arXiv:2301.07589v1 [math.GR] 18 Jan 2023

余增长级数是有理级数对角线的群

ALEX BISHOP

Abstract. 我们证明，若一个群包含 $\mathbb{Z}^n \times F_m$ 作为有限指数子群，那么对于任意生成集，其余增长级数都是某个有理函数的对角线。这回答了 Pak 和 Soukup 关于几乎阿贝尔群余增长的问题；并推广了 Elder、Rechnitzer、Janse van Rensburg 和 Wong 关于 Baumslag-Solitar 群 BS(N, N) 余增长级数的结果。

1. Introduction

有限生成群的余生长函数 $c\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 统计给定长度且表示单位元的词。由于余生长函数在研究可和性和字问题方面的应用，其渐近行为和复杂性一直是文献关注的主题。这里指出，文献中也有人将余生长函数定义为统计表示单位元的自由约化词。

设 G 是一个具有有限（幺半群）生成集 X 的群。本文研究 余生长级数，它本质上就是余生长函数的生成函数。特别地，对于每个正则语言 $R \subseteq X^*$，我们考虑级数 $C_R(z)$，它统计 R 中表示群单位元的词的数量。因此， $C_R(z)$ 可以特化为上述任一种余生长定义。特别地，我们用 $C_{X^*}(z)$ 表示相对于所有词的余生长级数，用 $C_{\mathrm{RED}}(z)$ 表示相对于自由约化词组成的（正则）语言的余生长级数。

寻找余生长级数的解析刻画与各类群之间的对应关系是很有意义的。为此，Kuksov 的博士论文证明了 [12, 11] 当且仅当群是有限群时， $C_{\mathrm{RED}}(z)$ 是有理级数；并且由 Chomsky 和 Sch¨utzenberger 的一个结果可以推出 [1] 对于几乎自由群，每个 $C_R(z)$ 都是代数的（参见引理 4.2、4.3、4.4 和 4.5）。人们猜想， $C_{\mathrm{Red}}(z)$ 是代数的，当且仅当群是几乎自由群。此外，众所周知，对于阿贝尔群，相对于任意有限对称生成集，级数 $C_{\mathrm{Red}}(z)$ 都是 D-有限的（见 [12,§5.1] 或 [10, 定理 1.2]）。

本文关注的是这样一些群：其余生长级数$C_R(z)$ 可以表示为对角线，其中的有理函数（多变量）按定义 2.7所定义。这里注意到，这类生成函数包含代数生成函数这一类（见推论3.3.1），并且包含于 *D*-有限 生成函数这一类。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20F65、05A15、68R15、20K35。

Key words and phrases. 余生长级数、对角线生成函数、几乎阿贝尔群、鲍姆斯拉格–索利塔尔群。

本文的主要目标是证明以下结论。

定理 A. 如果 G 含有一个与 $\mathbb{Z}^n \times F_m$ 同构的有限指数子群，其中某个 n, $m \geqslant 0$，那么对于每个有限（幺半群）生成集 X，以及每个正则语言 $R \subseteq X^*$，余生长级数 $C_R(z)$ 都可以写成某个有理函数的对角线。

回顾一下，*Baumslag-Solitar* 群 BS(N, M) 定义为

$$\mathrm{BS}(N, M) = \left\langle a, t \mid ta^N t^{-1} = a^M \right\rangle$$

其中 N, $M \in \mathbb{Z}$。根据 [5]，我们知道群 BS(N, N) 关于标准生成集的余生长级数 $C_{X^*}(z)$ 和$C_{\mathrm{RED}}(z)$ 是*D*-有限的 $X = \{a, a^{-1}, t, t^{-1}\}$。特别地，根据 [5] 中定理 4.1 的证明，我们看到余生长级数 $C_{X^*}(z)$ 可以写成一个二元代数级数的对角线。结合本文中的推论 3.3.1，我们看到 $C_{X^*}(z)$ 可以写成一个四元有理函数的对角线。由定理 A（以及引理2.8），我们可以将此结果推广到所有生成集，如下所示。

推论 A.1. 对于任意有限（幺半群）生成集以及任意正则语言 R，BS(N, N) 的余生长级数 $C_R(z)$ 都是有理函数的对角线。

Pak 和 Soukup [15, §6.5] 提出了这样一个问题：每个有限生成的几乎阿贝尔群的余生长级数，是否对于任意生成集都是有理级数的对角线？是否还能将其加强为一个$\mathbb{N}$-有理级数？注意，定理 A使我们可以立即对这个问题的前半部分给出肯定回答。通过修改定理 A的证明，我们对这个问题的后半部分作如下回答。

定理 B. 对于任意有限幺半群生成集和任意正则语言 R，几乎阿贝尔群 $C_R(z)$ 的余生长级数都是一个 $\mathbb{N}$-有理级数的对角线。

本文安排如下。第2节介绍记号，并回顾余生长级数、正则语言以及 *Baumslag-Solitar* 群 BS(N, N) 的定义。第 3节回顾代数生成函数的定义和性质，并证明推论 3.3.1，该推论将在定理 A的证明中用到。第 4节回顾确定性上下文无关语言和无歧义上下文无关语言的性质，并证明无歧义上下文无关语言的多元生成函数是代数的。在第5 节和6节中，我们将计算余生长级数的问题化归为一个涉及无歧义上下文无关语言以及一个具有 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{N}^p$ -有理生成函数的集合 $\mathbb{N}$的问题。随后，我们在第 7节证明主要结果。

2. Notation and background

设 G是一个群，其有限（幺半群）生成集为 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$，并包含 $H = \mathbb{Z}^n \times F_m$ 作为有限指数子群 $d = [G : H]$。那么，不失一般性，我们可以假设 H 是正规子群；否则，可以应用以下引理，将 H 替换为有限指数正规子群 H'，它与某个 $\mathbb{Z}^{n'} \times F_{m'}$ 同构，$m' \in \mathbb{N}$。

引理 2.1。 若 G 包含 $H = \mathbb{Z}^n \times F_m$ 作为有限指数子群，则G 包含一个有限指数正规子群 $H' \cong \mathbb{Z}^{n'} \times F_{m'}$，其中 n'， $m' \in \mathbb{N}$。

证明。 我们先取 H 的正规核

$$H' \coloneqq \mathrm{core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

众所周知， H' 是 G 和H的有限指数正规子群。由于 H' 是 $H = \mathbb{Z}^n \times F_n$ 的子群，根据 [2] 中的命题 1.5 和推论 1.7， $H' \cong \mathbb{Z}^{n'} \times F$ 其中 $0 \leqslant n' \leqslant n+1$ 且 F 是自由群。由于 H' 在有限生成群 H中指数有限，因此我们有 H'，所以 F 是有限生成的。于是可得$H' \cong \mathbb{Z}^{n'} \times F_{m'}$ 对某个 n'，$m' \in \mathbb{N}$。□

