着单调递增。

函数 大于1，且随着 的增加而单调递增。

根据断言6的推论，我们得到强乘性函数乘积的下界：

$$\prod_{p|n}\varphi(p)\prod_{p|n}\sigma_2(p)\geq\varphi(2)\sigma_2(2)=5.$$

4. 结论与后续工作建议

下一篇文章将继续研究一些算术函数的渐近行为。

5. 致谢

感谢所有为讨论本文作出贡献的人。我由衷感谢所有在研究过程中提出建议和意见的人。

参考文献

1. J.Chattopadhyay, P. Darbar 关于数域上算术函数均值与矩的研究，数论研究 5(3)，2019。2. M. Garaev, M. Kühleitner, F. Luca, G. Nowak 某些算术函数的渐近公式，斯洛伐克数学 58(3):301-308，2008。3. R. Brad 短区间中的算术函数与对称群，arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/1609.02967(2016)。4. Victor Volfson 加性与乘性算术函数的渐近行为，https://arxiv.org/abs/2209.06907(2022)。5. Victor Volfson 素数函数和的渐近性，arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2008.11100 (2020)。6. Victor Volfson 加性算术函数概率特征的渐近性，arXiv 预印本 https://arxiv.org/abs/2108.13199 (2021)。7. Gérald Tenenbaum. 解析数论与概率数论导论。第三版，Patrick D. F. Ion 译，2015 - 630 页。