arXiv:2301.07815v1 [math.AG] 18 Jan 2023

非交换概形理论与半分次环的塞尔-阿廷-Zhang-Verevkin 定理

安德烈斯·查孔和阿曼多·雷耶斯

谨以此文献给 *Lorenzo Acosta* 教授

摘要。本文提出一种非交换概形理论，适用于 Lezama 和 Latorre 定义的由一次元素生成的半分次环[29]，其思路源自 Van Oystaeyen 和 Willaert 关于图式性所提出的思想 [50]，适用于 $\mathbb{N}$-分次代数。基于这一理论，我们证明了塞尔-阿廷-Zhang-Verevkin 定理 [5, 19, 20, 42, 57, 58] 适用于若干类非-$\mathbb{N}$-分次代数以及有限非-$\mathbb{N}$-分次代数，这些代数出现在环论和非交换代数几何中。本文从不同的视角，为 Lezama [27, 29]关于该定理的研究作出了贡献。

1. 引言

在其优美的论文中， [42], Serre 证明了一个定理，该定理用分次模描述射影概形上的凝聚层。简言之，对于 A 有限生成的交换分次 $\Bbbk$代数（$\Bbbk$ 域）以及 X 相应的射影概形，若 coh X 表示 X 上的凝聚层范畴，且 $\mathcal{O}_X(n)$表示 X [20, p. 117], 上的扭曲层的第n次幂，则有函子 Γ_* : coh $X \to$qgr A ，其定义如下：

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) = \bigoplus_{d=-\infty}^{\infty} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(d)).$$

Serre 定理 [42, 第 59 节，命题 7.8，第 252], [19, 3.3 页。5]以及 [20,命题 II. 5.15], 断言，若 A 由 $\Bbbk$ 中次数为一次的元素生成，则 Γ_* 给出范畴等价 coh $X \to$qgr A。

Artin 和 Zhang [5] 以如下方式将 Serre 定理推广到非交换情形：设 A 是交换诺特环上的一个 $\mathbb{N}$分次代数。他们将与之关联的射影概形定义为对 Proj A = (qgr $A, \mathcal{A}$)，其中 qgr A 是上述商范畴，而 $\mathcal{A}$ 是由右模 A_A确定的对象。他们证明，由 gr A中次数的平移所定义的 qgr A 自等价 s。对象 $\mathcal{A}$ 在 Proj A 中扮演结构层 的角色，而 s 则扮演由射影嵌入所定义的极化 的角色（此定义与 Verevkin [57, 58]给出的定义相同）。由于 Serre 定理并不适用于所有交换分次代数，即由 Γ_* 定义的函子未必

2020 数学主题分类。 14A22；16S80；16U20；16W60。关键词与短语。 图式代数，Ore 集，半分次环。作者获得了哥伦比亚国立大学波哥大校区理学院研究基金的资助，项目代码 HERMES53880。

是等价，Artin 和 Zhang 对 $\operatorname{Proj} A$ 的定义只有在满足某些附加假设时才与交换分次环的经典定义相容，例如 A 由一次元生成。在文献中，Serre 定理的非交换版本称为 *Serre-Artin-Zhang-Verevkin* 定理 [5, 57, 58]。一些作者沿用 Artin、Zhang 和 Verevkin 的思路，研究交换代数几何中的结果在非交换情形下的对应版本（例如 [12, 26, 27, 28, 41, 43, 54, 55, 56, 60] 及其中的参考文献）。

另一方面，Manin [31] 指出，尝试为量子代数建立 Grothendieck 式的非交换概形理论并未成功。尽管如此，Van Oystaeyen 和 Willaert [50] 通过发展一种类似于交换理论的概形理论，研究了这个 Proj。他们注意到，只有当所考虑的连通且 $\mathbb{N}$-分次代数包含“足够多”的 Ore 集时，这种理论才行得通。满足这一条件的代数称为图式的。他们为图式代数 R的所有 Ore 集构成的自由幺半群建立了广义 *Grothendieck* 拓扑，并将非交换位点（参见 [51]）定义为一个带有覆盖、可以在其上定义层的范畴，并阐述了 Serre 定理。由此发展出一种类似于交换代数概形理论的层理论。作为他们研究的结果，按照 Artin [3]的意义，得到了所有凝聚层范畴与 Proj R 范畴之间的等价。几年后，Van Oystaeyen 和 Willaert [51, 52, 53] 发表了续篇 [50]，研究这些代数的上同调，并证明了 Ore 集的提升性质。这使得他们得以给出许多图式代数的例子，例如几乎交换代数的齐次化、李代数的万有包络代数的 Rees 环，以及三维 Sklyanin 代数。关于图式代数的详细论述可见 Van Oystaeyen 的著作 [49]。

几年前，Lezama 和 Latorre [29] 引入了半分次环，旨在推广 $\mathbb{N}$-分次环、有限生成的 $\mathbb{N}$-分次代数，以及环论和非交换代数几何中出现的若干并非以非平凡意义 $\mathbb{N}$-分次的代数。在那篇论文中，他们研究了半分次环的一些几何性质，其中包括遵循 Artin、Zhang 和 Verevkin 思路的 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理（另见 [27]）。因此，考虑到 Van Oystaeyen 和 Willaert 在 [50]中关于 $\mathbb{N}$-分次代数情形下 Proj 的概形理论的构想，自然会提出这样的问题：能否为半分次环建立非交换概形理论，进而在比更一般的背景下研究这些对象的图式性 $\mathbb{N}$-分次环。这正是本文的目的。正如预期，我们将[50] 中针对 $\mathbb{N}$-分次代数的结果推广到半分次情形（事实上，我们不要求代数满足连通性条件），并提出另一种研究半分次环的 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理的方法（例5.27 和5.28 表明，Lezama [27, 29] 提出的理论与本文建立的理论彼此独立）。该定理是针对这些对象提出的一项基本问题，见 [27, 第 1.4 节的问题 1]。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾挠理论、交换情形下的 Serre 定理，以及 $\mathbb{N}$-分次环的非交换情形中的一些关键事实，并沿用 Artin 和 Zhang [5],以及 Van Oystaeyen 和 Willaert [50, 53]提出的思路。接着，在第 3 节中，我们讨论一些

关于半分次环和半分次模的预备知识，并介绍这些对象局部化的一些事实。在第 4 节中，我们提出半分次环的图式性 概念（定义 4.1），不要求 Van Oystaeyen 和 Willaert 针对 $\mathbb{N}$-分次环所采用的连通性假设。第 5 节给出了非交换位点的定义，旨在建立半分次情形下的 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理（定理5.23）。我们的结果推广了 $\mathbb{N}$-分次环情形下的相关结果（注 5.24），并使得我们能够证明其他非$\mathbb{N}$-分次代数（甚至是不连通的）也是图式的（例 5.25）。如上所述，例 5.27 和5.28表明，Lezama 关于 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理的理论与本文发展的理论彼此独立。最后，在第6 节中，我们提出了未来工作的若干思路，这些思路受到图式代数相关不同主题的启发 [49, 52, 53, 59]。

本文中，环指具有单位元（不一定交换）的结合环。字母 $\Bbbk$ 表示任意一个域，所有代数都是 $\Bbbk$-代数。符号 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示包含零的自然数集和整数环。对于环 R 及其子集 I（其中 R），$I \lhd_l R$ 表示 I 是 R的左理想。 $Z(R)$表示 R的中心，而左 R-模范畴记作 R –Mod。

2. Serre 定理与概形代数

我们简要回顾一些代数几何概念，它们是*Serre* 定理证明中的关键。

沿用 Hartshorne [20], 若 $C = \Bbbk \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots$是由一次元素生成的正分次交换诺特环，则考虑 $Y = \operatorname{Proj} C$ 以及$Y(f) = \{\mathfrak{p} \in Y \mid f \notin \mathfrak{p}\}$，即与齐次元素 $f \in C$对应的扎里斯基开集。众所周知，存在一个有限子集 $\{f_i \mid f_i \in C_1\}$ 使得 $Y = \bigcup_i Y(f_i)$。等价地，对于每个 $d_i \in \mathbb{N}$的取值，都存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $(C_+)^n \subseteq \sum_i C f_i^{d_i}$。这样，对于任意有限生成的分次 C-模M，我们有

$$\begin{aligned}\Gamma_*(M) &:= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(Y, \widetilde{M(n)}) \\ &= Q_{\kappa_+}(M) = \varprojlim_i Q_{f_i}(M),\end{aligned}$$

其中$\widetilde{M(n)}$表示与平移模 $M(n)$相关联的模层，而 $Q_{f_i}(M)$是 M在 $\{1, f_i, f_i^2, \dots\}$处的局部化。当然，

$$Q_f(M) = \varprojlim_i Q_{ff_i}(M),$$

其中，逆系统定义为 $q \le h$ 当且仅当 $Y(g) \subseteq Y(h)$。这正是证明 *Serre* 定理 的关键事实：凝聚 $\mathcal{O}_Y$-模范畴与某个商范畴等价。

