arXiv:2301.07663v3 [math.AP] 7 Jul 2023

将分数阶 Sobolev 映射提升到非紧覆盖空间

JEAN VAN SCHAFTINGEN

摘要。给定紧黎曼流形 M 和 N、一个黎曼覆盖 $\sim \overset{\sim}{\pi}: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$（其中 N 是非紧覆盖空间），以及 $1 < p < \infty$ 和 $0 < s < 1$，当 $sp > 1$ 时，分数阶 Sobolev 映射在 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 中的提升空间可得到刻画；此外，当 $sp \geq \dim \mathrm{M}$ 时，还可得到一个最优的非线性分数阶 Sobolev 估计。本文还给出了空间和 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}\ \mathbb{R}) + \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M}\ \mathbb{R})$ 的非线性刻画。

目录

1. 引言 1 2. 提升空间的刻画及相关估计 7 2.1. 正则提升的先验估计 7 2.2. 下指数的变化 10 2.3. 提升空间中的紧性 13 2.4. 提升的存在性 16 2.5. 提升的唯一性 18 2.6. 提升的先验估计 20 3. 与线性索伯列夫空间的关系 21 3.1. 作为索伯列夫空间之和的刻画 21 3.2. 关于临界下指数 24 4. 次临界维数下的提升估计 25 4.1. 一维估计 26 4.2. 平均积分振荡估计 29 4.3. 积分截断平均振荡估计 30 4.4. 大尺度估计的证明 33 4.5. 结论及进一步估计 35 参考文献 37

1. 引言

$\sim$给定一个覆盖映射 $\pi: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$，也就是说，一个映射 π，满足对于每个 $y \in \mathrm{N}$，都存在某个开集 $U \subseteq \mathrm{N}$，使得 $y \in U$，且 $\pi^{-1}(U)$ 是 N 中若干开 $\sim$子集的不交并，并且在这些子集上 π 是一个同胚，经典的拓扑提升理论

日期：2023年7月7日。2020 数学主题分类。58D15 (46E35)。关键词与短语。索伯列夫–斯洛博杰茨基空间；索伯列夫空间之和；Sobolev 嵌入定理。作者获得了 Fonds de la Recherche Scientifique–FNRS 的 Mandat d'Impulsion Scientifique F.4523.17 项目（“Sobolev 映射的拓扑奇点”）以及 Fonds de la Recherche Scientifique–FNRS 的 Projet de Recherche T.0229.21 项目（“奇异调和映射与 Ginzburg–Landau 松弛的渐近行为”）的资助。

指出，若 M 是单连通拓扑流形，且 π 是满射，那么每个映射 $u \in C(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 都可以写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$，其中 $\widetilde{u} \in C(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 是某个映射（例如参见 [15, 命题 1.33]）。例如，圆的万有覆盖 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$：对每个 $\widetilde{y} \in \mathbb{R}$ 定义为 $\pi(\widetilde{y}) = e^{iy} \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$，据此可以对从圆 $\mathbb{S}^1$ 到其自身的映射的同伦类进行分类（例如参见 [15, 定理 1.7]）。

当流形 N 都赋有黎曼度量时，若 $\widetilde{\pi} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 是一个覆盖且为局部等距映射，也就是说保持度量张量不变，我们称 $\widetilde{\pi}$ 其为黎曼覆盖。事实上，若 N 是黎曼流形，且 π 是拓扑覆盖映射，则 N 上存在唯一的黎曼度量，使得 $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 是黎曼覆盖（参见 [13, 2.A.4; 16，命题 2.31]）。

给定一个黎曼流形 M、$s \in (0, 1]$ 和 $p \in [1, \infty)$，Sobolev 空间中的提升问题旨在确定每个映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 是否都能在 M 上写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$ 的形式，其中 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \widetilde{\mathrm{N}})$ [2,5] 是某个映射。

当 $s = 1$ 时，$\dot{W}^{1,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 是齐次一阶索伯列夫空间，其定义如下：根据纳什嵌入定理，不失一般性地假设黎曼流形 N 被等距嵌入到某个欧几里得空间 $\mathbb{R}^\nu$ 中 [26] ——

$$\dot{W}^{1,p}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \coloneqq \left\{ u : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \;\middle|\; u \text{ is weakly differentiable and } \int_{\mathcal{M}} |Du|^p < \infty \right\}.$$

若定义域流形 M 是单连通的，则对于圆的万有覆盖 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$，Bourgain、Brezis 和 Mironescu [5, 第 3] 节；以及一般黎曼覆盖映射 $\widetilde{\pi} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$，Bethuel 和 Chiron [2, 第 1] 节（另见 [11, 第 1.1] 节），已经刻画了其中每个映射都存在提升的一阶索伯列夫空间：若覆盖映射 π 是满射且非单射，则每个映射 $u \in \dot{W}^{1,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 都可写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$，其中某个映射 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{1,p}(\mathrm{M}, \widetilde{\mathrm{N}})$ 满足当且仅当 $p \geq \min\{2, \dim \mathrm{M}\}$；此外，此时还有

$$\int_{\mathcal{M}} |D\widetilde{u}|^p = \int_{\mathcal{M}} |Du|^p; \tag{1}$$

一旦已知提升 $\widetilde{u}$ 的存在性，恒等式 (1) 就可由 Sobolev 函数的链式法则直接推出，因为覆盖映射 π 是局部黎曼等距映射，因此 $|D\widetilde{u}| = |Du|$ 在 M 上几乎处处成立。

在分数阶情形 $0 < s < 1$中，相应的齐次分数阶 *Sobolev–Slobodeckiĭ* 空间 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 可通过加利亚多分数阶能量的有限性定义如下：

$$\dot{W}^{s,p}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \coloneqq \left\{ u : \mathcal{M} \to \mathcal{N} \;\middle|\; \|u\|^p_{\dot{W}^{s,p}(\mathcal{M})} \coloneqq \iint\limits_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y), u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y, x)^{m+sp}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x < \infty \right\}, \tag{2}$$

其中，$d_{\mathcal{M}}$ 和 $d_{\mathcal{N}}$ 分别表示连通黎曼流形 M 和 N 上的测地距离，且 $m \coloneqq \dim \mathrm{M}$。

当 $sp < 1$ 时，根据 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 关于圆的万有覆盖的研究 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ [5, 定理 2；11，定理 5.1 和 5.2]，以及 Bethuel 和 Chiron 的研究 [2, 定理 3]，每个映射 $u \in W^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 都可以写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$，其中 $\widetilde{u} \in W^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$，于是可得提升估计

$$\iint\limits_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y, x)^{m+sp}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \leq C \iint\limits_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y), u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y, x)^{m+sp}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

在这种情形下 $sp < 1$，分数阶 Sobolev 映射相当粗糙，并且跳跃的可能性为提升的构造留下了很大空间；由于提升具有高度非唯一性，构造提升颇具挑战性。

当覆盖空间 $\widetilde{\mathrm{N}}$ 紧致时，Bethuel & Chiron [2, th. 3], 以及 Mironescu & Van Schaftingen [24]的研究已经刻画了这样的分数阶 Sobolev 空间 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$：其中任意映射都存在提升。若覆盖 π 是满射但非单射，则每个映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ 都可以写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$，其中 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\widetilde{\mathrm{N}})$，当且仅当 $sp \geq \min\{2, \dim \mathrm{M}\}$。此外，若 $sp > 1$，则对于任何可写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$ 的 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$，其中 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\widetilde{\mathrm{N}})$，估计式 (3) 均成立；这一关键估计源于反向振荡估计，并结合了这样一个观察：覆盖空间 N 的直径可由流形 N 的单射半径 $\mathrm{inj}(\mathrm{N})$ 的某个倍数所控制。

当覆盖空间 $\widetilde{\mathrm{N}}$ 非紧时，会遇到针对 $1 \leq sp < m$ 的分析障碍：存在属于 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ 的映射，它们除一个离散点外均光滑，却不能写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$ 的形式，其中 $\widetilde{u} \in W^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ [2, 第 3 条；第 5 条，第 2 条]。这并非故事的终点，因为我们仍可尝试描述提升的函数空间。

对于圆 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 的万有覆盖，提升已由 Bourgain、Brezis、Mironescu 和 Nguyen[4, 11, 19–22, 27] 的一系列工作刻画：

定理 1.1. *设 M 为紧黎曼流形，设 $m := \dim \mathrm{M}$，设 $s \in (0,1)$，并设 $p \in (1,\infty)$。若 M 是单连通的，且若 $sp \geq 2$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得每个映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{S}^1)$ 都可在 M 上写成 $u = \pi \circ \widetilde{u}$，其中函数 $\widetilde{v} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{R})$ 和 $\widetilde{w} \in \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M},\mathbb{R})$ 满足估计式 $\widetilde{u} = \widetilde{v} + \widetilde{w}$*

$$\iint_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}} \frac{|\widetilde{v}(y)-\widetilde{v}(x)|^p}{d_{\mathrm{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{M}} |D\widetilde{w}|^{sp} \leq C \iint_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{d_{\mathrm{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

换言之，定理 1.1 表明，任意映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{S}^1)$ 都有一个提升 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{R}) + \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M},\mathbb{R})$。

反过来，根据分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式（例如参见 [8, 推论 3.2; 10; 33, 引理 2.1]），若 $\widetilde{u} = \widetilde{v} + \widetilde{w}$ 且 $\widetilde{v} \in W^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{R})$ 和 $\widetilde{w} \in \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M},\mathbb{R})$，则 $u := \pi \circ \widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{S}^1)$，其中不等式 (4) 反向成立。因此，定理 1.1 完全刻画了 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{S}^1)$ 的提升空间：对于 $sp \geq 2$，它是线性空间 $\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathbb{R}) + \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M},\mathbb{R})$ 之和。

本研究的首要目标是，当覆盖空间 N 非紧时，为一般覆盖映射 $\pi\colon \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 得到定理 1.1 的对应结果。自一开始，这项工作就颇为棘手，因为当覆盖空间 N 不是线性空间时，$\dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\widetilde{\mathrm{N}}) + \dot{W}^{1,sp}(\mathrm{M},\widetilde{\mathrm{N}})$ 并没有显而易见的定义或推广方式。我们如下刻画提升空间。

定理 1.2. *设 M 和 N 为紧黎曼流形，设 $m := \dim \mathrm{M}$，let $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 为满射黎曼覆盖映射，设 $s \in (0,1)$ 且设 $p \in (1,\infty)$. 若 M 是单连通的，且若 $sp \geq 2$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对于每个映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$，都存在可测映射 $\widetilde{u}\colon \mathrm{M} \to \widetilde{\mathrm{N}}$，满足 $\pi \circ \widetilde{u} = u$ 在 M 上几乎处处成立，并且*

$$\iint_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p \wedge 1}{d_{\mathrm{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C \iint_{\mathrm{M}\times\mathrm{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathrm{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

左端（5）中的被积函数与右端的经典 Gagliardo 能量仅有一处不同：它通过取最小值 $\wedge$ 运算将距离截断为不超过 1；从度量空间的角度来看，这可以解释为在覆盖空间 N 上采用一种有界距离，使得覆盖映射 π 在小尺度下是等距映射。

定理 1.2 中提升的刻画是尖锐的：若对于某个映射 $\widetilde{u} : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$，式 (5) 的左端有限，则根据提升的局部等距映射性质，有 $u = \pi \circ \widetilde{u} \in W^{s,\,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$，并且式 (5) 反向成立。

定理 1.2 证明的核心是 Mironescu & Van Schaftingen 的反向振荡估计 [24, 引理 3.1]（见下文命题 2.1），结合 Brezis & Mironescu 对光滑映射的逼近 —— 这些映射在有限个维数为 $\lceil m - sp - 1 \rceil$ 的流形并集之外光滑——以及在式 (5) 左端有界的假设下，分数阶 Rellich 紧性定理的一个适当变体（见下文命题 2.8）；此外，在技术层面上还要用到提升空间的等价刻画（见下文命题 1.5）。

在函数空间中，满足式 (5) 左端有限的提升具有唯一性。为陈述这一点，我们定义空间

$$X(\mathcal{M}, \widetilde{\mathcal{N}}) \coloneqq \left\{ \widetilde{u} : \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{N}} \;\middle|\; \widetilde{u} \text{ is measurable and } \iint\limits_{\substack{x,y \in \mathcal{M} \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y)) \geq \operatorname{inj}(\mathcal{N})/2}} \frac{1}{d_{\mathcal{M}}(x,y)^{m+1}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x < \infty \right\}; \tag{6}$$

后一个空间包含了满足式 (5) 左端有限的映射（见下文命题 2.15），而提升的唯一性随即由下一个命题得出。

命题 1.3。设 $\mathcal{M}$ 是一个紧黎曼流形，且令 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为一个黎曼覆盖。若 $\mathcal{M}$ 是连通的，若 $\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1 \in X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，且若 $\pi \circ \widetilde{u}_0 = \pi \circ \widetilde{u}_1$在$\mathcal{M}$上几乎处处成立，则 $\widetilde{u}_0 = \widetilde{u}_1$ 在 $\mathcal{M}$ 上几乎处处成立，或者 $\widetilde{u}_0 \neq \widetilde{u}_1$ 在 $\mathcal{M}$ 上几乎处处成立。

当 $1 < sp \leq 2$，或者当流形 M 不是单连通时，拓扑障碍可能会排除提升的存在性；然而事实证明，当在 X(M，N) 中存在提升时，该提升必然满足定理 1.2 中的估计。

定理 *1.4.* 设 *M* 和 *N* 为紧黎曼流形，设 $m \coloneqq \dim \mathrm{M}$, let $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 为黎曼覆盖映射，设 $s \in (0, 1)$ 且设 $p \in (1, \infty)$. 若$sp > 1$，则存在常数 $C \in (0, \infty)$，使得若 $\widetilde{u} \in X(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 且若 $u \coloneqq \pi \circ \widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$，则

$$\iint\limits_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x))^p \wedge 1}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leq C \iint\limits_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y), u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.$$

在定理 1.4 中，对 $sp > 1$ 的限制在紧和非紧情形下都至关重要：若 $sp = 1$ 且 π 是满射而非单射，则不存在关于提升 [24, lem. 5.1]的估计。

定理 1.2 和定理 1.4促使我们研究式 (5) 左侧的量，而事实证明，它等价于一大类类似的量。

命题 1.5。设 $\mathcal{M}$ 是一个紧黎曼流形，且 $m \coloneqq$ 维数$\mathcal{M}$；设 $\widetilde{\mathcal{N}}$是一个黎曼流形，令 $s \in (0,1)$，令 $p \in (1, \infty)$，并令 $q_0, q_1 \in [0, \infty)$。若$q_0 \vee q_1 \vee 1 < sp$，则存在一个常数 $C \in (0, \infty)$，使得每个可测

$\widetilde{\ }$映射 $\widetilde{u}:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$都满足

$$\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{q_0}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{q_1}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

在命题 1.5 中， $q_0 \le q_1$ 的情形是平凡的。命题 1.5 的估计推广了在关于同伦类的估计中，在$sp=\dim\mathcal{M}$ [36, §5]的背景下得到的类似估计。

作为定理 1.1、定理 1.2 和命题 1.5 的推论，我们得到 Sobolev 空间线性和的如下非线性刻画。

定理 1.6。设$\mathcal{M}$ 为紧黎曼流形，设 $m:=$维数 $\mathcal{M}$，设 $s\in(0,1)$且设 $p\in(1,\infty)$。若 $sp>1$ 且若 $0<q<sp$，则

$$\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\,\middle|\,\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}\frac{|f(y)-f(x)|^p\wedge|f(y)-f(x)|^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x<\infty\right\} = \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})+\dot{W}^{1,sp}(\mathcal{M},\mathbb{R}). \tag{7}$$

此外，以下量

$$\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}\frac{|f(y)-f(x)|^p\wedge|f(y)-f(x)|^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

and

$$\inf_{\substack{g\in\dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})\\ h\in\dot{W}^{1,sp}(\mathcal{M},\mathbb{R})\\ f=g+h}}\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}\frac{|g(y)-g(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+\int_{\mathcal{M}}|Dh|^{sp} \tag{8}$$

在如下意义下是等价的：其中每一个量都被另一个量的常数倍所控制。

定理 1.6 补充了 Rodiac & Van Schaftingen 对分数阶 Sobolev 空间之和的刻画 [32], ，该刻画指出，如果 $q>sp$

$$\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\,\middle|\,\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}\frac{|f(y)-f(x)|^p\wedge|f(y)-f(x)|^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x<\infty\right\} = \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})+\dot{W}^{\frac{sp}{q},q}(\mathcal{M},\mathbb{R}). \tag{9}$$