此外，为了证明定理 B，我们还需要以下关于几乎阿贝尔情形的结果。

引理 2.2. 若 G 是有限生成几乎阿贝尔群，则 G包含一个有限指数正规子群 H，它与某个 $n \in \mathbb{N}$的 $\mathbb{Z}^n$ 同构。

证明。 根据定义， G 必包含一个有限指数的阿贝尔子群 A $d = [G : A]$, 因此 A 是有限生成的。由有限生成阿贝尔群分类可知， $A = F \times \mathbb{Z}^n$，其中 F 是有限群，且 $n \in \mathbb{N}$。由此可见， G 包含 $\mathbb{Z}^n$ 作为指数为 $|F| \cdot d$ 的子群。

现在我们取 G 中 $\mathbb{Z}^n$ 的正规核，记为

$$H \coloneqq \mathrm{core}_G(\mathbb{Z}^n) = \bigcap_{g \in G} g\mathbb{Z}^n g^{-1}$$

它是 G 和 $\mathbb{Z}^n$的有限指数正规子群。

由 [17], 第 100–101 页可知，由于 H 是$\mathbb{Z}^n$的有限指数子群，因此 $H \cong \mathbb{Z}^n$，如所需。□

取正规子群 $H = \mathbb{Z}^n \times F_m$ 在 G 中的一组（右）陪集代表元 $T = \{t_1 = 1, t_2, \ldots, t_d\} \subset G$。于是注意到，对于每个元素 $g \in G$，都存在唯一的 $h \in H$ 和 $t \in T$，使得 $g = h \cdot t$。我们定义映射 $\rho\colon\ G \to T$，使得对每个 $g \in H \cdot t_i$，都有 $\rho(g) = t_i$。

对于每个词 $w \in X^*$，我们用 w 表示其对应的 G 中的元素。此外，我们用 $|w|_X$ 表示 $w \in X^*$ 的词长，并用 $\ell_X(g)$ 表示元素 $g \in G$ 关于 X 的长度，即，

$$\ell_X(g) = \min\{|w|_X \in \mathbb{N} \mid w \in X^* \text{ with } \overline{w} = g\}.$$

现在我们回顾有理生成函数的定义如下。

2.1. **有理生成函数**。我们称变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 中的多元幂级数 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ 是有理的，如果存在多项式 $P(\mathbf{x})$ $Q(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$，使得 $f(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})/Q(\mathbf{x})$。

本文还使用了有理级数的一个子类，称为 $\mathbb{N}$-有理级数。具体而言，变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 上的 $\mathbb{N}$-有理级数类，是包含 $\mathbb{N}[[\mathbf{x}]]$ 的最小子集

其中包含多项式 $\mathbb{N}[\mathbf{x}]$，并且对加法、乘法和拟逆封闭；也就是说，如果 $f(\mathbf{x})$、$g(\mathbf{x})$ 和 $h(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{N}$- 有理的，且 $h(\mathbf{0},\dots,\mathbf{0}) = 0$，那么 $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$、$f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ 和 $1/(1-h(\mathbf{x}))$ 也都是如此。

现在我们回顾正则语言 的定义，并说明它们的多变量生成函数是 $\mathbb{N}$-有理的。

2.2. **正则语言**。字母表 是一个由符号 Σ组成的有限集，而语言 是 Σ中字母构成的词的一个子集 $L \subseteq \Sigma^*$。我们根据下文定义的有限状态自动机 类来定义正则语言族。

有限状态自动机 是一个元组 $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta, q_{\text{start}}, A)$，其中

- Σ是一个字母表；
- Q 是一个由状态组成的有限集；
- δ: $Q \times \Sigma \to Q$ 是转移函数；
- $q_{\text{初始}} \in Q$ 是初始状态；并且
- $A \subseteq Q$ 是接受状态集。

根据上述描述，我们构造一个顶点集为 Q 的有限有向边标记图，并且对于每个 $\delta(q, a) = q'$，都有一条边 $q \to^a q'$。注意，对于每个词 $w = w_1 w_2 \cdots w_k \in \Sigma^*$，恰好存在一条标记为

$$q_{\text{start}} \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} q_2 \xrightarrow{w_3} \cdots \xrightarrow{w_k} q_k.$$

特别地，我们看到，对于每个 $i \in \{0, 1, \dots, k\}$，都有 $p_{i+1} = \delta(p_i, w_i)$，其中我们定义 $q_0 = q_{\text{start}}$。接着，如果终态$q_k \in A$，我们就称这样的路径为接受路径。由此，我们将正则语言类定义如下。

定义 2.3. 如果存在一个有限状态自动机，当且仅当一个词属于 R 时才接受该词，那么语言 $R \subseteq \Sigma^*$ 就是正则语言。

例如，若 X 是群的有限生成集，则 X^*和 X^* 中自由约化词组成的集合都是正则语言。正则语言满足以下众所周知的封闭性质。

引理 2.4 (《 [9]》中的定理 4.4、4.8、4.14 和 4.16)。 正则语言族在交、并、幺半群同态和逆幺半群同态下封闭。

众所周知，正则语言的多元生成函数是 $\mathbb{N}$-有理的。我们简要证明如下。

引理 2.5。 设 $R \subseteq \Sigma^*$ 是一个正则语言，且具有 $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$，并将 R 的多元生成函数定义为

$$f(x_1, \dots, x_n, z) = \sum_{k_1,\dots,k_n \in \mathbb{N}} c(k_1, \dots, k_n) x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} z^{k_1+\cdots+k_n}$$

其中，$c(k_1, \dots, k_n)$ 统计 R 中满足以下条件的词：对于每个 i，恰好包含 k_i 个字母 a_i。那么，$f(x_1, \dots, x_n, z)$ 是 $\mathbb{N}$-有理的。

证明。 设 $R \subseteq \Sigma^*$ 是一个正则语言，并设 $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, \delta, q_{\text{start}}, A)$ 是一个接受 R 的有限状态自动机。

对于每个状态 $q \in Q$，我们将 $F_q(\mathbf{x}\ z)$ 定义为语言的生成函数

$$L_q = \left\{ w = w_1 w_2 \cdots w_p \in \Sigma^* \;\middle|\; q \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_p} q_p \text{ where } q_p \in A \right\}.$$

我们注意到 $f(\mathbf{x}\ z) = F_{q_{\text{start}}}(\mathbf{x}\ z)$。

于是我们看到，对于每个 $q \in Q$，都有递推关系

$$F_q(\mathbf{x}, z) = 1 + \sum_{i=1}^{|\Sigma|} x_i z\, F_{\delta(q,a_i)}(\mathbf{x}, z) \qquad \text{if } q \in A;\ \text{and}$$

$$F_q(\mathbf{x}, z) = \sum_{i=1}^{|\Sigma|} x_i z\, F_{\delta(q,a_i)}(\mathbf{x}, z) \qquad \text{if } q \notin A.$$

通过代入求解这些递推关系，我们发现每个 $F_q(\mathbf{x}\ z)$ 都是$\mathbb{N}$-有理的，因此 $f(\mathbf{x}\ z) = F_{\text{start}}(\mathbf{x}\ z)$ 是 $\mathbb{N}$-有理的。□