在非交换情形下，对于具有 $R = \Bbbk[R_1]$ 的非交换正分次诺特 $\Bbbk$-代数 $R = \Bbbk \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$（注意， R 是连通的，即 $R_0 = \Bbbk$），Van Oystaeyen 和 Willaert [50] 提出了 Serre 定理在具有足够多 Ore 集的代数中的一种诠释，并将这类代数称为图式代数。为了介绍他们提出的关键思想，我们首先回顾一些

挠理论的概念，这些概念将在本文中广泛使用。更多详情，请参阅 Goldman [16], Stenstrom [44] 或 Van Oystaeyen [48]。

定义 2.1 ([50, 节 2])。设 $\mathscr{L}$ 是任意环R的左理想集合。若满足以下条件，则称 $\mathscr{L}$ 为滤子：

T_1：如果 $I \in \mathscr{L}$和 $I \subseteq J$，则 $J \in \mathscr{L}$。T_2：如果 I、$J \in \mathscr{L}$，则 $I \cap J \in \mathscr{L}$。T_3：如果 $I \in \mathscr{L}$和 $a \in R$，则 $(I : a)$: $= \{r \in R \mid ra \in I\} \in \mathscr{L}$。

T函子 κ： $R-$模 $\to R$–模定义为 by

$$\kappa(M) = \{m \in M \mid \text{ there exists } I \in \mathscr{L} \text{ with } Im = 0\},$$

是左正合预根基，即范畴 $R-$模上的恒等函子的左正合子函子。满足 $\kappa(M)$ $= M$ 的模 M 称为 κ-扭模；如果 $\kappa(M) = 0$，则称 M 为 κ-无挠模。显然，扭模的族对商对象和余积封闭，而无挠模对称对象和积封闭。

滤子 $\mathscr{L}$称为幂等（也称为*Gabriel* 拓扑），当且仅当它满足以下条件：

T_4：若 $I \lhd_l R$，且存在 $J \in \mathscr{L}$，使得对所有 $a \in J$，关系 $(I : a) \in \mathscr{L}$成立，则 $I \in \mathscr{L}$。

条件 T_4 意味着 $\mathscr{L}$在乘积运算下封闭，并且函子 κ 是一个根，即对所有 $M \in R-\mathsf{Mod}$，都有 $\kappa(M/\kappa(M)) = 0$。

命题2.2。若 R是左诺特环，且 $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots$是 R的双边理想降链，则集合

$$\mathscr{A} = \{I \lhd_l R \mid \text{ there exist elements } n, m \in \mathbb{N} \text{ with } (J_m)^n \subseteq I\},$$

是一个幂等滤子。

证明。T_1：若 $(J_m)^n \subseteq I$ 且 $I \subseteq I'$，则显然 $(J_m)^n \subseteq I'$。T_2：若 I、$I' \in \mathscr{A}$，则存在元素 n_1、n_2、m_1、$m_2 \in \mathbb{N}$，使得 $(J_{m_1})^{n_1} \subseteq I$且 $(J_{m_2})^{n_2} \subseteq I'$。考虑 $n := \max\{n_1, n_2\}$和 $m := \max\{m_1, m_2\}$，则可得 $(J_m)^n \subseteq I \cap I'$。$T_3$：若 $I \in \mathscr{A}$，则存在元素 n、$m \in \mathbb{N}$，使得 $(J_m)^n \subseteq I$。固定$a \in R$，并令 $r \in (J_m)^n$。由于 $(J_m)^n$ 是 R的一个理想，因此 $ra \in (J_m)^n \subseteq I$，从而 $r \in (I : a)$，即 $(J_m)^n \subseteq (I : a)$。$T_4$：令 $I \lhd_l R$ 和 $J \in \mathscr{A}$，使得对所有 $a \in J$，$(I : a) \in \mathscr{A}$。由于$J \in \mathscr{A}$，存在元素 n、$m \in \mathbb{N}$，使得 $(J_m)^n \subseteq J$。根据假设， R是左诺特的，因此 $(J_m)^n$ 由某些元素 a_1、.....、a_l有限生成。注意，对 $1 \leq i \leq l$，有 $a_i \in J$，因此 $(I : a_i) \in \mathscr{A}$。由此，存在元素 k_i、$j_i \in \mathbb{N}$，使得 $(J_{j_i})^{k_i} \subseteq (I : a_i)$。若 $k := \max\{k_i\}_{1 \leq i \leq l}$且 $j := \max\{j_i\}_{1 \leq i \leq l}$，则对每个 $1 \leq i \leq l$，都有 $(J_j)^k \subseteq (I : a_i)$。

令$x \in (J_j)^k (J_m^k)^n$。存在元素 $r_1, \ldots, r_l \in R$使得 $s = \sum_{i=1}^{l} r_i a_i$，因此 $rs = \sum_{i=1}^{l} r r_i a_i$。由于 $(J_j)^k$是 R 的一个理想，我们有 $rr_i \in (J_j)^k$，对所有 i 均成立。因此 $rr_i a_i \in I$，从而 $rs \in I$。由此可得 $(J_{j+m})^{k+n} \subseteq (J_j)^k (J_m)^n \subseteq I$。

□

设有一个环 R， $\mathscr{L}$ 一个由 R 的左理想构成的幂等滤子及其相应的根 κ。对于一个 R-模 M，我们回顾商模 $Q_\kappa(M)$ （定义 2.4）。为此，我们引入定义 2.3。

定义 2.3。设 $M \in R-\mathrm{Mod}$。考虑由满足$I \in \mathscr{L}$ 且 f 的有序对 (I,f) 构成的族 Ω_M： $I \to M$ 一个 R-同态。我们在 Ω_M 上定义关系 $\sim$： 当且仅当存在一个元素 $J \in \mathscr{L}$，使得 $J \subseteq I_1 \cap I_2$ 且 $f|_J = g|_J$ 时，$(I_1,f_1) \sim (I_2,f_2)$。

不难看出， $\sim$ 是一个等价关系。元素 (I,f) 的等价类记作 $[I,f]$，等价类的集合记作 $M_{\mathscr{L}}$。对于两个元素 $[I,f],[J,g] \in M_{\mathscr{L}}$，我们将它们的和定义为 $[I,f]+[J,g]=[I\cap J, f+g]$。容易看出，这个和定义良好，并且 $(M_{\mathscr{L}},+)$ 构成一个阿贝尔群。

也容易看出，如果 $I,J \in \mathscr{L}$ 和 $f \in \mathrm{Hom}(I,R)$，那么 $f^{-1}(J) \in \mathscr{L}$。这样，当我们取元素 $[I,f] \in R_{\mathscr{L}}$ 和 $[J,g] \in M_{\mathscr{L}}$ 时，可以将这些元素的乘积定义为 $[I,f]\cdot[J,g]=[f^{-1}(J)\ g\circ f]$。注意，这个乘积定义良好，因此 $R_{\mathscr{L}}$ 实际上是一个以 $[R,\mathrm{id}_R]$ 为单位元的环。因此， $M_{\mathscr{L}}$ 是一个左 $R_{\mathscr{L}}$-模。

设 $m \in M$。我们定义映射 $\beta(m)$： $R \to M$， 其定义为 $\beta(m)(r) = rm$。众所周知， β: $M \to \mathrm{Hom}(R,M)$ 是 R-模的一个同构。若考虑由 $\varphi_M(m) = [R,\beta(m)]$, 定义的 φ_M: $M \to M_{\mathscr{L}}$，则可知 φ_R 是一个环同态，因此我们可以将 $R_{\mathscr{L}}$ 和 $M_{\mathscr{L}}$ 视为 R-模，其作用由 $r[I,f] := [R,\beta(r)][I,f]$ 给出。注意， φ_M 实际上是 R-模的一个同态。由于 $\mathrm{Ker}(\varphi_M) = \kappa(M)$，基本同构定理保证 $\varphi_M(M) \cong M/\kappa(M)$。这样，如果 $\kappa(M) = 0$，那么我们就可以将 M 嵌入 $M_{\mathscr{L}}$。

对于由 $\xi = [I,f]$ 给出的元素 $\xi \in M_{\mathscr{L}}$，以及元素 $a \in I$，注意到 $a\xi = [R,\beta(f(a))] = \varphi_M(f(a))$，这表明 $I\xi \subseteq \varphi_M(M)$，也就是说，$\mathrm{Coker}(\varphi_M)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的一个扭模。

鉴于上述记号和术语，我们给出对象 M 在 R –Mod 中的商模的定义。

定义 2.4. M 关于 κ 的商模 定义为 $Q_\kappa(M) = (M/\kappa(M))_{\mathscr{L}}$。由于 $\mathscr{L}$ 是幂等的，因此 $\kappa(M/\kappa(M)) = 0$。于是，我们可以将 $M/\kappa(M)$ 嵌入 $Q_\kappa(M)$。

