arXiv:2301.07769v1 [physics.flu-dyn] 18 Jan 2023

利用物理信息神经网络，根据仅温度测量重建瑞利–贝纳德流动

Patricio Clark Di Leoni[1*]、Lokahith Agasthya[2,3], Michele Buzzicotti[2] 和 Luca Biferale[2]

[1]圣安德烈斯大学工程系，阿根廷布宜诺斯艾利斯。[2]罗马第二大学物理系及意大利国家核物理研究院，意大利罗马。[3]奥地利科学技术研究所，Am Campus 1，克洛斯特新堡，3400，奥地利。

*通讯作者。电子邮箱：pclarkdileoni@udesa.edu.ar；贡献作者：lnagasthya@gmail.com；michele.buzzicotti@roma2.infn.it；luca.biferale@roma2.infn.it；

摘要

我们研究了物理信息神经网络（PINNs）仅利用温度信息重构湍流瑞利-贝纳德流动的能力。我们定量分析了在不同低通滤波信息量和湍流强度下的重建质量，并将结果与采用松弛同化这一经典的方程约束数据同化技术所得的结果进行比较。在低瑞利数下，物理信息神经网络能够实现高精度重构，效果与松弛同化相当。在高瑞利数下，物理信息神经网络优于松弛同化；只有在温度数据具有较高的时空密度时，才能令人满意地重构速度场。当数据变得稀疏时，物理信息神经网络的性能会下降，不仅体现在逐点误差上，而且与松弛同化不同，统计表现也会变差，这一点可从概率密度函数和能谱中看出。

关键词：关键词1，关键词2，关键词3，关键词4

1 引言

了解重构物理系统状态所需信息的类型和数量，对于系统的基础研究及其现实应用都具有重要意义。本文针对热驱动流探讨这一问题。热驱动流是多种地球物理和工业系统的核心，例如大气对流、[1, 2]，海洋对流 [3]，地幔对流[4] 以及纯金属熔化 [5]。这些流动可以呈现出丰富多样的行为与结构，从羽流形成到充分发展的湍流不等 [6]。Char- ney 最初提出猜想 [7]，认为仅凭温度测量就足以重构大气的完整状态。人们已在简单的对流系统中，从理论和数值两方面研究了这一猜想 [8, 9]，3D 行星地转模型 [10]，以及非湍流状态下的瑞利-B´énard 流动 [11, 12]，，涵盖普朗特数趋于无穷大的极限 [13]，，以及中等和高瑞利

lows

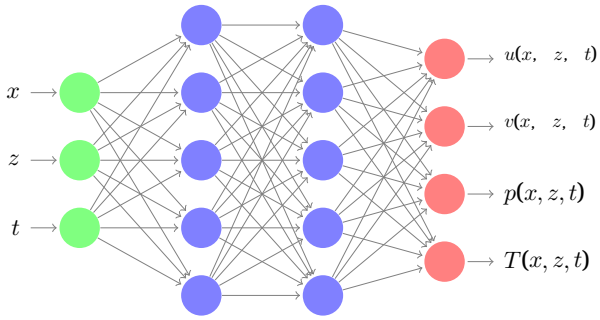


图 1 所用物理信息神经网络示意图。

数 [14]。这些研究表明，设定正确的速度先验对于获得良好的重构至关重要 [11]，而在高瑞利数下实现与时间无关的完全同步则十分脆弱 [12, 14]。因此，深入理解 Charney 猜想不仅有助于阐明速度与温度之间的相互作用，也有助于改进当前的预报和数据同化 [15, 16] 方案。本文旨在延续 [14]中针对二维湍流瑞利-B´énard 流动所开展的工作。此前的研究使用松弛同化 [17–19] ，一种基于同步方程的数据同化工具来重构流动；而本文改用物理信息神经网络（PINN）。PINN 是一种旨在近似求解偏微分方程组的神经网络[20]。它们已被用于信息不完整的反问题 [21, 22]，，根据测量结果重构湍流 [23–26]，以及将统计数据同化到合成生成的场中 [27]。关于 PINN 的详细综述，参见 [28, 29]。我们采用来自二维瑞利-B´énard 系统直接数值模拟的流动数据，分别对应两个不同的瑞利数，一个中等、一个较高，并使用 PINN，依据不同数据量进行重构，数据量以测量探针之间的间距表征。我们证明，PINN 能够成功完成这项任务，即使在高瑞利数下也是如此；在这种情况下，温度场（我们提供其信息）与速度场（我们不提供其信息）之间的相关性会减弱。

本文的组织结构如下：在第 2.1节，我们介绍瑞利-贝´纳德方程并描述数据生成流程；在第 2.3 节，我们介绍物理信息神经网络（PINN）技术及其在此情境中的应用。结果见第 3节，结论见第4节。