2.3. **余生长级数**。设 $R \subseteq X^*$ 是一个正则语言。我们将关于 R的余生长级数定义为

$$C_R(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_n z^n \in \mathbb{N}[[z]] \tag{1}$$

其中每个系数

$$c_n = \#\{w \in R \subseteq X^* \mid |w|_X = n \text{ and } \overline{w} = 1\}$$

统计长度为 n 且表示群单位元的词的数量。

本文证明，某些群的余生长级数可以写成有理级数的对角线。因此，我们将多元幂级数的对角线 定义如下。

2.4. **形式幂级数与对角线**。我们首先定义 原始对角线 对于 $f(\mathbf{x})$ 中变量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$，如下所示。此定义用于引理 3.3 和推论 3.3.1的陈述与证明中。

定义 2.6. 设 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ 是变量$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$上的多元幂级数，则原始对角线 $I_{x_1,x_2} f$ 定义为

$$I_{x_1,x_2} f(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_p) = \sum_{k_1,k_3,\ldots,k_p,\in\mathbb{N}} a(k_1, k_1, k_3, \ldots, k_p) x_1^{k_1} x_3^{k_3} \cdots x_p^{k_p}.$$

也就是说，我们选取 x_1 和 x_2 的指数相等的项。注意，$I_{x_1,x_2} f$ 是变量集合$\mathbf{x} \setminus \{x_2\}$上的幂级数。

对于每个 $i < j$，我们可以类似地将原始对角线 $I_{x_i,x_j} f$定义为变量$\mathbf{x} \setminus \{x_j\}$上的生成函数。

于是，我们可以如下定义幂级数的（完全）对角线。

定义 2.7。设 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}]]$ 是关于变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$的多元幂级数，那么 $f(\mathbf{x})$ 的（完全）对角线为

$$\text{Diag}(f)(z) = \left(I_{x_1,x_2} I_{x_1,x_3} \cdots I_{x_1,x_p} f\right)(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a(k, k, \ldots, k)\, z^k.$$

注意，完全对角线是关于 $\mathbb{Q}[[z]]$ 的单变量幂级数。

在本文中，我们旨在证明，余生长级数可以表示为有理级数的完全对角线，如第2.1节所述。

2.5. **Baumslag-Solitar 群**。本文结果的一个应用对象是形如 BS(N, N) 的 Baumslag-Solitar 群。为得到这一结果，我们给出如下刻画。

引理 2.8. 对于每个 $N \geqslant 1$，$\mathrm{BS}(N, N)$ 都是虚拟 $\mathbb{Z} \times F_N$。

证明。设

$$\mathrm{BS}(N, N) = \left\langle a, t \mid ta^N t^{-1} = a^N \right\rangle.$$

于是，我们看到 BS(N， N) 包含一个由下式生成的自由子群

$$F_N = \left\langle t,\, ata^{-1},\, a^2ta^{-2},\, a^3ta^{-3},\, \ldots,\, a^{N-1}ta^{1-N} \right\rangle.$$

此外，我们看到 BS(N， N) 的中心是一个由下式生成的循环群

$$\mathbb{Z} = \left\langle a^N \right\rangle.$$

因此，

$$\mathbb{Z} \times F_N = \left\langle a^N \right\rangle \times \left\langle t,\, ata^{-1},\, a^2ta^{-2},\, a^3ta^{-3},\, \ldots,\, a^{N-1}ta^{1-N} \right\rangle$$

是 BS(N, N) 的一个子群。于是我们看到

$$\mathrm{BS}(N, N) = (\mathbb{Z} \times F_N) \cdot \{1, a, a^2, \ldots, a^{N-1}\}$$

因此，BS(N, N) 包含 $\mathbb{Z} \times F_N$，且其作为子群的指数为 N。 □

3. Algebraic Generating Functions

在定理 A中，我们证明，某类群的生成函数可以写成一个有理级数的对角线。为此，我们首先证明该生成函数可以写成一个代数级数的对角线，然后利用 Denef 和 Lipshitz 的一个结果 [3],将其加强为有理级数的对角线。因此，我们先回顾代数生成函数的定义如下。在本节中，我们用 $\mathbf{x}$ 表示有限个变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$。

定义 3.1。若生成函数 $a(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ 满足以下条件，则称其为代数的：存在一个非零多项式 $P(\mathbf{x}\ z) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}\ z]$ 使得 $P(\mathbf{x}\ a(\mathbf{x})) = 0$。

$\mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ 中的代数级数构成一个环，这是众所周知的；有理生成函数是代数生成函数的子集。我们将简要证明这些性质如下。

引理 3.2。每个 $\mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ 中的有理生成函数都是代数的，并且代数生成函数在加法和乘法下封闭。

证明。假设 $f(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})/b(\mathbf{x})$，其中 $a(\mathbf{x})\ b(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}],$，则 $f(\mathbf{x})$是代数的，因为 $P(\mathbf{x}\ f\mathbf{x})) = 0$，其中 $P(\mathbf{x}\ z) = a(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})z$。

现在假设 $\alpha(\mathbf{x})\ \beta(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ 都是代数的，那么存在方阵 $A = (a_{i,j})$ 和 $B = (b_{i,j})$，其中每个 $a_{i,j}$,$b_{i,j} \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$, 都满足： $\alpha(\mathbf{x})$ 和 $\beta(\mathbf{x})$ 分别是 A 和 B 的特征值，对应的特征向量分别为 v_α 和 v_β。特别地， A 和 B 是相伴矩阵，它们对应的多项式证明了 $\alpha(\mathbf{x})$ 和 $\beta(\mathbf{x})$ 是代数的。于是可知， $\alpha(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{x})$ 和 $\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})$ 分别是矩阵 $A \otimes B$ 和 $(A \otimes I_B) + (I_A \otimes B)$ 的特征值，二者对应的特征向量都是 $v_\alpha \otimes v_\beta$，其中 $\otimes$是张量积，而 I_A 和 I_B 是单位矩阵，

维数分别与 A 和 B 相同。于是可知， $\alpha(\mathbf{x}) \cdot \beta(\mathbf{x})$ 和$\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})$ 是代数的，这可由多项式证明

$$P(\mathbf{x}, z) = \det\left(A \otimes B - z\, I_{A\otimes B}\right) \quad \text{and}$$
$$Q(\mathbf{x}, z) = \det\left((A \otimes I_B) + (I_A \otimes B) - z\, I_{(A\otimes I_B)+(I_A\otimes B)}\right),$$

分别。 □

Denef 和 Lipshitz [3] 证明了以下引理，该引理适用于系数属于某个优良局部整环的所有代数级数，其中任何域都是一个例子。也就是说，以下是 [3]中的定理 6.2 的一个特例。

引理 3.3 （ [3]中的定理 6.2）。令 $a(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]]$ 为一个代数级数。那么，存在一个有理级数 $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x},\mathbf{y}]]$，使得

$$a(\mathbf{x}) = I_{x_1,y_1} I_{x_2,y_2} \cdots I_{x_p,y_p}\left(r(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ 且 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$。