M 关于 κ 的商模 等价地可表示为

$$Q_\kappa(M) = \varinjlim_{I\in\mathscr{L}} \mathrm{Hom}_R(I, M/\kappa(M)).$$

$Q_\kappa(M)$ 实际上是环 $Q_\kappa(R)$ 上的一个模。

根据 [44], , 回顾一下：若对每个 R-模M 及其每个子模 N （满足 $\kappa(M/N) = M/N$），任意 R-同态$N \to E$ 都可扩张为一个 R-同态 $M \to E$，则称 E 是 κ-内射的 R-模。若该同态的扩张唯一，则称 E 是 κ-闭的（也称忠实 κ-内射）。显然， E 是 κ-闭的，当且仅当 E 是 κ-内射且 κ-挠无的。利用这些概念，我们可以如下刻画 $Q_\kappa(M)$： $Q_\kappa(M)$ 是包含 $N = M/\kappa(M)$ 的唯一 κ-闭模，并且 $Q_\kappa(M)/N$ 是 κ-挠的。

例 2.5 ([50, 第 111])。 (i) 考虑 S 任意环R中的一个左 Ore 集。集合

$$\mathscr{L}(S) = \{I \lhd_l R \mid I \cap S \neq \emptyset\}$$

是一个幂等滤子。若 κ_S 表示其对应的根，且 $Q_S(M)$ 是 M 的商模，那么显然 $Q_S(M)$ 同构于 $S^{-1}M$，也就是说，它是 M 在 S 处的经典 Ore 局部化。

(ii) 若 $R = \bigoplus_{k\geq 0} R_k$ 是一个正分次诺特环，且 R_+ 表示双边理想 $\bigoplus_{k\geq 1} R_k$，由命题 2.2，集合

$$\mathscr{L}(\kappa_+) = \{I \lhd_l R \mid \text{there exists } n \in \mathbb{N} \text{ with } (R_+)^n \subseteq I\}$$

是一个幂等滤子。其对应的根记为 κ_+。

根据上述讨论，考虑到滤子 $\mathscr{L}(\kappa_+)$ 是幂等的，Van Oystaeyen 和 Willaert [50] 构造了商范畴 (R, κ_+)-gr，即 $Q_{\kappa_+}(R)$-gr 的全子范畴，由形如 $Q_{\kappa_+}(M)$ 的模构成，其中 M 是某个分次 R-模。注意，(R, κ_+)-gr 等价于 R-gr 的全子范畴，该子范畴由 κ_+-闭模构成；他们将 Proj R 定义为 (R, κ_+)-gr 中的诺特对象。由于他们希望像交换代数的情形那样，借助通常模范畴中的对象来描述 Proj R 的对象，因此需要由 Ore 局部化确定的模。以下定义阐述了这一点。

定义 2.6 ([50, 定义 1])。 若非交换的正分次 Noetherian $\Bbbk$-代数 $R = \Bbbk \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots$ 满足 $R = \Bbbk[R_1]$，且存在有限个 R 的齐次左 Ore 集 I，使得对每个 $S \in I$、 $S \cap R_+ \neq \emptyset$，并且满足以下等价性质之一，则称其为图式的：

(i) 对每个 $(r_S)_{S\in I} \in \prod_{S\in I} S$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $(R_+)^m \subseteq \sum_{S\in I} Rr_S$；

(ii) $\bigcap_{S\in I} \mathscr{L}(S) = \mathscr{L}(\kappa_+)$；(iii) 对所有 $M \in R-\text{Mod}$， $\bigcap_{S\in I} \kappa_S(M) = \kappa_+(M)$；(iv) $\bigwedge_{S\in I} \kappa_S = \kappa_+$，其中 $\bigwedge$ 表示挠理论的下确界。

在[50, 51], Van Oystaeyen 和 Willaert 构造了非交换位点——一个带有覆盖、可在其上定义层的范畴，并表述了 Serre 定理。例子2.7 和2.9 包含了图式代数的重要例子。

例 2.7。回忆一下，若 R 是由族$\widehat{\ }(F_nR)_{n\geq 0}$ 正滤过的 $\Bbbk$-代数（即 $F_0R = \Bbbk$）， $\sigma : R \to G(R)$ 是主符号映射，而 R 是 R 的 Rees 环，则众所周知， $G(R)$ 和 R 是正分次的，并且其中$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$存在一个次数为 1 的典范中心元 X，满足 $R/\langle X\rangle \cong G(R)$。若 R 是诺特的，这等价于 $G(R)$ 是诺特的，或者 R 的滤过是 Zariskian 滤过。注意，若 S 是 R 中的一个乘法集，且 $\sigma(S)$ 是 $G(R)$ 中的乘法集，那么 $\widehat{R} = \{sX^{\deg\sigma(S)} \mid s \in S\}$ 是 R 中的一个乘法集$\widehat{\ }$（由齐次元素构成）。关于分次环、Zariski 过滤和 Rees 环的更多细节，参见 Li 和 Van Oystaeyen 的著作 [30]。

$\widehat{\ }$对于由 $(F_nR)_{n\geq 0}$正向滤过的 R，若 $G(R)$ 是图式的，则 R 是图式的[53, 定理 1]。因此，对于几乎交换环 R，存在

一个 R 上的滤过，使得 $G(R)$ 是交换环，因此其 Rees 环是图式的。例如，由三个次数 1 的元素 x、y 和 z 生成、满足关系式 $xy-yx=z^2$、$xz-zx=0$和 $yz-zy=0$的代数 R 是图式的，因为它是第一 Weyl 代数 $A_1(\Bbbk)$ 关于 Bernstein 滤过的 Rees 环（此代数称为齐次化 *Weyl* 代数）。

Van Oystaeyen 和 Willaert [53, 第 199] 指出："概形代数这一类在迭代 Ore 扩张下封闭，这一说法可能并不成立，因为环中的 Ore 集 R 在 Ore 扩张中未必仍是 Ore 集 $R[x;\ \sigma,\ \delta]$"。然而，下述命题表明，在适当条件下，这些扩张是图式的。

命题 2.8 ([53, 定理 3])。给定一个正分次环 R，它由 R_1 生成，并且借助 Ore 集 S_i 成为图式的；再给定 R 的一个分次自同构以及 σ 的一个次数为 1 的导子，则对所有 $s_i \in \prod S_i$ 以及所有 $m \in \mathbb{N}$，存在 $p \in \mathbb{N}$，使得

$$(R[x;\sigma,\delta]_+)^p \subseteq M := \sum_i R[x;\sigma,\delta]s_i + R[x;\sigma,\delta]x^m,$$

其中 $R[x;\ \sigma,\delta]$ 表示按照分次 $(Rx[x;\ \sigma,\delta])_n = \bigoplus_{k=0}^{n} R_k x^{n-k}$ 考虑的 Ore 扩张。

命题 2.8 是 Van Oystaeyen 和 Willaert [53] 用来证明例 2.9 中的代数是图式的。

例 2.9 ([53, 例 2-5])。(i) 量子矩阵的坐标环 $2\times$2-矩阵 $\mathscr{O}_q(M_2(\mathbb{C}))$ 在 $q \in \mathbb{C}$ 下由元素 a、b、c和 d生成，并满足以下关系

$$\begin{aligned} &ba = q^{-2}ab, && ca = q^{-2}ac, && bc = cb,\\ &db = q^{-2}bd, && dc = q^{-2}cd, && ad - da = (q^2 - q^{-2})bc. \end{aligned}$$

(ii) 量子 *Weyl* 代数 $A^{q,\ \overline{n}\Lambda}$由 Alev 和 Dumas 定义的 [1] 由一个 $n\times n$ 矩阵 $\Lambda = (\lambda_{ij})$（满足 $\lambda_{ij} \in \Bbbk^*$）和一个行向量 $\overline{q} = (q_1,\ldots,q_n)$给出，其中 $q_i \neq 0$ 对每个 i，该代数由元素$x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n$ 生成，并满足关系（$i<j$），其定义如下:

$$\begin{aligned} &x_ix_j = \mu_{ij}x_jx_i, && x_iy_j = \lambda_{ji}y_jx_i, && y_jy_i = \lambda_{ji}y_iy_j,\\ &x_jy_i = \mu_{ij}y_ix_j && x_jy_j = 1 + q_jy_jx_j + \sum_{i<j}(q_i-1)y_ix_i, \end{aligned}$$

其中 $\mu_{ij} = \lambda_{ij}q_i$。

(iii) 三维 *Sklyanin* 代数 $A_\Bbbk$ 在域 $\Bbbk$ 上，依据 Artin 等人的定义，[4] 是由三个次数为 1 的齐次元素x、y 和 z 生成的分次 $\Bbbk$-代数，其满足以下关系

$$axy + byx + cz^2 = 0, \quad ayz + bzy + cx^2 = 0, \quad \text{and} \quad azx + bxz + cy^2 = 0,$$

其中 a ,b,$c \in \Bbbk$。

(iv) Rittenberg 和 Wyler 定义的颜色李超代数 [40]。

备注 2.10。当然，也存在非图式代数的例子。取分次代数 $\Bbbk\{x,y\}/\langle yx - xy - x^2\rangle$，并假设 char($\Bbbk$) $= 0$，那么由 y 和 xy 生成的子代数不是左图式的 [53, p. 203]。