我们给出了定理 1.6 的证明，该证明依赖于定理 1.1 对映射到圆上的提升的刻画；若能有一个直接证明，将会很有启发性。

开放问题 1。给出定理 1.6 的直接证明。

在 $q=sp$ 的情形下，结果表明等式 (7) 和 (9) 不成立（见命题 3.2），由此引出以下问题:

开放问题 2. 给定一个紧黎曼流形 M，满足 $m=\dim$ M、 $p\in[1,\infty)$ 和 $s\in(0,1)$，且 $sp>1$，刻画集合

$$X^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R}):=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\,\middle|\,\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}\frac{|f(y)-f(x)|^p\wedge|f(y)-f(x)|^{sp}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x<\infty\right\}. \tag{10}$$

关于空间 $X^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})$ 的可能形式，我们掌握了一些信息：根据定理 1.6 和 (9)，有

$$\bigcup_{s<\theta<1} (\dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})+\dot{W}^{s/\theta,\theta p}(\mathcal{M},\mathbb{R})) \subseteq X^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R}) \subseteq \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})+\dot{W}^{1,sp}(\mathcal{M},\mathbb{R}), \tag{11}$$

而根据下面的命题 3.2，我们有

$$\dot{W}^{1,sp}(\mathcal{M},\mathbb{R}) \not\subseteq X^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R}), \tag{12}$$

因此，(11) 中的第二个包含关系不可能是等式。

本文的第二个目标是研究当 $sp \geq m$ 时 $\dot{W}^{s,p}$ 的估计。在这种情况下，每个映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 都可以写成 $\pi \circ \tilde{u}$，其中 $\tilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})$。当 $sp = 1 = m$ 时，已知当覆盖映射 π 是满射且 $\tilde{u}$ 不是单射时，不存在提升估计 [5, rem. 3; 24, lem. 5.1]（另见 [11, prop. 9.2]）。如果覆盖空间 $\mathcal{N}$ 不紧致，那么也已知不存在形如 (3) 的估计（见 [23, prop. 5.7]，针对圆 $\mathbb{S}^1$ 的万有覆盖：$\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$）。

对于圆的万有覆盖 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$，Merlet、Mironescu 和 Molnar 得到了如下非线性估计 [18, th. 1.1; 23, th. 5.4]（另见 [11, th. 9.6]）。

定理 1.7. 设 $\mathcal{M}$ 是一个紧黎曼流形，设 $m := \dim \mathcal{M}$，设 $s \in (0,1)$ 且设 $p \in (1,\infty)$。若 $sp \geq m$ 且 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得若 $\tilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathbb{R})$ 且若 $u := e^{i\tilde{u}}$，则有

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|\tilde{u}(y)-\tilde{u}(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C\left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{s}} \right).$$

我们将定理 1.7 推广到一般覆盖 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$。

定理 1.8. 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是紧黎曼流形，设 $m := \dim \mathcal{M}$，设 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 是黎曼覆盖映射，设 $s \in (0,1)$ 且设 $p \in (1,\infty)$。若 $sp \geq m$ 且 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得若 $\tilde{u} \in X(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 且若 $u := \pi \circ \tilde{u} \in W^{s,p}(\mathcal{M},\mathcal{N})$，则有 $\tilde{u} \in W^{s,p}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 且

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\tilde{\mathcal{N}}}(\tilde{u}(y),\tilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C\left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{s}} \right). \tag{13}$$

定理 1.7 可通过结合提升的线性分解估计 (4) 与分数阶 Sobolev 嵌入 [23] 来证明；事实证明，后一个嵌入是定理 1.8 的推论（见下文注 4.2）。由于将提升分解为和式 (4) 的分解并不适用于一般的覆盖空间 $\mathcal{N}$，我们给出定理 1.8 的直接证明；该证明的结构是在差的某些水平集上使用弱型估计，这与通过插值证明 Marcinkiewicz 实插值定理和 Sobolev 嵌入定理的做法相似（例如见 [35，第 I 章，定理 5]）。

由定理 1.7 以及分数阶空间 $\dot{W}^{1-1/p,p}(\mathcal{N},\mathbb{R})$ 到 $\dot{W}^{1,p}(\mathcal{N}\times(0,1),\mathbb{R})$ 的经典迹延拓，可得以下延拓估计：

若 $p \geq \dim \mathrm{M} + 1$，则存在一个常数 $C \in (0,\infty)$，使得每个映射 $u \in \dot{W}^{1-1/p,p}(\mathrm{M}; \mathbb{S}^1)$ 都是某个映射 $U \in \dot{W}^{1,p}(\mathrm{M}\times(0,1); \mathbb{S}^1)$ 在 $\mathrm{M}\times\{0\}$ 上的迹，并满足估计

$$\int_{\mathcal{M}\times(0,1)} |DU|^p \leq C\left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p-1}} \right). \tag{14}$$

对于一般的目标流形 N，已知若 $p \geq \dim \mathrm{M} + 1$，则每个映射 $u \in \dot{W}^{1-1/p,\,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 都是映射 $U \in \dot{W}^{1,\,p}(\mathrm{M}\times(0,\,1),\,\mathrm{N})$ 的迹 [3, th. 1]。当 $p > \dim \mathrm{M} + 1$ 时，紧性论证表明，当迹 u 在 $\dot{W}^{1-1/p,\,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 中保持有界时，延拓 U 可以取为始终留在 $\dot{W}^{1,\,p}(\mathrm{M}\times(0,\,1), \mathrm{N})$ 的某个有界集合内（例如参见 [30, th. 4]）。当 $p = \dim \mathrm{M} + 1$ 且 $\pi_{p-1}(\mathrm{N}) \neq \{0\}$ 时，这种有界性无法成立 [25, th. 1.10; 29, prop. 2.8]；此时，若映射 u 具有较小的分数阶 Sobolev 能量，则仍可得到估计，而一般情形下可得到弱型估计 [29, 30]。

在特例中，若 $\pi_1(\mathrm{N}) \simeq \cdots \simeq \pi_{\lfloor p-1\rfloor}(\mathrm{N}) \simeq \{0\}$，其中 $\lfloor r\rfloor \in \mathbb{Z}$ 表示 $r \in \mathbb{R}$ 的整数部分，Hardt 和 Lin [14, 定理 6.2] 已证明，存在一个常数 $C \in (0,\infty)$，使得每个映射 $u \in \dot{W}^{1-1/p,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 都是某个映射 $U \in \dot{W}^{1,p}(\mathrm{M}\times(0,1), \mathrm{N})$ 的迹，且满足估计

$$\int_{\mathcal{M}\times(0,1)} |DU|^p \leq C \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

当同伦群 $\pi_{\lfloor p-1\rfloor}(\mathrm{N})$ 非平凡，或同伦群 $\pi_1(\mathrm{N}), \ldots, \pi_{\lfloor p-2\rfloor}(\mathrm{N})$ 中有一个是无限群时，迹的满射性以及线性估计 (15) 均不成立 [1, 命题 1.13；3，定理 4；14，第 6.3 节；25，定理 1.10]。

估计式 (14) 和 (15) 自然引出了以下问题。

开放问题 3. 给定紧黎曼流形 M 和 N，且 $p \geq \dim \mathrm{M}+1$，是否存在一个常数 $C \in (0,\ \infty)$，使得每个映射 $u \in \dot{W}^{1-1/p,\,p}(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ 都是映射 $U \in \dot{W}^{1,\,p}(\mathrm{M}\times(0,\ 1),\ \mathrm{N})$ 在 $\mathrm{M}\times\{0\}$ 上的迹，并且满足估计式

$$\int_{\mathcal{M}\times(0,1)} |DU|^p \leq C\left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \left(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{p}{p-1}} \right)? \tag{16}$$

当基本群 $\pi_{\lfloor p-1\rfloor} \simeq 0$ 1 8 $\dot{W}^{1-1/p\,p}$ π_1 π_2 $\simeq$ $\simeq$ (N) 是无限群且 (N) ⋯ (N) { } 时，尽管定理 . 在 ， (M N) 中给出了提升，但万有覆盖空间 N 并不紧致，因此 Hardt 和 Lin 关于迹的延拓的定理 [14,th. 6.2] 不适用。

2. 提升空间的刻画及相关估计

2.1. 正则提升的先验估计。我们首先证明一个关于提升的先验估计，它将成为定理 1.2 和定理 1.4 中构造和估计提升的主要分析工具。给定一个凸开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$，我们定义如下空间

该空间由在 Ω 的几乎每条线段上本质连续的映射组成

(17)
$$\begin{aligned} Y(\Omega,\widetilde{\mathcal{N}}) \coloneqq \{\widetilde{u}:\Omega\to\widetilde{\mathcal{N}} \mid &\text{for almost every } x,y\in\Omega, \text{ there exists } \widetilde{u}_{x,y}\in C([x,y],\widetilde{\mathcal{N}}) \\ &\text{such that } \widetilde{u}_{x,y}(x)=\widetilde{u}(x),\ \widetilde{u}_{x,y}(y)=\widetilde{u}(y), \\ &\text{and } \widetilde{u}_{x,y}=\widetilde{u}|_{[x,y]} \text{ almost everywhere on } [x,y]\}, \end{aligned}$$

对此，我们证明以下先验估计。

命题 2.1。设 $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，设 $s\in(0,1)$ 且设 $p\in(1,\infty)$。若 $sp>1$，则$\widetilde{\ }$存在一个常数 $C\in(0,\infty)$，使得若 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开且凸的，若 $\widetilde{u}\in Y(\Omega,\mathcal{N})$ 且若 $u\coloneqq\pi\circ\widetilde{u}\in\dot{W}^{s,p}(\Omega,\mathcal{N})$，则

$$\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p\wedge 1}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\le C\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{18}$$

命题 2.1 最初是在覆盖空间$\widetilde{\ }$N 紧致的情形下陈述并证明的 [24], ，当时它是构造提升的关键工具；同一论证也给出了分数阶 Sobolev 空间 [37]中的反向叠加估计。这里，我们将证明过程直接推广到覆盖$\widetilde{\ }$空间 N 非紧致的情形。

如同紧情形中的证明一样， [24], 命题 2.1 证明的主要分析要素是关于线段上的 Gagliardo 半范数的以下估计：

引理 2.2。令 $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$，令 $s,\sigma\in(0,1)$ 且令 $p\in(1,\infty)$。如果集合 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$ 是开且凸的，如果 $0<\sigma<s$ 且映射 $u:\Omega\to\mathcal{N}$ 是可测的，那么

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega\times\Omega}\Bigg(\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{d_{\mathcal{N}}(u((1-t)x+ty),u((1-r)x+ry))^p}{|t-r|^{1+\sigma p}|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t\Bigg)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \le\frac{8}{(2(s-\sigma)p+1)^2-1}\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|x-y|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{19}$$

在引理 2.2 的证明中将会看到，不等式 (19) 中的常数是最佳的：当 $\Omega=\mathbb{R}^m$时，(19) 中等号成立。对于 $\sigma=s$，(19) 的左端无法有界。

引理 *2.2* 的证明。我们在 (19) 左端的积分中应用变量代换 $(z,w)=((1-t)x+ty,(1-r)x+ry)$，并且由于 $z-w=(t-r)(y-x)$ 且 $\det\left(\begin{smallmatrix}1-t & t\\ 1-r & r\end{smallmatrix}\right)=-(t-r)$，得到

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega\times\Omega}\Bigg(\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{d_{\mathcal{N}}(u((1-t)x+ty),u((1-r)x+ry))^p}{|t-r|^{1+\sigma p}|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\Bigg)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ =\iint_{\Omega\times\Omega}\iint_{\Sigma_{z,w}}\frac{d_{\mathcal{N}}(u(z),u(w))^p}{|t-r|^{1-(s-\sigma)p}|z-w|^{m+sp}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w, \end{aligned} \tag{20}$$

其中，我们对每个 $z,w\in\Omega$ 定义了集合

$$\Sigma_{z,w}\coloneqq\{(r,t)\in[0,1]\times[0,1]\mid\tfrac{rz-tw}{r-t}\in\Omega\text{ and }\tfrac{(1-r)z-(1-t)w}{t-r}\in\Omega\}.$$

我们注意到，由于 $s > \sigma$，根据积分的定义域单调性，并通过直接计算，对每个 $z, w \in \Omega$ 都有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_{z,w}} \frac{1}{|t-r|^{1-(s-\sigma)p}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r &\le \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{|t-r|^{1-(s-\sigma)p}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{(s-\sigma)p}\int_0^1 |1-r|^{(s-\sigma)p} + |r|^{(s-\sigma)p}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{8}{(2(s-\sigma)p+1)^2-1} < \infty,\end{aligned} \tag{21}$$

结论 (19) 由恒等式 (20) 和估计 (21) 得出。 □

我们的第二个工具是关于覆盖空间的以下初等几何结果。

引理 *2.3*。设 $\pi : N \to N$ 是一个黎曼覆盖映射。若流形 *N* 的单射半径 $\mathrm{inj}(N) > 0$ 为正，则对于任意 $\tilde{x}, \tilde{y} \in N$，只要 $d_N(\tilde{x}, \tilde{y}) \le \mathrm{inj}(N)$，就有 $d_N(\tilde{x}, \tilde{y}) = d_{\mathcal{N}}(\pi(\tilde{x}), \pi(\tilde{y}))$.

引理 2.3 的证明可由单射半径 inj(N) 的定义以及测地线的提升得出（例如参见 [24,引理 2.1]）。

命题 *2.1* 的证明。 我们首先假设集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且凸的。由 Ω 的凸性以及 (17) 中 $Y(\Omega, \mathrm{N})$ 的定义，对于几乎每个 $x, y \in \Omega$，我们有 $[x, y] \subset \Omega$，$\widetilde{u}\restriction_{[x,y]}$ 在 $[x, y]$ 线段上的限制满足 $\widetilde{u}\restriction_{[x,y]} = \widetilde{u}_{x,y}$ 几乎处处成立于 $[x, y]$，$\widetilde{u}_{x,y}(x) = \widetilde{u}(x)$ 且 $\widetilde{u}_{x,y}(y) = \widetilde{u}(y)$，其中 $\widetilde{u}_{x,y} \in C([x, y], \mathrm{N})$。由介值定理，存在 $z \in [x, y]$ 使得

$$\mathrm{inj}(\mathcal{N}) \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x)) = \mathrm{inj}(\mathcal{N}) \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_{x,y}(y), \widetilde{u}_{x,y}(x)) = d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_{x,y}(z), \widetilde{u}_{x,y}(y));$$

由引理 2.3，因此我们有

$$\mathrm{inj}(\mathcal{N}) \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x)) = d_{\mathcal{N}}(u_{x,y}(z), u_{x,y}(y)),$$

其中 $u_{x,y} := \pi \circ \widetilde{u}_{x,y} \in C([x, y], \mathrm{N})$。因此我们证明了

$$\mathrm{inj}(\mathcal{N}) \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x)) \le \sup_{z\in[x,y]} d_{\mathcal{N}}(u_{x,y}(z), u_{x,y}(y)). \tag{22}$$

固定 $\sigma \in (0,1)$，使得 $1/p < \sigma < s$，根据一维分数阶 Morrey–Sobolev 嵌入（例如参见 [17, 定理 2.8]）以及（22），我们推得

$$\begin{aligned}&\mathrm{inj}(\mathcal{N})^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x))^p \\ &\quad\le C_1 \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{d_{\mathcal{N}}(u_{x,y}((1-t)x+ty), u_{x,y}((1-r)x+ry))^p}{|t-r|^{1+\sigma p}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \\ &\quad= C_1 \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{d_{\mathcal{N}}(u((1-t)x+ty), u((1-r)x+ry))^p}{|t-r|^{1+\sigma p}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r,\end{aligned} \tag{23}$$

因为 $\sigma p > 1$ 和 $u_{x,\,y} = u\restriction_{[x,y]}$ 在 $[x, y]$上几乎处处成立。由引理 2.2，对（23）积分即可得出结论。□

2.2. **下指数的变化**。 我们给出一整族刻画，这些刻画涉及定理 1.2 中提升的描述所出现的空间；我们的分析沿袭并扩展了在同伦估计[36, §5]背景下针对 $m = sp$ 所得的结果。本节的结果在相当一般的假设下成立：目标空间 E 可以是任意度量空间。

