arXiv:2301.07757v1 [cs.CG] 18 Jan 2023

采用 L_1 距离时，三维中的 Freeze-Tag 是 NP困难问题

Lucas de Oliveira Silva

摘要：Arkin等人 [ABF+06]于2002年提出了一种名为冻结标签问题（FTP）的类调度问题，其研究动机是机器人群激活。输入包括位于某个度量空间或图中的 n 移动点机器人。只有一个机器人初始处于“激活”状态，其余机器人最初均处于“冻结”状态。所有激活机器人都能以单位速度移动，并在到达某个冻结机器人的位置时将其激活。目标是用最短时间激活所有机器人，这段时间称为最大完成时间。直到2017年，这一问题在度量空间中的困难性仍未得到解决；但在这一年，Yu等人 [AAY17] 证明了该问题在欧几里得平面中是 NP困难的。同年，Demaine 和 Roudoy [DR17] 证明，采用任意 L_p 距离（包括 $p > 1$）时，三维中的 FTP 同样是困难问题。然而，我们仍不知道 Demaine 和 Roudoy 的结果能否推广到平面。本文填补了这一 $p = 1$ 空白，证明采用 L_1 距离时，三维中的 FTP 是 NP困难问题。

Ke关键词 复杂性、NP困难性、调度、计算几何、群体机器人学

1 引言

冻结标签问题由 Arkin等人在 2002 [ABF+06] 中提出，用于模拟通过手动启动其中一个机器人来自动唤醒机器人群体。输入由某个度量空间或图中的一组 n 移动点机器人位置组成。其中只有一个机器人起初处于“激活”（“开启”“未冻结”或“清醒”）状态，称为源；其余机器人最初处于“冻结”（“关闭”“冻结”或“睡眠”）状态。当一个处于激活状态的机器人到达冻结机器人的位置时，该冻结机器人便会被激活。机器人激活后，可以以单位速度移动，并帮助解冻其余冻结机器人。在判定版本中，还给定一个时间限制，目标是判断能否在该限制内激活所有机器人。

根据度量（定义“单位速度”）、定义域或其他限制的选择，该问题会呈现不同形式。例如，Arkin等人 [ABF+06] 证明，冻结标签问题在加权星图上是 NP 困难的，但限制在无权星图上时属于P类。此外，根据 Bender等人[ABG03], 的研究，我们知道该问题在无权一般图上也是困难的。最早着手研究度量空间中NP困难性的人是Yu等人，他们在FWCG 2017 [AAY17],证明了该问题在欧几里得平面上是NP困难的；之后，Demaine与Rudoy证明了该问题在三维空间中使用任意 L_p 距离时也同样困难（使用 $p > 1$）。我们的结果补充了Demaine和Rudoy的工作，证明冻结标签问题在三维空间中使用 L_1 距离时也同样是NP困难的。

2 归约

为证明其困难性，我们从$Monotone$-3SAT归约；该问题已在[Gol78]中证明为NP完全。该问题的一个实例由一组布尔变量 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 和子句 $\{c_1, \ldots, c_m\}$组成，每个子句包含三个文字，每个文字都是某个变量的副本，也可能是否定形式。若一个子句中的所有文字均未被否定，则称其为正子句；若所有文字均被否定，则称其为负子句。问题是是否存在一个满足这些变量的布尔赋值，即一种赋值，使得每个子句至少包含一个真文字。本文中，拉丁大写字母表示点，小写字母表示机器人。

定理 1. 在三维中，采用L_1 距离的 Freeze-Tag 问题是NP完全。

证明。如 [AY16], 所示，该问题属于 NP。

给定一个 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，$C = \{c_1, \ldots, c_m\}$（其中 $n > 1$ 且 $m > 2$）的 $Monotone$-$3SAT$ 实例，我们可以不失一般性地假设 n 为奇数，且正子句和负子句的数量相同。否则，我们可以添加三个虚拟变量和一个包含它们的正子句，然后复制一些子句，直到每种类型的子句数量相等。因此，令 $C = \{c_1, \ldots, c_{m/2}\} \cup \{\overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_{m/2}\}$，其中上划线表示负子句。我们按如下方式放置机器人：