根据上述引理，我们立即得到以下推论。

推论 3.3.1。设 $f(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ 是关于代数幂级数 $a(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$ 的对角线，其中有 p 个变量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$，即

$$f(z) = \mathrm{Diag}(a)(z).$$

那么，存在有理级数 $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x},\mathbf{y}]]$，使得

$$f(z) = \mathrm{Diag}\left(r(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)(z)$$

其中，$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$，而 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$。

证明。设 $f(z)$ 可以写成代数级数 $a(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[[\mathbf{x}]]$, 的对角线，即 $f(z) = \mathrm{Diag}(a)(z)$。根据引理 3.3，存在有理级数 $r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x},\mathbf{y}]]$，使得

$$a(\mathbf{x}) = I_{x_1,y_1} I_{x_2,y_2} \cdots I_{x_p,y_p}\left(r(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)$$

由此可见,

$$f(z) = \mathrm{Diag}(a)(z) = \mathrm{Diag}\left(r(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)(z)$$

如所要求。 □

4. Context-free languages

本节回顾上下文无关语言及其与代数生成函数和几乎自由群的联系。我们首先如下定义上下文无关文法。我们将在引理4.3的证明中使用这一定义。

一个上下文无关文法是一个四元组 $\mathcal{G} = (\Sigma,\ \Gamma,\ S,\ \Delta)$，其中

- Σ是终结符的字母表；
- Γ 是一个与 Σ 不相交的非终结符字母表；
- $S \in \Gamma$ 是起始符号；以及
- $\Delta \in \Gamma \times (\Sigma \cup \Gamma)^*$ 是一个替换规则有限集。

替换规则 $(A, u) \in \Delta$ 允许我们将非终结符号 $A \in \Gamma$ 的实例替换为词 $u \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$。如果从仅包含字母 S的词开始，通过应用 Δ 中的一系列替换规则可以得到词 w，则称上下文无关文法 $\mathcal{G}$能生成 词 $w \in \Sigma^*$ 。我们用 $L(\mathcal{G}) \subseteq \Sigma^*$ 表示文法 $\mathcal{G}$生成的所有词构成的语言。

例 4.1. 令 $F_2 = \langle a, b \mid - \rangle$ 为由生成集 $\Sigma = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ 生成的秩为 2 的自由群。那么，与单位元对应的词组成的语言 $w \in \Sigma^*$ 可由上下文无关文法$\mathcal{G} = (\Sigma,\ \Gamma,\ S,\ \Delta)$生成，其中 $\Gamma = \{S\}$，替换规则为

$$\Delta = \left\{(S, \varepsilon),\, (S, aSa^{-1}S),\, (S, bSb^{-1}S),\, (S, a^{-1}SaS),\, (S, b^{-1}SbS)\right\}.$$

因此，所有这类词组成的语言都是上下文无关的。

一棵推导树 是具有有序子节点的有根树，它完整描述了上下文无关文法如何生成特定的词。具体而言，树中的每个节点都有由一条替换规则所确定的子节点。例如，词 $w = aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}bb^{-1}$ 由例 4.1中给出的文法生成，而 w 的推导树见图1。

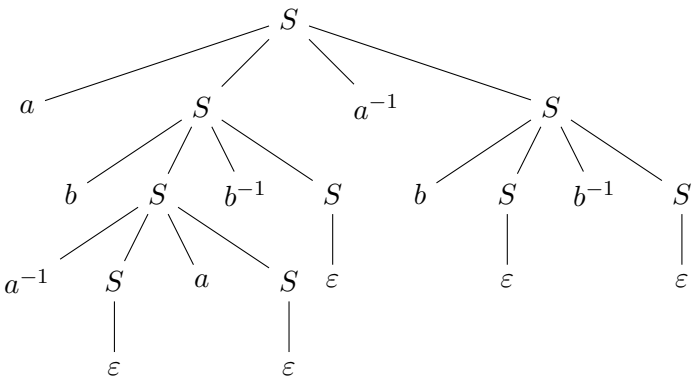


FIGURE 1. .....的推导树 $w = aba^{-1}ab^{-1}a^{-1}bb^{-1}$ 例4.1中的。

那么，如果上下文无关文法 $\mathcal{G}$ 是无歧义的，即每个词$w \in L(\mathcal{G})$ 都恰好对应一棵推导树。本节中，我们经常会提到无歧义上下文无关语言的一个子类（参见引理4.2），称为确定性上下文无关语言。为简便起见，本文不定义确定性上下文无关语言这一类。

引理 4.2 (定理13.15见 [16])。 每种确定性上下文无关语言都是无歧义上下文无关语言。

于是，我们得到关于无歧义（因而也是确定性）上下文无关语言的生成函数的以下著名刻画。Chomsky 和 Sch¨utzenberger 在 [1] 中证明了这一结果，针对的是非交换生成函数。我们为多变量（交换）生成函数给出一个简短证明。

引理 4.3。 设 $L \subseteq \Sigma^*$ 是字母表 $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 上的一种无歧义上下文无关语言，其生成函数为

$$f(x_1, \ldots, x_n, z) = \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}} c(k_1, \ldots, k_n)\, x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} z^{k_1 + \cdots + k_n}$$

其中，每个 $c(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ 统计 L 中满足以下条件的词：对每个 i，恰好包含 k_i 个字母 a_i。那么，$f(x_1, \ldots, x_n, z)$ 是代数的。

证明。 设 $\mathcal{G} = (\Sigma, \Gamma, S, \Delta)$ 是一个无歧义的上下文无关文法，满足 $L = L(\mathcal{G})$。对于每个非终结符 $A \in \Gamma$，我们将 $F_A(\mathbf{x}, z)$ 记作生成函数，它统计 Σ^* 中可通过在 Δ 中应用一系列替换规则从非终结符 A 推导出的词。

于是我们看到，对于每个 $A \in \Gamma$，都有递推公式

$$F_A(\mathbf{x}, z) = \sum_{(A, w) \in \Delta} \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i z)^{|w|_{a_i}} \right) \left(\prod_{B \in \Gamma} F_B(\mathbf{x}, z)^{|w|_B} \right)$$

其中，每个 $|w|_{a_i}$ 和 $|w|_B$ 统计词 $w \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ 中字母 $a_i \in \Sigma$ 和 $B \in \Gamma$ 出现的次数。注意，上述和式中的每一项都对应于推导树中一个标记为非终结符 A 的节点对子节点的一种可能选择。

因此，我们得到一个 $|\Gamma|$ 关于变量 $(F_A(\mathbf{x}, z))_{A \in \Gamma}$ 且系数属于 $\mathbb{Z}[\mathbf{x}, z]$的多项式方程组。已知这类方程组有代数解。特别地，我们可以进行一系列代数消元（见 [6]中的附录 B.1），从而找到一个多项式方程，证明 $f(\mathbf{x}, z) = F_S(\mathbf{x}, z)$是代数的。□