3. 半分次环

Lezama 和 Latorre [29] 通过定义一类新的环——$\mathbb{N}$半分次环——介绍了非交换代数几何，研究非 [32, 33], 分次代数和有限非分次代数。这些环扩展了若干类多项式型非交换环，例如 Ore 扩张， [6, 7, 43], 推广 Weyl 代数和有限维李代数泛包络代数的微分算子族，[22, 37, 61], 数学物理中出现的代数， [9, 10, 25], down-up 代数， [23, 24],双斜多项式环， [8, 34, 37, 41], 三维斜多项式环， [7], PBW 扩张， [15], 斜 PBW 扩张 [14]以及其他类型。Fajardo 等人给出了半分次环及其与其他代数之间关系的详细示例列表。文献中已有多位作者研究半分次环的环论、代数和几何性质（例如， [2, 11, 21, 35, 36, 39, 45, 46, 47]以及其中的参考文献）。

定义 3.1 ([29, 定义 2.1])。设 R 为一个环。若存在一族 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，它们是加法群 R^+的子群 R_n，并满足以下条件，则称 R 为半分次（SG）：

(i) $R=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n$。(ii) 对每个 m、$n\in\mathbb{Z}$、$R_mR_n\subseteq\bigoplus_{k\leq m+n} R_k$。(iii) $1\in R_0$。

称这族 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 R的半分次，并称 R_n 中的元素为次数为 n的齐次元素。

若对每个 $n<0$都有 $R_n=0$，则称 R 为正半分次。若 R 和 S是半分次环，且 $f\colon R\to S$ 是环同态，则若对每个 $n\in\mathbb{Z}$都有 $f(R_n)\subseteq S_n$，称 f为齐次。

定义 3.2 和 3.3 分别回顾有限生成半分次环和有限生成半分次代数的概念。

定义 3.2 ([29, 定义 2.4])。环 R 称为有限生成半分次环 (FSG)，如果满足以下条件：

(i) R 是 SG 环。(ii) 存在有限多个元素 x_1、……、$x_n\in R$，使得由 R_0 和 x_1、……、x_n 生成的子环与 R 一致。(iii) 对每个 $n\geq 0$，R_n 都是有限维自由 R_0-模。

定义 3.3 ([28, 定义 10])。若 $\Bbbk$-代数 R 满足以下条件，则称其为有限生成半分次(FSG)：

(i) R 是一个 FSG 环，其半分次由 $R=\bigoplus_{n\geq 0} R_n$ 给出。(ii) 对每个 m，$n\geq 1$，$R_mR_n\subseteq R_1\oplus\cdots\oplus R_{m+n}$。(iii) R 是连通的，即 $R_0=\Bbbk$。(iv) R 由次数 1 的元素生成。

由定义 3.3，不难看出，如果 R 是一个 $\Bbbk$-代数，那么$R_+:=\bigoplus_{n\geq 1} R_n$ 是 R 的极大理想。

注意， $\mathbb{N}$-分次环是SG。有限分次 $\Bbbk$-代数、PBW 扩张[7], 3-维斜多项式环、 [8], down-up 代数 [9, 10], 扩散代数 [22], 以及斜 PBW 扩张 [15] 都是FSG 环的例子。

定义 3.4 ([29, 定义 2。2])。设 R 是一个SG 环，且设 M 是一个 R-模。若存在一族 M ，使其为半分次，且 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 子群 M_n 属于加法群 M^+ 并满足以下条件，则称:

(i) $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$。 (ii) 对于每个 $m\geq 0$ 和 $n\in\mathbb{Z}$, $R_mM_n\subseteq\bigoplus_{k\leq m+n} M_k$。

集合 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 称为 的半分次，我们称 M_n 的元素为次数为 的齐次元素。

若对于每个 $n<0$, M 满足 $M_n=0$ ，则称其为正半分次。设 $f\colon M\to N$ 是 R-模之间的同态，其中 M 和 N 是半分次 R-模。若对于每个 $n\in\mathbb{Z}$， f 满足 $f(M_n)\subseteq N_n$ ，则称其为齐次。

定义 3.5 ([29, 定义 2.3])。设 R 为一个 SG 环， M 为一个 SG R-模，且 N 是 M 的子模。若 $N=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} N_n$ ，其中 $N_n=M_n\cap N$，则称 N 为 M 的半分次 (SG)子模。此时， N 是一个 SG R-模。

命题 3.6 ([29, 命题 2.6])。若 R 是一个 SG 环， M 是一个 SG R-模，且 N 是 M 的子模，则下列条件等价:

(1) N 是 M 的半分次子模。(2) 对每个 $z\in N$， z 的齐次分量都属于 N。(3) M/N 是一个 SG R-模，其半分次结构由下式给出

$$(M/N)_n=(M_n+N)/N,\ n\in\mathbb{Z}.$$

若 M 是一个 SG R-模，且 $\{N_i\}_{i\in I}$ 是 M 的 SG 子模族，则显然 $\bigcap_{i\in I} N_i$ 是 M 的 SG 子模。

设 X 是 M 的子集。我们将包含 X 的所有 SG 子模的交定义为由 X 生成的 SG 子模，并记为 $\langle X\rangle^{\mathsf{SG}}$。若 $X=\{x_1,\dots,x_n\}$，则记作 $\langle X\rangle^{\mathsf{SG}}=\langle x_1,\dots,x_n\rangle^{\mathsf{SG}}$。如果 M 同时是不同类型环上的模，且存在混淆的风险，我们会写作 $\langle *\rangle_R^{\mathsf{SG}}$，以指明所考虑的环 R 。

类似地，若 R 是正 SG 环，对于 $t\in\mathbb{N}$，我们将包含 $\bigoplus_{k\geq t} R_k$ 且为 SG 子模的所有双边理想的交定义为 $R_{\geq t}$ 。

注3.7。若 R 是正 SG 左诺特环，则命题 2.2 表明

$$\mathscr{L}(\kappa_+)=\{I\lhd_l R\mid \text{there exist } n,m\in\mathbb{N} \text{ with } (R_{\geq m})^n\subseteq I\}$$

是一个幂等滤子。对应的左正合根记为 κ_+ ，而 $Q_{\kappa_+}(M)$ 是 M 的商模。

接下来，我们将形式化地介绍若干关于半分次环的构造，这些构造是表述 Serre 定理所必需的。

3.1. **半分次环的局部化**。为了定义良好的Ore 集（定义3.8），对于 R 一个SG 环及一个元素 $n\in\mathbb{Z}$，我们考虑以下

集合:

$$
\begin{aligned}
R'_n &= \{r \in R_n \mid \text{ for all } m \in \mathbb{Z}, \text{ and for all } h \in R_m, rh \in R_{n+m}\},\\
R''_n &= \{r \in R'_n \mid \text{ for all } m \in \mathbb{Z}, \text{ and for all } h \in R_m, hr \in R_{n+m}\},\\
R' &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R'_n,\\
R'' &= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} R''_n.
\end{aligned}
$$

定义 3.8。设 R 是一个 SG 环，并考虑 R 的一个左 Ore 集 S。若满足以下条件，我们称 S 是良好的：

(i) $S \subseteq R''$，以及 (ii) 若 $s \in S$ 且 $r \in R'$，则存在元素 $u \in R'$ 和 $v \in S$，使得$us = vr$。

由定义 3.8 可知，对于任意元素 s_1、.....、$s_k \in S$，存在r_1、.....、$r_k \in R'$，使得 $r_i s_i = r_j s_j \in S$，对每个 i，j。

定义 3.9。设 R 是一个 SG 环，M 是一个 SG R-模。若对每个元素 $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$，包含映射$R'_n M_m \subseteq M_{n+m}$ 成立，我们称M 是可局部化半分次（LSG）。

命题 3.10. 设 R 是一个 SG 环，S 是一个良左 Ore 集，且 M 是一个 LSGR-模。那么 $S^{-1}M$ 是一个 LSG R-模，其半分次由下式给出

$$
(S^{-1}M)_n = \left\{ \frac{f}{s} \mid f \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} M_k,\ \deg(f) - \deg(s) = n \right\}.
$$

证明。首先，我们来证明 $(S^{-1}M)_n$ 是 $S^{-1}M$的一个子群。显然，$0 = \frac{0}{1} \in (S^{-1}M)_n$，且 $(S^{-1}M)_n$ 具有加法逆元。考虑元素$\frac{p}{s}$、$\frac{q}{t} \in (S^{-1}M)_n$。则 $\deg(p) - \deg(s) = \deg(q) - \deg(t) = n$。存在元素 $u \in R'$ 和 $v \in S$，使得 $us = vt \in S$。注意，$\deg(u) + \deg(s) = \deg(v) + \deg(t)$。由于 u、$v \in R'$，可得 up 和 vq 是齐次元素，满足 $\deg(up) = \deg(u) + \deg(p) = \deg(v) + \deg(q) = \deg(vq)$，因此 $\frac{p}{s} + \frac{q}{t} = \frac{up+vq}{vt}$是次数为 $\deg(v) + \deg(q) - (\deg(v) + \deg(t)) = n$的齐次元素。