2 方法

2.1 瑞利-贝纳德流动与数据生成

瑞利-贝´纳德对流由一层水平平面流体构成，该流体相对于重力方向从下方受热。如果密度涨落较小，可以采用布辛涅斯克近似，并用不可压缩速度场和温度场来描述流体。设 $\boldsymbol{u} = (u,\ v)$ 分别为速度场的水平和垂直分量，T 为温度，p 为压力；在二维几何中，并将平均温度设为零、密度设为单位值时，方程可写为

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} - \beta T g\hat{z}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T = \kappa\nabla^2 T, \tag{2}$$

其中，β 为流体的热膨胀系数，ν 为其运动黏度，κ 为其热导率，$g\hat{}z$ 为重力加速度。区域宽 L_x 、高 L_z ，水平方向$\hat{}x$采用周期性边界条件。在顶部和底部边界处，边界条件为

$$\begin{aligned} T(z=0) = T_d, \qquad T(z=L_z) = -T_d, \\ \boldsymbol{u}(z=0) = \boldsymbol{u}(z=L_z) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$T_d > 0$。特征速度尺度为 $u_0 = \sqrt{gL_z\beta 2T_d}$ ，周转时间为 $\tau_0 = 2L_z/u_0$。有几个无量纲数可用于描述瑞利-贝纳德流动。瑞利数衡量浮力与黏性力之比，定义为

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{g}\beta\frac{2\mathrm{T_d}\mathrm{L_z^3}}{\nu\kappa}. \tag{4}$$

普朗特数是动量扩散率与热扩散率之比，即

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}. \tag{5}$$

努塞尔数衡量由对流引起的热传递与由

传导引起的热传递之比，其表达式为

$$\mathrm{Nu} = \frac{\langle \mathrm{vT} - \kappa \partial_{\mathrm{z}} \mathrm{T} \rangle}{\kappa 2 \mathrm{T_d} / \mathrm{L_z}}, \tag{6}$$

其中 $\langle . \rangle$ 表示在整个区域上的系综平均。最后，为估计系统中最小尺度的大小，我们定义科尔莫戈洛夫长度尺度 $\eta_\kappa = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$，其中$\epsilon = (\nu\kappa^2/L_z^4)(\mathrm{Nu}-1)\mathrm{Ra}$ 是能量耗散的平均速率 [30]。

数值实验中的参考流场（或真值流场）是通过采用格子玻尔兹曼方法，在两个不同的瑞利数 $\mathrm{Ra}_1 = 7.2 \times 10^7$和 $\mathrm{Ra}_2 = 36.3 \times 10^7$下演化方程（1）—（2）得到的。参考流场用变量 u^r、 v^r、 p^r 和 T^r表示。数值方法的详细信息见 [14]。在第一种情况下， $L_x = 864\delta$、 $L_z = 432\delta$、 $T_d = 2.5T_0$ 和$u_0 = 1.31U_0$；而在第二种情况下， $L_x = 1200\delta$、$L_z = 600\delta$、 $T_d = 1.5T_0$ 和 $u_0 = 2.12U_0$。两种情况下均有 $\nu = 6.67 \times 10^{-4}$， $\mathrm{Pr} = 1$、 $\delta = 1$、 $T_0 = 1/100$、 $U_0 = 1/100$ 和 $\eta_\kappa \approx 2\delta$。第一种情况下 $\mathrm{Nu} \approx 25$，第二种情况下 $\mathrm{Nu} \approx 39$。流动首先达到统计稳态，随后在间距为 $\ell \in [1$ 的等间距矩形网格上提取数据：在特定时间间隔采集 $31]\delta$ 。第一种情况下，以 $164/\tau_0$的采样率，在 8 个彼此独立的时间窗口内提取数据，每个窗口包含 11 个快照。第二种情况下，由于该流动包含比前一种更快的尺度，以 $1130/\tau_0$的采样率，在 10 个彼此独立的时间窗口内提取数据，每个窗口同样包含 11 个快照。数据覆盖整个空间域；但对于 Ra_2, 下的 $\ell = 1$ 情况，区域被划分为四个象限，因此需要四个物理信息神经网络才能重构整个区域。随后，每个数据集 Ω_d 均根据流动的瑞利数、网格间距 ℓ和时间窗口进行标识。用于评估损失函数中物理部分的配置点集合 Ω_P （见下文）包括所有评估数据部分的点，即 Ω_d，以及随机选取的点；这些点不一定位于间距为ℓ的采样网格上。请注意，评估损失函数的物理部分时不使用数据，因此不会增加所用数据的密度。对于 Ω_d中的每个空间位置，针对 $\ell/\delta = 1$、7、10、14、22 和 31，额外配置点的数量分别为 0、0、1、2、3 和 4。至为了评估物理信息神经网络的性能，使用了由完整场组成的测试数据集 Ω_t ，即空间上未经子采样的数据集。