命题 2.4 (指数改进)。 设 $\mathcal{M}$ 为黎曼流形，设 $\mathcal{E}$ 为度量空间，设 $s \in (0,1)$，设 $p \in (1,\infty)$，并设 $q_0, q_1 \in (0,\infty)$。若 $sp > 1 \vee q_0 \vee q_1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对每个可测映射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$，都有

$$\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_1}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_0}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{24}$$

其中 $m := \dim \mathcal{M}$。

证明命题 2.4 的主要工具是以下估计，该估计在特殊情形 $\gamma = m$ [36, 命题 5.5] 中已为人所知。

命题 2.5。 设 $q_0, q_1 \in [0,+\infty)$，设 $\eta \in (0,1)$，并设 $\gamma \in (0,\infty)$。若 $q_1 < \gamma$，且 $q_0 \geq 1$ 或 $\gamma > 1$ 中至少一个成立，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对每个 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$、每个凸开集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 以及每个可测映射 $f : \Omega \to \mathcal{E}$，都有

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \lambda\right)^{q_1}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C\lambda^{q_1-q_0} \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\eta\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \eta\lambda\right)^{q_0}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

在特殊情形 $q_1 \leq q_0$ 下，有逐点估计 $(t-\lambda)^{q_1} \leq (t-\eta\lambda)^{q_0}/((1-\eta)\lambda)^{q_0-q_1}$，对其积分便立即得到 (25)。

命题 2.5 让人想起 Nguyen 的一条估计，该估计出现在一阶索伯列夫空间 [28, th. 1 (a)] 的刻画中。

为证明一般情形下的命题 2.5，我们首先使用以下缩放不等式（当 $\gamma = m$ 参见 [36, 第 5.1] 条命题时）。

引理 2.6。 对于每个 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$、每个凸开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$、每个可测映射 $f : \Omega \to \mathcal{E}$、每个 $q \in [0,\infty)$ 以及每个 $\gamma \in \mathbb{R}$，若 $\lambda_0 < \lambda_1$，则有

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_1}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \lambda_1\right)^{q}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 2^{(\gamma-1-(q-1)_+)_+} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{(q-1)_+-\gamma+1} \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_0}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \lambda_0\right)^{q}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{26}$$

引理 *2.6* 的证明。 由于集合 Ω 是凸集，对于每个 $x, y \in \Omega$，都有 $\frac{x+y}{2} \in \Omega$，因此根据三角不等式

$$d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \lambda_1 \leq d_{\mathcal{E}}\big(f(y),f(\tfrac{x+y}{2})\big) - \tfrac{\lambda_1}{2} + d_{\mathcal{E}}\big(f(\tfrac{x+y}{2}),f(x)\big) - \tfrac{\lambda_1}{2},$$

因此

(27)
$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_1}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda_1\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 2^{(q-1)_+}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(\frac{x+y}{2}))\geq\frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(\frac{x+y}{2}))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$+\,2^{(q-1)_+}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2}),f(x))\geq\frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2}),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

因此，由于在积分中交换变量 x 和 y 时，(27) 右端的两项具有对称性，我们得到

(28)
$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_1}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda_1\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2^{(q-1)_++1}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2}),f(x))\geq\frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2}),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

通过变量代换 $y=2z-x$，我们得到 $|y-x|=2|z-x|$，因此

(29)
$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2})\,f(x))\geq\ \frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(\frac{x+y}{2}),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^\gamma}\int_\Omega\Big(\int_{\Sigma_x}\frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(z),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|z-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{2^\gamma}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

其中，对每个 $x\in\Omega$，集合 Σ_x 定义为

$$\Sigma_x \coloneqq \{z\in\Omega \mid 2z-x\in\Omega \text{ and } d_{\mathcal{E}}(f(z),f(x))\geq\tfrac{\lambda_1}{2}\}.$$

由 (28) 和 (29)，我们推得对每个 $\lambda_1>0$,

(30)
$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_1}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda_1\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 2^{(q-1)_+-(\gamma-1)}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\frac{\lambda_1}{2}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\frac{\lambda_1}{2}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

对估计式 (30) 进行迭代，我们可得，对于每个非负整数 $\ell\in\mathbb{N}$,

(31)
$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda_1}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda_1\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 2^{\ell((q-1)_+-(\gamma-1))}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\frac{\lambda_1}{2^\ell}}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\frac{\lambda_1}{2^\ell}\right)^q}{|y-x|^{m+\gamma}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

若 $\lambda_0 \in (0, \lambda_1)$，则令 (31) 中的 $\ell \in \mathbb{N}$ 满足条件 $2^{-(\ell+1)}\lambda_1 \leq \lambda_0 < 2^{-\ell}\lambda_1$，由此可得 (26) 成立。□

我们对命题 2.5 的第二个证明，采用如下初等积分不等式 [36,引理 5.6]。

引理 2.7 (截断幂的积分估计)。 对于每个 $q_0, q_1 \in [0,\infty)$ 以及每个$\eta \in (0,1)$，存在一个常数 $C > 0$，使得对于每个 $t \in [1,\infty)$，

$$(t-1)^{q_1} \leq C \int_\eta^t \frac{(t-r)^{q_0}}{r^{1+q_0-q_1}} \,\mathrm{d}r.$$

命题 *2.5* 的证明。 在每个 $x, y \in \Omega$ 处应用引理 2.7，其中 $t := d_{\mathcal{E}}(f(y)\ f(x))/\lambda$，对结果积分并交换积分次序，得到

$$\begin{aligned}(32)\qquad &\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda\right)^{q_1}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad \leq C_1\lambda^{q_1-q_0}\int_\eta^\infty \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq r\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-r\lambda\right)^{q_0}}{r^{1+q_0-q_1}\,|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

由于集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 是凸集，根据引理 2.6，对于每个 $r \in (\eta,\infty)$，

$$\begin{aligned}(33)\qquad &\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq r\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-r\lambda\right)^{q_0}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad \leq C_2\,\frac{1}{r^{(\gamma-1)-(q_0-1)_+}} \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq \eta\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\eta\lambda\right)^{q_0}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

结合估计式 (32) 和 (33)，我们推得

$$\begin{aligned}(34)\qquad &\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\lambda\right)^{q_1}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\qquad \leq C_3\lambda^{q_1-q_0}\int_\eta^\infty \frac{1}{r^{\gamma+1-(1-q_0)_+-q_1}}\,\mathrm{d}r \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\geq \eta\lambda}} \frac{\left(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))-\eta\lambda\right)^{q_1}}{|y-x|^{m+\gamma}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为 $q_0 - 1 - (q_0-1)_+ = -(1-q_0)_+$。若 $q_1 < \gamma - (1-q_0)_+$，则

$$\int_\eta^\infty \frac{1}{r^{\gamma+1-(1-q_0)_+-q_1}}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{\left(\gamma-(1-q_0)_+-q_1\right)\eta^{\gamma-(1-q_0)_+-q_1}} < \infty,$$

由 (34) 得到估计 (25)。

若 $q_0 \geq 1$，则我们已证明了 $q_1 < \gamma$ 的估计。否则， $q_0 < 1$，并且我们已证明了 $q_1 < q_0 + (\gamma - 1)$ 的估计 (25)。有限次迭代该估计后，我们到达区间 $q_1 \in [0,1]$，于是 (25) 的结论对$q_1 < \gamma$成立。□

现在我们可以证明命题 2.4。

命题 *2.4* 的证明。 由于情形 $q_1 \le q_0$ 可由以下事实推出：对于每个$t \in (0,\infty)$，我们有 $t^p \wedge t^{q_0} \le t^p \wedge t^{q_1}$，因此我们考虑情形 $q_1 > q_0$。设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 为一个凸开集，映射 $f : \Omega \to \mathrm{E}$ 可测，并定义集合

$$A := \{(x,y) \in \Omega \times \Omega \mid d_{\mathcal{E}}(f(y), f(x)) \ge 1\},$$

由于 $q_1 < sp < p$，我们将 (24) 左侧的积分分解为

$$\begin{aligned} (35)\quad \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_1}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ = \iint\limits_{\Omega\times\Omega\setminus A} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \iint\limits_{A} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_1}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

一方面，我们立即得到

$$(36)\quad \iint\limits_{\Omega\times\Omega\setminus A} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_0}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

另一方面，根据命题 2.5，由于 $sp > 1$ 和 $q_1 < sp$，我们有

$$\begin{aligned} \iint\limits_{A} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_1}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\le 2^{q_1} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \frac{1}{2})_+^{q_1}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\le C_1 \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))\ge\frac{1}{3}}} \frac{(d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) - \frac{1}{3})_+^{q_0}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{37}$$

因此，由 (35)、(36) 和 (37) 可得

$$\begin{aligned} (38)\quad \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^{q_1}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ \le C_2 \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}\big(f(y),f(x)\big)^{q_0}}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

由于 $q_0 < p$。于是，由 (38) 以及引理 2.11 的覆盖，得到所述结论 (24)。□

得益于命题 2.4，我们现在可以证明命题 1.5。

‾命题 *1.5* 的证明。 这由命题 2.4 得出，其中 $\mathrm{E} = \mathrm{N}$。 □

2.3. **提升空间中的紧性**。 考虑分数阶 Sobolev 空间 $\dot{W}^{s,\,p}(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ [9], 中一个稠密集合上的命题 2.1 的提升估计，证明提升的存在性的一种经典方法是考虑逼近序列的提升的极限。为此，我们需要对左端统一有界的集合给出一个紧性结果。

命题 2.8。 设$\mathcal{M}$ 是一个有限体积的黎曼流形，设$\mathcal{E}$ 是一个度量空间，设 $0 \le q \le p$ 且设 $0 < s < 1$。假设$\mathcal{E}$ 的每个有界子集都是全有界的。若$\mathcal{S}$ 是从$\mathcal{M}$到$\mathcal{E}$ 的可测函数集合，满足

$$(39)\qquad \sup_{f\in\mathcal{S}} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty,$$

其中 $m := $ 维数$\mathcal{M}$，并且满足

$$\inf_{f,g\in\mathcal{S}} \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{1+d_{\mathcal{E}}(g,f)} > 0, \tag{40}$$

那么，集合 $\mathcal{S}$ 关于该距离是全有界的

$$d_\mu(f,g) \coloneqq \int_{\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{E}}(f,g)}{1+d_{\mathcal{E}}(f,g)}. \tag{41}$$

尽管情形 $p = q = 0$已包含在命题 2.8 中，但这并不特别有趣，因为根据引理 2.14，映射 f 应当在 M 的每个连通分支上为常数。

如果度量空间 E 是完备的，那么其任意子集都是全有界的这一假设，等价于 E 具有博尔查诺–魏尔斯特拉斯性质，或等价于 E 是一个适当空间。

关于式 (41) 中定义的距离 d_μ 的收敛就是依测度收敛。我们首先指出，在有限测度集上，这个距离可以由一个类似于式 (39) 中被积函数的量来控制。

引理 2.9。 设 μ 是 Ω 上的一个测度，且Ω 设 $\mathcal{E}$ 是一个度量空间。如果 $0 \le q \le p$ 且映射 f、$g : \Omega \to \mathcal{E}$ 是可测的，那么

$$\int_{\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{E}}(f,g)}{1+d_{\mathcal{E}}(f,g)} \,\mathrm{d}\mu \le \mu(\Omega)^{(1-1/p)_+} \left(\int_\Omega d_{\mathcal{E}}(f,g)^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f,g)^q \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}\wedge 1}. \tag{42}$$

证明。 当 $0 \le p \le 1$时，(42) 可由以下事实推出：对每个 $t \in [0,\infty)$，都有

$$t/(1+t) \le t \wedge 1 \le t^p \wedge t^q,$$

而当 $p > 1$ 时，(42) 可由以下事实推出：

$$t/(1+t) \le t \wedge 1 \le t \wedge t^{q/p}$$

以及霍尔德不等式。 □

命题 2.8 的证明将依赖于下面的不等式。

引理 2.10。 若 $p, q \in [0,\infty)$，则对每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $a_1, \dots, a_\ell \in [0,\infty)$，我们有 ve

$$\left(\sum_{i=1}^\ell a_i \right)^p \wedge \left(\sum_{i=1}^\ell a_i \right)^q \le \max_{i\in\{1,\dots,\ell\}} (\ell a_i)^p \wedge (\ell a_i)^q.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设对每个 $i \in \{1,\dots,\ell\}$，都有 $a_i \le a_1$，因此 $\sum_{i=1}^\ell a_i \le \ell a_1$ 和

$$\left(\sum_{i=1}^\ell a_i \right)^p \wedge \left(\sum_{i=1}^\ell a_i \right)^q \le (\ell a_1)^p \wedge (\ell a_1)^q = \max_{i\in\{1,\dots,\ell\}} (\ell a_i)^p \wedge (\ell a_i)^q. \qquad \square$$

命题 *2.8* 的证明。 由体积有限以及局部坐标图论证，我们假设 $\Omega = \mathbb{Q}^m := [0,1]^m$。对于每个 $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，我们将立方体 $\mathbb{Q}^m$ 细分为由 k^m 个边长为 $1/k$ 的立方体组成的集合 Q^k。给定 $f \in \mathsf{S}$，我们定义映射 $f_k : \mathbb{Q}^m \to \mathsf{E}$，使得 f_k 在每个立方体 $Q \in \mathsf{Q}^k$ 上为常数，并且对于每个 $x \in Q \in \mathsf{Q}^k$

$$\begin{aligned} \int_Q d_{\mathcal{E}}(f(x), f_k(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(x), f_k(x))^q \,\mathrm{d}x \\ \le k^m \iint_{Q\times Q} d_{\mathcal{E}}(f(y), f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y), f(x))^q \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{43}$$

由（43）立即可得

$$\int_{\mathbb{Q}^m} d_{\mathcal{E}}(f(x),f_k(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(x),f_k(x))^q \,\mathrm{d}x \leq \frac{m^{\frac{m+sp}{2}}}{k^{sp}} \iint_{\mathbb{Q}^m\times\mathbb{Q}^m} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x))^q}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{44}$$

因此由引理 2.9 可得

$$\int_{\mathbb{Q}^m} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(x),f_k(x))}{1+d_{\mathcal{E}}(f(x),f_k(x))} \,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{m^{\frac{m+sp}{2}}}{k^{sp}} \iint_{\mathbb{Q}^m\times\mathbb{Q}^m} \frac{d_{\mathcal{E}}(f(x),f(y))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(f(x),f(y))^q}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{1\wedge\frac{1}{p}}. \tag{45}$$

假设 (39) 和估计 (45) 意味着，当 $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ 足够大时，集合 S 包含于映射 f_k 的集合的任意小邻域内。由于对于每个 $k\in\mathbb{N}$，在每个 $Q\in\mathsf{Q}^k$ 上取常值的映射集合与流形 E^{k^m} 双 Lipschitz 等价，并且 E 的有界子集全有界，因此只需证明对于任意 $k\in\mathbb{N}$，映射 f_k 包含于一个有界集合中。

对于每个 $\lambda\in(0,\infty)$ 和 $f,\ g\colon \mathsf{M}\to\mathsf{E}$，我们有

$$\int_{\mathbb{Q}} \frac{1}{1+d_{\mathcal{E}}(g(x),f(x))} \,\mathrm{d}x \leq |\{x\in\mathbb{Q}^m \mid d_{\mathcal{E}}(g(x),f(x))\leq\lambda\}| + \frac{1}{1+\lambda},$$

因此由假设 (40)，存在 $\lambda\in(0,\infty)$ 和 $\eta\in(0,\infty)$，使得对于每个 $f,\ g\in\mathsf{S}$，

$$|\{x\in\mathbb{Q}^m \mid d_{\mathcal{E}}(g(x),f(x))\leq\lambda\}| \geq \eta. \tag{46}$$

对于每个 $x,y\in\mathbb{Q}^m$，由三角不等式可得，

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{E}}(g_k(x),f_k(x)) \leq{}& d_{\mathcal{E}}(g_k(x),g(x)) + d_{\mathcal{E}}(g(x),g(y)) \\ &+ d_{\mathcal{E}}(g(y),f(y)) + d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)) + d_{\mathcal{E}}(f(x),f_k(x)), \end{aligned}$$