由于显然 $S^{-1}M$ 是子群 $(S^{-1}M)_n$ 的和，下面证明该和是直和。考虑

$$
\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{s_i} = 0
$$

由 $S^{-1}M$ 中次数各不相同的齐次元素构成的和，即 $\deg(m_i) - \deg(s_i) \neq \deg(m_j) - \deg(s_j)$，其中 $i \neq j$。存在元素 $r_1, \ldots, r_k \in R'$，使得$r_i s_i = r_j s_j$ 对所有 i、j 都成立，这意味着

$$
0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{s_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} r_i m_i}{r_1 s_1}.
$$

因此，存在一个元素 $s \in S$，使得 $0 = s\sum_{i=1}^{k} r_i m_i = \sum_{i=1}^{k} s r_i m_i$。由于 s、$r_i \in R'$ 和 m_i 对于 $0 \leq i \leq k$ 是齐次的，因此上述每一项都是齐次的。利用 $r_i s_i = r_j s_j$，我们有 $\deg(r_i) + \deg(s_i) =$

$\deg(r_j)+\deg(s_j)$，由此得出 $\deg(s)+\deg(r_i)+\deg(m_i)\neq\deg(s)+\deg(r_j)+\deg(m_j)$，这表明 $sr_im_i=0$。因此，$0=\frac{r_im_i}{r_is_i}=\frac{m_i}{s_i}$。

现在，我们来证明 $R_a(S^{-1}M)_b\subseteq\bigoplus_{k\leq a+b}(S^{-1}M)_k$。设 $r\in R_a$ 和 $\frac{m}{s}\in(S^{-1}M)_b$。存在元素 $r'\in R$ 和 $s'\in S$，使得 $r's=s'r$。由于s，且$s'\in R''$ 和 r 是齐次的，因此我们可以取齐次元素 r'。于是 $\deg(r')=\deg(s')+\deg(r)-\deg(s)$；又由 $r\frac{m}{s}=\frac{r'm}{s'}$ 和 $r'm\in\bigoplus_{k\leq\deg(r')+\deg(m)}M_k$，可得 $\frac{r'm}{s'}\in\bigoplus_{k\leq\deg(r')+\deg(m)-\deg(s')}(S^{-1}M)_k$。由于 $\deg(r')+\deg(m)-\deg(s')=\deg(r)+\deg(m)-\deg(s)=a+b$，因此 $r\frac{m}{s}\in\bigoplus_{k\leq a+b}(S^{-1}M)_k$。这一事实证明，$S^{-1}M$ 是一个 SG R-模。

注意，若我们如上考虑元素 $r\in R'_a$，那么可以取 $r'\in R'$，由此得到 $r'm\in M_{\deg(r')+\deg(m)}$，因此 $r\frac{m}{s}\in(S^{-1}M)_{a+b}$。这说明 $S^{-1}M$是一个 LSG R-模。□

下一个结果表明，利用良 Ore 集对 SG 环进行局部化后，所得的仍是一个 SG 环。

命题 3.11。设 R 是一个 SG 环，S 是一个良左 Ore 集。那么 $S^{-1}R$ 是一个 SG 环，其半分次由下式给出

$$(S^{-1}R)_n=\left\{\frac{f}{s}\mid f\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}R_k,\ \deg(f)-\deg(s)=n\right\}.$$

证明。显然，R 是一个 LSG R-模，因此 $S^{-1}R$ 是一个 SG R-模，其半分次如上所述，故 $S^{-1}R=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(S^{-1}R)_k$。容易看出 $1=\frac{1}{1}\in(S^{-1}R)_0$。我们只需证明 $(S^{-1}R)_n(S^{-1}R)_m\subseteq\bigoplus_{k\leq n+m}(S^{-1}R)_k$。

设 $\frac{r_1}{s_1}\in(S^{-1}R)_n$ 和 $\frac{r_2}{s_2}\in(S^{-1}R)_m$。存在元素 $u\in R$ 和 $v\in S$，使得 $vr_1=us_2$，这意味着 $\frac{r_1}{s_1}\frac{r_2}{s_2}=\frac{ur_2}{vs_1}$。又由于 s_2、$v\in R''$和 r_1 是齐次的，我们可以取 u 作为齐次元素。因此，$ur_2\in\bigoplus_{k\leq\deg(u)+\deg(r_2)}R_k$，于是 $\frac{ur_2}{vs_1}\in\bigoplus_{k\leq\deg(u)+\deg(r_2)-\deg(v)-\deg(s_1)}(S_{-1}R)_k$，即，$\frac{ur_2}{vs_1}\in\bigoplus_{k\leq n+m}(S^{-1}R)_k$。□

命题3.12。设 R 是一个 SG 环，S 是一个良左 Ore 集，而 M 是一个 LSGR-模。那么 $S^{-1}M$ 是一个 SG $S^{-1}R$-模。

证明。我们知道 $S^{-1}M$ 是一个 $S^{-1}R$-模，也是一个 SG R-模，这意味着直和 $S^{-1}M=\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(S^{-1}M)_k$。这样，我们只需证明$(S^{-1}R)_n(S^{-1}M)_m\subseteq\bigoplus_{k\leq n+m}(S^{-1}M)_k$。考虑元素$\frac{r}{s_1}\in(S^{-1}R)_n$和$\frac{a}{s_2}\in(S^{-1}M)_m$。存在元素 $u\in R$ 和 $v\in S$ 使得 $vr=us_2$，这意味着 $\frac{r}{s_1}\frac{a}{s_2}=\frac{ua}{vs_1}$。此外，由于 s_2、$v\in R''$ 和 r 是齐次的，我们可以将 u 取为一个齐次元素。因此，$ua\in\bigoplus_{k\leq\deg(u)+\deg(a)}R_k$，于是 $\frac{ua}{vs_1}\in\bigoplus_{k\leq\deg(u)+\deg(a)-\deg(v)-\deg(s_1)}(S_{-1}R)_k$，即 $\frac{ua}{vs_1}\in\bigoplus_{k\leq n+m}(S^{-1}R)_k$。□

3.2. **半分次环范畴**。我们定义半分次环的范畴 SGR，其对象为半分次环，态射为齐次环同态。对于半分次环 R，$\mathrm{SGR}-R$ 表示关于 R 的半分次模范畴，其中态射为齐次R–同态。不难看出，$\mathrm{SGR}-R$ 是预加性的，且该范畴的零对象是平凡模。

设 $f\colon M \to N$ 是 SGR $-R$中的一个态射。由于 Ker(f) 和 Im(f) 都是半分次子模，因此 N/Im(f) 是半分次模。这一事实保证范畴 SGR $-R$ 存在核和余核。若 f 是 SGR $-R$中的单态射，则 f 是典范同态$j\colon N \to N$/Im(f)的核。若 f 是满态射，则 f 是包含映射i: Ker(f) $\to M$的余核。由此，范畴 SGR $-R$是正则且余正则的。

若 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是 SGR $-R$中的一族对象，则它们的直和 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是一个半分次环，其半分次结构定义为

$$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)_p := \bigoplus_{i\in I} (M_i)_p,\ p \in \mathbb{Z}.$$

容易看出，带有自然包含映射的这个对象与 SGR $-R$中对象族 $\{M_i\}_{i\in I}$ 的余积一致。因此，SGR $-R$ 是一个阿贝尔范畴。

我们将 LSG $-R$定义为 SGR$-R$的全子范畴，其对象为 LSG 模。该子范畴对子对象、商对象和余积封闭，因此它是阿贝尔范畴。

4. 半分次环的图式性

沿用 Van Oystaeyen 和 Willaert 在 [50], 中提出的思路，本节定义半分次环背景下的图式性概念。对于正SG 环 R，我们定义 $R_+ = \bigoplus_{k\geq 1} R_k$，并称左 Ore 集 S 为非平凡的，如果 $S \cap R_+ \neq \emptyset$。

定义 4.1. 设 R 是一个正向 SG 左诺特环。若存在有限个 I 的非平凡良左 Ore 集，使得对每个 $(x_S)_{S\in I} \in \prod_{S\in I} S$，都存在 $t, m \in \mathbb{N}$ 满足 $(R_{\geq t})^m \subseteq \sum_{S\in I} Rx_s$，则称 R 为（左）图式的。

以下结果说明了图式性的若干刻画（参见定义 2.6）。

命题 4.2. 设 R 是一个正向 SG 左诺特代数，且 $S_1, \ldots, S_n$是 R的有限个非平凡良左 Ore 集。以下条件等价：

(1) 对每个 $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n S_i$，都存在元素 $t, m \in \mathbb{N}$，使得 $(R_{\geq t})^m \subseteq \sum_{S\in I} Rx_s$。(2) 设 $I \lhd_l R$。若 I 与每个 S_i的交均非平凡，则 I 包含某个 $t \in \mathbb{N}$的幂 $R_{\geq t}$。(3) $\bigcap_{i=1}^n \mathscr{L}(S_i) = \mathscr{L}(\kappa_+)$。

证明。 等价关系 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 和蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (1) 显而易见。