一个众所周知的结果是，确定性上下文无关语言类刻画了几乎自由群的字问题，如下述引理所示。该结果用于引理6.4的证明。

引理 4.4 ([13] 中的定理和 [14]中的推论 2.10）。设 G 是一个具有有限对称生成集 S的群，则字问题

$$\mathrm{WP}_S := \{w \in S^* \mid \overline{w} = 1\}$$

是确定性上下文无关的，当且仅当 G 几乎自由。

我们有以下确定性上下文无关语言族的封闭性质，这些性质将在引理6.4的证明中用到。

引理 4.5 ([8]第 128 页的引理 3）。确定性上下文无关语言族在与正则语言取交运算下封闭。此外，若 $p\colon \Sigma^* \to X^*$ 是一个幺半群同态，且 $L \subseteq X^*$ 是确定性上下文无关的，那么语言 $p^{-1}(L) \subseteq \Sigma^*$ 也是确定性上下文无关的。

5. Coset-labelled words

本节介绍一种方法：用 X^* 中的陪集代表元来装饰 T中的词。这些装饰后的词用于构造确定性上下文无关语言，见引理 6.4 ；该语言随后用于定理A的证明。

设 $w = x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_\ell} \in X^*$ 是一个长度为 ℓ 的词，则对于 w 的每个前缀 $x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_p}$，我们定义 $t_{c_{p+1}} = \rho(x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_p}) \in T$。特别地，我们

看到 $t_{c_1} = 1$ 和 $t_{c_{\ell+1}} = \rho(w)$。在此回顾，$\rho\colon\ G \to T$ 是满足对每个 $g \in G$ 都有 $g \in H \cdot \rho(g)$ 的映射。于是注意到，

$$\overline{w} = (t_{c_1} x_{k_1} t_{c_2}^{-1})(t_{c_2} x_{k_2} t_{c_3}^{-1}) \cdots (t_{c_\ell} x_{k_\ell} t_{c_{\ell+1}}^{-1}) \cdot t_{c_{\ell+1}}$$

其中每个因子 $t_{c_i} x_{k_i} t_{c_{i+1}}^{-1}$ 都对应于有限指数正规子群 H中的一个元素。我们看到，对于每个 i，都有 $t_{c_{i+1}} = \rho(t_{c_i} x_{k_i})$，因此

$$\overline{w} = \left(t_{c_1} x_{k_1} (\rho(t_{c_1} x_{k_1}))^{-1}\right) \left(t_{c_2} x_{k_2} (\rho(t_{c_2} x_{k_2}))^{-1}\right) \cdots \left(t_{c_\ell} x_{k_\ell} (\rho(t_{c_\ell} x_{k_\ell}))^{-1}\right) \cdot \rho(t_{c_\ell} x_{k_\ell}) \quad (2)$$

其中每个因子 $t_{c_i} x_{k_i} (\rho(t_{c_i} x_{k_i}))^{-1}$ 对应于 H。另请注意，如果 $w \in H$，那么 $\rho(t_{c_\ell} x_{k_\ell}) = 1$，因此方程式 (2) 给出了 w 的一个表达式，它分解为 ℓ 个部分，每个部分都属于 H。

对于每个生成元 $x_i \in X$和每个陪集代表元 $t_j \in T$，我们引入一个新符号 $\sigma_{i,\,j}$ 它对应于词 $t_j x_i (\rho(t_j x_i))^{-1}$，如 (2) 中所示。然后我们用 Σ 表示所有这类符号构成的有限集

$$\Sigma = \{\sigma_{i,j} \mid x_i \in X,\ t_j \in T\}. \quad (3)$$

注意，Σ 恰好包含 $sd = |X| \cdot |T|$ 个符号。接下来我们定义一个保长映射 $\varphi\colon\ X^* \to \Sigma^*$，如下所示。

定义 5.1。设 $\varphi\colon\ X^* \to \Sigma^*$ 是如下定义的映射：对于每个词 $w = x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_\ell} \in X^*$，有 $\varphi(w) = \sigma_{k_1,\,c_1} \sigma_{k_2,\,c_2} \cdots \sigma_{k_\ell,\,c_\ell} \in \Sigma^*$ 其中每个 c_i 均如方程 (2)所示。我们称词 $\varphi(X^*$为陪集标记的。

由上述定义可知，$\varphi\colon\ X^* \to \Sigma^*$ 是单射，因为它有一个左逆 $\mu\colon\ \Sigma^* \to X^*$，定义如下。

定义 5.2。令 $\mu\colon\ \Sigma^* \to X^*$ 为如下定义的幺半群同态：对每个 $\sigma_{i,\,j} \in \Sigma$，有 $\mu(\sigma_{i,j}) = x_i$。于是可知，对每个 $w \in X^*$，都有 $(\mu \circ \varphi)(w) = w$，因为映射 $\varphi\colon\ X^* \to \Sigma^*$ 只是在 w 的字母上添加来自 T的陪集代表元作为装饰，而 $\mu\colon\ \Sigma^* \to X^*$ 则移除这些装饰。

对于每个正则语言 $R \in X^*$，我们将 $\mathcal{L}_R \subseteq \Sigma^*$ 记作 $\varphi(R)$ 中对应于平凡陪集元素的词的集合，如下所示。

引理 5.3. 设 $R \subseteq X^*$ 为定义如下的语言

$$\mathcal{L}_R = \{\varphi(w) \in \Sigma^* \mid w \in R \text{ with } \overline{w} \in H\}.$$

那么，$\mathcal{L}_R$ 是一个正则语言。

证明。首先注意到，$\mathcal{L}_R$ 可以写成交

$$\mathcal{L}_R = \Phi_X \cap \mu^{-1}(R) \quad \text{where} \quad \Phi_X = \varphi(\{w \in X^* \mid \overline{w} \in H\}).$$

根据引理 2.4，我们知道正则语言族在交和逆幺半群同态下封闭。因此，$\mu^{-1}(R)$ 是一个正则语言，接下来只需证明 Φ_X 是正则的。

我们可以为 $\Phi_X \subseteq \Sigma^*$ 构造一个有限状态自动机，其

- 每个陪集代表元对应一个状态 $t_i \in T$；
- 每个$_{j}$ $q_{t_{j'}}$ 对应一个转移$_{\cdot\ j} \in \Sigma$ 其中 $t_{j'} = \rho(t_j x_i)$；其中
- q_1 既是初始状态，也是唯一的接受状态。

因此，Φ_X 是一个正则语言，符合要求。 □

由于 φ是单射且保持长度，我们可以看出， φ 给出了一个保长度的双射，将词集合 $\{w \in R \mid w \in H\} \in X^*$ 映射到 $\mathcal{L}_R \subseteq \Sigma^*$中的词集合。因此，我们需要一种方法来检查$\mathcal{L}_R$的成员资格，并验证对于给定的词 $w \in \mathcal{L}_R$， $\mu(w) = 1$ 是否成立。