因此由引理 2.10

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}^m} d_{\mathcal{E}}(g_k(x),f_k(x))^p \wedge d_{\mathcal{E}}(g_k(x),f_k(x))^q \,\mathrm{d}x \\ &\quad\leq \int_{\mathbb{Q}^m} (5d_{\mathcal{E}}(g_k(x),g(x)))^p \wedge (5d_{\mathcal{E}}(g_k(x),g(x)))^q \,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \int_{\mathbb{Q}^m} \fint_A (5d_{\mathcal{E}}(g(y),g(x)))^p \wedge (5d_{\mathcal{E}}(g(y),g(x)))^q \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \fint_A (5d_{\mathcal{E}}(g(y),f(y)))^p \wedge (5d_{\mathcal{E}}(g(y),f(y)))^q \,\mathrm{d}y \\ &\qquad + \int_{\mathbb{Q}^m} \fint_A (5d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)))^p \wedge (5d_{\mathcal{E}}(f(y),f(x)))^q \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \int_{\mathbb{Q}^m} (5d_{\mathcal{E}}(f_k(x),f(x)))^p \wedge (5d_{\mathcal{E}}(f_k(x),f(x)))^q \,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{47}$$

with

$$A \coloneqq \{x\in\mathbb{Q}^m \mid d_{\mathcal{E}}(g(x),f(x))\leq\lambda\}. \tag{48}$$

将 (39)、(44) 和 (46) 代入 (47)，再结合 (48) 和引理 2.9，我们得到 et

$$\int_{\mathbb{Q}^m} \frac{d_{\mathcal{E}}(g_k(x), f_k(x))}{1 + d_{\mathcal{E}}(g_k(x), f_k(x))} \, \mathrm{d}x \leq C_1 \Big(\frac{1}{k^{sp}} + \frac{1}{\eta} + \lambda^p \wedge \lambda^q \Big)^{\frac{1}{p} \wedge 1},$$

并且由此得到所宣称的有界性。 □

2.4. **提升的存在性**。为了证明定理 1.2，我们将使用的最后一个工具是存在覆盖该积的局部坐标图。

引理 2.11。若 $\mathcal{M}$ 是一个连通紧流形，且 $m \coloneqq$ 维数$\mathcal{M}$，则存在¯开集 $V_1, \dots, V_\ell \subset \mathcal{M}$，使得对每个 $i \in \{1, \dots, \ell\}$，集合 V_i 与¯闭球 $\mathbb{B}_1 \subset \mathbb{R}^m$ 微分同胚，并且

$$\mathcal{M} \times \mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} V_i \times V_i. \tag{49}$$

证明。由于流形 M 连通，每个二元集 $\{x, y\} \subset$ 都包含于一个开集 ¯M 中，使得 V 与闭球 $B_1 \subset \mathbb{R}^m$微分同胚。特别地 $(x, y) \in V \times V$。由 M 的紧性可得 × M。□

定理 1.2 的证明将依赖正规覆盖这一概念。覆盖映射 ∼ ∼π : N → N 称为正规（或正则）的，当且仅当对于每个 $\widetilde{y} \in$N，我们都有

$$\pi^{-1}(\{\pi(\widetilde{y})\}) = \{\tau(\widetilde{y}) \mid \tau \in \mathrm{Aut}(\pi)\} \tag{50}$$

其中，覆盖 π 的甲板变换群（或覆盖变换群，或伽罗瓦群）是群

$$\mathrm{Aut}(\pi) = \big\{\tau : \widetilde{\mathcal{N}} \to \widetilde{\mathcal{N}} \,|\, \tau \text{ is a homeomorphism and } \pi \circ \tau = \pi\big\} \tag{51}$$

其配备复合运算 [15, §1.3；34，第 2 章 §6]。当 π 是黎曼⁀覆盖时，π 是局部等距映射，且任意 $\tau \in$ Aut(π) 都是 N 上的全局等距映射。

⁀若 π : N → N 是万有覆盖，即当 π 是满射且 N 是单连通的，那么 π 是正规的。

下面我们来证明提升的存在性。

⁀定理 *1.2* 的证明。我们首先假设 π : N → N 是 N 的正规覆盖。

给定一个映射 $u \in W^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$，根据 Brezis & Mironescu 关于分数阶 Sobolev 映射的逼近结果，[9]，存在一个序列 $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ 属于 R^0_{m-2}(M，N)，$\cap \dot{W}^{s,\,p}$(M，N)，它在 $\dot{W}^{s,\,p}$(M，N) 中强收敛到 u，其中 R^0_k(M，N) 表示：对于 $k \in$ {0，. . . ，$m - 1$}，从流形 M 到流形 N 的映射中，在 M 的有限个带边界的 k 维子流形之外连续的映射所构成的集合。

对于每个 $j \in \mathbb{N}$，映射 u_j 在一个 $(m - 2)$ 维子集 $\Sigma_j \subset$ M 外连续。由于流形 M 是单连通的，集合 M \ Σ_j 也是⁀单连通的，因此存在 $\widetilde{u}_j \in C$(M \ Σ_j，N)，使得 $\pi \circ \widetilde{u}_j = u_j \restriction_{\mathcal{M} \setminus \Sigma_j}$，其中 $u_j \restriction_{\mathcal{M} \setminus \Sigma_j}$是 u_j在集合 M \ Σ_j上的限制。特别地，我们有 $\widetilde{u}_j \in \mathrm{R}^0_{m-2}$(M N)。由于对每个凸开集 Ω $\subseteq \mathbb{R}^m$，都有 R^0_{m-2}(Ω ⁀N) $\subseteq Y$(Ω ⁀N)，并且由于 $sp > 1$，根据提升的先验估计（命题 2.1）、对角覆盖（引理 2.11）和命题 2.4，我们得到

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \iint_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_j(y))^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_j(y))}{d_{\mathcal{M}}(y, x)^{m+sp}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{52}$$

由 (52)，因此存在 $\lambda \in (0, \infty)$，使得对每个 $j \in \mathbb{N}$，都存在 $x_j \in \mathrm{M}$，若令

$$A_j := \{x \in \mathcal{M} \mid d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_j(x_j)) \le \lambda\} \tag{53}$$

于是我们有

$$|A_j| \ge \tfrac{2}{3}|\mathcal{M}|. \tag{54}$$

由于流形 N 是紧的，且覆盖 π 是正规的，因此存在一个 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 有界开集 $W \subseteq \mathrm{N}$，使得 $\pi(W) = \mathrm{N}$，并且

$$\widetilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{\tau \in \mathrm{Aut}(\pi)} \tau^{-1}(\widetilde{W}), \tag{55}$$

根据（ 50 55 $j \in \mathbb{N}$ $\tau_j \in$ π $\tau_j\ \widetilde{u}_j\ x_j$ ）。由（）可知，对于每个，存在一个 Aut( )，使得 (( )) W。不妨设，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，都有 $\tau_j =$ id $\widetilde{\ }_{\mathcal{N}}$，从而 $\widetilde{\ }\widetilde{u}_j(x_j) \in W$。

由（53）可知，对于每个 $i,\ j \in \mathbb{N}$ 以及每个 $x \in A_{i,\ j} :\ = A_i \cap A_j$

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_i(x)) &\le d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_j(x_j)) + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x_j), \widetilde{u}_i(x_i)) + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_i(x_i), \widetilde{u}_i(x)) \\ &\le 2\lambda + \mathrm{diam}(\widetilde{W}); \end{aligned} \tag{56}$$

根据（54），我们有

$$|A_{i,j}| = |A_i \cap A_j| = |A_i| + |A_j| - |A_i \cup A_j| \ge \tfrac{2}{3}|\mathcal{M}| + \tfrac{2}{3}|\mathcal{M}| - |\mathcal{M}| = \tfrac{1}{3}|\mathcal{M}|. \tag{57}$$

因此，由 (56) 和 (57) 可得

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{1}{1 + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j, \widetilde{u}_i)} \ge \frac{|A_{i,j}|}{1 + 2\lambda + \mathrm{diam}(\widetilde{W})} \ge \frac{|\mathcal{M}|}{3(1 + 2\lambda + \mathrm{diam}(\widetilde{W}))}, \tag{58}$$

根据命题 2.1、命题 2.8 以及流形 N 的完备性 $\widetilde{\ }$，可知存在一个子列，使得序列 $(\widetilde{u}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 在 M 上几乎处处 $\widetilde{\ }$ 收敛到某个映射 $\widetilde{u}: \mathrm{M} \to \mathrm{N}$；我们还有 $\pi \circ \widetilde{u} = \lim_{j\to\infty} \pi \circ \widetilde{u}_j = \lim_{j\to\infty} u_j = u$ 几乎处处成立；由法图引理、提升的先验估计（命题 2.1 ）以及对角覆盖（引理 2.11），可得

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x))^p \wedge 1}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{j\to\infty} \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(y), \widetilde{u}_j(x))^p \wedge 1}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\le C_1 \liminf_{j\to\infty} \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u_j(y), u_j(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= C_1 \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y), u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

whi $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ch 证明了该结论，并证明当 $\pi: \mathrm{N} \widetilde{\ } \to \mathrm{N}$ 是正规覆盖时，估计式 (5) 成立。 $\widetilde{\ }$若 $\pi: \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ 不是正规覆盖，我们选取 $\pi_*: \mathrm{N}_* \to \mathrm{N}$ 作为 N 的万有 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 覆盖，因此特别地，$\pi \circ \pi_*: \mathrm{N}_* \to \mathrm{N}$ 是 N 的万有覆盖，因而也是正规覆盖。应用证明的第一部分，可得一个映射 . $\widetilde{\ }\widetilde{u}_* \in W^{s,\ p}(\mathrm{M},\ \mathrm{N}_*)$，使得 $\pi \circ \pi_* \circ \widetilde{u}_* = u$ 在 M 上成立；令 $\widetilde{u} := \pi_* \circ \widetilde{u}_*$，便得到一般情形下的结论。□

作为定理 1.2 证明的一个副产品，在较弱条件 $sp > 1$ 下，我们得到了一种提升的存在性，并且对在余维 2 子流形之外连续的映射有一个估计。

定理 *2.12.* 设 M 为流形，N 为紧黎曼流形，设 $m := \dim M$，$\widetilde{\ }$设 $\pi : N \to N$ 为满射黎曼覆盖映射，设 $s \in (0,1)$，且设 $p \in (1,\infty)$。若 M 是单连通的，且若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对每个映射 $u \in R^0_{m-2}(M,N) \cap \dot{W}^{s,p}(M,N)$，都存在可测映射 $\sim\widetilde{u} : M \to N$，使得 $\pi \circ \widetilde{u} = u$ 在 M 上几乎处处成立，并且式 (5) 成立。

根据定理 2.12 和命题 2.8，任何作为映射序列 $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{R}^0_{m-2}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \cap \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ 的几乎处处极限，且在 $W^{s,p}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ 中有界的映射，都存在一个提升 $\widetilde{u}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$，使得

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p \wedge 1}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{j\to\infty} C \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u_j(y),u_j(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{59}$$

当 $1 < sp < 2$ 时，定理 1.2 和定理 2.12 中关于定义域 M 为单连通的假设，可以替换为对待提升映射的小性假设。

定理 2.13。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为紧黎曼流形，设 $m := $ 维数$\mathcal{M}$，设 $\pi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为满射黎曼覆盖映射，设 $s \in (0,1)$ 且设 $p \in (1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $\varepsilon, C \in (0,\infty)$，使得对每个满足下列条件的映射 $u \in \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M},\mathcal{N})$

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon, \tag{60}$$

并且还满足 $u \in \mathcal{R}^0_{m-2}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ 当 $1 < sp < 2$ 时，存在一个可测映射 $\sim\widetilde{u}\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 使得 $\pi \circ \widetilde{u} = u$ 在 $\mathcal{M}$ 上几乎处处成立，并且满足(5) 。

当 $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 是圆的万有覆盖时，定理 2.13 是对 Brezis & Mironescu [11, 定理 14.5 和 §14.6.2] 中一个结果的改述。

定理 *2.13* 的证明。 我们沿用定理 1.2 的证明，并注意到 $\pi_1(\mathrm{M})$ 有有限多个生成元，因此，如果 $\varepsilon \in (0, \infty)$ 取得足够小的值，小性假设 (60) 意味着 u_j 在一组有限环路上有提升，这组环路生成 $\pi_1(\mathrm{N})$，且不与 u_j 的奇异集相交；因此 u_j 在其奇异集之外有提升。□

2.5. **提升的唯一性**。 定理 1.2 给出的提升实际上是唯一的，这与分数阶 Sobolev 空间中的提升的情形已确立的结论一致[2, 引理 A.4；5，附录 B]。

主要的分析工具是 Bourgain、Brezis 和 Mironescu 的以下结果[6, 附录B； 7] （另见 [11, 推论 6.4；12； 31]）。

引理 2.14。 设 $\mathcal{M}$ 是一个连通黎曼流形，且 $m := $ 维数$\mathcal{M}$。若集合 $A \subseteq \mathcal{M}$ 是可测的，且

$$\int_A \int_{\mathcal{M}\setminus A} \frac{1}{\operatorname{dist}_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+1}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty,$$

则要么 $|A| = 0$ 要么 $|\mathcal{M} \setminus A| = 0$。

命题 *1.3* 的证明。我们定义集合

$$A := \{x \in \mathcal{M} \mid \widetilde{u}_1(x) = \widetilde{u}_0(x)\}. \tag{61}$$

我们注意到，若 $x \in A$ 和 $y \in \mathrm{M} \setminus A$，则由引理 2.3 和三角不等式可得

$$\begin{aligned}\operatorname{inj}(\mathcal{N}) &\le d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_1(y), \widetilde{u}_0(y)) \\ &\le d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_1(y), \widetilde{u}_1(x)) + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_1(x), \widetilde{u}_0(x)) + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_0(y)) \\ &= d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_1(y), \widetilde{u}_1(x)) + d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_0(y)),\end{aligned}$$

a因此，要么 $d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_0(x), \widetilde{u}_0(y)) \ge \operatorname{inj}(\mathrm{N})/2$，要么 $d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_1(x), \widetilde{u}_1(y)) \ge \operatorname{inj}(\mathrm{N})/2$，于是 s

$$\int_A \int_{\mathcal{M}\setminus A} \frac{1}{d_{\mathcal{M}}(x,y)^{m+1}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \le \sum_{j\in\{0,1\}} \iint\limits_{\substack{x,y\in\mathcal{M} \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}_j(x), \widetilde{u}_j(y)) \ge \operatorname{inj}(\mathcal{N})/2}} \frac{1}{d_{\mathcal{M}}(x,y)^{m+1}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x < \infty.$$

由引理 2.14 可知，要么 $|A| = 0$，要么 $|\mathrm{M} \setminus A| = 0$，结论由 (61) 中 A 的定义得出。□

空间 $X(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 包含所有满足定理 1.2 中 (5) 左侧有限的函数。

命题 2.15。设 $\mathcal{M}$ 为紧黎曼流形，设 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为黎曼覆盖，设 $s \in (0, 1)$，设 $p \in (1, \infty)$，并设 $q \in [0, \infty)$。若 $sp > 1$ 且若 ，则映射 $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是可测的，并满足

$$\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y))^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y))^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x < \infty,$$

当 $m := $ 维数 $\mathcal{M}$ 时，则 $\widetilde{u} \in X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}(62)\quad &\iint\limits_{\substack{x,y\in\mathcal{M} \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y)) \ge \\ \operatorname{inj}(\mathrm{N})/2}} \frac{(\operatorname{inj}(\mathcal{N})/2)^p \wedge (\operatorname{inj}(\mathcal{N})/2)^q}{d_{\mathcal{M}}(x,y)^{m+1}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &\le \operatorname{diam}(\mathcal{M})^{sp-1} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y))^p \wedge d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y))^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x < \infty.\end{aligned}$$

□

u_0、$u_1 \in \dot{W}^{s,p}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 上的经典分数阶唯一性结果（条件为 $0 < s < 1$ $[2, 6]$）可由命题 1.3 和命题 2.15 推得。