(1) $\Rightarrow$(3) 设 $I \in \bigcap_{i=1}^n \mathscr{L}(S_i)$。存在元素 $x_1, \ldots, x_n$，使得 $x_i \in I \cap S_i$ 对每个 i 都成立。因此 $\sum_{i=1}^n Rx_i \subseteq I$，并且存在 t, m，使得 $(R_{\geq t})^m \subseteq I$，这说明 $I \in \mathscr{L}(\kappa_+)$。

现在，令 $I \in \mathscr{L}(\kappa_+)$。存在 t, m 使得 $(R_{\geq t})^m \subseteq I$。利用$S_i \cap R_+ \neq \emptyset$，存在元素 $s_i \in S_i$ 使得 deg(s_i) ≥ 1，对所有 i 均成立。因此$s_i^t \in R_{\geq t}$, $s_i^{tm} \in (R_{\geq t})^m \subseteq I$，从而 $I \cap S_i \neq \emptyset$。这表明 $I \in \bigcap_{i=1}^n \mathscr{L}(S_i)$。□

如果通过考虑良好左 Ore 集 S_i， R 是图式的，那么对于每个 R-模 M，$\bigcap_{i=1}^{n}\kappa_{S_i}(M) = \kappa_+(M)$。如果 M是可局部化半分次–模，那么对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们有 $\kappa_{S_i}(M)$ 是一个 SG 子模，因此 $\kappa_+(M)$ 也是一个 SG 子模。这些事实表明， $M/\kappa_+(M)$ 是一个 SG R-模，因此是$Q_{\kappa_+}(M)$ 的一个子模。本节接下来的讨论中，我们将令 $\mathscr{L} := \mathscr{L}(\kappa_+)$。其思路是证明 $Q_{\kappa_+}(M)$ 是半分次的。

我们首先取一个 LSG R-模 M，使得 $\kappa_+(M) = 0$。显然， $Q_{\kappa_+}(M) = M_{\mathscr{L}}$，且 $\varphi_M(M) \cong M$。因此， $\varphi_M(M)$ 是 $M_{\mathscr{L}}$ 的一个子模，而 $M_{\mathscr{L}}$ 是一个 SG R-模，其中，当且仅当 m 为 k 次齐次时， $\varphi_M(m)$ 为 k 次齐次。若要使 $M_{\mathscr{L}}$ 成为一个 LSG R-模，则必须满足：若 ξ 为 k 次齐次，那么对于每个 $s \in R'$，元素 $s\xi \in (\varphi_M(M))^{\deg(s)+k}$。现在，由于存在 $I \in \mathscr{L}$ 使得 $I\xi \subseteq \varphi_M(M)$，下面的定义是有意义的。

定义 4.3。设 $\xi \in M_{\mathscr{L}}$。如果存在 $I \in \mathscr{L}$ 使得 $I\xi \subseteq \varphi_M(M)$，且对于每个元素 $s \in I \cap R'$，都有 $s\xi \in (\varphi_M(M))^{\deg(s)+k}$，则称元素 ξ 为 次齐次。

注意，如果上述条件对 I 成立，那么对每个 $J \subseteq I$ 也成立。下面的引理表明，包含 I 的理想满足此条件。

注记 4.4。由于良 Ore 集 S_i 非平凡，因此存在元素 $s_i' \in S_i \cap R_+$，使得 $i = 1$, ..., n，由此 $\alpha_i = \deg(s_i') > 0$。若定义 $m := \operatorname{lcm}\{\alpha_i\}_{1\le i\le n}$ 和 $s_i'' := (s_i')^{m/\alpha_i}$，则得到 $s_i'' \in S_i \cap R_+$，且它们的次数都相同。现在，若考虑一个元素 $I \in \mathscr{L}$，则存在 t、$n \in \mathbb{Z}$，使得 $(R_{\ge t})^n \subseteq I$。因此， $s_i = (s_i'')^{tn} \in I \cap S_i$，这意味着 $\sum_{i=1}^{n} Rs_i \subseteq I$。这样，对每个 $I \in \mathscr{L}$，都存在元素 $s_i \in S_i$，它们的正次数都相同，并满足关系 $\sum_{i=1}^{n} Rs_i \subseteq I$。

引理 4.5. 设 $I, J \in \mathscr{L}$是理想，使得 $I \subseteq J$且 $I\xi, J\xi \subseteq \varphi_M(M)$。若对每个 $s \in I \cap R'$，元素 $s\xi \in (\varphi_M(M))^{\deg(s)+k}$，则每个 $s \in J \cap R'$也都满足同一性质。

证明。设 $s \in J \cap R'$。那么 $s\xi \in \varphi_M(M)$，因此存在 $\varphi_M(M)$ 中的齐次元素ξ_j，$j = l_1, \ldots, l_r$，满足 $\xi_j \in (\varphi_M(M))_j$，并且使得 $s\xi = \sum \xi_j$。如前所述，若该性质对 I 成立，则对任何包含于 I 的理想也成立，因此可取 $I = (R_{\ge t})^m$，其中 $t, m \in \mathbb{N}$。由上可知，对 $i = 1, \ldots, n$，存在 $s_i \in S_i$，使得 $\sum Rs_i \subseteq I$，且对每个 $1 \le i \le n$都有 $\deg(s_i) = \beta$。特别地，每个元素 $s_i \in I$，因此 $s_i s \in I$（回忆一下， I 是双边理想）。根据假设，对每个 i，都有 $s_i s\xi \in (\varphi_M(M))^{\deg(s)+\beta+k}$。

另一方面，如果我们将表达式 $s_i s\xi = \sum s_i\xi_j$ 表示为 $\varphi_M(M)$ 的齐次元素之和，那么对于每个 $j \ne k+\deg(s)$，等式 $s_i\xi_j = 0$ 都成立。由于这对每个 i 都成立，因此可得 $\xi_j \in \bigcap_{i=1}^{n}\kappa_{S_i}(\varphi_M(M)) = \kappa_+(\varphi_M(M)) = 0$（回想一下， $\kappa_+(M) = 0$）。因此， $s\xi = \xi_{\deg(s)+k}$。 □

根据引理 4.5，只需考虑任意满足 $I\xi \subseteq \varphi_M(M)$ 的理想 I，即可保证该性质。我们的目的是提供一种更简单的方法来验证元素 ξ 是否为齐次元素。设 $\xi = [I, f]$。由于 $I\xi \subseteq \varphi_M(M)$，元素 ξ 是次数为 k 的齐次元素，当且仅当对于每个 $s \in I \cap R'$，元素$s\xi = [R, \beta(f(s))] = \varphi_M(f(s)) \in (\varphi_M(M))^{\deg(s)+k}$，或者等价地，对于所有 $s \in I \cap R'$，元素 $f(s) \in M_{\deg(s)+k}$。

对于态射 $f\colon I \to M$，若对每个 $s \in I \cap R'$，元素 $f(s)$ 都是次数为 $\deg(s) + k$ 的齐次元素，我们就称 f 为次数为 k 的齐次态射。因此，$[I, f]$ 是次数为 k（在 $M_{\mathscr{L}}$ 中）的齐次元素，当且仅当 f 是次数为k 的齐次元素。设 $(M_{\mathscr{L}})_k$ 为次数为 k 的齐次元素所构成的族。显然，$(M_{\mathscr{L}})_k$ 是一个子群，并且 $\varphi_M(M_k) \subseteq (M_{\mathscr{L}})_k$。

注4.6。我们称态射 $f\colon I \to M$ 为次数为 k 的强齐次态射，若对每个齐次元素 $s \in I$，元素 $f(s)$ 都是次数为 $\deg(s) + k$ 的齐次元素。显然，在分次环的情形下，齐次态射和强齐次态射的概念是一致的。

另一方面，若其某个代表元是次数为 k 的强齐次态射，则称 $[I, f]$ 为次数为 k 的强齐次态射。令 $(\overline{M_{\mathscr{L}}})_k$ 为次数为 k 的强齐次元素族。不难看出，$\overline{R_{\mathscr{L}}} = \bigoplus(\overline{R_{\mathscr{L}}})_k$ 是一个分次环，而 $\overline{M_{\mathscr{L}}} = \bigoplus(\overline{M_{\mathscr{L}}})_k$ 是一个 $\overline{R_{\mathscr{L}}}$-分次模。还需注意，若 $s \in R''$，则 $\varphi_R(s) \in \overline{R_{\mathscr{L}}}$；特别地，$\overline{R_{\mathscr{L}}}$ 是分次环 $\bigoplus R''_k$ 的一个扩张。显然，$\overline{R_{\mathscr{L}}}$ 是 $R_{\mathscr{L}}$ 的一个 R-子模，当且仅当 R 是分次的。最后这条说明表明，对于非分次环而言，考虑强齐次态射并不合适。