6. On words which represent the identity

本节旨在证明引理6.3 和6.4。在定理A中，我们结合这些引理，证明级数 $C_R(z)$ 可以写成代数幂级数的对角线。随后，我们利用推论3.3.1 将其进一步加强为有理级数的对角线。

令 $w = x_{k_1}x_{k_2}\cdots x_{k_\ell} \in X^*$ 满足 $\varphi(w) = \sigma_{k_1,\ c_1}\sigma_{k_2,\ c_2}\cdots\sigma_{k_\ell,\ c_\ell} \in \mathcal{L}_R$，则

$$\overline{w} = \left(\overline{t_{c_1}x_{k_1}(\rho(t_{c_1}x_{k_1}))^{-1}}\right)\left(\overline{t_{c_2}x_{k_2}(\rho(t_{c_2}x_{k_2}))^{-1}}\right)\cdots\left(\overline{t_{c_\ell}x_{k_\ell}(\rho(t_{c_\ell}x_{k_\ell}))^{-1}}\right)$$

其中每个因子都表示子群 H 中的一个元素，也就是说，每个

$$\overline{t_jx_i(\rho(t_jx_i))^{-1}} \in H.$$

我们定义两个映射 $\pi_{\mathbb{Z}^n}\colon\ \Sigma^* \to \mathbb{Z}^n$ 和 $\pi_{F_m}\colon\ \Sigma^* \to F_m$ 如下

定义 6.1. 我们定义映射 $\pi_{\mathbb{Z}^n}\colon\ \Sigma^* \to \mathbb{Z}^n$ 和 $\pi_{F_m}\colon\ \Sigma^* \to F_m$ 为满足以下条件的幺半群同态

$$(\pi_{\mathbb{Z}^n}(\sigma_{i,j}),\ \pi_{F_m}(\sigma_{i,j})) = \overline{t_jx_i(\rho(t_jx_i))^{-1}} \in \mathbb{Z}^n \times F_m = H$$

对每个 $\sigma_{i,j} \in \Sigma$。于是我们得到

$$\overline{w} = (\pi_{\mathbb{Z}^n}(u),\ \pi_{F_m}(u)) \in \mathbb{Z}^n \times F_m$$

对每个满足 $u = \varphi(w)\ \in \mathcal{L}_R$的 $w \in X^*$ 。

由定义 6.1，我们得到以下观察。

注 6.2. 我们注意到，生成函数 $C_R(z)$ 统计了满足 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w)\ = \mathbf{0}$ 且 $\pi_{F_m}(w)\ = 1$ 的词 $w \in \mathcal{L}_R$ 。

根据映射 $\pi_{\mathbb{Z}^n}\colon\ \Sigma^* \to \mathbb{Z}^n$的定义，我们按照以下引理定义集合 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{N}^{|\Sigma|}$。该集合的生成函数用于在定理 A中选取多元幂级数中与满足 $w \in \Sigma^*$ 且 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w)\ = \mathbf{0}$的词 相对应的项。

引理 6.3. 令 Σ 为式（3）中定义的字母表。我们为 Σ 中的字母选定一个次序，特别地，记作 $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|\Sigma|}\}$，其中每个字母 a_k 对应于形如 $\sigma_{i,j}$ 的字母。令

$$\mathcal{Z} \coloneqq \left\{ z \in \mathbb{N}^{|\Sigma|} \;\middle|\; \pi_{\mathbb{Z}^n}(a_1)\, z_1 + \pi_{\mathbb{Z}^n}(a_2)\, z_2 + \cdots + \pi_{\mathbb{Z}^n}(a_{|\Sigma|})\, z_{|\Sigma|} = \mathbf{0} \right\}.$$

等价地，当且仅当存在一个词 $w \in \Sigma^*$，使得对每个 i，其中恰好包含 z_i 个字母 a_i 的实例时， $z \in \mathcal{Z}$ 成立。于是，生成函数

$$f_{\mathcal{Z}}(y_1, y_2, \ldots, y_{|\Sigma|}) \coloneqq \sum_{z \in \mathcal{Z}} y_1^{z_1} y_2^{z_2} \cdots y_{|\Sigma|}^{z_{|\Sigma|}}$$

是 $\mathbb{N}$-有理的。

证明。 在此证明中，对于每个 $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{|\Sigma|}) \in \mathbb{N}^{|\Sigma|}$，我们记

$$\mathbf{x}^z := x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_{|\Sigma|}^{z_{|\Sigma|}}.$$

这个记号将使本证明中的说明更加简明。

在本证明中，我们将证明半线性集合类具有 $\mathbb{N}$-有理生成函数，并且 $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{N}^{|\Sigma|}$ 是半线性的。我们首先回顾半线性集合的定义如下。

如果 $\mathbb{N}^{|\Sigma|}$ 的一个子集可以写成有限个如下形式的集合的并，我们就称它为半线性集合

$$L(v, \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}) = \{v + k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_m u_m \in \mathbb{N}^{|\Sigma|} \mid k_i \in \mathbb{N}\}$$

其中 v， u_1， u_2，……， $u_m \in \mathbb{N}^{|\Sigma|}$。这样的集合 L（v， $\{u_1, \ldots, u_m\}$）称为线性集合 .

我们看到，如果向量 u_1， u_2，……， u_m 关于域 $\mathbb{Q}$线性无关，那么线性集合的生成函数

$$L = L(v, \{u_1, u_2, \ldots, u_m\})$$

由下式给出

$$\sum_{z \in L} \mathbf{x}^z = \mathbf{x}^v \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathbf{x}^{u_i})^{-1}$$

它是 $\mathbb{N}$-有理的。这样的线性集合称为简单。

由 [4] 中的定理 IV 可知，任意半线性集合都可以写成有限个简单线性集合的不相交并。因此，半线性集合的生成函数可以写成有限个$\mathbb{N}$-有理级数之和，因而自身也是 $\mathbb{N}$-有理的。剩下要证明的只有 $\mathcal{Z}$ 是半线性的。

我们看到， $\mathcal{Z}$ 是 [7] 第 287 页所定义的*Presburger* 集合。 [7], 中的定理 1.3 证明了每个 Presburger 集合都是半线性的。因此我们得出结论， $\mathcal{Z}$ 是半线性的，因而具有一个 $\mathbb{N}$-有理生成函数。□

引理6.3 给出了一种验证 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w) = \mathbf{0}$ 是否适用于词 $w \in \Sigma^*$的方法，描述如下。设 $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|\Sigma|}\}$ 如引理6.3中所述。注意，若 $w \in \Sigma^*$ 且

$$z = (\#_{a_1}(w), \#_{a_2}(w), \ldots, \#_{a_{|\Sigma|}}(w)),$$

其中，每个 $\#_{a_i}(w)$ 统计字母 a_i 在词 w 中出现的次数。当且仅当 $z \in \mathcal{Z}$ 时， $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w) = \mathbf{0}$ 。因此，我们只需要一种方法来验证对于每个词 $w \in \Sigma^*$，是否有 $\pi_{F_m}(w) = 1$ 。为此，我们给出如下确定性上下文无关语言。