提升的唯一性也使得我们可以用一个固定的正规覆盖上的提升来表示任意提升。

命题 *2.16*。设 M 为黎曼流形，设 $\pi_\sharp : N_\sharp \to N_\flat$ 和 $\pi_\flat : N_\flat \to N$ 为黎曼覆盖，且 $\widetilde{u}_\sharp \in X(M, N_\sharp)$ 和 $\widetilde{u}_\flat \in X(M, N_\flat)$。若 M 连通，覆盖 $\pi_\sharp$ 为满射，覆盖 $\pi_\flat \circ \pi_\sharp$ 为正规，并且 $\pi_\flat \circ \widetilde{u}_\flat = \pi_\flat \circ \pi_\sharp \circ \widetilde{u}_\sharp$ 在 M 上几乎处处成立，则存在 $\tau \in \mathrm{Aut}(\pi_\flat \circ \pi_\sharp)$，使得 $\widetilde{u}_\flat = \pi_\sharp \circ \tau \circ \widetilde{u}_\sharp$ 在 M 上几乎处处成立。

证明。由于覆盖 $\pi_\sharp$ 是满射的，对于每个 $x \in \mathrm{M}$，都存在 $\widetilde{y}_\sharp \in \mathrm{N}_\sharp$ 使得 $\pi_\sharp(\widetilde{y}_\sharp) = \widetilde{u}_\flat(x)$。对于几乎处处的 $x \in \mathrm{M}$，由于 $\pi_\flat(\pi_\sharp(\widetilde{y}_\sharp)) = \pi_\flat(\widetilde{u}_\flat(x)) = \pi_\flat(\pi_\sharp(\widetilde{u}_\sharp(x)))$，且由于覆盖 $\pi_\flat \circ \pi_\sharp$ 是正规的，存在 $\tau \in \mathrm{Aut}(\pi_\flat \circ \pi_\sharp)$ 使得 $\widetilde{y}_\sharp = \tau(\widetilde{u}_\sharp(x))$，从而 $\widetilde{u}_\flat(x) = \pi_\sharp(\tau(\widetilde{u}_\sharp(x)))$。因此我们有

$$(63)\qquad \mathcal{M} = \bigcup_{\tau\in\mathrm{Aut}(\pi_\flat \circ \pi_\sharp)} \{x \in \mathcal{M} \mid \widetilde{u}_\flat(x) = \pi_\sharp(\tau(\widetilde{u}_\sharp(x)))\} \cup E,$$

其中 $E \subseteq \mathrm{M}$ 满足 $|E| = 0$。由于集合 $\mathrm{Aut}(\pi_\flat \circ \pi_\sharp)$ 是可数的，存在$\tau \in \mathrm{Aut}(\pi_\flat \circ \pi_\sharp)$ 使得 $\widetilde{u}_\flat = \pi_\sharp \circ \tau \circ \widetilde{u}_\sharp$ 在 M 的一个正测度集合上成立；根据提升唯一性（命题 1.3），由于 M 是连通的，该等式随后在一个零测度集之外成立。□

由命题 2.16 可知，连续映射在 $X(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ 中的提升必然本质连续。

命题2.17。设$\mathcal{M}$ 为黎曼流形，设 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 是一个黎曼覆盖。若 $\widetilde{u} \in X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 且 $u = \pi \circ \widetilde{u}$ 连续，则存在 $\widetilde{v} \in C(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，使得 $\widetilde{v} = \widetilde{u}$ 在$\mathcal{M}$上几乎处处成立。

证明。我们先假设流形 M 是单连通的。我们将命题 2.16 应用于 tion 2.16，其中 $\pi_\flat = \pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$，$\pi_\sharp : \mathrm{N}_* \to \mathrm{N}$ 为万有覆盖，且 $\widetilde{v} \in C(\mathrm{M}, \mathrm{N}_*)$ 满足 $\pi \circ \widetilde{v} = \pi \circ \widetilde{u}$。结论由命题 2.16 得出。

一般情况下，我们用单连通开集 $U_j \subseteq \mathrm{M}$ 覆盖流形 M，其中 $j \in J$。由证明的第一部分，对每个 $j \in J$，都存在映射 $\widetilde{v}_j \in C(U_j, \mathrm{N})$，使得 $\widetilde{u} = \widetilde{v}_j$在 U_j 中几乎处处成立。对每个 j，$\ell \in J$，鉴于映射 $\widetilde{v}_j$ 和 $\widetilde{v}_\ell$ 的连续性，可知 $\widetilde{v}_j = \widetilde{v}_\ell$ 在 $U_j \cap U_\ell$ 中处处成立。因此，可以这样定义映射 $\widetilde{v}$：对每个 $j \in J$，其在集合 U_j 上的限制 $\widetilde{v}\restriction_{U_j}$ 满足 $\widetilde{v}\restriction_{U_j} = \widetilde{v}_j$，并且 $\widetilde{v}$ 在 M 上连续。□

2.6. **关于提升的先验估计**。一旦注意到 $X(\Omega, \mathrm{N})$ 中映射 $\dot{W}^{s,p}(\Omega, \mathrm{N})$ with $sp > 1$ 的提升实际上属于 $Y(\Omega, \mathrm{N})$，定理 1.4 将作为命题 2.18 的推论得到证明。

命题 *2.18*。设 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 为开且凸，设 N 为紧致的黎曼流形，设 $\pi : N \to N$ 为黎曼覆盖映射，设 $s \in (0, 1)$，并设 $p \in (1, \infty)$。若 $sp > 1$，若 $\widetilde{u} \in X(\Omega, N)$，且若 $u := \pi \circ \widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\Omega, N)$，则 $\widetilde{u} \in Y(\Omega, N)$。

为了证明命题 2.18，我们将使用 Fubini 定理的以下推论，该推论在空间 $X(\Omega, \mathrm{N})$ 上实施旋转方法。

引理 2.19。对于每个 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，存在一个常数 $C \in (0, \infty)$，使得对于每个凸开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$、每个度量空间 $\mathcal{E}$、每个 $\delta \in (0, \infty)$ 以及每个可测函数 $f : \Omega \to \mathcal{E}$，都有

$$\iint\limits_{\substack{x,y \in \Omega \\ d_{\mathcal{E}}(f(y), f(x)) \geq \delta}} \frac{1}{|y - x|^{m+1}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = C \int_{\mathbb{S}^{m-1}} \int_{w^\perp} \iint\limits_{\substack{x,y \in \Omega \cap (z + \mathbb{R}w) \\ d_{\mathcal{E}}(f(y), f(x)) \geq \delta}} \frac{1}{|y - x|^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}w. \tag{64}$$

命题 *2.18* 的证明。由于 $sp > 1$，根据 Fubini 定理和分数阶莫雷–索伯列夫嵌入，对于每条直线 $L \subseteq \mathbb{R}^m$，存在一个 $u_L \in C \cap$，存在一个映射 $(\Omega L, \mathrm{N})$，使得 $u\restriction_{\Omega \cap L} = u_L = \pi \circ \widetilde{u}\restriction_{\Omega \cap L}$ 在 $\Omega \cap L$ 中几乎处处成立。同样，根据引理 2.19，有 $\widetilde{u}\restriction_{\Omega \cap L} \in X(\Omega \cap L, \mathrm{N})$。根据命题2.17，存在一个映射 $\widetilde{u}_L \in C(\Omega \cap L, \mathrm{N})$，使得 $\widetilde{u}\restriction_{\Omega \cap L} = \widetilde{u}_L$ 在 $\Omega \cap L$ 上几乎处处成立。因此，根据定义 (17)，有 $\widetilde{u} \in Y(\Omega, \mathrm{N})$。□

定理 *1.4* 的证明。根据命题 2.18，先验估计命题 2.1 在任意局部坐标图上成立。利用引理 2.11 的覆盖即可得出结论。□

3. 与线性索伯列夫空间的关系

3.1. 作为索伯列夫空间之和的刻画。 我们将利用以下稠密性结果来证明定理 1.6，该定理刻画了定理 1.2 和命题 1.5 中出现的提升空间。

命题 3.1. 令 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，令 $s \in (0,1)$，并令 $p \in [1,\infty)$。若 $U \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开集，且若 $f : U \to \mathbb{R}$ 是满足以下条件的可测函数

$$\iint_{U\times U} \frac{|f(y)-f(x)|^p \wedge |f(y)-f(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{65}$$

那么，对于每个集合 $\Omega \subseteq U$，只要 $\operatorname{dist}(\Omega, \mathbb{R}^m \setminus U) > 0$，就存在一个序列 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 属于 $C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$，使得当 $j \to \infty$ 时，$f_j \to f$ 在 Ω 上几乎处处成立，并且

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|f_j(y)-f_j(x)|^p \wedge |f_j(y)-f_j(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{66}$$

证明。 我们对每个 $t \in \mathbb{R}$ 定义函数 $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，如下

$$\Phi(t) \coloneqq \begin{cases} |t|^p & \text{if } |t| \le 1, \\ 1 + p(|t|-1) & \text{if } |t| \ge 1. \end{cases} \tag{67}$$

我们注意到函数 Φ 是凸的，并且对每个 $t \in \mathbb{R}$，它都满足

$$|t|^p \wedge |t| \le \Phi(t) \le |t|^p \wedge (p|t|) \le p(|t|^p \wedge |t|). \tag{68}$$

我们固定一个函数 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$，使得 $\eta \ge 0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^m}\eta = 1$。由于条件 (65) 蕴含函数 f 的局部可积性，存在一个序列 $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$，属于 $(0,\infty)$，使得函数 $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ 对每个 $x \in \Omega$ 定义为

$$f_j(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^m} \eta(z) f(x-\delta_j z)\,\mathrm{d}z, \tag{69}$$

在 Ω 上几乎处处有定义，且 $f_j \to f$ 满足 $j \to \infty$。此外，由于函数 Φ 是凸的，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{\Phi(f_j(y)-f_j(x))}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \iint_{U\times U} \frac{\Phi(f(y)-f(x))}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{70}$$

由 (68) 和 (70) 可得 (66)。 □

现在我们证明和 $W^{s,p}(\mathbb{M}) + W^{1,sp}(\mathbb{M})$ 的刻画。

定理 *1.6* 的证明。 为证明 (7) 中的包含关系，我们首先假设集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 有界且为开集，边界 $\partial\Omega$ 光滑；$\Omega \subseteq U$，且对于某个开集 $U \supseteq \Omega$，$\operatorname{dist}(\Omega, \mathbb{R}^m \setminus U) > 0$；并且根据命题 1.5，

$$\iint_{U\times U} \frac{|f(x)-f(y)|^p \wedge |f(x)-f(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le \iint_{U\times U} \frac{|f(x)-f(y)|^p \wedge |f(x)-f(x)|^q}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{71}$$

根据命题 3.1 和 (71)，存在一个序列 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 属于 $C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$，使得 $f_j \to f$ 在 Ω 中几乎处处成立，并且

(72)
$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|f_j(y)-f_j(x)|^p \wedge 1}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le C_1 \iint_{U\times U} \frac{|f(y)-f(x)|^p \wedge |f(y)-f(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty.$$

对于每个 $j\in\mathbb{N}$，令 $u_j := e^{if_j}$，我们有

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_j(y)-u_j(x)|^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le C_2 \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|f_j(x)-f_j(y)|^p \wedge 1}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{73}$$

由于 $sp>1$，根据 Sobolev 空间之和中的提升定理 [11, th. 8.8; 22, th. 2] (参见 also [6, 19, 21, 27])，我们可以写成 $f_j = g_j + h_j$，其中函数 $g_j \in W^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ 和 $h_j \in \dot{W}^{1,sp}(\Omega;\mathbb{R})$ 满足以下估计

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|g_j(y)-g_j(x)|^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le C_3 \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_j(x)-u_j(y)|^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{74}$$

$$\int_\Omega |Dh_j|^{sp} \le C_4 \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u_j(x)-u_j(y)|^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{75}$$

以及以下条件

$$\int_\Omega g_j = \int_\Omega h_j = \frac{1}{2}\int_\Omega f_j. \tag{76}$$

取一个子列后，我们可以假设当 $j\to\infty$ 时，$g_j \to g$ 和 $h_j \to h$ 在 Ω 中几乎处处成立，其中函数 $g\in\dot{W}^{s,p}(\Omega;\mathbb{R})$ 和 $h\in\dot{W}^{1,sp}(\Omega;\mathbb{R})$ 根据 (72)、(73)、(74) 和 (75) 满足

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|g(y)-g(x)|^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \le C_5 \iint_{U\times U} \frac{|f(x)-f(y)|^p \wedge |f(x)-f(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{77}$$

$$\int_\Omega |Dh|^{sp} \le C_6 \iint_{U\times U} \frac{|f(x)-f(y)|^p \wedge |f(x)-f(x)|}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{78}$$

并根据 (76)

$$\int_\Omega g = \int_\Omega h = \frac{1}{2}\int_\Omega f. \tag{79}$$

在一般情形下，我们沿用 Rodiac & Van Schaftingen [32, 对命题 4.1] 的证明。由于 M 是带边紧流形，存在 $N\in\mathbb{N}$，且对于 $k\in\{1,\dots,N\}$，存在微分同胚 $\psi_k : U_k \to \mathbb{R}^m$，使得或者 $\psi_k(U_k) = \mathbb{B}^m \subset \mathbb{R}^m$，或者 $\psi_k(U_k) = \mathbb{B}^m \cap \mathbb{R}^{m-1}\times[0,\infty)$，并且 $M = \bigcup_{k=1}^N U_k$。我们取与集合 U_k 相对应的单位分解 $(\varphi_k)_{1\le k\le N}$，也就是说，对于每个 $k\in\{1,\dots,N\}$，$\varphi_k \in C^1(M;\mathbb{R})$，且 $\varphi_k = 0$ 在 $M\setminus U_k$ 中，并且 $\sum_{i=1}^N \varphi_k = 1$ 在 M 上。给定一个可测函数 $f : M \to \mathbb{R}$，对于每个 $k\in\{1,\dots,N\}$，我们定义函数 $f_k := f\circ\psi_k^{-1} : \psi_k(U_k)\to\mathbb{R}$；对该函数应用证明的第一部分，可得函数 $g_k \in W^{s,p}(\psi_k(U_k);\mathbb{R})$ 和 $h_k \in \dot{W}^{1,sp}(\psi_k(U_k);\mathbb{R})$，它们满足 $\Omega = \psi_k(U_k)$ 下的 (77)、(78) 和 (79)。定义

函数

$$g_* \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Big(g_k \circ \psi_k - \fint_{U_k} g_k \circ \psi_k \Big),$$
$$h_* \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Big(h_k \circ \psi_k - \fint_{U_k} h_k \circ \psi_k \Big),$$

以及低频分量

$$f_0 \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \fint_{U_k} f,$$

我们在 $\mathbf{M}$ 上有 $f = f_0 + g_* + h_*$。此外，由于

$$f_0 \coloneqq \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \Big(\fint_{U_k} f - \fint_{\mathcal{M}} f \Big) + \fint_{\mathcal{M}} f,$$

由于最后一项是常数，我们有

$$\|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \le C_7 \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$

and

$$\Phi(\|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})}) \le C_8 \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \Phi(|f(y) - f(x)|) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$

其中凸函数 Φ 的定义如 (67) 所示。由于 $1 < sp < p$，由 (68) 可得

$$\begin{aligned} \|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p \wedge \|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^{sp} &\le \|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})}^p \wedge \|Df_0\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \\ &\le C_9 \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f(y) - f(x)|^p \wedge |f(y) - f(x)|}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f_0(x) - f_0(y)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \wedge \int_{\mathcal{M}} |Df_0|^{sp} \\ \le C_{10} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f(x) - f(y)|^p \wedge |f(x) - f(x)|}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

通过取 $g \colon = g_*$ 和 $h \colon = h_* + f_0$，或取 $g \colon = g_* + f_0$ 和 $h \colon = h_*$，根据命题 1.5，我们最终得到：

$$\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|g(y) - g(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{M}} |Dh|^{sp} \le C_{11} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f(y) - f(x)|^p \wedge |f(y) - f(x)|^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x,$$

这给出了第一个估计和包含关系。

现在证明 (7) 中的反向包含关系 $\supseteq$。若 $f = g + h$ 满足 $g \in W^{s,\,p}(\mathbf{M}\ \mathbb{R})$ 且 $h \in \dot{W}^{1,\,sp}(\mathbf{M}\ \mathbb{R})$，则存在光滑映射序列 $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 和 $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$，它们属于 $C^\infty(\mathbf{M}\ \mathbb{R})$，并且当 $j \to \infty$ 时，$g_j \to g$ 在 $\dot{W}^{s,\,p}(\mathbf{M}\ \mathbb{R})$ 中收敛，且 $h_j \to h$ 在 $\dot{W}^{1,\,sp}(\mathbf{M}\ \mathbb{R})$ 中收敛。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，定义 $f_j \coloneqq g_j + h_j$ 和 $u_j \coloneqq e^{if_j}$，由分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式（例如参见 [8, 推论 3.2；10；33，引理 2.1]），由于