令 $\alpha = \frac{2}{n-1}$, $\epsilon < \alpha/4$, $\beta = \frac{2}{m-2}$ 和 $L = 6 + \epsilon$。原点处有 n 个机器人，分别为 $r_1, r_2, \ldots, r_n$，其中 r_1 是源机器人。对于每个变量 x_{i+1}，都有两组机器人：真组 t_{i+1} 位于 $T_{i+1} = (2 - i\alpha; i\alpha; \epsilon)$，假组 f_{i+1} 位于 $F_{i+1} = (2 - i\alpha;\ i\alpha;\ -\epsilon)$。第一组对应于 x_{i+1} 作为未取反文字的出现，第二组对应于取反文字的出现。因此，每组都包含一个机器人，分别对应子句中 x_{i+1} 未取反或取反的每次出现。这些组的唤醒顺序将表示 x_{i+1} 的布尔值，即，当且仅当 t_{i+1} 先于 f_{i+1} 被唤醒时，$x_{i+1} = true$。此外，我们再添加 n 个机器人，分别为 $s_1, s_2, \ldots, s_n$，每个 s_{i+1} 位于 $S_{i+1} = (2 - i\alpha + (L - 2 - 4\epsilon)/2;\ i\alpha + (L - 2 - 4\epsilon)/2;\ 0)$。

然后，对于每个 $k = 0$、.....、$m/2 - 1$，以及每个在子句 $(c_{k+1})\overline{c}_{k+1}$ 中出现（未）取反的变量 x_{i+1}，我们创建四个机器人：

$\mathbf{c}_{k+1}^{i+1}$ at $\mathbf{C}_{k+1}^{i+1} = T_{i+1} + (k\beta; k\beta; 2 - 2k\beta)$,
$\mathbf{d}_{k+1}^{i+1}$ at $\mathbf{D}_{k+1}^{i+1} = \mathbf{C}_{k+1}^{i+1} + P$,
$\overline{\mathbf{c}}_{k+1}^{i+1}$ at $\overline{\mathbf{C}}_{k+1}^{i+1} = F_{i+1} + (k\beta; k\beta; -2 + 2k\beta)$ and
$\overline{\mathbf{d}}_{k+1}^{i+1}$ at $\overline{\mathbf{D}}_{k+1}^{i+1} = \overline{\mathbf{C}}_{k+1}^{i+1} - P$,
where $P = (0; 0; L - 4 - 3\epsilon)$.

最后，对于每个 $k = 0, \ldots, m/2 - 1$，我们添加两个机器人：

$\mathbf{c}_{k+1}$ at $\mathbf{C}_{k+1} = C_{k+1}^{\lceil n/2 \rceil} + Q$ and
$\overline{\mathbf{c}}_{k+1}$ at $\overline{\mathbf{C}}_{k+1} = \overline{C}_{k+1}^{\lceil n/2 \rceil} + Q$, where $Q = (1; 1; 0)$.

我们将证明，给定的 $Monotone$-$3SAT$ 实例存在满足布尔赋值，当且仅当这个冻结标签问题实例存在一个以 r_1 为源、最大完成时间为 L 的唤醒调度。

（$\Longrightarrow$）假设给定的 $Monotone$-$3SAT$ 有一个满足布尔赋值。不失一般性，假设 $T = \{x_1, \ldots, x_l\}$ 是被赋值为 $true$ 的变量，而 $F = X \backslash T = \{x_{l+1}, \ldots, x_n\}$ 是被赋值为 $false$ 的变量。考虑以下调度：

在时刻零，所有 r_i 都醒来。然后，对于每个 $r_i \in T$，r_i 前往位于点 T_i 的组 t_i；对于每个 $r_j \in F$，r_j 前往位于点 F_j 的组 f_j。

这些机器人在 $2 + \epsilon$ 到达目标。到达后，与相应目标文字出现次数相等数量的机器人醒来。随后，r_i 前往对面仍处于冻结状态的组，而第一个组中的其他机器人则分头行动。位于 T_i 点的每个机器人都前往一个不同的 $\mathbf{c}_k^i$ 机器人，该机器人在相应的 c_k 子句中（x_i）出现；而位于 F_i 点的机器人则以类似方式前往不同的 $\mathbf{c}_{k^\circ}^i$

r_i们将在$2 + 3\epsilon$ 到达新的目的组，这时又发生了一次类似的分裂，现在它们试图唤醒那些尚未苏醒的 $\mathbf{c}_k^i$ 和 $\mathbf{c}_{k^\circ}^i$。它们将在 $4 + 3\epsilon$ 解冻，并前往上方（下方）对应的 $\mathbf{D}_k^i$（$\mathbf{D}_l^j$）点，于 L 抵达。之后，每个 r_i 都会径直前往一台 s_i 机器人，于 L 到达。

