arXiv:2301.07781v1 [math.RA] 18 Jan 2023

向量场李超代数的单性

Henrique Rocha

Abstract. 对于有限生成的超整环 A，我们证明其超导子李超代数$\mathcal{V}$ =Der(A)是一个单李超代数。

Introduction

Jordan [3] 证明了，代数簇上的向量场李代数 X 在 X光滑时是单的。由此自然引出一个问题：这一结论对于仿射超簇是否也成立？本文证明，对于有限生成的超整环 A，李超代数 $\mathcal{V}$ =Der(A) 的超导子构成一个单李超代数。我们采用类似的方法[1] 来证明这一结论。

在第 1 节中，我们给出一般定义。在第 2 节中，我们证明本文的主要结果。

1. Preliminaries

设 $\Bbbk$ 是一个特征为零的代数闭域。除非另有说明，所有（超）代数、（超）概形、（超）向量空间均取在 $\Bbbk$上。关于一般定义和结果，请参阅 [2]。对于超代数 $A = A_{\overline{0}} \oplus A_{\overline{1}}$，我们用 $\overline{A} = A/(A_{\overline{1}})$表示 A 关于其奇元素生成的理想的商。除非另有说明，我们用 x、t 等拉丁字母表示偶元素，用 ξ、θ 等希腊字母表示奇元素。

设 A 是一个有限生成超整整环，即 $A \setminus A_{\overline{1}}$ 不含零因子。则 $(A_{\overline{1}})$ 是一个素理想，局部化映射 $A \to A_{(A_{\overline{1}})}$ 是单射，且 $\overline{A}$是一个整环。由 [5], 可知，存在一个有限生成的投射 $\overline{A}$-模 N，使得$A \cong \Lambda^{\bullet}_{\overline{A}} N$。记 $X = \mathsf{Spec}\,(A) = (|X|, \mathcal{O})$ 为 A 的结构超概形，其结构层为 $\mathcal{O}$，则 X 不可约且整。对于一个闭点 $p \in X$，记 $\mathfrak{m}_p$ 为局部代数 $\mathcal{O}_p$的极大理想。由于 A是一个超整整环，若约化概形 $X^r = \mathsf{Spec}\,(\overline{A})$ 光滑，则 X 也光滑。关于此结论及光滑超簇的其他一般结果，请参阅 [4] 及其中的参考文献。

若关联的乘法映射是单射，则称偶元素 $x \in A_{\overline{1}}$ 为 A-正则。若序列满足以下条件，则称奇元素 $\xi \in A_{\overline{1}}$ 为 A-正则：

$$A \xrightarrow{\xi} A \xrightarrow{\xi} A$$

是正合的。若一列齐次元 $a_1, \ldots, a_r \in A$ 满足对每个 $i = 1, \ldots, r$，a_i 都是 $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$-正则的，则称其为正则序列。

2020 数学主题分类。17B20，17B66。

2. Simplicity of Lie superalgebra

函数 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\in\mathcal{O}(U)$ 在 X 的开子集 U 中定义一个坐标系，当它们在 U 上正则，且截面 $dt_1,\dots,dt_r,d\theta_1,\dots,d\theta_s$ 在 U 上平凡化余切丛时。在这种情况下，导子 $\partial_{t_1},\dots,\partial_{t_r},\partial_{\theta_1},\dots,\partial_{\theta_s}$ 在 $\mathcal{O}(U)$ 上定义良好，并且

$$\mathcal{T}(U)=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathcal{O}(U)\partial_{t_i}\oplus\bigoplus_{j=1}^{s}\mathcal{O}(U)\partial_{\theta_j}.$$

命题 2.1. 若 X 是维数为 $r|s$的光滑对象，则对每个闭点 $p\in X$，都存在一个包含 p的仿射开邻域 U，以及全局函数 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\in A$，它们构成 U上的一个坐标系。