$sp > 1$ 和 $|e^{ih_j}| \leq 1$,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u_j(y)-u_j(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|e^{ig_j(y)}-e^{ig_j(x)}|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|e^{ih_j(y)}-e^{ih_j(x)}|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_{12}\biggl(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|g_j(y)-g_j(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{M}} |Dh_j|^{sp}\biggr).\end{aligned} \tag{80}$$

根据定理 1.4，对于每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f_j(y)-f_j(x)|^p \wedge 1}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|u_j(y)-u_j(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{81}$$

令 $j \to \infty$ 取 (81) 和 (81) 中的值，并应用命题 1.5，可得

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|f(y)-f(x)|^p \wedge |f(y)-f(x)|^q}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_{13}\biggl(\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{|g(y)-g(x)|^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{M}} |Dh|^{sp}\biggr),\end{aligned}$$

这就证明了所述的反向包含关系和估计。 □

3.2. **关于临界下指数**。 如果函数 $f : \mathbb{B}^m \to \mathbb{R}$ 可测，且如果 $q \in [1,\infty)$，那么已知

$$\iint_{\mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m} \frac{|f(y)-f(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty \tag{82}$$

除非函数 f 是常数 [7，命题. 2]。尽管积分被限制在大振荡区域

$$\iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m\\ |f(y)-f(x)|\geq 1}} \frac{|f(y)-f(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty \tag{83}$$

对于振荡较小的函数，该值可能有限；但仍存在一些 Sobolev 函数，使积分 (83) 中大振荡部分的值发散。

命题 3.2. 令 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$。若 $1 \leq q < m$，则存在一个函数 $f \in \dot{W}^{1,0}{}^{q}(\mathbb{B}^m,\mathbb{R})$ 使得

$$\iint_{\substack{(x,y)\in\mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m\\ |f(y)-f(x)|\geq 1}} \frac{|f(y)-f(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty. \tag{84}$$

由命题 3.2 可知，若 $1 \leq sp < m$，则存在一个函数 $f \in \dot{W}^{1,0}{}^{sp}(\mathbb{B}^m_1,\mathbb{R})$，使得

$$\iint_{\substack{(x,y)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}\\ |f(y)-f(x)|\geq 1}} \frac{|f(y)-f(x)|^p \wedge |f(y)-f(x)|^{sp}}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \infty$$

因此，非包含关系 (12) 成立。

命题 *3.2* 的证明。 我们选取一个函数 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$，使得 $\psi(x) = x_1$当 $x \in B_{1/2}$ 且 $\operatorname{supp}\psi \subset B_1$。对于每个 $\lambda \in (2, \infty)$，我们有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in \mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m\\ |\lambda\psi(y)-\lambda\psi(x)|\geq 1}} \frac{|\lambda\psi(y)-\lambda\psi(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\geq \lambda^q \iint\limits_{\substack{(x,y)\in B_{1/2}\times B_{1/2}\\ \lambda|y_1-x_1|\geq 1}} \frac{1}{|y-x|^m}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\geq C_1\lambda^q \ln(\tfrac{\lambda}{2}-1),\end{aligned} \tag{85}$$

对于某个常数 $C_1 \in (0, \infty)$。现在我们为每个 $j \in \mathbb{N}$ 定义数值

$$\lambda_j \coloneqq \lambda_0 2^{j^2} \qquad \text{and} \qquad \rho_j \coloneqq \left(\lambda_j^q \ln(\tfrac{\lambda_j}{2}-1)\right)^{-1/(m-q)}, \tag{86}$$

其中 $\lambda_0 \in (2, \infty)$ 足够大，使得存在点序列 $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$，满足闭球 $B_{\rho_j}(a_j)$ 两两不相交，且都包含在 $\mathbb{B}^m$ 中（这是可行的，因为 $q < m$）。我们定义函数 f：对每个 $x \in \mathbb{B}^m$，$\mathbb{B}^m \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \lambda_j \psi(\frac{x-a_j}{\rho_j}) & \text{if } x \in B_{\rho_j}(a_j), \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由这些球两两不相交、缩放以及 (86)，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^m} |Df|^q &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B_{\rho_j}(a_j)} |Df|^q = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_j^q \rho_j^{m-q} \int_{\mathbb{B}^m} |D\psi|^q \\ &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln(\lambda_0 2^{j^2-1}-1)} \int_{\mathbb{B}^m} |D\psi|^q < \infty,\end{aligned}$$

因此 $f \in W^{1,q}_0(\mathbb{B}^m, \mathbb{R})$。另一方面，由这些球两两不相交、缩放、(85) 以及 (86)，我们有

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in \mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m\\ |f(y)-f(x)|\geq 1}} \frac{|f(y)-f(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \rho_j^{m-q} \iint\limits_{\substack{(x,y)\in \mathbb{B}^m\times\mathbb{B}^m\\ |\lambda_j\psi(y)-\lambda_j\psi(x)|\geq 1}} \frac{|\lambda_j\psi(y)-\lambda_j\psi(x)|^q}{|y-x|^{m+q}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{j\in\mathbb{N}} C_1 = \infty.\end{aligned}$$

□

4. 次临界维数下提升的估计

本节旨在证明定理 1.8。我们首先注意到，根据定理 1.4，对于每个 $\delta \in (0, \infty)$，映射 $\widetilde{u} : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ 立即满足小尺度估计

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}\\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\leq\delta}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

因此，只需估计大尺度积分：

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}\\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))>\delta}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{87}$$

我们将证明以下关于大尺度振荡的命题 2.1 的对应结论。

命题 4.1. 设 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，设 $s, s_* \in (0,1)$ 且设 $p, p_* \in [1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得若 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 是黎曼覆盖，若 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 是开且凸的，若 $\widetilde{u} \in Y(\Omega, \mathcal{N})$，若 $u := \pi \circ \widetilde{u}$，若 $\delta \leq \operatorname{inj}(\mathcal{N})$，且若

$$\frac{1-s_*}{m} = \frac{1}{sp} - \frac{1}{p_*}, \tag{88}$$

then

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\mathcal{N}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq\delta}} \frac{d_{\mathcal{N}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C\left(\frac{1}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p_*}{sp}}. \tag{89}$$

回顾一下，空间 $Y(\Omega, \mathbb{N})$ 在式 (17) 中定义为这样一类映射：其在几乎每条线段上的限制，几乎处处都与一个连续函数重合，且该函数在两端点处取值相同。

注 4.2. 命题 4.1 推出一个分数阶 Sobolev 嵌入：对于 $s_* \in (0,1)$ 和 $p, p_* \in (1,\infty)$，若满足 $1/p_* = 1/p - (1-s_*)/m$，令 $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为圆的万有覆盖，并在式 (89) 中选取 $\widetilde{u} := tf$，其中 $t > 0$ 满足 $\delta = 1$，则由于 $|e^{itf}| \leq 1$ 属于 Ω，利用分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式可得，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ |f(y)-f(x)|\geq t}} \frac{|f(y)-f(x)|^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\leq \frac{C_2}{t^{p_*}}\left(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|e^{itf(y)} - e^{itf(x)}|^{p/s_*}}{|y-x|^{m+p}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{p_*/p} \\ &\leq \frac{C_3}{t^{p_*}}\left(\int_\Omega |De^{itf}|^p\right)^{p_*/p} = C_3\left(\int_\Omega |Df|^p\right)^{p_*/p};\end{aligned} \tag{90}$$

在式 (90) 中令 $t \to 0$，即可得到分数阶 Sobolev 嵌入

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|f(y)-f(x)|^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C_3\left(\int_\Omega |Df|^p\right)^{p_*/p}.$$

4.1. 一维估计。 证明命题 4.1 的第一个工具是以下截断分数阶莫雷–索博列夫不等式。

引理 4.3。 设 $s \in (0,1)$ 且 $p \in [1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得若 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，若 $\mathcal{N}$ 是一个黎曼流形，若映射 $u\colon I \to \mathcal{N}$ 可测，且若 $\mu \in [0,\infty)$，则对于几乎处处的 $x, y \in I$，有

$$\begin{aligned}&d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x)) \\ &\quad\leq C\left(\left(\iint\limits_{[x,y]\times[x,y]} \left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\right)_+^p \frac{\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v}{|w-v|}\right)^{\frac{1}{p}} |y-x|^{s-\frac{1}{p}} + \mu|y-x|^s\right).\end{aligned} \tag{91}$$

当 $\mu = 0$ 时，估计式 (91) 化为分数阶莫雷–索博列夫不等式；当 $\mu > 0$ 时，(91) 表明，去除差商中的小值后，仍然可以得到某种截断一致界。

证明将用到以下关于平均振荡的闵可夫斯基不等式。

引理 4.4. 令 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$，令 $p \in [1,+\infty)$，令 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 为可测的，并令映射 $u\colon \Omega \to \mathcal{N}$ 为可测的。对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 以及可测集 A_0、……、$A_k \subseteq \Omega$

使得对于每个 $j \in \{0、\ldots\ldots、k\}$，$\mathcal{L}^d(A_j) > 0$，均有

$$\Big(\fint_{A_0}\fint_{A_k} d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\fint_{A_j}\fint_{A_{j+1}} d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{92}$$

证明。由三角不等式和闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\Big(\fint_{A_0}\fint_{A_k} d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} &= \Big(\fint_{A_0}\cdots\fint_{A_k} d_{\mathcal{N}}(u(x_k),u(x_0))^p \,\mathrm{d}x_k\cdots\mathrm{d}x_0\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\fint_{A_0}\cdots\fint_{A_k} d_{\mathcal{N}}(u(x_{j+1}),u(x_j))^p \,\mathrm{d}x_k\cdots\mathrm{d}x_0\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\Big(\fint_{A_j}\fint_{A_{j+1}} d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

这就证明了 (92)。 □

现在我们证明截断的分数阶 Morrey–Sobolev 嵌入。

引理 *4.3* 的证明。由于映射 u 是可测的，我们不妨假设 x 和 y 是 u 的勒贝格点，且 $I = (x,\ y)$。对每个$j \in \mathbb{N}$，我们定义集合 $I_j^x \colon = x + 2^{-j}(I - x) \subseteq I$。由于 x 是 u的勒贝格点，我们有

$$\lim_{j\to\infty}\fint_{I_j} d_{\mathcal{N}}(u(x),u(z))^p \,\mathrm{d}z = 0, \tag{93}$$

接着由 (93)、引理 4.4 和闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}\Big(\fint_I d_{\mathcal{N}}(u(x),u(z))^p \,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{p}} &\le \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\fint_{I_j^x}\fint_{I_{j+1}^x} d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))^p \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\fint_{I_j^x}\fint_{I_{j+1}^x} \big(d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v)) - \mu|w-v|^s\big)_+^p \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad + \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\fint_{I_j^x}\fint_{I_{j+1}^x} \mu^p|w-v|^{sp} \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned} \tag{94}$$

F对于（94）右侧的第一项，对每个 $j \in \mathbb{N}$，由于 $sp \ge 1$，

$$\begin{aligned}&\fint_{I_j^x}\fint_{I_{j+1}^x} \big(d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v)) - \mu|w-v|^s\big)_+^p \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v\\ &\qquad \le \frac{2\,\mathrm{diam}(I)^{sp-1}}{2^{j(sp-1)}}\iint_{I\times I}\Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\Big)_+^p \frac{\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v}{|w-v|},\end{aligned} \tag{95}$$

而对于 (94) 右侧的第二项，对每个 $j \in \mathbb{N}$，我们有，

$$\fint_{I_j^x}\fint_{I_{j+1}^x} |w-v|^{sp} \,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \le \frac{C_1\,\mathrm{diam}(I)^{sp}}{2^{jsp}}. \tag{96}$$

将 (95) 和 (96) 代入 (94)，可得，由于 $sp > 1$,

$$\Big(\fint_I d_{\mathcal{N}}(u(x),u(z))^p \,\mathrm{d}z\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C_2\Big(\operatorname{diam}(I)^{sp-1} \iint_{I\times I} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\Big)_+^p \frac{\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v}{|w-v|} + \mu^p \operatorname{diam}(I)^{sp}\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{97}$$

由（97）和三角不等式可得结论（91）。 □

接下来，我们使用引理 4.3，通过截断分数阶 Sobolev 半范数来估计提升的大尺度振荡。

引理 4.5。设 $s \in (0,1)$ 且 $p \in [1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对于任意区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，若 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 是一个黎曼覆盖，若 $\widetilde{u} \in C(I,\mathcal{N})$，且若 $u := \pi \circ \widetilde{u}$，则对几乎处处的 $x,y \in I$、任意 $\mu \in [0,\infty)$ 以及任意 $\delta \in [0,\operatorname{inj}(\mathcal{N}))$，有

$$(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x)) - \delta)_+^{sp} \leq \frac{C}{\delta^{p(1-s)}}\Big(\iint_{[x,y]\times[x,y]} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\Big)_+^p \frac{\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v}{|w-v|}|y-x|^{sp-1} + \mu^p |y-x|^{sp}\Big). \tag{98}$$

引理 4.5 给出了一个增长估计，对应于 Morrey–Sobolev 嵌入在满足 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{1,sp}(I,\widetilde{\mathcal{N}})$ 时所给出的估计。

当 $\mu = 0$ 时，引理 4.5 表明，在大尺度上，提升 $\widetilde{u}$ 表现得像一个 Hölder 连续映射，其指数为 $1 - 1/sp$；这不如分数阶 Morrey–Sobolev 嵌入赋予原函数 u 的指数 $s - 1/p$。这一结果推广了 Merlet [18]以及 Mironescu 和 Molnar [23, 引理 8.25] 关于圆的万有覆盖所得的结果。

引理 4.5 的证明。令 $\ell := \lfloor d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(x)\ \widetilde{u}(y))/\delta \rfloor$，使得

$$(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x)) - \delta)_+ \leq \ell\delta. \tag{99}$$

由于映射 $\widetilde{u}$ 连续，根据介值定理，存在点 $z_0 = x \leq z_1 \leq z_2 \leq \cdots \leq z_\ell \leq y$，使得对每个 $i \in \{1,\dots,\ell\}$，都有 $d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z_i)\ \widetilde{u}(z_{i-1})) = \delta$。由于 $\delta \leq \operatorname{inj}(\mathcal{N})$，由引理 2.3，我们还有 $d_{\mathcal{N}}(u(z_i)\ u(z_{i-1})) = \delta$。因此，由于 $sp > 1$，根据引理 4.3 可知，对每个 $i \in \{1,\dots,\ell\}$,

$$\delta \leq C_1\Bigg(\Big(\iint_{[z_{i-1},z_i]^2} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(z),u(w))}{|z-w|^s} - \mu\Big)_+^p \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w}{|z-w|}|z_i - z_{i-1}|^{sp-1}\Big)^{\frac{1}{p}} + \mu|z_i - z_{i-1}|^s\Bigg). \tag{100}$$

将 (100) 求和可得

$$\ell \leq \Big(\frac{C_1}{\delta}\Big)^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^{\ell} \Bigg(\Big(\iint_{[z_{i-1},z_i]^2} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(z),u(w))}{|z-w|^s} - \mu\Big)_+^p \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w}{|z-w|}\Big)^{\frac{1}{sp}} |z_i - z_{i-1}|^{1-\frac{1}{sp}} + \mu^{\frac{1}{s}}|z_i - z_{i-1}|\Bigg). \tag{101}$$

对 (101) 的右侧应用离散 Hölder 不等式，可得

$$\ell \le \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{s}} \Bigg(\Big(\sum_{i=1}^{\ell} \iint_{[z_{i-1},z_i]^2} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(z),u(w))}{|z-w|^s} - \mu \Big)_+^p \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w}{|z-w|} \Big)^{\frac{1}{sp}} \Big(\sum_{i=1}^{\ell} |z_i - z_{i-1}| \Big)^{1-\frac{1}{sp}} + \mu^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^{\ell} |z_i - z_{i-1}| \Bigg). \tag{102}$$

