arXiv:2301.07590v2 [math.GR] 4 Oct 2023

增广理想中的序单位

PIOTR MIZERKA 与 PIOTR W. NOWAK

摘要。我们研究实群环、增广理想以及矩阵代数中的序单位。我们找出增广理想幂中的一个无限序单位族，其中包含拉普拉斯算子，并证明这些序单位可通过上同调运算自然地从矩阵代数中更简单的对角序单位得到。

近年来，代数方法已被用于证明群拉普拉斯算子（更一般地说，上同调拉普拉斯算子）及其相关算子的谱隙存在性。这始于 Ozawa 对 Kazhdan性质（T）的刻画，即将其表述为平方和 [7],；随后，人们据此证明了某些群类具有这一性质，其中包括 Aut(F_n)，即由 n 个生成元生成的自由群的自同构群，其中 $n \geq 5$ [5, 6]。这也使人们得以提出关于酉表示系数下高阶上同调消失性的新刻画 [2]。最近，Ozawa [8] 也在这一框架下诠释了 Shalom 的性质 H_T。

在这项工作中，我们关注增广理想的代数结构，以及由厄米平方和所成的锥诱导的序。我们假设这里出现的所有群都是有限生成的。Ozawa [7]证明，群拉普拉斯算子 Δ 是群 G 的增广理想 $I[G]$, 中的一个序单位。这一事实对于建立性质（T）的刻画至关重要，该刻画是通过群环 $\mathbb{R}G$ 中拉普拉斯算子的代数谱隙来表述的。在 [8] 中，他还区分了另一个元素 $\square$（见下文定义 I），并特别证明，对于有限阿贝尔化的群，它是 $I[G]$ 中的一个序单位。

这里我们将拉普拉斯算子 Δ 和元素 $\square$ 置于同一框架之中。我们定义一族元素 $\square_n \in I[G]$，并证明对于有限阿贝尔化的群，它们是 $I[G]$ 中的序单位。我们的主要结果——定理 1 的证明包含两个关键要素。第一，对于 $I^{2n}[G]$, 中的任意序单位 u，对角线上每个位置都取 u 的对角矩阵 diag(u)，是 $I^{2n}[G]$上的矩阵中的一个序单位。第二，对于由有限集合 S生成且具有有限阿贝尔化的群 G，某个正映射 $D\colon \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G]) \to I[G]$ 是满射。

这种方法的一个重要优势在于，它更深入地解释了为什么拉普拉斯算子和元素 $\square$ 都是增广理想相应幂中的序单位：它们是矩阵代数中自然序单位经正映射作用后的像。

致谢。 我们感谢 Marek Kaluba 提供了有益的意见。

两位作者均获得了 Maestro 13 国家科学中心（波兰）“群上的分析”项目资助，项目编号为 2021/42/A/ST1/00306。

1. 序单位的一个无限族

对于任意群 G，都可以定义实群环 $\mathbb{R}$G，它是由有限支撑函数组成的环，$\to \mathbb{R}$ 运算为逐点加法和卷积乘法。为方便起见，可将每个元素 $\xi \in \mathbb{R}$G 写作 $\xi = \sum_{g} \xi(g)g$，表示 $g \mapsto \xi(g)$ 是 ξ 所定义的函数。映射 G $\to$G，$g \mapsto g^{-1}$ 定义了 $\mathbb{R}$G 上的对合 $*$。我们还考虑增广理想 I[G]，它是增广映射ω：$\mathbb{R}$G $\to \mathbb{R}$的核。第 n 个增广幂 $I^n[G] \subseteq \mathbb{R}$G 是增广理想 I[G]中元素的 n 重乘积所张成的空间。由于 I[G] 由形如 $1 - g$ 的元素（对所有 $g \in$ G）张成，很容易看出，I^n[G] 由形如 $\prod_{i=1}^{n}(1 - g_i)$ 的元素张成，其中 $g_i \in$ G。

对于任意$k \geq 1$，$\mathbb{R}G$ 的 $*$-对合结构（分别地，$I[G]$）赋予矩阵 $\mathbb{M}_{k\times k}(\mathbb{R}G)$（分别地，$\mathbb{M}_{k\times k}(I[G])$）$*$-代数结构，其中 $*$-对合是 $\mathbb{R}G$ 上的 $*$-对合（分别地，$I[G]$）与矩阵转置的复合。