证明。假设 $X\subset\mathbb{A}^{m|n}$。那么，对于某个理想 I，有 $A\cong\Bbbk[x_1,\dots,x_m,\xi_1,\dots,\xi_n]/I$，于是$t_i=x_i-x_i(p)$，$\theta_j=\xi_i$ 生成了 A对应的极大理想 $\mathfrak{m}$。由于 X 是光滑的，存在 $t_{i_1},\dots,t_{i_r},\theta_{j_1},\dots,\theta_{j_s}$，使得相应局部截面$t_{i_1},\dots,t_{i_r},\theta_{j_1},\dots,\theta_{j_s}\in\mathfrak{m}_p$的像是正则的，并构成切空间 T_pX的一组基。因此，存在一个包含 p的开集 U，使得 $t_{i_1},\dots,t_{i_r},\theta_{j_1},\dots,\theta_{j_s}$在 U上构成一个坐标系。注意，$t_{i_1},\dots,t_{i_r},\theta_{j_1},\dots,\theta_{j_s}$生成了 $\mathcal{O}_p$的极大理想 $\mathfrak{m}_p$。□

考虑在 $\mathcal{O}_p$ 上定义的 $\mathfrak{m}_p$-进滤过，并将其完备化记为 $\widehat{\mathcal{O}_p}=\lim_{\leftarrow}A/\mathfrak{m}_p^i$。固定 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\in A$ 以及 p 的一个仿射邻域 U，使得 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s$ 是 U 上的一个坐标系。我们可以假设截面 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\in\mathcal{O}_p$ 生成极大理想 $\mathfrak{m}_p$。

命题 2.2。存在一个同构 $\mathcal{O}_p\to\Bbbk[[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$，使得 $t_i\mapsto T_i$ 且 $\theta_j\mapsto\Theta_j$。此外，$\mathcal{O}_p\cong\overline{\mathcal{O}_p}[\Theta_1,\dots,\Theta_s]$，其中 $\overline{\mathcal{O}_p}=\mathcal{O}_p/(\mathcal{O}_{p,1})$，且 $\theta_i\mapsto\Theta_i$。

证明。由[4, 定理 8。3]。□

由于 A 是超整环，局部化映射 $A\to\mathcal{O}_p$ 是一个嵌入。因此，根据命题 2.2，存在一个嵌入

$$\pi:A\hookrightarrow\Bbbk[[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$$

使得 $\pi(t_i)=T_i$且 $\pi(\theta_j)=\Theta_j$。令 $\mathfrak{L}=\mathrm{Der}(\Bbbk[[T_1,\dots,T_r|\Theta_1,\dots,\Theta_s]])$，则

$$\{\partial_{T_1},\dots,\partial_{T_r},\partial_{\Theta_1},\dots,\partial_{\Theta_s}\}$$

是 $\mathfrak{L}$作为 $\Bbbk[[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$-模的一组基。

命题 2.3。存在唯一的嵌入 $\widehat{\pi}\colon\mathcal{V}\to\mathfrak{L}$，使得对于所有 $f\in A$ 和 $\eta\in\mathcal{V}$，$\widehat{\pi}(\eta)\pi(f)=\pi(\eta(f))$。

证明。固定 $\eta\in\mathcal{V}$。存在唯一一种定义 $\widehat{\pi}$ 的方式，使其

$$\widehat{\pi}(\eta)=\sum_{j=1}^{r}\pi(\eta(t_i))\partial_{T_i}+\sum_{j=1}^{s}\pi(\eta(\theta_j))\partial_{\Theta_j}$$

如果 $\mathfrak{m}$ 是与 p相关联的 A 的极大理想，那么我们可以考虑 A上的 $\mathfrak{m}$进拓扑。类似地，$\Bbbk[[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$ 的极大理想在其上定义了一种拓扑。这两种拓扑都是可分的，$\Bbbk[t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s]\subset A$在 A和 π中稠密：$A\to\Bbbk[[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$是一个连续映射。此外，$\mathcal{V}$和 $\mathfrak{L}$中的每个导子

在这些拓扑下都是连续的。对于每个元素 $f \in \Bbbk[t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s] \subset A$，等式 $\widehat{\pi}(\eta)\pi(f) = \pi(\eta(f))$成立。主要结论由映射 $\widehat{\pi}\circ\pi$ 和 $\pi\circ\eta$的连续性得出。□

设 $U = D(h')$，则存在某个自然数 S，使得 $h = h'^S$，且 $\tau_i = h\partial_{t_i}$ 和 $\sigma_j = h\partial_{t_j}$ 是整体截面。此外，

$$\widehat{\pi}(\tau_k) = \pi(h)\partial_{T_k}, \quad \widehat{\sigma_l}(\sigma_l) = \pi(h)\partial_{\Theta_l},$$