由于 $x \le z_0 \le z_1 \le \cdots \le z_\ell \le y$，集合 $(z_{i-1}, z_i)^2$ 是 $[x,y]^2$ 的互不相交子集，因此由 (102) 可得

$$\ell \le \left(\frac{C_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{s}} \Bigg(\Big(\iint_{[x,y]^2} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(z),u(w))}{|z-w|^s} - \mu \Big)_+^p \frac{\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w}{|z-w|} \Big)^{\frac{1}{sp}} |y-x|^{1-\frac{1}{sp}} + \mu^{\frac{1}{s}} |y-x| \Bigg). \tag{103}$$

回顾 (99)，由 (103) 可得结论 (98)。 □

4.2. 平均积分振荡估计。 对引理 4.5 的估计进行积分，我们将得到以下关于截断分数阶 Sobolev 范数的截断平均振荡估计。

引理 4.6. 设 $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，设 $s \in (0,1)$，并设 $p \in (1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得若集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 有界且凸，$\widetilde{\ }$ 若 $\pi: N \to N$ 是黎曼覆盖映射，若 $\widetilde{u} \in Y(\Omega, N)$，若 $u := \pi \circ \widetilde{u}$，若 $\delta \in (0, \mathrm{inj}(N)]$，且若 $\mu \in [0,\infty)$，则

$$\iint_{\Omega\times\Omega} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta)_+^{sp} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \le \frac{C_2}{\delta^{(1-s)p}} \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)^{m+sp}}{m+sp} \iint_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))}{|y-x|^s} - \mu \Big)_+^p \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^m} + \mu^p \operatorname{diam}(\Omega)^{2m+sp} \right). \tag{104}$$

引理 4.6 将由引理 4.6 和下一个积分估计推出。

引理 4.7. 令 $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$。若集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ 开且凸，函数 $F\colon \Omega \times \Omega \to [0,\infty)$ 可测，且 $\gamma > -m$，则

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \left(\iint_{[x,y]\times[x,y]} F(w,v)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \right) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^{1-\gamma}} \le \frac{2\operatorname{diam}(\Omega)^{m+\gamma}}{m+\gamma} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{F(x,y)}{|y-x|^{m-1}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{105}$$

证明。 根据线段上积分的定义，我们有

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \left(\iint_{[x,y]\times[x,y]} F(w,v)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \right) |y-x|^{\gamma-1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_{\Omega\times\Omega} \iint_{[0,1]\times[0,1]} F((1-t)x+ty,(1-r)x+ry)|y-x|^{\gamma+1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{106}$$

在等式 (106) 右侧进行变量代换 $v = (1-r)x + ry$, $w = (1-t)x + ty$ 后，由于 $|v-w| = |t-r||y-x|$，我们得到

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \left(\iint_{[x,y]\times[x,y]} F(w,v)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v \right) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^{1-\gamma}} = \iint_{\Omega\times\Omega} \iint_{\Sigma_{v,w}} \frac{F(w,v)|w-v|^{\gamma+1}}{|t-r|^{m+\gamma+1}} \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}v, \tag{107}$$

其中，我们对每个 $v, w \in \Omega$ 定义集合

$$\Sigma_{v,w} \coloneqq \left\{(t,r) \in [0,1] \times [0,1] \;\middle|\; \frac{rv - tw}{r-t} \in \Omega \text{ and } \frac{(1-r)v - (1-t)w}{t-r} \in \Omega\right\}.$$

由于

$$\Sigma_{v,w} \subseteq \left\{(t,r) \in [0,1] \times [0,1] \;\middle|\; |t-r| \geq \frac{|w-v|}{\operatorname{diam}\Omega}\right\},$$

我们有

$$\iint\limits_{\Sigma_{v,w}} \frac{1}{|t-r|^{m+\gamma+1}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}r \leq \int\limits_{|s| \geq \frac{|w-v|}{\operatorname{diam}\Omega}} \frac{\mathrm{d}s}{|s|^{m+\gamma+1}} = \frac{2 \operatorname{diam}(\Omega)^{m+\gamma}}{(m+\gamma)|w-v|^{m+\gamma}}. \tag{108}$$

由此可从（107）和（108）推出（105）成立。 □

现在我们继续证明引理 4.6。

引理 *4.6* 的证明。由引理 4.5 可知，因为 $sp > 1$,

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega\times\Omega} &(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y), \widetilde{u}(x)) - \delta)_+^{sp} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{C_1}{\delta^{(1-s)p}}\Bigg(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \iint\limits_{[x,y]\times[x,y]} \left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\right)_+^p \frac{\mathrm{d}w \,\mathrm{d}v}{|w-v|} |y-x|^{sp-1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &\qquad + \mu^p \iint\limits_{\Omega\times\Omega} |y-x|^{sp} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x\Bigg).\end{aligned} \tag{109}$$

对于 (109) 右端的第一项，由于 $sp > -m$ ，我们利用引理 4.7，从 (109) 推得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \iint\limits_{[x,y]\times[x,y]} &\left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(w),u(v))}{|w-v|^s} - \mu\right)_+^p \frac{\mathrm{d}w \,\mathrm{d}v}{|w-v|} |y-x|^{sp-1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{2 \operatorname{diam}(\Omega)^{m+sp}}{m+sp} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))}{|y-x|^s} - \mu\right)_+^p \frac{\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x}{|y-x|^m},\end{aligned} \tag{110}$$

而对于 (109) 右端的第二项，我们有

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} |y-x|^{sp} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \leq C_2 \operatorname{diam}(\Omega)^{2m+sp}. \tag{111}$$

由不等式 (109)、(110) 和 (111) 可得估计 (104)。 □

4.3. **积分截断平均振荡估计**。现在，我们针对截断平均振荡的积分，得到一个类似于命题 4.1 的插值估计。

命题 4.8. 设$\mathcal{M}$ 是一个紧黎曼流形，设 $s, s_* \in (0,1)$，设$p, p_* \in [1,\infty)$，并设 $m \coloneqq$ 维数 $\mathcal{M}$。若 $sp > 1$，则存在一个常数 $C \in (0,\infty)$，使得若 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$是一个黎曼覆盖，若 $\widetilde{u} \in Y(\mathcal{M}, \mathcal{N})$，若 $u \coloneqq \pi \circ \widetilde{u}$，若$\delta \leq \operatorname{inj}(\mathcal{N})$ 且若

$$\frac{1-s_*}{m} = \frac{1}{sp} - \frac{1}{p_*}, \tag{112}$$

then

$$\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\frac{1}{r^{2m+s_*}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\right)_+ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r}\,\mathrm{d}x \\ \leq C\left(\frac{1}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{\frac{p_*}{sp}}. \tag{113}$$

命题 4.8 的证明令人联想到 Marcinkiewicz 实插值定理的证明，不过这里的框架非线性程度要高得多。

命题 *4.8* 的证明。根据积分的层蛋糕表示（卡瓦列里原理），

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{r^{2m}} \iint_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\right)_+ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \mathrm{d}x \\ = (p_*-1)\int_0^\infty \mathcal{L}^m(E_\lambda^r)\lambda^{p^*-1}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{114}$$

其中，对于每个 $\lambda\in(0,\ \infty)$ 和 $r\in(0,\ \infty)$，我们定义集合

$$E_\lambda^r := \left\{ x\in\Omega \,\middle|\, \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\right)_+ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \geq \lambda r^{2m} \right\},$$

一方面，固定 $q\in(\frac{1}{s},\ p)$（这是可行的，因为 $sp>1$），对于每个 $x\in E_\lambda^r$和 $\mu\in[0,\infty)$，由于 $sq>1$，由詹森不等式和引理 4.6 可得，

$$\begin{aligned} \lambda^{sq} &\leq \left(\frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\right)_+ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}w \right)^{sq} \\ &\leq C_1 \frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\right)_+^{sq} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\leq C_2 \frac{r^{sq-m}}{\delta^{(1-s)q}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu \right)_+^q \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m} + C_3 \frac{\mu^q r^{sq}}{\delta^{(1-s)q}}; \end{aligned} \tag{115}$$

现在令 μ 取为

$$\mu_\lambda^r := C_4 \frac{\lambda^s \delta^{1-s}}{r^s},$$

对于每个 $x\in E_\lambda^r$，由 (115) 可得 $C_4^q C_3 = \frac{1}{2}$

$$\lambda^{sq} \leq C_5 \frac{r^{sq-m}}{\delta^{(1-s)q}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \left(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu_\lambda^r \right)_+^q \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m}. \tag{116}$$

因此，由 (116) 可得

(117)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^m(E_\lambda^r) &\le \frac{C_5 r^{sq-m}}{\lambda^{sq}\delta^{(1-s)q}} \int_\Omega \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu_\lambda^r\Big)_+^q \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{C_5 r^{sq-m}}{\lambda^{sq}\delta^{(1-s)q}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu_\lambda^r\Big)_+^q \mathcal{L}^m(\Omega\cap B_r(y)\cap B_r(z)) \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m} \\ &\le \frac{C_6 r^{sq}}{\lambda^{sq}\delta^{(1-s)q}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu_\lambda^r\Big)_+^q \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m}.\end{aligned}$$

另一方面，由于 $sp>1$，若 $x\in E_\lambda^r$，由詹森不等式以及取 $\mu=0$ 的引理 4.6 可得，

(118)
$$\begin{aligned}\lambda^{sp} &\le \Big(\frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \big(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\big)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big)^{sp} \\ &\le C_7 \frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \big(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\big)_+^{sp} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\le C_8 \frac{r^{sp-m}}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;\end{aligned}$$

于是由 (118) 可得

(119)
$$\begin{aligned}&\{(r,\lambda)\in(0,\infty)^2 \mid E_r^\lambda \neq \emptyset\} \\ &\qquad \subseteq H \coloneqq \Big\{(r,\lambda)\in(0,\infty)^2 \;\Big|\; \lambda^{sp} r^{m-sp} \le \frac{C_8^{sp}}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big\}.\end{aligned}$$

由 (114)、(117) 和 (119)，可得

(120)
$$\begin{aligned}&\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \Big(\frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \big(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\big)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \le \frac{C_9}{\delta^{(1-s)q}} \iint\limits_H \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu_\lambda^r\Big)_+^q \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m} \frac{r^{sq}\lambda^{p_*}}{r^{1+s_*p_*}\lambda^{1+sq}}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

作变量代换

$$\mu = C_4 \frac{\lambda^s \delta^{1-s}}{r^s} \qquad \text{and} \qquad t = \lambda^{sp} r^{m-sp}$$

在（120）中，我们由（112）推得

(121)
$$\begin{aligned}&\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}(\Omega)} \Big(\frac{1}{r^{2m}} \iint\limits_{(\Omega\cap B_r(x))^2} \big(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta\big)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\Big)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \le \frac{C_{10}}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \int_0^{\bar{t}} \int_0^\infty \Big(\frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))}{|y-z|^s} - \mu\Big)_+^q \mu^{p-q-1} t^{\frac{p^*}{sp}-2}\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{|y-z|^m},\end{aligned}$$

with

$$\bar{t} := \frac{C_8^{sp}}{\delta^{(1-s)p}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

对不等式（121）右端进行 μ 和 t 中的积分即可得出结论，因为 $q<p$ 和 $p^*>sp$。□

4.4. 大尺度估计的证明。现在我们利用命题 4.8 来证明命题 4.1。主要思路是结合三角不等式应用命题 4.8；由于左侧有截断，我们需要依靠命题 4.8 中取值任意接近 0 的 δ 情形。

命题 *4.1* 的证明。通过比较论证，我们有

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq\delta}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 2^{p_*}\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))-\frac{\delta}{2}\right)_+^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{122}$$

由三角不等式和对称性可得

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))-\frac{\delta}{2}\right)_+^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\leq 2^{p_*-1}\iint\limits_{\Omega\times\Omega}\Bigg(\fint_{\Omega\cap B_{|y-x|/2}(\frac{x+y}{2})}\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z))-\tfrac{\delta}{4}\right)_+\mathrm{d}z\Bigg)^{p_*} \\
&\qquad\qquad+\Bigg(\fint_{\Omega\cap B_{|y-x|/2}(\frac{x+y}{2})}\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z),\widetilde{u}(x))-\tfrac{\delta}{4}\right)_+\mathrm{d}z\Bigg)^{p_*}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^{m+s_*p_*}} \\
&\qquad= 2^{p_*}\iint\limits_{\Omega\times\Omega}\Bigg(\fint_{\Omega\cap B_{|y-x|/2}(\frac{x+y}{2})}\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z),\widetilde{u}(x))-\tfrac{\delta}{4}\right)_+\mathrm{d}z\Bigg)^{p_*}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^{m+s_*p_*}}.
\end{aligned} \tag{123}$$

根据（122）和（123），通过在球坐标中积分可得。

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega\\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq\delta}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\leq C_1\iint\limits_{\Omega\times\Omega}\Bigg(\fint_{\Omega\cap B_{|y-x|}(x)}\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z),\widetilde{u}(x))-\tfrac{\delta}{4}\right)_+\mathrm{d}z\Bigg)^{p_*}\frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{|y-x|^{m+s_*p_*}} \\
&\qquad\leq C_2\int_\Omega\int_0^{\operatorname{diam}(\Omega)}\Bigg(\fint_{\Omega\cap B_r(x)}\left(d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z),\widetilde{u}(x)-\tfrac{\delta}{4}\right)_+\mathrm{d}z\Bigg)^{p_*}\frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{124}$$

根据三角不等式，类似于引理 4.4 的证明，对于几乎处处的$x \in \Omega$以及每个 $r \in (0, \operatorname{diam}(\Omega))$，有

$$\begin{aligned}(125)\qquad &\fint_{\Omega\cap B_r(x)} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(z),\widetilde{u}(x)) - \tfrac{\delta}{4})_+ \,\mathrm{d}z \\ &\qquad \le \sum_{j\in\mathbb{N}} \fint_{\Omega\cap B_{2^{-j}r}(x)} \fint_{\Omega\cap B_{2^{-j-1}r}(x)} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\qquad\qquad \le C_3 \frac{r^{2m}}{2^{2mj}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{\Omega\cap B_{2^{-j}r}(x)} \int_{\Omega\cap B_{2^{-j}r}(x)} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中我们对每个 $j \in \mathbb{N}$ 定义

$$(126)\qquad \delta_j \coloneqq \frac{\delta\kappa^j}{4(1-\kappa)},$$

其中常数 $\kappa \in (0, 1)$ 将在后文确定，因为 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_j = \frac{\delta}{4}$。于是由 (125) 和闵可夫斯基不等式可得

$$\begin{aligned}(127)\qquad &\left(\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\fint_{\Omega\cap B_r(x)} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x)) - \tfrac{\delta}{4})_+ \,\mathrm{d}y \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_*}} \\ &\le C_3 \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\frac{2^{2mj}}{r^{2m}} \iint_{(\Omega\cap B_{2^{-j}r}(x))^2} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_*}}.\end{aligned}$$

对于每个 $j \in \mathbb{N}$，对外层积分作变量代换可得

$$\begin{aligned}(128)\qquad &\int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\frac{2^{2mj}}{r^{2m}} \iint_{(\Omega\cap B_{2^{-j}r}(x))^2} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}} \\ &\qquad = \frac{1}{2^{s_*p_*j}} \int_0^{2^{-j}\operatorname{diam}\Omega} \left(\frac{1}{r^{2m}} \iint_{(\Omega\cap B_r(x))^2} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}},\end{aligned}$$

而由命题 4.8，

$$\begin{aligned}(129)\qquad &\int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\frac{1}{r^{2m}} \iint_{(\Omega\cap B_r(x))^2} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(z)) - \delta_j)_+ \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}} \\ &\qquad\qquad \le C_4 \left(\frac{1}{\delta_j^{(1-s)p}} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right).\end{aligned}$$

结合式（127）、（128）和（129），根据式（126）可得

$$\begin{aligned}(130)\qquad &\left(\int_\Omega \int_0^{\operatorname{diam}\Omega} \left(\fint_{\Omega\cap B_r(x)} (d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x)) - \tfrac{\delta}{4})_+ \,\mathrm{d}y \right)^{p_*} \frac{\mathrm{d}r}{r^{1+s_*p_*}} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p_*}} \\ &\qquad\qquad \le C_5 \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2^{s_*}\kappa^{\frac{1-s}{s}})^j} \left(\frac{1}{\delta^{(1-s)p}} \iint_{\Omega^2} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(z))^p}{|y-z|^{m+sp}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \right)^{\frac{1}{sp}},\end{aligned}$$

and 只要以适当方式选取 $\kappa \in (0,1)$，使得 $\kappa > 2^{-\frac{s_* s}{1-s}}$，结论便成立。 □

4.5. **结论与进一步估计**。现在我们从命题 4.1 推导出定理 1.8。

定理 *1.8* 的证明。首先假设 $\mathrm{M} = \Omega$，其中集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ 是开、有界且凸的。由命题 2.18，我们有 $\widetilde{u} \in Y(\Omega, \mathrm{N})$。令 $p_* := p$，可得 $s_* = s + (1-s)(1 - \frac{m}{sp}) \geq s$。由于 Ω 有界且 $s_* p_* \geq sp$，我们得到