命题 4.7. 和 $\sum(M_{\mathscr{L}})_k$ 是直和。

证明。设 $[I_i, f_i] \in (M_{\mathscr{L}})_{k_i}$，其中 $i = 1, \ldots, m$ 满足：若 $i \neq j$，则 $k_i \neq k_j$。注意，若 $\sum[I_i, f_i] = 0$，则存在 $J \subseteq \bigcap I_i$, $J \in \mathscr{L}$，使得 $(\sum f_i)|_J = \sum f_i|_J = 0$。我们可以取某个 $s_j \in S_j$，令 $J = \sum Rs_j$。设 $s \in J \cap R'$ 满足 $\deg(s) = l$。则$0 = (\sum f_i)(s) = \sum f_i(s)$；由于 $f_i(s)$ 是次数为 $l + k_i$ 的齐次元素，且所有元素 k_i 互不相同，因此我们得到一个不同次数的齐次元素之和等于零，从而对每个 i，都有 $f_i(s) = 0$。特别地，对所有i, j，都有 $f_i(s_j) = 0$。因此，对所有 $x \in J$，都有 $f_i(x) = 0$，故 $[J, f_i|J] = [I_i, f_i] = 0$。□

设 $[I, f] \in M_{\mathscr{L}}$满足 $I = \sum_{i=1}^{n} Rs_i$，其中 $s_i \in S_i \cap R''_k$ 是一些元素。由于 s_i 的数量有限，我们可以认为元素 $f(s_i)$ 的齐次分解具有相同的长度，记为 $f(s_i) = \sum_{t=\alpha}^{\beta}(f(s_i))_{t+k}$，其中 $(f(s_i))_j$ 是 $f(s_i)$ 的第 j 个齐次分量。取 $f_t(s_i) = (f(s_i))_{t+k}$，可得 $f(s_i) = \sum_{t=\alpha}^{\beta} f_t(s_i)$。对于元素 $t = \alpha$、……、β，我们以自然方式定义映射 $f_t\colon I \to M$，使得 $f_t(\sum a_i s_i) = \sum a_i f_t(s_i)$。然而，我们还必须证明这些映射是良定义的。以下命题给出了这一点。

命题 4.8。 f_t 对每个元素 $t = \alpha$、……、β 都是良定义的。

证明。 我们将证明分为三个部分。

- 假设 $0 = \sum a_i s_i$，其中 $a_i \in R_{k_1}$ 对每个 i 都成立（回忆一下，$s_i \in R''_k$）。固定 i。由于对每个 $1 \leq j \leq n$都有 $s_j \in R''$，因此存在元素 $u_j \in R'$ 和 $v_j \in S_i$，使得 $u_j s_i = v_j s_j$。特别地，$\deg(u_j) =\deg(v_j)$，且由于 $u_j, v_j \in R'$, $u_j f(s_i) = v_j f(s_j)$，又因为 M是可局部化半分次的，比较次数相同的齐次分量可得，对每个 $\alpha \leq t \leq \beta$，都有 $u_j f_t(s_i) = v_j f_t(s_j)$。

  现在，利用 $v_1 \in S_i$ and $a_1 \in R$，存在元素 $b_1 \in R$and $c_1 \in S_i$ 使得 $b_1 v_1 = c_1 a_1$。将这一论证重复应用于元素 v_2 and $c_1 a_2$，可得 $b_2 \in R$ and $c_2 \in S_i$ 满足等式$b_2 v_2 = c_2 c_1 a_2$。如此继续下去，对于每个 $1 \leq j \leq n$，我们都能找到元素 $b_j \in R$ and $c_j \in S_i$ 使得 $b_j v_j = \prod_{i=1}^{j} c_i a_j$（注意，

元素 b_i's 可以取为齐次元素）。若定义 $c := \prod_{i=1}^{n} c_i \in S_i$ and $d_j = \prod_{i=j+1}^{n} c_i b_j$，则对每个 $1 \le j \le n$，都有 $d_j v_j = c a_j$。因此 $0 = c\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = \sum_{j=1}^{n} d_j v_j s_j = \sum_{j=1}^{n} d_j u_j s_i = r s_i$，其中 $r = \sum_{j=1}^{n} d_j u_j$。注意，元素 $d_j u_j$ 是次数相同的齐次元素，这意味着 r 也是齐次的。由于 $0 = r s_i$，根据非交换局部化的第一条条件，存在元素 $s \in S_i$ 使得$sr = 0$。

现在，考虑这些等式

$$sc\sum_{j=1}^{n} a_j f_t(s_j) = s\sum_{j=1}^{n} d_j v_j f_t(s_j) = s\sum_{j=1}^{n} d_j u_j f_t(s_i) = sr f_t(s_i) = 0,$$

由此可得 $\sum_{j=1}^{n} a_j f_t(s_j) \in \kappa_{S_i}(M)$。由于这对每个元素 i 都成立，因此有 $\sum_{j=1}^{n} a_j f_t(s_j) \in \bigcap \kappa_{S_i}(M) = \kappa_+(M) = 0$，从而$\sum_{j=1}^{n} a_j f_t(s_j) = 0$。

- 假设 $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$ （元素 a_i 不一定是齐次的）。由于 a_i 只有有限多个，我们可以考虑总和 $a_i = \sum_{j=l_1}^{l_2} b_{i,j}$，其中 $b_{i,j} \in R_j$。这样，$0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l_1}^{l_2} b_{i,j} s_i = \sum_{j=l_1}^{l_2}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} s_i$。现在，利用 $\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} s_i \in R_{j+k}$ 是次数为 $j + k$ 的齐次分量，可得 $0 = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} s_i$。根据上文第一部分，我们可以断言 $\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_t(s_i) = 0$，从而 $0 = \sum_{j=l_1}^{l_2}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} f_t(s_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=l_1}^{l_2} b_{i,j} f_t(s_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_t(s_i)$，其中 $\alpha \le t \le \beta$。

- 设 r 是 $\sum Rs_i$的一个元素。假设 r 有两个表达式，分别为 $r = \sum a_i s_i = \sum b_i s_i$。那么 $0 = \sum(a_i - b_i)s_i$。由上面的第二部分可知，$\sum(a_i - b_i) f_t(s_i) = 0$，因此对于 $\alpha \le t \le \beta$，有 $\sum a_i f_t(s_i) = \sum b_i f_t(s_i)$。这意味着 $f_t(r)$的表达式不依赖于 r的分解。

□

由命题 4.8 的证明可知，映射 f_t 都是 R–齐次态射。下一个命题将证明它们是次数为t的齐次映射。

命题 4.9。 映射 f_t 是次数为 t的齐次映射。

证明。考虑满足 $\deg(s) = l$ 的 $s \in I \cap R'$。令 $(f_t(s))_m$ 为 $f_t(s)$的表达式中次数为 m 的齐次分量。对固定的 i，存在元素$v_i \in S_i$ 和 $u_i \in R'$，使得 $u_i s_i = v_i s$，这意味着 $v_i f_t(s) = u_i f_t(s_i)$。由于 $f_t(s_i) \in M_{t+k}$, $u_i, v_i \in R''$ 且 M 是可局部化半分次，当比较这些元素的齐次分量时，我们有：若 $m \ne t + l$，则 $v_i(f_t(s))_m = 0$，从而 $(f_t(s))_m \in \kappa_{S_i}(\varphi_M(M))$。由于这一事实对每个 i都成立，因此 $(f_t(s))_m \in \bigcap \kappa_{S_i}(\varphi_M(M)) = \kappa_+(\varphi_M(M)) = 0$。因此，$f_t(s) = (f_t(s))_{t+l}$，这表明 f_t 是次数为 t的齐次映射。□

命题 4.7、4.8和4.9 推出了以下重要结果。

命题 4.10。 若 M是一个可局部化半分次 R-模，且 $\kappa_+(M) = 0$，则 $Q_{\kappa_+}(M) = M_{\mathscr{L}}$ 是一个可局部化半分次 R-模，其半分次由下式给出

$$M_{\mathscr{L}} = \bigoplus_k (M_{\mathscr{L}})_k.$$

定理 4.11。若 M是一个可局部化半分次 R–模，则 $Q_{\kappa_+}(M)$是一个可局部化半分次 R–模。

证明。由命题4.10 可得 $\kappa_+\left(M/\kappa_+(M)\right) = 0$ 以及 $Q_{\kappa_+}(M) = Q_{\kappa_+}(M/\kappa_+(M))$。□

5. Serre-Artin-Zhang-Zerevkin 定理

本节中，我们采用不同于 Lezama 所提出的方法，证明适用于半分次环的 Serre-Artin-Zhang-Zerevkin 定理（定理5.23）[27, 29]。

简而言之，该定理由 Lezama 和 Latorre [29, 定理 6.12] 部分提出，其中假设半分次左诺特环是整环。然而，众所周知，适用于有限分次代数的 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理并未包含这一限制，因此 Lezama 去除了这一假设 [27, 定理 1.24]（另见 [14, 第 18.4 节，定理 18.5.13]）。更准确地说，他证明了满足以下条件的 SG 环 $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$的定理：

(C1) R 是左诺特的；(C2) R_0 是左诺特的；(C3) 对每个 n，R_n 都是有限生成的左 R_0-模；(C4) $R_0 \subset Z(R)$。

注意，条件 (C4) 意味着 R_0 是交换诺特环。

有限维李代数的泛包络代数、一些具有三个生成元的量子代数，以及一些三维斜多项式代数的例子 [8, 34, 37] 说明了塞尔-阿廷-Zhang-Verevkin 定理 [27,例 1.26] 和 [14, 例 18.5.15]。