设 $\mathscr{A}$是一个*-代数。正锥 由厄米平方 $\Sigma^2\mathscr{A}$构成，是形如 $\sum_{i=1}^{l} a^*_i a_i$的有限和的集合，其中$a_i \in \mathscr{A}$。设$V \subseteq \mathscr{A}$是一个子空间。若对每个$v = v^* \in V$，都存在 $R_v \geq 0$ 使得$v + Rvu \in V \cap \Sigma^2\mathscr{A}$，则元素$u \in V$ 称为V 中的一个序单位。这里考虑的代数具有 $\mathbb{M}_{k\times k}(\mathbb{R}G)$的形式，并且它们具有如下性质：单位矩阵总是 $\mathscr{A}$中的一个序单位。

设G 是一个群，且具有有限生成集S。那么$d = [1 - s]_{s\in S} \in \mathbb{M}_{|S|\times 1}(I[G])$是 0-余微分映射 $\mathbb{R}G \to \oplus_{s\in S} I[G]$的矩阵。映射$D : \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G]) \to I[G]$ 定义为

$$D(\xi) = d^*\xi d.$$

族 $\square_n$。 现在我们将引入增广理想中的元素族，这将是本文的主要研究对象。对每个$k \geq 1$，用$\mathrm{diag}_k(\xi)$表示对角线元素均等于 $\xi \in \mathbb{R}G$ 的对角$k \times k$ 矩阵，并令

$$\mathrm{diag}(\square_{n-1}) = \mathrm{diag}_{|S|}(\square_{n-1}).$$

定义

$$\square_0 = 1,$$

并且对任意$n \geq 1$，令

$$\square_n = D(\mathrm{diag}(\square_{n-1})) = \sum_{s_1,\ldots,s_n\in S} (1-s_n)^* \ldots (1-s_1)^*(1-s_1)\ldots(1-s_n).$$

注意

$$\square_1 = \Delta \quad \text{and} \quad \square_2 = \square,$$

其中 □ 按 [8], 中的定义，差一个归一化常数（实际上，$\square_2 = 4\square$；由于数乘不会改变正性类型，我们可以假设$\square_2 = \square$）。

我们将证明如下结论

定理 1. 设 G 的阿贝尔化有限。那么，对每个 $n \geq 1$，$\square_n$ 是 $I[G]$ 中的序单位，而 $diag(\square_n)$ 是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$ 中的序单位。

2. 对角序单位

设 G 是一个具有有限对称生成集 S 的群。设$n \geq 1$，且 u 是 $I^{2n}[G]$ 中的序单位。设 $k \geq 1$。我们将证明，$\mathrm{diag}_k(u)$ 是 $\mathbb{M}_{k\times k}(I^{2n}[G])$ 中的序单位。

对于 $g \in G$ 以及 $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in S$，记 α_u 为乘积 $(1-u_1)\ldots(1-u_n)$，其中 $u = s,t$。定义

$$E_{s,t}(\pm g) = \begin{bmatrix} 0 & \pm\alpha_s g \alpha_t \\ \pm\alpha_t^* g^{-1} \alpha_s^* & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$\square_{s,t} = \begin{bmatrix} \alpha_s \alpha_s^* & 0 \\ 0 & \alpha_t^* \alpha_t \end{bmatrix} .$$

下面的引理是证明一般情形的关键:

引理 2. 两个矩阵 $E_{s,t}(\pm g) + \square_{s,t}$ 都是厄米平方和。

证明。 这可由下面的分解得出:

$$E_{s,t}(\pm g) + \square_{s,t} = \begin{bmatrix} \pm\alpha_s g \\ \alpha_t^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm g^{-1}\alpha_s^* & \alpha_t \end{bmatrix} .$$

□

应用上面的引理，可得一般性结论:

引理 3. 矩阵 $diag_k(u)$ 是 $\mathbb{M}_{k\times k}(I^{2n}[G])$中的一个序单位。

证明。k = 1 的情形显然，因为 u 是 $I^{2n}[G]$ 中的序单位。令 k = 2，并假设 M $\in \mathbb{M}_{k\times k}(I^{2n}[G])$。先假设 M 仅由对角部分构成。根据我们的假设，u 是 $I^{2n}[G]$ 中的序单位，因此可以向 M 中加上足够多的对角矩阵$_k$(u)，使其成为厄米平方之和。因此，只需证明非对角部分的结论，我们可以假设 M 的对角部分为零。由于 I[G] 作为左、右 ℝG- 模均由 1 − s （s ∈ S）生成，因此 $I^n[G]$ 作为左（右）ℝG-模由元素 α_s 生成。于是，M 可表示为矩阵 $E_{s,t}(\pm g)$ 的有限线性组合，且系数为正:

$$M = \sum_{s,t,\pm g} \lambda_{s,t,\pm g} E_{s,t}(\pm g), \quad \lambda_{s,t,\pm g} > 0.$$

由引理 2 可知，$\mathrm{M}' = \mathrm{M} + \sum_{\mathrm{s,t,\pm g}} \lambda_{s,t,\pm g} \ddot{a}_{s,t}$ 是厄米平方之和。由于 $\mathrm{S} = \mathrm{S}^{-1}$，我们可以向 M' 中加入适当的对角项，形式为 $\lambda_s \alpha_s^* \alpha_s$ 或 $\lambda_s \alpha_s \alpha_s^*$，$\lambda_s > 0$，从而得到 $\mathrm{M}'' = \mathrm{M} + \lambda \mathrm{diag}_k(\ddot{a}_n)$，其中 $\lambda \geq 0$。显然，M'' 是厄米平方之和。另一方面，由于 u 是 $\mathrm{I}^{2n}[\mathrm{G}]$，中的序单位，因此对于某个适当的 $\lambda' > 0$，差值$\lambda' \mathrm{u} - \ddot{a}_n$ 是厄米平方之和。因此，

$$M + \lambda\lambda' \mathrm{diag}_k(u) = M'' + \lambda \mathrm{diag}_k(\lambda' u - \square_n)$$

是厄米平方之和。

一般情形的证明，只需重复 [1, 命题 3.2] 一般情形证明中的论证。□

3. D 的满射性

现在我们将考察映射 D，并证明对于具有有限阿贝尔化的群G，该映射是满射。

对于实向量空间 V，用V' 表示其对偶，即由V上的所有线性泛函构成的空间。对于实群环 $\mathbb{R}G$，其对偶空间 $\mathbb{R}G'$ 可与所有函数 $\{f : G \to \mathbb{R}\}$ 构成的空间等同。将G在 $\varphi \in \mathbb{R}G'$ 上的平移作用记为$g \cdot \varphi \cdot h(\eta) = \varphi(g^{-1} \cdot \eta \cdot h^{-1})$。这一结构可线性扩张为 $\mathbb{R}G'$ 上的G双模结构。

由于增广理想是子空间 $I[G] \subseteq \mathbb{R}G$，其对偶 $I[G]'$ 是 $\mathbb{R}G'$的一个商。更准确地说，增广映射的对偶映射 $\omega' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}G'$ 是将 $\mathbb{R}$ 嵌入为常值函数的映射，而 $I[G]' = \mathbb{R}G'/$ 常值函数。因此，我们将 $I[G]'$ 中的元素视为定义在 G 上的函数的等价类，其中相差常值函数的函数视为等价。

引理 4. 设 G 是由有限集 S 生成的有限生成群。以下条件等价：

(1) 增广理想 $I[G]$ 是幂等的，(2) 对于从平凡 G-模 M 嵌入到 G-模 N 的任意嵌入 $\iota : M \to N$，映射 $\iota_* : H^1(G,M) \to H^1(G,N)$ 都是单射，(3) 映射 $D : \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G]) \to I[G]$ 是满射。

证明。我们先证明 (1) 推出 (2)。设 $[\mathrm{z}] \in \mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{M})$ 由余循环 $\mathrm{z} : \mathrm{G} \to \mathrm{M}$ 表示，使得 $\iota_*([\mathrm{z}]) = 0$ in $\mathrm{H}^1(\mathrm{G}, \mathrm{N})$。也就是说，对每个 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，都存在 $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$，使得对每个 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，$(\iota \circ \mathrm{z})(\mathrm{g}) = (1 - \mathrm{g})\mathrm{n}$。由于 $\mathrm{I}^2[\mathrm{G}] = \mathrm{I}[\mathrm{G}]$，且 $\mathrm{I}^2[\mathrm{G}]$由形如 $(1 - \mathrm{g})(1 - \mathrm{h})$ 的元素张成，因此，对每个 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$，元素 $1 - \mathrm{g}$ 都可以表示为有限线性组合 $1 - \mathrm{g} = \sum \alpha_i (1 - \mathrm{g}_i)(1 - \mathrm{h}_i)$。因此，

$$(1-g)n = \sum \alpha_i (1-g_i)(1-h_i)n = \sum \alpha_i (1-g_i)\iota(z(h_i)) = 0,$$