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq \mathrm{inj}(\mathcal{N})}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\leq C_1 \iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq \mathrm{inj}\,\mathcal{N}}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^{p_*}}{|y-x|^{m+s_*p_*}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_2\Big(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s}}, \end{aligned} \tag{131}$$

由命题 4.1（其中 $\delta = \mathrm{inj}(\mathrm{N})$）。结合估计式 (131) 与命题 2.1，可得

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\quad\leq C_3\Bigg(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y + \Big(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s}}\Bigg). \end{aligned} \tag{132}$$

得益于估计式 (132) 和引理 2.11 的覆盖，我们得出一般紧流形 M 上的结论 (13)。□

注 4.9。(13) 中的指数 $\frac{1}{s}$ 是最优的。事实上，假设

$$\|\widetilde{u}\|_{\dot{W}^{s,p}} \leq C_1(\|u\|_{\dot{W}^{s,p}} + \|u\|^{\gamma}_{\dot{W}^{s,p}}) \tag{133}$$

成立，并令 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为单位圆的万有覆盖，且 $\widetilde{u} = t\varphi$ 对某个 $\varphi \in C^\infty(\mathrm{M}\ \mathbb{R})$ 及每个 $t \in \mathbb{R}$ 均成立，则由 (13) 可得 $|t| \leq C_2(|t|^s + |t|^{\gamma s})$，而这只有在 $\gamma \geq \frac{1}{s}$ 时才成立。

命题 4.1 还可用于得到这样一个结果：估计式中的非线性部分包含临界分数阶 Sobolev 能量。

定理 4.10。设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为紧黎曼流形，令 $m := \dim \mathcal{M}$，令 $\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为黎曼覆盖映射，令 $s \in (0,1)$ 且令 $p \in (1,\infty)$。若 $sp > 1$，则存在常数 $C \in (0,\infty)$，使得对每个 $\widetilde{u} \in X(\mathcal{M},\mathcal{N})$，都有 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathcal{M}, \widetilde{\mathcal{N}})$ 且

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\quad\leq C_3\Bigg(1 + \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{2m}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Bigg)^{\frac{(1-s)p}{m}} \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{134}$$

虽然没有对指数施加限制，但实际上，右端的第一个积分对于某个非常值函数 u 有限，当且仅当 $p > m$。

定理 *4.10* 的证明。 我们按照定理 1.8 的证明进行，现在应用命题 4.1，其中 s 由 $s_0 = \frac{1}{1+\frac{1-s()p/m}{}}$ 给出， $p_* = p$ 使得 ~~s_* 随后由~~式 (88) 中的 s 给出。由于 $sp > 1$，我们有 $s_0 p = \frac{p}{1+\frac{1-s()p/m}{}} > 1$，因此根据~~命题 4.1~~

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq \operatorname{inj}(\mathcal{N})}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C_1\left(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+\frac{mp}{m+(1-s)p}}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{m+(1-s)p}{m}}. \tag{135}$$

若 $sp \geq m$，则有 $m \leq \frac{mp}{m+(1-s)p} \leq sp$, 而若 $sp \leq m$ ，则有 $sp \leq \frac{mp}{m+(1-s)p} \leq m$，因此由霍尔德不等式和 (135) 可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq \operatorname{inj}(\mathcal{N})}} &\frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_2\left(1+\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{2m}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-s)p}{m}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{136}$$

因此，结合 (136) 与命题 2.1，可得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega\times\Omega} &\frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_3\left(1+\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{2m}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{(1-s)p}{m}} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{137}$$

结合 (137) 与引理 2.11 中的覆盖，我们得出结论。 □

R注 4.11。 同样，式 (13) 中的指数 $\frac{1}{s}$ 是最优的。事实上，假设我们有 e

$$\|\widetilde{u}\|_{\dot{W}^{s,p}} \leq C_1(1+\|u\|^{\gamma}_{\dot{W}^{m/p,p}})\|u\|_{\dot{W}^{s,p}} \tag{138}$$

并令 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为单位圆的万有覆盖，且 $\widetilde{u} = t\varphi$，对某个 $\varphi \in C^\infty$(M $\mathbb{R}$) 及任意 $t \in \mathbb{R}$，由 (138) 可得 $|t| \leq C_2(1+|t|^{\gamma m/p})|t|^s$，而这只有在 $\gamma \geq {}_{(1-s)_m}{}^{p}$ 时才成立。

最后，当维数处于超临界情形时，同样的方法可用于对低阶分数阶索伯列夫能量进行估计。

定理 4.12。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 为紧黎曼流形，设 $m \coloneqq$ 维数$\mathcal{M}$，设 $\sim\pi : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ 为黎曼覆盖映射，设 $s \in (0,1)$ ，且设 $p \in (1,\infty)$。若

$$1 - s < \frac{sp}{m} < 1 \tag{139}$$

且如果 $\widetilde{u} \in X(\mathcal{M} \frown \mathcal{N})$，那么 $\widetilde{u} \in \dot{W}^{s_\flat,\ p}(\mathcal{M} \frown \mathcal{N})$ 并且

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} &\frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+s_\flat p}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_3\left(\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \left(\iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{d_{\mathcal{M}}(y,x)^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}}\right).\end{aligned} \tag{140}$$

with

$$s_\flat \coloneqq s - (1-s)\Big(\frac{m}{sp} - 1\Big). \tag{141}$$

$\widetilde{\ }$证明。 我们遵循定理 1.8 的证明结构。考虑 $\widetilde{u} \in Y(\Omega,\ \mathrm{N})$，我们应用命题 4.1，并令 $p_* = p$，因此根据 (141)，因为由 (139)

$$s_\flat p = p + m\Big(\frac{1}{s} - 1\Big) > 1$$

并且我们得到

$$\iint\limits_{\substack{(x,y)\in\Omega\times\Omega \\ d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))\geq \mathrm{inj}(\mathcal{N})}} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+s_\flat p}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq C_1\Big(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s}}.$$

另一方面，由命题 2.1，既然 $s_\flat < s$，且集合 Ω 有界，我们得到

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\widetilde{\mathcal{N}}}(\widetilde{u}(y),\widetilde{u}(x))^p}{|y-x|^{m+s_\flat p}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq C_2\Big(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \Big(\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{d_{\mathcal{N}}(u(y),u(x))^p}{|y-x|^{m+sp}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{s}}\Big).\end{aligned} \tag{142}$$

结论由 (142) 和引理 2.11 得出。 □

注 4.13。 定理 4.12 陈述中的值 $s_\flat$ 是最优的：取 $\pi:\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ 为单位圆的万有覆盖，并定义 $\widetilde{u}(x) := |x|^{-\alpha}$，则 $u \in \dot{W}^{1,sp}(\mathbb{B}^m,\mathbb{R})$ 当且仅当 $(\alpha+1)sp < m$。由分数阶 Gagliardo–Nirenberg 插值不等式可得 $\pi\circ\widetilde{u} \in \dot{W}^{s,p}(\mathbb{B}^m,\mathbb{S}^1)$。我们还有 $\widetilde{u} \notin$ $u \in \dot{W}^{1,sp}\ \mathbb{B}^m\ \mathbb{R}$ $\dot{W}^{s_*\,p}\ \mathbb{B}^m\ \mathbb{S}^1$ — — ,(,) 当且仅当 ( )。这意味着当 $\frac{m}{p} - s_* < \frac{m}{sp} - 1$，或等价地 $s_* > s_\flat$ 时，我们可以有 ,(,) 和 ,(,)。

参考文献

[1] F. Bethuel，流形之间 *Sobolev* 映射延拓问题的新障碍，J. Fixed Point Theory Appl. **15** 2014 1, 155 183, 10 1007 11784 014 0185 0 ↑7 ( )，第 – 期，doi: . /s - - - . F.

[2] Bethuel 和 D. Chiron，关于 *Sobolev* 空间中提升问题的若干问题，《非线性偏微分方程展望》，2007 年，第 125–152 页，doi:10.1090/conm/446/08628。↑2, 3, 6, 18, 19

[3] F. Bethuel 和 F. Demengel，流形之间 *Sobolev* 映射的延拓，Calc. Var. Partial Differential Equations **3** 1995 4, 475 491, 10 1007 01187897 ↑7 ( )，第 – 期，doi: . /BF . J. Bourgain 和 H. Brezis，关于方程div $Y = f$ 及其在相位控制中的应用，J. Amer. Math. Soc. **16** 2003 2, 393 426, 10 1090 0894 0347 02 00411 3 ↑3 ( )，第 – 期，doi: . /S - - - - . J.

[4] Bourgain、H. Brezis 和 P. Mironescu，*Sobolev* 空间中的提升，J. Anal. Math. **80** (2000)，37–86，doi:10.1007/BF02791533。↑2, 3, 6, 18

[5] ———, 再论 *Sobolev* 空间，Optimal control and partial differential equations，IOS，阿姆斯特丹，2001， 439 455 ↑18 19 22 第 – 页。., H. Brezis，如何识别常值函数：与 *Sobolev* 空间的联系，Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002)，第 4(346) 期，59–74，doi:10.1070/RM2002v057n04ABEH000533（俄文）；英文译本，Russian Math. Surveys **57** 2002 4, 693 708 ↑18 24 ( )，第 – 期。., H. Brezis 和 P. Mironescu，分数阶 *Sobolev* 空间中的 *Gagliardo–Nirenberg* 不等式、复合与乘积，J. Evol. Equ. **1** 2001 4, 387 404, 10 1007 00001378 1877265 ↑3 23 ( )，第 – 期，doi: . /PL . $W^{s\,p}$ N **269** 2015 7, 2045

[9] ———, MR, , 稠密性. (Ω;)，J. Funct. Anal. ( )，第 –2109 期，doi: 10 1016 2015 04 005 ↑4 13 16 . /j.jfa. . . ., , ,

[10] ———, *Gagliardo–Nirenberg* 不等式与非不等式：完整论述，Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire **35** (2018)，第 5 期，1355–1376，doi:10.1016/j.anihpc.2017.11.007。↑3, 23

[11] ———, 到圆的 *Sobolev* 映射：从分析、几何与拓扑的视角出发，Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications，第 96 卷。↑2, 3, 6, 18, 22

[12] G. De Marco、C. Mariconda 和 S. Solimini，常值函数刻画的一个初等证明，Adv. Nonlinear Stud. **8** (2008)，第 3 期，597–602，doi:10.1515/ans-2008-0306。↑18

[13] S. Gallot、D. Hulin 和 J. Lafontaine，黎曼几何，第 3 版，Universitext，施普林格，柏林，doi: 10 1007 978 3 642 18855 8 ↑2 . / - - - - . R. Hardt 和 F.-H. Lin，使梯度的 L^p 范数最小化的映射，《纯粹与应用数学通讯》 **40** 1987 5, 555 588, 10 1002 3160400503 ↑7 ( )，第 – 期，doi: . /cpa. . A. Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社，剑桥。 ↑2 16 , J. M. Lee，黎曼流形导论，第 版，数学研究生教材，第 176 卷，施普林格，Cham。[17] ↑2 G. Leoni，分数阶 Sobolev 空间入门，数学研究生研究，第 229 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，doi: 10 1090 229 ↑9 . /gsm/ . B. Merlet，关于映入 的映射提升的两点说明，《巴黎科学院数学报告》343 (2006 7, 467 472, 10 1016 $\mathbb{S}^1$ 2006 07 014 ↑6 28)，第 – 期，doi: . /j.crma. . . ., P. Mironescu，值域为 的映射的提升缺陷，《巴黎科学院数学报告》 **346** 2008 19 20, ( )，第 – – 期，doi: . /j.crma. . . ., 1039 1044, 10 1016 $\mathbb{S}^1$ 2008 08 001 ↑3 22 ，值为 的 Sobolev 映射，《现代数学：基础与方向》35 (2010)，86–100，doi:10 3, ↑3 340 1007 10958 010 0090 170 2010 355. /s - - -z（俄文）；英文译本，《数学科学》（纽约）( )，第 – 期。[21] ，Sobolev 空间中值为 $\mathbb{S}^1$ 的映射的分解，《巴黎科学院数学报告》348 (2010)，第 13-14 期，743–746，doi:10.1016/j.crma.2010.06.020。 ↑3, 22 [22] , 和式 Sobolev 空间中值为 $\mathbb{S}^1$ 的映射的提升，见 https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00747663 ↑3 22 ., P. Mironescu 和 I. Molnar，模为一的复值映射的相位：最优估计、因子分解法以及 Sobolev 空间的和—交性质，《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》 **32** 2015 5, 965 1013, 10 1016 2014 04 005 ↑6 28 ( )，第 – 期，doi: . /j.anihpc. . . ., P. Mironescu 和 J. Van Schaftingen，分数阶 Sobolev 映射在紧覆盖空间中的提升，《分析与偏微分方程》 **14** 2021 6, 1851 1871, 10 2140 2021 14 1851 ↑3 4 6 8 9 ( )，第 – 期，doi: . /apde. . . ., , , , , [25] 映入流形的 Sobolev 映射的迹理论，《图卢兹数学科学院年刊》( ) 30 (2021 2, 281 299, 6 10 5802 1675 ↑7)，第 – 期，doi: . /afst. . J. Nash，黎曼流形的嵌入问题，《数学年刊》(2) 63 (1956)，20–63，doi: 10 2307 1969989 ↑2 . / . H.-M. Nguyen，与提升相关的不等式及其应用，《巴黎科学院数学报告》346 (2008 17 18, 957 962, 10 1016 2008 07 026 ↑3 22)，第 - – 期，doi: . /j.crma. . . ., ，与 Sobolev 范数相关的若干不等式，Calc. Var. Partial Differential Equations 41 (2011 3 4, 483 509, 10 1007 00526 010 0373 8 ↑10)，第 - – 期，doi: . /s - - - . M. Petrache 和 T. Rivière，最优空间中的全局规范与全局延拓，《分析与偏微分方程》7 (2014 8, 1851 1899, 10 2140 2014 7 1851 ↑7)，第 – 期，doi: . /apde. . . . M. Petrache 和 J. Van Schaftingen，从球面到紧流形的临界迹 Sobolev 映射的可控奇异延拓，《国际数学研究通知》12 (2017)，3647–3683，doi: 10 1093 109 ↑7 . /imrn/rnw . A. Ranjbar-Motlagh，关于 Bourgain–Brezis–Mironescu 常值函数刻画的一点说明，《休斯敦数学杂志》 **46** 2020 1, 113 115 ↑18 ( )，第 – 期。. R. Rodiac 和 J. Van Schaftingen，分数阶 Sobolev 空间之和的度量刻画，《数学研究》 **258** 2021 1, 27 51, 10 4064 190408 21 4 ↑5 22 ( )，第 – 期，doi: . /sm - - .，T. Runst，Triebel–Lizorkin 型与 Besov 型空间中非线性算子的映射性质，《数学分析》 **12** 1986 4, 313 346, 10 1007 01909369 ↑3 23 ( )，第 – 期，doi: . /BF .，E. H. Spanier，代数拓扑，麦格劳-希尔，纽约-多伦多，安大略省-伦敦，[35] ↑16 E. M. Stein，奇异积分与函数的可微性，普林斯顿数学丛书，第 30, ↑6 号，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿。J. Van Schaftingen，利用间隙势估计临界 Sobolev 映射的自由同伦分解，Adv. Nonlinear Anal. **9** 2020 1, 1214 1250, 10 1515 2020 0047 ↑5 10 12 ( )，第 – 期，doi: . /anona- - .，，，[37] Sobolev 空间中的反向叠加估计，《纯粹与应用泛函分析》( )，第 **7** 2022 2, 805 811 ↑8 – 期。

鲁汶天主教大学，数学与物理研究所，回旋加速器路 2 号，L7.01.01 邮箱，1348 新鲁汶，比利时电子邮箱地址： Jean.VanSchaftingen@UCLouvain.be