对每个 $k = 1,\dots,r,\ l = 1,\dots,s$。

$\widehat{}$李超代数 $\mathfrak{L}$ 具有如下滤过：

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \widehat{\mathfrak{L}}(-1) \supset \widehat{\mathfrak{L}}(0) \supset \widehat{\mathfrak{L}}(1) \supset \widehat{\mathfrak{L}}(2) \supset \cdots$$

其中 $\widehat{\mathfrak{L}}(i-1) = \mathfrak{m}_0^i\widehat{\mathfrak{L}}$，而 $\mathfrak{m}_0$ 是由 $T_1,\dots,\widehat{}\quad\widehat{}\quad\widehat{}T_r, \Theta_1,\dots,\Theta_s$ 生成的 $\Bbbk[[T_1,\dots,T_r|\Theta_1,\dots,\Theta_s]]$ 的理想。对于所有 i,j，我们有 $[\mathfrak{L}(i)\ \mathfrak{L}(j)] \subset \mathfrak{L}(i+j)$，其中 $i+j \geq -1$。考虑伴随分次李超代数

$$\operatorname{Gr}\widehat{\mathfrak{L}} = \widehat{\mathfrak{L}}(-1)/\widehat{\mathfrak{L}}(0) \oplus \widehat{\mathfrak{L}}(0)/\widehat{\mathfrak{L}}(1) \oplus \widehat{\mathfrak{L}}(1)/\widehat{\mathfrak{L}}(2) \oplus \cdots,$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$那么 Gr $\mathfrak{L}$ 同构于 $\Bbbk[T1,\dots,T_r,\Theta_1,\cdots,\Theta_s]$。定义 $\omega\colon\ \mathfrak{L} \to \operatorname{Gr}\mathfrak{L}$，使得 $\omega(\mu) =\widehat{}\quad\widehat{}\quad\widehat{}\quad\widehat{}$ $\mu + \mathfrak{L}(j+1) \in \mathfrak{L}(j)/\mathfrak{L}(j+1)$，其中 $\mu \in \mathfrak{L}(j) \setminus \mathfrak{L}(j+1)$。因此，$\omega$ 不是线性的，但若 $[\omega(\eta)\ \omega(\mu)] \neq 0$，则 $\omega([\eta,\mu]) = [\omega(\eta)\ \omega(\mu)]$。注意，$\omega(\tau_i)$ 是 ∂_{t_i} 的非零倍数，而 $\omega(\sigma_i)$ 是 ∂_{θ_j} 的非零倍数。

命题 2.4. 假设 $r|s \geq 1|0$。设 $\mathcal{V}$ 的一个非零 $\mathbb{Z}_2$ 分次理想为 $\mathcal{J}$，p 是 X 的一个光滑闭点，且 $t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s$ 是如前所述的坐标系。则

(1) 存在 $y \in \{t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\}$ 和 $\mu \in \mathcal{J}_{|y|}$，使得 $\mu(y)(p) \neq 0$。(2) 对所有 $y \in \{t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\}$，存在 $\mu \in \mathcal{J}_{|y|}$，使得 $\mu(y)(p) \neq 0$。特别地，$\mathcal{J}_{\overline{0}} \neq 0$。

(3) 存在 $g \in A_{\overline{0}}$ 和 $\mu \in \mathcal{J}_{\overline{0}}$，使得 $\mu(\mu(g))(p) \neq 0$。

证明。设 $\eta \in \mathcal{J}$。由于 $\mathcal{J}$是 $\mathbb{Z}_2$-分次的，我们不妨假设 η 是齐次的。记

$$\omega(\widehat{\pi}(\eta)) = \sum_{i=1}^{r} u_i\partial_{T_i} + \sum_{j=1}^{s} u_{r+j}\partial_{\Theta_j} \neq 0$$

其中 $u_1,\dots,u_{r+s} \in \Bbbk[T_1,\dots,T_r,\Theta_1,\dots,\Theta_s]$ 是次数相同的齐次多项式。选取一个非零多项式 $u_{j_0} \in \{u_1,\dots,u_{r+s}\}$，并令 $Y = T_{j_0}$，如果 $j_0 \geq r$；或者令 $Y = \Theta_{j_0-r}$，如果 $j_0 > r$。设 $T_1^{k_1}\cdots T_r^{k_r}\Theta_{i_1}\cdots\Theta_{i_l}$ 是 u_{j_0}中出现的一个单项式，则

$$0 \neq (\partial_{T_1})^{k_1}\cdots(\partial_{T_1})^{k_s}\left(\partial_{\Theta_{i_1}}\right)\cdots\left(\partial_{\Theta_{i_l}}\right)u_{j_0} \in \Bbbk$$