因为 ι 是平凡模的嵌入。由于 ι 也是单射，这意味着对于任意 $z(g) = 0$，$g \in G$。

为证明 (2) 蕴含 (3)，考虑对偶映射

$$D' : \mathbb{R}G' \to \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])'.$$

对于 $\xi \in \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$，我们有

$$(D'\varphi)(\xi) = \varphi\left(\sum_{s\in S}(1-s)^*(\xi d)_s\right) = \sum_{s\in S}(1-s)\cdot\varphi\left(\sum_{t\in S}\xi_{st}(1-t)\right)$$
$$= \sum_{s,t\in S}(1-s)\cdot\varphi\cdot(1-t)^*(\xi_{st}).$$

假设 $\varphi \in \mathbb{R}G'$ 属于D'的核。由于 ξ_{st} 可以是$I[G]$, 中的任意元素，因此对每个 s、$t \in S$，都有

$$(1-s)\cdot\varphi_{\mathrm{aug}}\cdot(1-t)^* = 0,$$

其中 $\varphi_{\mathrm{aug}}: G \to \mathbb{R}$，将 g 映射为 $\varphi(1-g)$。令 $\psi_s = (1-s)\cdot\varphi_{\mathrm{aug}} \in \mathbb{R}G'$。条件

$$\psi_s\cdot(1-t)^* = 0,$$

这意味着对每个 $s \in S$，元素 $\psi_s \in \mathbb{R}G'$ 都是G上的常值函数。

现在注意到，映射 $\psi: \mathrm{G} \to \mathbb{R}\mathrm{G}'$，由 $\mathrm{g} \mapsto \psi_g = \varphi_{\mathrm{aug}} - \mathrm{g}\cdot\varphi_{\mathrm{aug}}$ 定义，是左 G-模 $\mathbb{R}\mathrm{G}'$ 的一个 1-余边界。由余循环性质可知，ψ 实际上是一个余循环 $\mathrm{G} \to \mathbb{R}$。根据假设，由系数嵌入 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}\mathrm{G}'$ 作为常值函数诱导的映射 $\iota_*: \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{G},\mathbb{R}\mathrm{G}')$ 是单射。因此，由于余循环 $\psi: \mathrm{G} \to \mathbb{R}\mathrm{G}'$ 是一个余边界，它作为余循环 $\psi: \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ 也同样是一个余边界。然而，这意味着 ψ 恒等于零，因为 G 对 $\mathbb{R}$ 的作用是平凡的。因此，对每个 $\mathrm{s} \in \mathrm{S}$，我们得到

$$\psi_s = \varphi_{\mathrm{aug}} - s\cdot\varphi_{\mathrm{aug}} = 0,$$

因此，$\varphi_{\mathrm{aug}} \in \mathbb{R}G'$ 在G上是常值函数。显然，φ 也必定是常值函数。

由此可知，映射$D': I[G]' \to \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])'$ 是单射。事实上，反设不然，则存在两个等价类 $[\varphi_1] \neq [\varphi_2]$，它们的差在$D'$下映为 0。任取这两个等价类的代表元 φ_1 和 φ_2，则它们的差 $\varphi_1 - \varphi_2$ 不是常值函数，且属于映射D': $\mathbb{R}G'$ $\to \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])'$的核。

最后，由 (3) 推导出 (1)。令 $\xi \in I[G]$，并注意到，由于 $\xi = d^*md$，其中m $\in \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$，我们有

$$\xi = \sum_{s,t\in S}(1-s)^* m_{s,t}(1-t).$$

由于$m_{s,t}(1-t) \in I[G]$，我们看到这意味着 ξ 实际上是$I^2[G]$,的一个元素，从而得到嵌入$I[G] \subseteq I^2[G]$。□