2.2 使用物理信息神经网络进行流场重建

图1 展示了我们实验中使用的物理信息神经网络示意图。该物理信息神经网络以坐标（x， z， t）为输入，并在指定坐标处输出场（u， v， p， T）。本文所述的所有物理信息神经网络均为五层深，每层有 100 个隐藏单元，并使用指数线性单元作为激活函数。用于训练它们的损失函数形式如下

$$L = L_d + \lambda L_p,$$

其中测量数据所提供的贡献为

$$L_d = \frac{1}{N(\Omega_d) T_0^2} \sum_{j \in \Omega_d} |T(x_j, z_j, t_j) - T_j^r|^2,$$

而通过施加正确的运动方程所提供的贡献为：

$$L_p = \frac{\delta^2}{N(\Omega_p)} \sum_{j \in \Omega_p} \left(\lambda_u U_0^{-4} f_u + \lambda_T T_0^{-2} U_0^{-2} f_T + \lambda_i U_0^{-2} f_i \right),$$

with

$$f_u = |\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \beta T g \hat{z}|^2,$$

$$f_T = |\partial_t T + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T - \kappa \nabla^2 T|^2,$$

and

$$f_i = |\nabla \cdot \boldsymbol{u}|^2,$$

其中， λ、 λ_u、 λ_T 和 λ_i 是额外的超参数，整个过程中分别固定为 10_5、1、 10^{-1} 和 10^3, 。求和所涉及的点集 Ω_d 和 Ω_P已在上一节说明， $N(\Omega_d)$ 和 $N(\Omega_P)$分别表示相应数据集中的点数。物理信息神经网络采用 Adam算法进行训练，学习率为 10^{-4} ，共训练 60000 个训练轮次。

lows

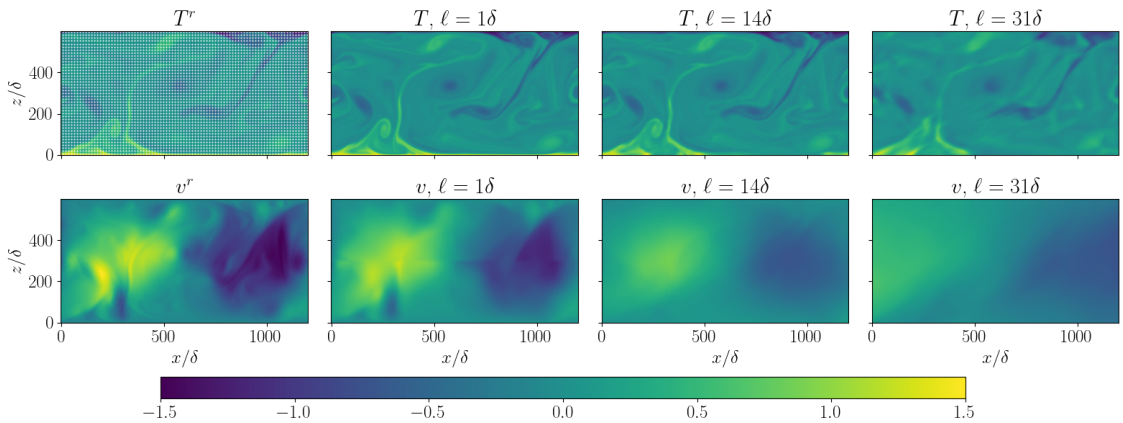


图 2 Ra_2 流动的温度（上）和垂直速度（下）可视化结果。左列显示参考数据，其余三列显示使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 获得的重建结果。测量探针的位置（对应于 $\ell = 14\delta$ 的情况）以白点标记在 T^r 上。所有可视化结果使用相同的颜色条。

2.3 使用松弛同化进行流场重建

松弛同化是一种方程信息引导的数据同化工具，它利用纳维–斯托克斯方程（1），并在温度演化方程中加入一个与 $\alpha(T(x_j, z_j, t_j)^r - T$成正比的牛顿松弛项。由此得到的方程形式如下

$$\begin{aligned} \partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} &= -\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} - \beta T g\hat{z}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla T &= \kappa\nabla^2 T - \alpha\mathcal{I}(T^r - T), \end{aligned} \tag{7}$$

其中，α 是松弛同化项的振幅，单位为频率；$\mathcal{I}$ 是一个滤波算子，在数据可用的位置（即测量探针处）取值为 1，在其他位置取值为 0。松弛同化的思路是，促使运动方程在数据可用的位置“跟随”现有信息，并让运动方程在整个时空域中补足数据缺失的部分。关于松弛同化参数 α 的最优选取，以及如何在时间和空间上插值所提供的数据，详见 [14]。与物理信息神经网络相比，松弛同化能够自然地在所有位置施加物理约束，代价是需要在整个区域内演化偏微分方程。