考虑

$$\mu = \operatorname{ad}(\tau_1)^{k_1}\cdots\operatorname{ad}(\tau_r)^{k_r}\operatorname{ad}(\sigma_{i_1})\cdots\operatorname{ad}(\sigma_{i_l})\eta \in \mathcal{J}.$$

那么，μ 是齐次的，且与 y具有相同的奇偶性。由于 ω 保持括号不变，我们得到

$\omega(\widehat{\pi}(\mu))$ =伴随作用$(\omega(\widehat{\pi}(\tau_1)))^{k_1}\cdots$伴随作用$(\omega(\widehat{\pi}(\tau_s)))^{k_s}$伴随作用$(\omega(\widehat{\pi}(\sigma_{i_1})))\cdots$伴随作用$(\omega(\widehat{\pi}(\sigma_{i_l})))\omega(\eta) \in \widehat{\mathfrak{L}}(-1)\setminus\widehat{\mathfrak{L}}(0)$，且它包含 $\frac{\partial}{\partial Y}$。因此，$\omega(\widehat{\pi}(\mu))Y \neq 0$，这意味着 $\mu(y)(p) \neq 0$，其中 $y \in \{t_1,\dots,t_r,\theta_1,\dots,\theta_s\}$ 是满足 $\widehat{\pi}(y) = Y$ 的坐标。

设 $i=1,\dots,r$，则 $\omega(\widehat{\pi}([y\tau_i,\mu]))=[\omega(\widehat{\pi}(y\tau_i))\ \omega(\widehat{\pi}(\mu))]$ 包含 $\frac{\partial}{\partial T_i}$。因此，$\omega(\widehat{\pi}([y\tau_i,\mu]))T_i\neq 0$，故 $[y\tau_i,\mu](t_i)(p)\neq 0$。采用相同的证明，但取 $[y\sigma_j,\mu]$，可以证明 $[y\sigma_j,\mu](\theta_j)(p)\neq 0$。

对于最后一项，取 $\mu'=[y\tau_i,\mu]\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$。若 $\mu'(\mu'(t_i))(p)\neq 0$，则结论成立。若 $\mu'(\mu'(t_i))(p)=0$，则 $t_i^2\neq 0$ 和

$$\mu'(\mu'(t_i^2))(p)=2\mu'(t_i\mu'(t_i))(p)=2\mu'(t_i)(p)\mu'(t_i)(p)+2t_i\mu'(\mu'(t_i'))=2(\mu'(t_i)(p))^2\neq 0.$$

□

推论 2.5. 若 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{V}$ 的非零理想，且 p 是光滑闭点，则由 $D\mapsto(f\mapsto D(f)(p))$ 给出的 $\mathcal{J}\to T_pX$ 是满射。

证明. 向量场 $[y\tau_i,\mu]$、$[y\sigma_j,\mu]\in\mathcal{J}$、$i=1$、…、$r$、$j=1$、…、$s$ 的像张成 T_pX。□

引理 2.6. 设 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{V}$ 的非零理想，则

(1) 若 $\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$，则对所有 $f\in A$，$\mu(f)\mu\in\mathcal{J}$。(2) 若 $g\in A_{\overline{0}}$ 且 $\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$，则对所有 $f\in A$，$\mu(f)\mu(g)\mu\in\mathcal{J}$。(3) 若 $g\in A_{\overline{0}}$ 且 $\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$，则对所有 $f\in A$，$f\mu(\mu(g))\mu\in\mathcal{J}$。

证明。设 $\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$ 和 $f\in A$，则 $[\mu,f\mu]=\mu(f)\mu+(-1)^{|f||\mu|}f[\mu,\mu]=\mu(f)\mu\in\mathcal{J}$，结论 (1) 得证。对于每个 $g\in A_{\overline{0}}$，$[\mu,f\mu(g)\mu]-[f\mu,\mu(g)\mu]=2\mu(g)\mu(f)\in\mathcal{J}$，因此 (1) 得证。由 (1)，$\mu(f\mu(g))\mu\in\mathcal{J}$。由 (2)，$\mu(f)\mu(g)\mu\in\mathcal{J}$。由于 $f\mu(\mu(g))=\mu(f\mu(g))-\mu(g)\mu(f)$，我们有 $f\mu(\mu(g))\mu\in\mathcal{J}$。