利用 Chen[3,4] 的结果，可以给出不满足定理 4 的条件 (1)-(3) 的例子（即 G 具有无限阿贝尔化），其中包括无挠幂零群。海森堡群这一具体例子也曾由 Ozawa 在 [8] 中考察。

Stallings [10] 和 Quillen [9], 也研究了在一般环上群环背景下的增广商$I^n[G]/I^{n+1}[G]$，他们还考察了这些增广商的直和，将其视为与群环相关联的分次环。在我们所考虑的情形下，增广商及其相关联的

分次环是平凡的。增广幂$I^n[G]$ 也用于定义维数子群$D_n(G) = \{g \in G\colon 1-g \in I^n[G]\}$。维数子群的判定是一个经典问题。

注5. 正如审稿人所指出的，蕴含关系 (1) $\implies$ (3) 可以直接证明。假设 $I[G] = I^2[G]$。那么 D 是满射。取 $\xi \in I[G]$。由于 $I[G] = I^2[G]$, , 我们也有 $I[G] = I^3[G]$ 。因此，我们可以将 ξ 表示为以下有限和：

$$\xi = \sum_{g,h,k} \lambda_{g,h,k}(1-g)(1-h)(1-k).$$

由于增广理想由 $1-s$、$s \in S$ 作为左模以及右 $\mathbb{R}G$-模生成，我们还可以进一步写成：

$$\xi = \sum_{g,h,k} \lambda_{g,h,k} \sum_{s\in S}(1-s)^*\alpha_{g,s}(1-h)\sum_{t\in S}\beta_{k,t}(1-t) = \sum_{s,t\in S}(1-s)^*\xi_{s,t}(1-t),$$

其中 $\xi_{s,t} = \sum_{g,h,k} \lambda_{g,h,k}\alpha_{g,s}(1-h)\beta_{k,t} \in I[G]$。观察到

$$D\left(\left[\xi_{s,t}\right]_{s,t\in S}\right) = \xi$$

由此便完成了证明。

4. 定理 1 的证明及最后的评述

现在我们可以证明定理 1 了。回顾一下，我们有一个群G，它的阿贝尔化有限，且$n \geq 1$。还要回顾的是，正如第3节开头所指出的，假设G 具有有限阿贝尔化，等价于增广幂稳定。

定理*1*的证明。 我们用简单的归纳法证明这一断言。由 [7,引理 2], 可知，$\square_1 = \Delta$ 是$I[G] = I^2[G]$中的序单位。由引理 3 可得，$\operatorname{diag}(\square_1)$是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I^2[G])$中的序单位。由于$G$ 的阿贝尔化有限，我们得出，$\operatorname{diag}(\square_1)$是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$中的序单位。这就证明了$n = 1$的情形。

假设定理 1 对某个$n \geq 1$成立。取任意一个 $\eta \in I[G]$ ，使得 $\eta = \eta^*$。由D 的满射性可知，存在$\xi \in \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$，使得 $\eta = d^*\xi d$。由于 $\eta = \eta^*$，我们有

$$\eta = d^*\left(\frac{\xi+\xi^*}{2}\right)d + d^*\left(\frac{\xi-\xi^*}{2}\right)d = d^*\left(\frac{\xi+\xi^*}{2}\right)d.$$

根据归纳假设，对角矩阵 $\operatorname{diag}(\square_n)$ 是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G])$ 中的序单位。因此，存在某个 $\lambda \geq 0$ 使得

$$\frac{\xi+\xi^*}{2} + \lambda\cdot\operatorname{diag}(\square_n) \in \mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I[G]) \cap \Sigma^2\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(\mathbb{R}G).$$

由于在左侧复合d^* 并在右侧复合d 仍能保持为厄米平方和的性质，我们得到

$$d^*\left(\frac{\xi+\xi^*}{2}\right)d + \lambda\cdot d^*\operatorname{diag}(\square_n)d = \eta + \lambda\cdot\square_{n+1} \in I[G] \cap \Sigma^2\mathbb{R}G.$$

□

注 6. 事实上，我们可以推广定理 1，并给出另一种证明，说明对于有限阿贝尔化的群，Δ 是$I[G]$ 中的序单位。

可以如下进行。注意，将映射 D 扩展到 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(\mathbb{R}G)$ 后是满射。另一方面，正如第 1 节所指出的，单位矩阵 I 是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(\mathbb{R}G)$ 中的序单位。因此，定理 1 的证明同样适用于这种情形。事实上，对于某个 $\lambda \geq 0$,

$$\frac{\xi+\xi^*}{2}+\lambda I \in \Sigma^2\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(\mathbb{R}G),$$