2.4 误差评估

为了评估所得重建，我们定义温度和速度的逐点误差场如下：

$$\begin{aligned} T_\Delta(\boldsymbol{r}, t) &= T^r(\boldsymbol{r}, t) - T(\boldsymbol{r}, t); \\ v_\Delta(\boldsymbol{r}, t) &= v^r(\boldsymbol{r}, t) - v(\boldsymbol{r}, t). \end{aligned} \tag{8}$$

全局归一化误差可表示为

$$\Delta_T = \frac{\langle T_\Delta^2(\boldsymbol{r}, t)\rangle}{\langle T^2(\boldsymbol{r}, t)\rangle}; \qquad \Delta_v = \frac{\langle v_\Delta^2(\boldsymbol{r}, t)\rangle}{\langle v^2(\boldsymbol{r}, t)\rangle}, \tag{9}$$

其中，$\langle\cdot\rangle$表示整个区域的平均值。需要强调的是，没有提供边界温度的信息（与所实施的 nudging 方法类似）。

逐尺度分析通过分析能量谱来进行：

$$E_f(k) = \langle|\hat{f}(k, z_0, t)|^2\rangle_t, \tag{10}$$

其中，f 是所研究的场（v、v_Δ、T或 $\hat{}T_\Delta$），$f(k,\ z_0,\ t)$ 是在位置$z_0 = L_z/2$ 和时间 t沿水平方向计算得到的 f傅里叶系数，而 $\langle,\rangle_t$ 表示时间平均值。

3 结果

图 2 展示了给定时刻流动的参考温度 T^r 和垂直速度 v^r （Ra_2 ），以及对应的物理信息神经网络重建结果 T 和 v，分别对应三种重建：一种使用 $\ell/\delta = 1$，一种使用 $\ell/\delta = 14$，另一种使用 $\ell/\delta = 31$。温度测量探针的位置（对应于 $\ell/\delta = 14$ 情形）以白点标出。这些可视化不仅展示了流动的特征，也让我们对总体结果有了直观认识：物理信息神经网络能够仅利用温度信息重建/推断速度场，即使在高瑞利数下也是如此，但在捕捉小尺度波动方面存在明显困难，如模糊的速度分布所示（中间和右下图）。为进一步说明这一点，我们在图 $z_0 = 300\delta$ 3 中展示了 $\ell/\delta = 1$、14、31 三种不同情形下温度（上）和速度（下）的水平剖面。如图所示，除使用 $\ell/\delta = 31$的情形外，所有情形的温度重建结果几乎都与参考数据重合。另一方面，重建的速度场能够正确匹配参考流场的大尺度结构，但缺少较小尺度的特征。此外，在水平方向上未施加周期性边界条件的影响，在$\ell/\delta = 31$ 情形中清晰可见。

为了以定量方式说明这一点，图4 展示了 Δ_T 和 Δ_v 在不同 ℓ/δ 以及两个瑞利数下得到的结果。图中还展示了通过松弛同化得到的结果，详见 [14]。如图4 上图所示，对于温度场，物理信息神经网络和松弛同化的表现相近。另一方面，就重构速度场这一最受关注、也最困难的问题而言，下图显示，当提供的温度在空间上足够密集时，物理信息神经网络优于松弛同化 $\delta/\ell \sim 1$；而对于稀疏数据，其表现与松弛同化相当，$\delta/\ell < 8 \times 10^{-2}$。

在图 5 （上图）中，我们展示了高瑞利数情况下参考流场以及使用 $y_0 = 300\delta$ 得到的重建结果的温度谱，其中 $\ell = 1\delta$、 14δ和 31δ ；下图则展示了叠加参考场误差谱后的谱。 T_Δ对重建场应用了汉宁窗，以消除非周期性带来的影响。红色竖直点划线标示 $k\delta = 14$的位置，绿色竖直虚线标示 $k\delta = 31$的位置。正如先前分析所预期的，总体误差很小，且主要集中在小尺度上，不过在 $\ell = 14\delta$ 和 31δ 情况下，误差仍大于由 ℓ确定的尺度。图 6 展示了垂直速度对应的谱，并补充了通过松弛同化 [14]得到的结果，适用于 $\ell/\delta = 14$。在此，只有在 $\ell/\delta = 1$情况下，物理信息神经网络才能生成具有物理意义的能谱，而通过松弛同化得到的谱则与参考谱非常相似。与图 2 和 3一致，较高 ℓ/δ的情况下，只能正确重建流动中最大结构的位置和形状，却无法生成这些瑞利数下观测到的小尺度结构。因此，重建结果的能谱衰减非常迅速。