□

引理 2.7。设 $f,g\in A_{\overline{0}}$，$\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$。令 $I_{f,g,\mu}$ 为 A 由 $\mu(f)\mu(\mu(g))$ 生成的主理想。那么对于每个 $a\in I_{f,g,\mu}$ 以及每个 $\tau\in\mathcal{V}$，$a\tau\in\mathcal{J}$。

证明。如果 $a=b\mu(f)\mu(\mu(g))$，那么根据引理 2.6，$b\mu(\mu(g))\mu$，$fb\mu(\mu(g))\mu$，$\mu(f)b\mu(\mu(g))\mu\in\mathcal{J}$。因此，如果 $h=b\mu(\mu(g))$

$$\begin{aligned}
&[b\mu(\mu(g))\mu,f\tau]-[fb\mu(\mu(g))\mu,\tau]-(-1)^{|\tau||b|}\tau(f)b\mu(\mu(g))\mu\\
=&h\mu(f)\tau-(-1)^{|b||\tau|}f\tau(h)\mu+hf[\mu,\tau]+(-1)^{|\tau||b|}\tau(fh)\mu-fh[\mu,\tau]-(-1)^{|\tau||b|}\tau(f)h\mu\\
=&h\mu(f)\tau-(-1)^{|\tau||b|}f\tau(h)\mu+(-1)^{|\tau||b|}\tau(f)h\mu+(-1)^{|\tau||b|}f\tau(h)\mu-(-1)^{|\tau||b|}\tau(f)h\mu\\
=&h\mu(f)\tau=b\mu(f)\mu(\mu(g))\tau=a\tau\in\mathcal{J}
\end{aligned}$$

□

定理 2.8. 如果 X 是一个光滑整仿射超簇，且 $\dim X=r|s\geq 1|0$，那么 $\mathcal{V}=\mathrm{Der}(\Gamma(X,\mathcal{O}))$ 是一个简单李超代数。

证明。设 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$-分次理想，且 $J=\{a\in A\mid a\mathcal{V}\subset\mathcal{J}\}$。对于每个闭点 $p\in X$，存在 $\mu\in\mathcal{J}_{\overline{0}}$ 和 f、$g\in A_{\overline{0}}$，使得根据命题 2.4，有 $\mu(f)(p)\neq 0$ 且 $\mu(\mu(g))(p)\neq 0$。因此，$\mu(f)\mu(\mu(g))\neq 0$，由 $\mu(f)\mu(\mu(g))$ 生成的 A 的主理想 $I_{f,g,\mu}$ 非零。由引理 2.7，$I_{f,g,\mu}\subset J$。因此，J 是 A 的一个非零 $\mathcal{V}$-理想。此外，对于 A 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，都存在一个 $h\in J$，使得 $h(p)\neq 0$，其中 $p\in X$ 是对应的闭点。因此，$h+\mathfrak{m}\neq 0$，且 J 不包含于 $\mathfrak{m}$。由于 A 的每个真理想都包含于某个极大理想，我们得出 $J=A$。因此，$\mathcal{V}=J\mathcal{V}=A\mathcal{V}\subset\mathcal{J}\subset\mathcal{V}$。□

Acknowledgments

作者感谢 Lucas Calixto 和 Vyacheslav Futorny 提供了许多有益的讨论。H. R. 获得了圣保罗研究基金会（FAPESP）的资助（项目编号 2020/13811-0、2022/00184-3）。

References

[1] Y. Billig 和 V. Futorny，《光滑仿射簇上的向量场李代数》，《代数通讯》46 (2018)，第 8 期，3413–3429。MR3789004[2] C. Carmeli、L. Caston 和 R. Fioresi，《超对称性的数学基础》，欧洲数学会（EMS）数学讲座系列，苏黎世，2011。[3] D. A. Jordan，《关于导子李代数的理想》，《伦敦数学学会杂志》（2）33 (1986)，第 1 期，33–39。[4] A. Sherman，《球面超簇》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）71 (2021)，第 4 期，1449–1492。[5] A. A. Voronov、Yu. I. Manin 和 I. B. Penkov，《超几何基础》，《苏联数学杂志》51 (1990)，第 1 期，2069–2083