引理 6.4. 形式语言

$$\mathcal{D}_R := \mathcal{L}_R \cap \pi_{F_m}^{-1}(1) \subseteq \Sigma^*$$

是确定性上下文无关的。

证明。 由引理5.3可知， $\mathcal{L}_R$ 是正则语言。然后，由引理 4.5可知，只需证明 $\pi_{F_m}^{-1}(1) \subseteq \Sigma^*$ 是确定性上下文无关的。

设 $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m, s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$ 是自由群 F_m的有限对称生成集。设 $f\colon \Sigma^* \to S^*$ 是一个幺半群同态，定义为使得对于每个 $\sigma_{i,j} \in \Sigma$，$\pi_{F_m}(\sigma_{i,j}) = f(\sigma_{i,j})$。于是，

$$\pi_{F_m}^{-1}(1) = f^{-1}\left(\{w \in S^* \mid \overline{w} = 1\}\right).$$

由引理 4.4可知，$\{w \in S^* \mid w = 1\}$ 是确定性上下文无关的。由于 $f\colon \Sigma^* \to S^*$ 是一个幺半群同态，因此由引理 4.5可得，$\pi_{F_m}^{-1}(\mathbf{1})$ 也是确定性上下文无关的。□

7. Main theorem

本节旨在证明我们的主要结果。这些结果可由对引理6.4中的确定性上下文无关语言的代数生成函数，以及引理 6.3中的有理生成函数进行一些代数运算而得。

定理 A. 如果 G 包含一个与 $\mathbb{Z}^n \times F_m$同构的有限指数子群，其中某个 n，$m \geqslant 0$，那么对于每个有限（幺半群）生成集 X以及每个正则语言 $R \subseteq X^*$，余生长级数 $C_R(z)$ 都可以写成一个有理函数的对角线。

证明。设 $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_{|\Sigma|}\}$ 和 $f_{\mathcal{Z}}(\mathbf{y})$ 分别为 Σ的标记及引理 6.3中的生成函数。即：

$$f_{\mathcal{Z}}(y_1, y_2, \ldots, y_{|\Sigma|}) = \sum_{z \in \mathcal{Z}} y_1^{z_1} y_2^{z_2} \cdots y_{|\Sigma|}^{z_{|\Sigma|}}$$

其中，$z \in \mathcal{Z}$ 当且仅当对于至少一个（或等价地，对于每一个）满足以下条件的词 $w \in \Sigma^*$，有 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w) = \mathbf{0}$：对于每个 i，该词恰好包含 z_i 个 a_i。

设 $\mathcal{D}_R$ 为引理 6.4中的确定性上下文无关语言。于是，按照上述方式标记 Σ，由引理 4.2和4.3可得，生成函数

$$g(x_1, \ldots, x_{|\Sigma|}, z) = \sum_{k_1, \ldots, k_{|\Sigma|}} c(k_1, \ldots, k_{|\Sigma|}) x_1^{k_1} \cdots x_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}} z^{k_1 + \cdots + k_{|\Sigma|}}$$

对于 $\mathcal{D}_R$ 是代数的。注意，根据引理 4.2 中生成函数的定义，$c(k_1, k_2, \ldots, k_{|\Sigma|})$ 非零，当且仅当存在一个词$w \in \mathcal{D}_R$，它恰好包含 k_i 个字母 a_i，对每个 i均如此。

由引理3.2，我们可以看出

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{|\Sigma|}, z) f_{\mathcal{Z}}(y_1, y_2, \ldots, y_{|\Sigma|})$$

是代数的。注意，语言 $\mathcal{D}_R \cap \pi_{\mathbb{Z}^n}^{-1}(\mathbf{0})$ 中的词由 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$ 中形如以下形式的项的系数计数：

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}} z^{\ell}. \tag{4}$$

也就是说，式（4）中的项恰好是 x_i 和 y_i的幂对于每个 i都相等的项。此外，我们回顾一下，$\mathcal{D}_R \cap \pi_{\mathbb{Z}^n}^{-1}(\mathbf{0})$ 的单变量生成函数恰好是余生长级数 $C_R(z)$。

在证明的这一阶段，我们可以通过进行 $|\Sigma|$ 原始对角线操作并进行变量代换，将余生长级数 $C_R(z)$表示为生成函数 $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z)$。为了将其表示为一个完全对角线，我们对该生成函数作如下修改。

由引理 3.2，我们可知

$$B(\mathbf{x},\mathbf{y},z)=\left(\prod_{j=1}^{|\Sigma|}\frac{1}{1-x_jy_j}\right)A(\mathbf{x},\mathbf{y},z),$$

是代数的。因此我们注意到，项的系数

$$x_1^\ell x_2^\ell\cdots x_{|\Sigma|}^\ell\, y_1^\ell y_2^\ell\cdots y_{|\Sigma|}^\ell\, z^\ell$$

在 $B(\mathbf{x},\mathbf{y}\ z)$ 是形如 (4) 的项在 $A(\mathbf{x},\mathbf{y}\ z)$ 中的系数之和。特别地，我们看到

$$C_R(z)=\mathrm{Diag}(B)(z)$$

因为 Diag(B)(z) 是 $\mathcal{D}_R\cap\pi_{\mathbb{Z}^n}^{-1}(\mathbf{0})$ 的单变量生成函数。因此，余生长级数 $C_R(z)$ 是一个代数级数的对角线。

我们的结果随即由推论3.3.1得出。 □

定理 A 的一个应用是 Baumslag-Solitar 群 BS(N,N)。特别地，结合定理 A 和引理 2.8 可得到以下结果。

推论 A.1. 对于任意有限（幺半群）生成集以及任意正则语言 R，每个 $N\in\mathbb{Z}$ 的 BS(N，N) 的余生长级数 $C_R(z)$ 都是有理函数的对角线。

证明. 我们首先注意到，BS(0，0) $=F_2$ 且 BS($-N$，$-N$) $=$BS(N，N)。由引理 2.8可知，对每个 $N\geqslant 1$，群 BS(N，N) 包含 $\mathbb{Z}\times F_N$作为有限指数子群。因此，我们的结果由定理A推出。 □

注意，定理 A 也可用于证明，任意几乎阿贝尔群的余生长级数都可写成有理级数的对角线。接下来，我们将证明一个更强的结果，即在几乎阿贝尔情形下，我们可以要求该有理级数是 $\mathbb{N}$-有理的。