最后，图7（a）和（b）分别展示了温度和垂直速度的概率密度函数（不包括靠近壁面的区域），对应于 Ra_2。正如预期，所展示的所有 ℓ 情况下，温度统计都得到了很好的再现；而只有在 $\ell = 1$时，速度统计才接近准确，否则概率密度函数开始趋近于高斯分布。

4 结论

机器学习和深度学习技术正逐渐成为数据同化领域成熟的工具。我们展示了仅利用时间分辨的逐点温度测量，使用物理信息神经网络即可重建瑞利-贝纳德速度场。我们研究了 7.2×10^7 和 3.6×10^8处的两种不同瑞利数。为评估物理信息神经网络的准确性，我们将结果与松弛同化这一基准进行比较[14]。当温度数据在高空间频率下提供时，对于较小的瑞利数，物理信息神经网络取得了与松弛同化相当的准确性；对于较大的瑞利数，则取得了更高的准确性。另一方面，当温度数据过于稀疏时，物理信息神经网络无法产生有意义的结果，而松弛同化仍能给出符合物理规律的解。我们认为，这是因为在数据

lows

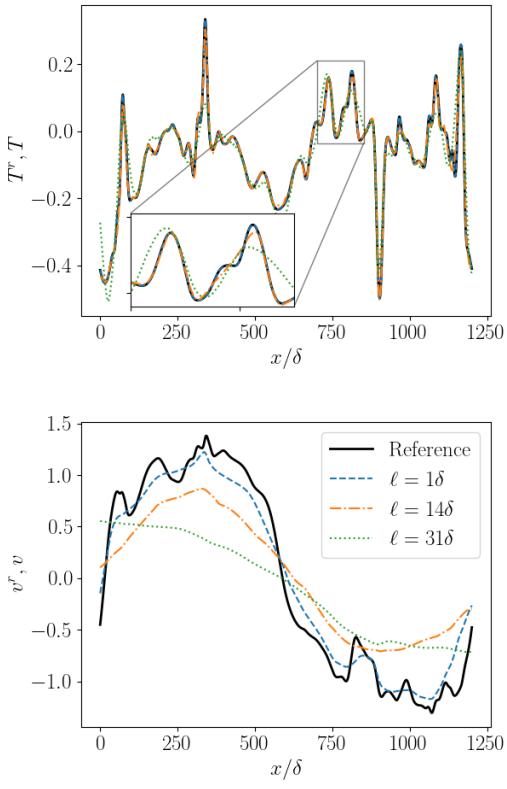


图3 Ra_2 情况下的温度（上）和速度（下）剖面。所示重建结果使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 获得。两幅图共用同一图例。

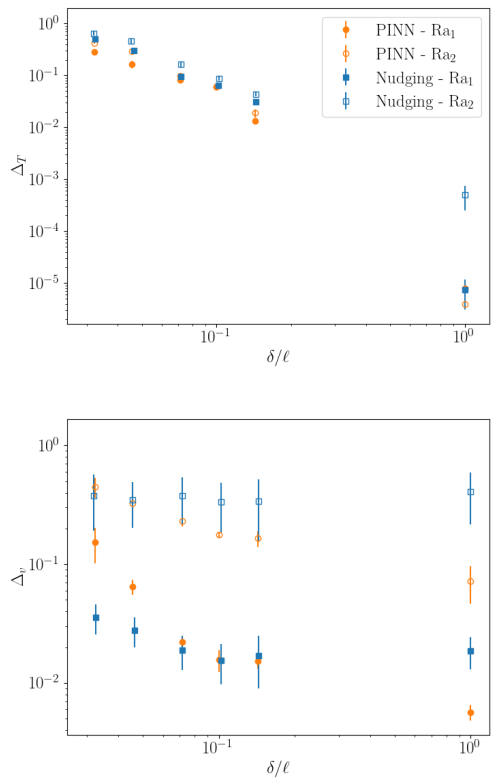
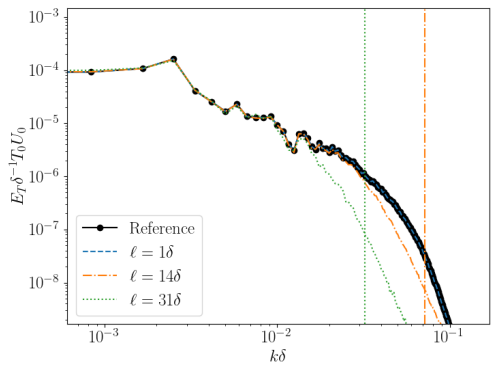