相比之下，到 $4 + \epsilon$ 时，第一批 $\mathbf{c}_k^i$ 和 $\mathbf{c}_l^j$ 已经苏醒，并径直前往对应的 $\mathbf{c}_k$（$\mathbf{c}_k$）。唤醒它们的那些个体此时正前往上方（下方）对应的 $\mathbf{D}_k^i$（$\mathbf{D}_l^j$）点，并将在 $L - 2\epsilon$ 抵达，届时它们就会完成任务。

在 $4 + \epsilon$ 时，由于该布尔赋值满足条件，因此每个 $\mathbf{c}_k(\mathbf{c}_k)$ 都至少有一个机器人正朝其前进。此外，到 L 时，所有这些剩余机器人都已解除冻结。

（$\Longleftarrow$）假设构造的冻结标签问题实例存在一个唤醒调度，其源为 r_1，最大完成时间为 L。每个 n s_i 到原点的距离均为 $L-4\epsilon$，且它们之间的距离至少为 $\alpha>4\epsilon$。因此，不失一般性，我们可以假设对于每个 i，r_i 都在 s_i 时唤醒。在前往 s_i 的途中，每个 r_i 都有 4ϵ 的富余时间。因此，存在一个最优解，使得对于每个 i，r_i 在前往 s_i 之前唤醒组 t_i 和 f_i。考虑我们处于这种情形。

因此，我们可以按如下方式为给定的 $Monotone\text{-}3SAT$ 实例构造一个布尔赋值：当且仅当 t_i 在 f_i 之前被唤醒时，$x_i = true$。

不失一般性，在被唤醒后，每个处于 t_i（f_i）组的机器人都必须直接前往一个不同的 d_k^i（d_k^i）机器人，因为对应的 c_k（$\overline{c}_k$）子句中出现的 d_k^i（d_k^i）机器人数量与这类机器人数量相同。由于我们讨论的是 L_1 距离，它们也可以在途中解冻相应的 c_k^i 或 c_k^i。我们还可以假设它们会这样做，因为这是它们无论如何都能最早解冻的时刻。

每个 c_k^i（c_k^i）与其对应的 c_k（c_k）之间的距离均为 2 被赋值为真的文字会在时刻 $4+\epsilon$ 唤醒与其出现所在子句相对应的机器人，但其他 c_k^i 和 c_k^i 机器人只有到 $4+3\epsilon$ 时才会到达。因此，只有第一批机器人能及时到达其对应的 c_k（c_k）。我们假设采用的是最大完成时间为 L 的最优调度，因此，每个 c_k（c_k）最终都会由一个布尔值为真的文字唤醒。

因此，该布尔赋值使每个子句都至少包含一个真文字，从而构成一个满足布尔赋值。

根据上述推论，采用L_1 距离的三维冻结标签问题是NP困难的，因此根据第一个主张，它是NP完全的。

□

3 结论

一个显而易见的开放问题是，本文的结果能否也应用于二维情形。考虑到欧几里得情形是NP困难的，采用 L_1 距离的二维冻结标签问题或许也是如此。

参考文献

[AAY17] Zachary Abel、Hugo A. Akitaya 和 Jingjin Yu。《二维冻结标签唤醒问题是NP困难的》。*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry* 105 107, 2017 ，第 – 页。

[ABF+06] Esther M. Arkin、Michael A. Bender、Sandor P. Fekete、Joseph S. B. Mitchell 和 Martin Skutella。《冻结标签问题：如何唤醒一群机器人》。*Algorithmica*, 46(2):193–221，2006年7月。[ABG03] Esther M. Arkin、Michael A. Bender 和 Dong- dong Ge。《改进的冻结标签问题近似算法》。载于 *Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Parallel Algorithms and Architectures* 295 303 ，第 – 页。

计算机协会，2003年。[AY16] Hugo A. Akitaya 和 Jingjin Yu。《欧几里得空间中的冻结标签唤醒问题》。*In Abstracts from the 28th Fall Workshop on Computational Geometry* 2016 ，。[DR17]

Erik D. Demaine 和 Mikhail Rudoy。《三维冻结标签问题是困难的》。*In Abstracts from the 27th Fall Workshop on Computational Geometry*，第108–110页，2017年。[Gol78] E. Mark Gold。《根据给定数据识别自动机的复杂性》。*Information and Control* 37 3 302 320, 1978 ，( ): – 6月。