由 D 的满射性可得

$$d^*\left(\frac{\xi+\xi^*}{2}\right)d+\lambda d^*d=\eta+\lambda\Delta\in I[G]\cap\Sigma^2\mathbb{R}G.$$

尽管这需要额外假设 D 是满射的（也就是说，G 具有有限阿贝尔化），但它从概念上解释了拉普拉斯算子的这一作用，表明在这种情况下，Δ 是另一个环中单位元在某个正映射下的像。

注 7. 注 5 中的论证可以轻松推广，从而证明对于任意 $n \geq 1$，映射 D：$\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I^{2n}[G]) \to I^{2n+2}[G]$ 均为满射，而不论 G 是否具有有限阿贝尔化。另一方面，只要 u 是 $I^{2n}[G]$, 中的序单位，$\mathrm{diag}(u)$ 就是 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(I^{2n}[G])$ 中的序单位，见引理 3。应用定理 1 证明中的相同论证可得，若对于某个 $n_0 \geq 1$，u 是 $I^{2n_0}[G]$ 中的序单位，则

$$u_n=\sum_{s_1,\ldots,s_n\in S}(1-s_n)^*\ldots(1-s_1)^*u(1-s_1)\ldots(1-s_n)$$

是 $I^{2(n_0+n)}[G]$ 中的序单位。这尤其证实了 Ozawa 的观察：$\square$ 是 $I^4[G]$ 中的序单位。

注 8. 除了 $\Delta = D(I)$ 和 $\square = D(\mathrm{diag}(\Delta))$ 之外，$I[G]$ 的其他特殊元素在 $\mathbb{M}_{|S|\times|S|}(\mathbb{R}G)$ 中也有明确的原像。

(1) $\widetilde{\Delta^2} = d^*dd^*d = D(dd^*)$，其中 dd^* 是矩阵，其 (s,t) 项为 $(1-s)(1-t)^*$; (2) $\widetilde{\mathrm{Sq}} = D(\mathrm{Sq})$，其中 Sq 是对角矩阵，其 (s,s) 项为 $(1-s)(1-s)^*$，其他位置均为 0。

参考文献

[1] M. Kaluba、P. Mizerka 和 P. W. Nowak，*SL3()* 的上同调拉普拉斯算子的谱隙，arXiv:2207.02783（2022）。[2] U. Bader 和 P. W. Nowak，上同调消失的群代数判据，《泛函分析杂志》**279**（2020），第 11 期。[3] Kuo Tsai Chen，迭代积分、基本群与覆盖空间，Trans. Amer. Math. Soc. **206**（1975），83–98，DOI 10.2307/1997148。MR377960

[4] ———，迭代路径积分，Bull. Amer. Math. Soc. **83**（1977），第 5 期，831–879，DOI 10.1090/S0002-9904-1977-14320-6。MR454968[5] M. Kaluba、D. Kielak 和 P. W. Nowak，关于 *Aut(Fn)* 和 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的性质（T），Ann. of Math. (2) **193**（2021），第 2 期，539–562。

[6] M. Kaluba、P. W. Nowak 和 N. Ozawa，Aut($\mathbb{F}_5$) 具有性质（*T*），数学年刊**375**（2019），第 3–4 期，1169–1191。[7] N. Ozawa，*Kazhdan*性质（*T*）的非交换实代数几何，Jussieu数学研究所期刊**15**（2016），第 1 期，85–90。[8] ———，通用非格的 *Kazhdan* 性质（*T*）替代方案，arXiv:2207.05272（2022）。[9] D. Quillen，群环的伴随分次环，代数学杂志**10**（1968），411–418。[10] J. R. Stallings，群环中增广理想幂的商，载于《纽结、群与三维流形》（AM-84）**84**（1975）。[11] Brian K. Schmidt，群环增广理想模其自身幂的商，伊利诺伊数学杂志**19**（1975），18–26。MR0377913

´数学研究所、波兰科学院数学研究所，波兰科学院，波兰科学院，斯涅德茨基街8号，00-656，华沙，波兰电子邮箱：pnowak@impan.pl电子邮箱：pmizerka@impan.pl