图4 全局温度误差 Δ_T（上）和全局速度误差 Δ_v（下）随 δ/ℓ 变化的情况。实心标记表示 Ra_1，情况的结果，空心标记表示 Ra_2 情况的结果。橙色圆形标记表示使用物理信息神经网络获得的结果，蓝色方形标记表示通过松弛同化获得的结果（摘自 [14]）。两幅图共用同一图例。

不够密集时，无法施加正确的物理约束。正如其他研究所示[26, 29], ，物理信息神经网络可能难以处理高频分量，这对于多尺度湍流数据而言是个主要问题，因为小尺度和高频部分的信息同样至关重要。需要指出的是，尽管本文的结果可以视为有希望的进展，但我们并未声称这些结果在任何评判标准下都是最优的。通过采用不同的超参数设置、稍微调整网络架构 [25]，或利用傅里叶特征 [31], 在水平方向施加周期性，或将区域划分为更小的子区域 [32]，都可能获得更好的结果。全面且有意义地扫描超参数不在本文的研究范围内。本文可视为又一次探索性尝试，旨在系统评估施加物理约束的机器学习工具对多尺度湍流场进行重建的能力。我们在此希望强调与其他基线方法进行比较的重要性（此处使用松弛同化）；未来的研究需要探索更广泛的瑞利数范围（此处限于 $[10^7: 10^8]$），并扩展到完整的 $3d + 1$ 时空区域；还需要区分基于点的重建（此处通过 L_2 范数和谱误差进行评估）与统计重建（此处通过谱和概率密度函数进行评估）。本研究表明，数据稀疏时，物理信息神经网络的性能会下降。与松弛同化不同，所得重建场不仅点对点误差较大，而且能谱和统计量也不正确。

声明

在本研究期间生成和/或分析的数据集可根据合理请求向通讯作者获取。



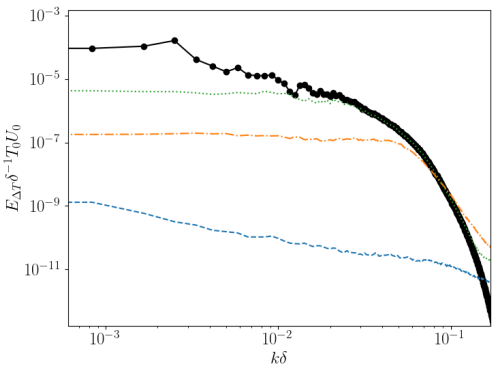
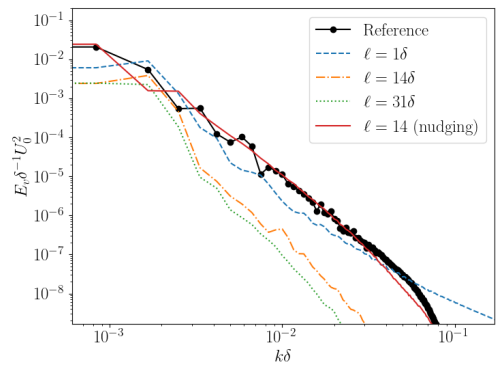


图5 上：Ra_2 下参考流场的温度谱，以及使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 得到的重建场的温度谱。红色竖向点划线标示 $k\delta = 14$ 所在位置，绿色竖向虚线标示 $k\delta = 31$ 所在位置。下：Ra_2 下参考流场的温度谱，以及使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 得到的温度误差场的温度谱。两幅图共用同一图例。



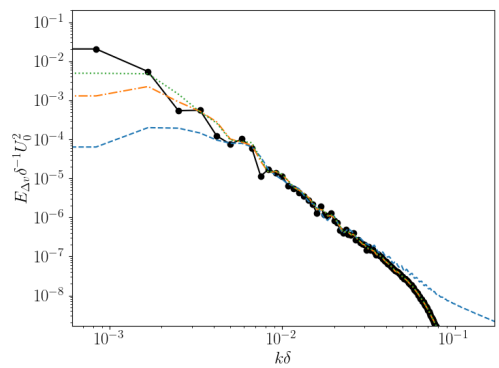


图6 上：Ra_2 下参考流场的垂直速度谱，以及使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 得到的重建场的谱。红色实线表示通过松弛同化 [14] 得到的结果。下：Ra_2 下参考流场的垂直速度谱，以及使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 得到的垂直速度误差场的谱。两幅图共用同一图例。

L.A. 和 P.C. 构思并开展了数值实验，并分析了结果。所有作者均参与了主要思路的完善、结果的讨论，并为最终稿件作出了贡献。

本项目获得了欧洲研究理事会（ERC）通过欧洲联盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号882340）提供的部分资助。

参考文献

[1]D. L. Hartmann、L. A. Moy 和 Q. Fu，《大气顶层的热带对流与能量平衡》，《气候杂志》，第 14 卷，第 24 期，第 4495–4511 页，2001 年。