定理 B. 对于任意有限幺半群生成集以及任意正则语言 R，几乎阿贝尔群的余生长级数 $C_R(z)$ 是一个 $\mathbb{N}$-有理级数的对角线。

证明。根据引理 2.2，不失一般性，我们可以假设 G包含 $H=\mathbb{Z}^n$ 作为有限指数正规子群。

令 $\mathcal{L}_R\subseteq\Sigma^*$，$\mathcal{Z}\subseteq\mathbb{N}^{|\Sigma|}$ 和 $\pi_{\mathbb{Z}^n}\colon\ \Sigma^*\to\mathbb{N}^n$ 分别如引理 5.3、引理 6.3 和定义 6.1中所定义。此外，在本证明中，我们固定字母表 $\Sigma=\{a_1,a_2,\ldots,a_{|\Sigma|}\}$ 上的一个顺序。现在注意到，词$w\in\Sigma^*$ 被 $C_R(z$计数，当且仅当 $w\in\mathcal{L}_R$ 和 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w)=\mathbf{0}$。特别地，这意味着我们无需使用引理 6.4 中给出的确定性上下文无关语言（我们只需要该语言来处理非阿贝尔自由子群）。

由引理 2.5可知，生成函数

$$f_{\mathcal{L}_R}(\mathbf{x},z)=\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{|\Sigma|}}c(k_1,k_2,\ldots,k_{|\Sigma|})x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}}z^{k_1+k_2+\cdots+k_{|\Sigma|}}$$

的 $\mathcal{L}_R$ 是 $\mathbb{N}$-有理的。令 $f_{\mathcal{Z}}(\mathbf{y})$ 为 $\mathbb{N}$-有理生成函数$\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{N}^{|\Sigma|}$ （由引理 6.3得到）。因此，生成函数

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = f_{\mathcal{L}_R}(\mathbf{x}, z) f_{\mathcal{Z}}(\mathbf{y})$$

是 $\mathbb{N}$-有理的。此外，根据集合的定义 $\mathcal{Z}$ 在引理 6.3中，我们看到，词 $w = w_1 w_2 \cdots w_\ell \in \mathcal{L}_R$带有 $\pi_{\mathbb{Z}^n}(w) = \mathbf{0}$由以下形式的项的系数计数： $A(\mathbf{x},\mathbf{y}\ z)$

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}}\ y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_{|\Sigma|}^{k_{|\Sigma|}}\ z^\ell. \tag{5}$$

根据 $f_{\mathcal{L}_R}(\mathbf{x}\ z)$ 的定义，对于每个具有非零系数的 5 形式的项，我们注意到 $k_i \leqslant \ell$ 对于每个 i。

在证明的这一阶段，我们可以通过对生成函数 $A(\mathbf{x},\mathbf{y}\ z)$ 取 $|\Sigma|$ 原始对角线并进行变量代换，写出余增长级数 $C_R(z)$。为了将其表示为一个完全对角线，我们按如下方式修改这个生成函数。

我们注意到

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \left(\prod_{j=1}^{|\Sigma|} \frac{1}{1 - x_j y_j} \right) A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z),$$

是 $\mathbb{N}$-有理的，且项的系数

$$x_1^\ell x_2^\ell \cdots x_{|\Sigma|}^\ell\ y_1^\ell y_2^\ell \cdots y_{|\Sigma|}^\ell\ z^\ell$$

在 $B(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\ z)$ 中，是形如 (5) 的 $A(\mathbf{x},\ \mathbf{y}\ z)$ 中各项系数之和。特别地，我们看到 Diag$(B)(z)$ 是 $\mathcal{L}_R \cap \pi_{\mathbb{Z}^n}^{-1}(\mathbf{0})$ 的单变量生成函数。于是，我们将余生长级数写作$C_R(z) =$Diag$(B)(z)$，也就是说，它是一个 $\mathbb{N}$-有理级数的对角线。 □

Acknowledgements

我们感谢 Tatiana Nagnibeda 和 Corentin Bodart 将本文所探讨的问题提请作者关注，并对本文早期草稿提出反馈。我们还感谢 Murray Elder 对本文早期版本的记号提出改进建议。此外，我们感谢 Igor Pak 提出的改进建议并提供相关引文。

本研究得到瑞士政府卓越奖学金以及瑞士国家科学基金会项目 200020-200400 的支持。

References

[1] N. Chomsky 和 M. P. Sch¨utzenberger。上下文无关语 *Computer programming and formal systems*言的代数理论。载于 *Computer programming and formal systems*，第 118–161 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1963 年。[2] Jordi Delgado 和 Enric Ventura。自由阿贝尔群与自由群的直积中的算法问题。 *J. Algebra*，391:256–283，2013 年。[3] J. Denef 和 L. Lipshitz。代数幂级数与对角线。 *J. Number Theory*，26 1 46 67，1987 ( ): – 。[4] Samuel Eilenberg 和 M. P. Sch¨utzenberger。交换幺半群中的有理集。*J. Algebra*，13:173–191，1969 年。[5] Murray Elder、Andrew Rechnitzer、Esaias J. Janse van Rensburg 和 Thomas Wong。BS(N, N) 的余增长级数是 D-有限的。 *Internat. J. Algebra Comput.*，24(2):171–187，2014 年。

[6] Philippe Flajolet 和 Robert Sedgewick。 *Analytic combinatorics*。剑桥大学出版社，剑桥，2009 年。[7] Seymour Ginsburg 和 Edwin Spanier。半群、Presburger公式与语 *Pacific journal of Mathematics*言。 *Pacific journal of Mathematics*，16(2):285–296，1966 年。[8] Hendrik Jan Hoogeboom 和 Joost Engelfriet。下推自动机。载于 *Formal Languages and Applications* 117 138 2004，第 – 页。施普林格，*Formal Languages and Applications* 117 138 2004。[9] John E. Hopcroft、Rajeev Motwani 和 Jeffrey D. Ullman。 *Introduction to Automata Theory Languages and Computation (3rd Edition)* ,,。 Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.，美国，2006 年。[10] Stephen P. Humphries。群的余增长与 Dedekind-Frobenius 群行列式。 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*，121(2):193–217，1997 年。[11] Dmitri Kouksov。论余增长级数的有理性。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，126 10 2845 2847，1998 年 ( ): – 。[12] Dmitri Kuksov。 *Cogrowth of groups*。博士论文，杨百翰大学，1998 年8月。[13] David E Muller 和 Paul E Schupp。群、端理论与上下文无关语言。 *Journal of Computer and system sciences*，26(3):295–310，1983 年。[14] David E Muller 和 Paul E Schupp。端理论、下推自动机与二阶逻辑。 *Theoretical Computer Science*，37:51–75，1985 年。[15] Igor Pak 和 David Soukup。幂零群的余增长序列的代数与算术性质，2022年。[16] Elaine Rich。 *Automata, computability and complexity: theory and applications*。Pearson Prentice Hall，上萨德尔河，2008 年。[17] Derek J. S. Robinson。 *A course in the theory of groups* 80 *Graduate Texts* , *in Mathematics* 1996 *A course in the theory of groups* 80 *Graduate Texts* 的卷。 *in Mathematics* 1996 Springer-Verlag，纽约，第二版， *A course in the theory of groups* 80 *Graduate Texts* 。*Email address*: *in Mathematics* 1996 alexbishop1234@gmail.com*URL*: https://alexbishop.github.io

Section de mathématiques, Université de Genève, rue du Conseil-Général 7-9, 1205 Genève, Switzerland