[2]K. Suselj、M. J. Kurowski 和 J. Teix- eira，《用于模拟大气对流的统一涡扩散率/质量通量方法》，《大气科学杂志》，第 76 卷，第 8 期，第 2505–2537 页，2019 年。

[3] K. V˚age、L. Papritz、L. H˚avik、M. A. Spall 和 G. W. K. Moore，“海洋对流与东格陵兰沿岸近期冰缘退缩相关联”，《自然-通讯》，第 9 卷，第 1 期，第 1–8 页，2018 年。

[4] M. Kronbichler、T. Heister 和 W. Bangerth，《通过现代数值方法实现高精度地幔对流模拟》，《国际地球物理学杂志》，第 191 卷，第 1 期，第 12–29 页，2012 年。

lows

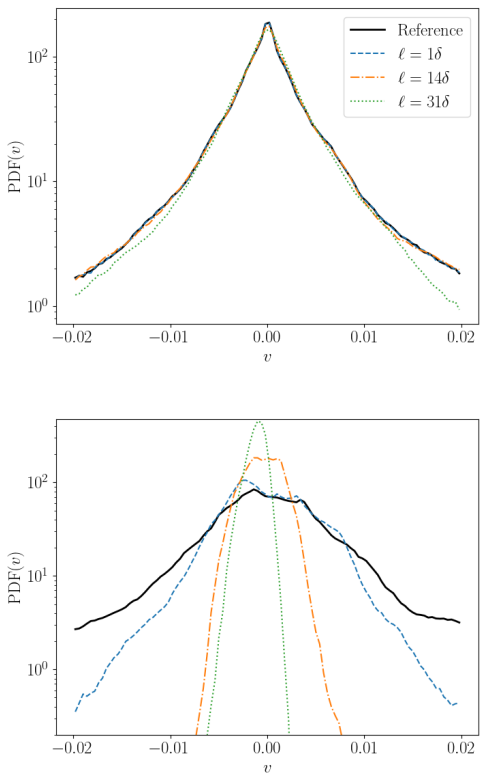


图 7 参考流场在 Ra_2下的温度（上）和垂直速度（下）概率密度函数，以及使用 $\ell/\delta = 1$、14 和 31 进行重构所得的概率密度函数。两幅图共用同一图例。

[5]A. Brent、V. R. Voller 和 K. Reid，《用于模拟对流-扩散相变的焓-孔隙率技术：在纯金属熔化中的应用》，《数值传热：A辑·应用》，第 13 卷，第 3 期，第 297–318 页，1988 年。

[6]G. Ahlers、S. Grossmann 和 D. Lohse，《湍流 Rayleigh-B´énard 对流中的热传递与大尺度动力学》，《现代物理评论》，第 81 卷，第 503–537 页，2009 年 4 月。[7] J. Charney、M. Halem 和 R. Jastrow，《利用不完整历史数据推断大气的当前状态》，《大气科学杂志》，第 26 卷，第 1160–1163 页，1969 年。

[8]M. Ghil、B. Shkoller 和 V. Yangarber，《一种与正压预报模型兼容的平衡诊断系统》，《月刊天气评论》，第 105 卷，第 1223–1238 页，1977 年 10 月。出版方：美国气象学会；栏目：《月刊天气评论》。

[9]M. Ghil、M. Halem 和 R. Atlas，《遥感探测数据的连续时间同化及其对天气预报的影响》，《月刊天气评论》，第 107 卷，第 140–171 页，1979 年 2 月。出版方：美国气象学会；栏目：《月刊天气评论》。

[10]A. Farhat、E. Lunasin 和 E. Titi，《关于仅使用温度测量进行数据同化的 Charney猜想：三维行星地转模型范式》，《气候与天气预报数学》，第 2 卷，2016 年 8 月。

[11] M. U. Altaf、E. S. Titi、T. Gebrael、O. M. Knio、L. Zhao、M.F. McCabe 和 I. Hoteit，《使用连续数据同化对二维 B´énard 对流方程进行降尺度》，《计算地球科学》，第 21 卷，第 393–410 页，2017 年 6 月。

[12] M. A.E. R. Hammoud, E. S. Titi, I. Hoteit 和 O. Knio，“CDAnet：一种用于流体流动降尺度的物理信息深度神经网络”，《地球系统建模进展》，第 14 卷，第 12 期，页码 e2022MS003051，2022 年。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10

29/2022 M

[13]A. Farhat、N. E. Glatt-Holtz、V. R. Martinez、S. A. McQuarrie 和 J. P. Whitehead，“基于热测量的大普朗特数瑞利–贝纳德对流数据同化”，《SIAM 应用动力系统杂志》，第 19 卷，第 1 期，第 510–540 页，2020 年。

[14]L. Agasthya、P. Clark Di Leoni 和 L. Biferale，“利用松弛同化从仅温度测量中重建瑞利–贝纳德流动”，《流体物理》，第 34 卷，页码 015128，2022 年 1 月。出版商：美国物理联合会

y

。

[15]E. Kalnay，《大气建模、数据同化与可预测性》。剑桥大学出版社，2003年。

[16] P. Bauer、A. Thorpe 和 G. Brunet，“数值天气预报的静默革命”，《自然》，第 525 卷，第 7567 期，第 47–55 页，2015 年。

[17] S. Lakshmivarahan 和 J. M. Lewis，“松弛同化方法：批判性综述”，载于《大气、海洋和水文应用中的数据同化》（第二卷），第 27–57 页，Springer，柏林、海德堡，2013 年。

[18] M. Buzzicotti 和 P. Clark Di Leoni，“将湍流亚网格尺度模型与数据同步”，《流体物理》，第 32 卷，第 12 期，第 125116 页，2020 年。

[19]P. Clark Di Leoni、A. Mazzino 和 L. Biferale，“与大数据同步：通过松弛同化纳维-斯托克斯方程，实现湍流的数据同化”，《物理评论 X》，第 10 卷，第 011023 页，2020 年 2 月。出版方：美国物理学会。

[20]M. Raissi、P. Perdikaris 和 G. E. Karni-adakis，《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正向和反问题的深度学习框架》，《计算物理学杂志》，第 378 卷，第 686–707 页，2019 年 2 月。

[21]M. Raissi、A. Yazdani 和 G. E. Karni-adakis，《隐式流体力学：从流动可视化中学习速度场和压力场》，《科学》，第 367 卷，第 1026–1030 页，2020 年 2 月。出版方：美国科学促进会。栏目：研究 port.

[22]K. Shukla、P. Clark Di Leoni、J. Blackshire、D. Sparkman 和 G. E. Karni- adakis，《用于超声无损量化表面开裂的物理信息神经网络》，《无损评价杂志》，第 39 卷，第 61 页，2020年8月。[23]S. Cai、Z. Wang、F. Fuest、Y. J. Jeon、C. Gray 和 G. E. Karniadakis，《浓缩咖啡杯上方的流动：通过基于物理信息的神经网络从断层成像背景中推断三维速度和压力场定向 Schlieren》，《流体力学杂志》，第 915 卷，2021年5月。出版商：剑桥大学出版社。

[24]H. Wang、Y. Liu 和 S. Wang，《使用物理信息神经网络，通过粒子图像测速/粒子跟踪测速实现稠密速度重构》，《流体物理》，第 34 卷，第 017116 页，2022 年 1 月。出版方：美国物理联合会。

[25] Y. Du、M. Wang 和 T. A. Zaki，《极简湍流槽道流中的状态估计：四维变分与物理信息神经网络的比较研究》，《国际传热与流体流动杂志》，2022年。

[26]P. Clark Di Leoni、K. Agarwal、T. Zaki、C. Meneveau 和 J. Katz，《利用物理信息神经网络从稀疏含噪粒子轨迹重建速度和压力》，2022年10月。arXiv:2210.04849[physics]。

[27] S. Angriman、P. Cobelli、P. Mininni、M. Obligado 和 P. Clark Di Leoni，《利用物理信息神经网络生成湍流状态》，2022年9月。arXiv:2209.04285 [physics]。

[28] S. Cai、Z. Mao、Z. Wang、M. Yin 和 G. E. Karniadakis，《用于流体力学的物理信息神经网络（PINN）：综述》，《力学学报》，第37卷，1727–1738页，2021年12月。[29]S. Cuomo、V. S. Di Cola、F. Giampaolo、G. Rozza、M. Raissi 和 F. Piccialli，《基于物理信息神经网络的科学机器学习：现状与未来》，《科学计算杂志》，第92卷，第88页，2022年7月。[30] E. D. Siggia，《高瑞利数对流》，《流体力学年度评论》，第26卷，第1期，137–168页，1994年。电子版：https://doi.org/10.1146/annurev.fl.26.010194 .001033.

流动

[31] M. Tancik、P. P. Srinivasan、B. Mildenhall、S. Fridovich-Keil、N. Raghavan、U. Singhal、R. Ramamoorthi、J. T. Barron 和 R. Ng，《傅里叶特征使网络能够学习低维域中的高频函数》，arXiv:2006.10739 [cs]，2020年6月。arXiv: 2006.10739。

[32]A. D. J. . G. E. Karniadakis，《扩展物理信息神经网络（XPINNs）：一种用于非线性偏微分方程的广义时空域分解深度学习框架》，《计算物理通讯》，第28卷，第2002–2041页，2020年6月。