我们从以下预备结果开始。

引理 5.1. 设 R 是一个正分次 *SG* 左诺特环，且 S 是 R的一个非平凡左 *Ore* 集。那么 $\mathscr{L}(\kappa_+) \subseteq \mathscr{L}(S)$。

证明。设 $I \in \mathscr{L}(\kappa_+)$。存在元素 $t, n \in \mathbb{N}$ 使得 $R^n_{\geq t} \subseteq I$。由于S 是非平凡的，因此存在 $s \in S$，满足 $\deg(s) \geq 1$，由此可得 $s^{tn} \in R^n_{\geq t}$。这一事实表明 $S \cap I \neq \emptyset$。□

引理 5.1 指出，若 M 是一个 R-模，且 S 是R的非平凡左 Ore 集，那么 $\kappa_+(M) \subseteq \kappa_S(M)$。

引理 5.2。设 R 是正分次的SG 左诺特环，且 S 是一个非平凡的良左 *Ore* 集。若 M是一个可局部化半分次 R-模，则 $S^{-1}(M) \cong S^{-1}(Q_{\kappa_+}(M))$。

证明。设

$$f\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}(M/\kappa_+(M))$$
$$\frac{m}{s} \longmapsto \frac{\overline{m}}{s}.$$

显然，f 是满射。设 $\frac{m}{s} \in$ 核(f)。那么 $\frac{\overline{m}}{s} = 0$，因此存在$s' \in S$ 使得$s'\overline{m} = 0$，即 $s'm \in \kappa_+(M) \subseteq \kappa_S(M)$。因此，存在$s'' \in S$ 满足 $s''s'm = 0$，又由于 $s''s' \in S$，可得 $\frac{m}{s} = 0$。因此，$S^{-1}(M) \cong S^{-1}(M/\kappa_+(M))$。

现在，设

$$g\colon S^{-1}(M/\kappa_+(M)) \longrightarrow S^{-1}(Q_{\kappa_+}(M))$$
$$\frac{\overline{a}}{s} \longmapsto \frac{h(\overline{a})}{s},$$

其中 h是 $M/\kappa_+(M)$ 与 $\varphi_M(M)$ 之间的同构。由于 h是单射，因此 g也是单射。令 $\frac{\xi}{s} \in S^{-1}(Q_+(M))$。那么存在元素 t、$n \in \mathbb{N}$，使得 $(R^n_{\geq t})\xi \subseteq \varphi_M(M)$。由于 S 并非平凡的，在引理 5.1 的证明中重复上述论证，我们可以断言存在 $s' \in S$，使得 $s'' = (s')^{tn} \in R^n_{\geq t}$。这样，$s''\xi \in \varphi_M(M)$，因此存在 $m \in M$，使得 $s''\xi = \varphi_M(m)$，由此得到 $g\left(\frac{m}{s''s}\right) = {}^{h}(\frac{\overline{m}}{s''s} = {}^{\varphi_M})\left(\frac{m}{s''s}\right) = \frac{s''\xi}{s''s} = \frac{\xi}{s}$。我们得出结论：$S^{-1}(Q_+(M)) \cong S^{-1}(M/\kappa_+(M)) \cong S^{-1}(M)$。□

在本节余下部分，R 表示一个示性环（回想一下，根据定义 4.1 R 是左诺特的）。考虑 LSG $-R$的全子范畴（R,κ_+）$-$LSG，其对象为 κ_+-闭模。若 M 是一个 R-模且 κ_+闭，N 是 M的子模，则 N 是 κ_+闭的，当且仅当 M/N 是 κ_+无挠的（命题 4.2，第 IX 章]）。因此，显然，κ_+-闭模的交仍是 κ_+闭的。由此可考虑由 M的一个子集生成的 κ_+-闭子模。若定义

$$N^c = \{x \in M \mid (N : x) \in \mathscr{L}(\kappa_+)\},$$

那么显然，N^c是由 N生成的 κ_+闭子模，而且事实上，$N^c = M$ 当且仅当 M/N 是 κ_+挠的。

注意，在范畴（R,κ_+）$-$LSG 中，子对象是 LSG-κ_+闭子模，它们对任意交封闭。由 $X \subseteq M$ 生成的 LSG-κ_+闭子模记作 $\langle X\rangle^{\mathsf{SG}-\kappa}$。若存在一个有限集 $X \subseteq M$ 使得 $\langle X\rangle^{\mathsf{SG}-\kappa} = M$，我们就称 M为 LSG-κ_+-有限生成的。令 Proj(R) 为有限生成 R-模的 LSG-κ_+ 范畴。

命题 5.3. 若 N是 M的 SG 子模，则 N^c也是。

证明。设 $m = m_1 + \cdots + m_k \in N^c$，且 $m_i \in M_{l_i}$。存在 $I \in \mathscr{L}$（κ_+），使得 $I \subseteq$（N: m）。由于 R可由良左 Ore 集 S_i、$i = 1$、.....、n图式化，设为如此，则存在元素 $s_i \in S_i$，满足 $\sum Rs_i \subseteq I$，由此对所有 i都有 $s_i m \in N$。由于N是 SG，且 $s_i \in R''$，因此对每个 i、j，都有 $s_i m_j \in N$。于是，$\sum_{i=1}^n Rs_i \subseteq$（$N$: m_j），这表明 $m_j \in N^c$。□

由这些事实可知，对每个 $X \subseteq M$，等式 $\langle X\rangle^{\mathsf{SG}-\kappa} = \left(\langle X\rangle^{\mathsf{SG}}\right)^c$ 成立。这样，M是 LSG-κ_+-有限生成，当且仅当存在有限集 $X \subseteq M$使得 $\left(\langle X\rangle^{\mathsf{SG}}\right)^c = M$；等价地，$M/M_1$ 是 κ_+-挠的，且 $M_1 = \langle X\rangle^{\mathsf{SG}}$。

接下来，我们定义非交换位点的概念。

定义 5.4。令 $\mathscr{O}$ 为 R 的非平凡良左 Ore 集的集合，令 $\mathscr{W}$为由 $\mathscr{O}$生成的自由幺半群。我们定义范畴 $\underline{\mathscr{W}}$如下：$\underline{\mathscr{W}}$的对象是 $\mathscr{W}$的元素。对于两个词 W和 W'，我们将 $\underline{\mathscr{W}}$ 的态射记为 Hom(W',W)；若存在一个从 W 中的字母到 W' 中的字母的递增单射，即对于某些字母 S_i和某些（可能为空的）词 V_i，有 $W = S_1$、$\ldots S_n$和 $W' = V_0S_1V_1S_2V_2\ldots S_nV_n$，则 Hom($W',W$)是单元素集 $\{W' \to W\}$。否则，Hom(W',W)定义为空集。

容易看出， $\mathscr{W}$ 是一个薄范畴。我们将空字记作 1，它是该范畴的终对象。

若 $W = S_1 \dots S_n \in \mathscr{W} \setminus \{1\}$ 和 M 是一个 LSG R-模，我们定义

$$Q_W(M) = S_n^{-1}R \otimes_R \cdots \otimes_R S_1^{-1}R \otimes_R M.$$

引理 5.2 断言，若 $W \neq 1$，则 $Q_W(M) \cong Q_W(Q_{\kappa_+}(M))$。

若 $W = S_1 \dots S_n \in \mathscr{W} \setminus \{1\}$，我们称 $w \in W$ 若 $w = s_1 \dots s_n$ 且满足 $s_i \in S_i$。我们为 W 关联一个左理想集合，即

$$\mathscr{L}(W) = \{I \lhd_l R \mid \text{ there exists } w \in W \text{ such that } w \in I\}.$$

我们定义 $\mathscr{L}(1) = \mathscr{L}(\kappa_+)$。

引理 5.5. 设 $W \in \mathscr{W} \setminus \{1\}$ 和 w， $w' \in W$。则存在 $w'' \in W$，使得 $w'' = aw$ 且 $w'' = bw'$，其中 a， $b \in R$ 为某些元素。

证明。 我们通过对 W 中元素的长度进行归纳来证明该断言。若 $W = S_1$，则根据 Ore 条件，存在元素 $a \in R$ 和 $b \in S_1$ ，使得 $aw = bw' \in S_1$。

假设该断言对长度为 k 的每个元素都成立。令 $W = S_1 \dots S_{k+1}$, $W = S_2 \dots S_{k+1}$, $w = s_1 \dots s_{k+1}$, $w' = s'_1 \dots s'_{k+1} \in W$, $x = s_2 \dots s_{k+1}$，且 $x' = s'_2 \dots s'_{k+1}$。根据归纳步骤，存在元素 $a, b \in R$，使得 $ax = bx' \in W$。由于 S_1 是左 Ore 集，因此存在 $s''_1 \in S_1$ 和 $a_1 \in R$，使得 $a_1 s_1 = s''_1 a$。于是， $a_1 w = a_1 s_1 x = s''_1 ax = s''_1 bx' \in W$。再次根据 Ore 条件，存在 $s^*_1 \in S_1$ 和 $b_1 \in R$ ，使得 $b_1 s'_1 = s^*_1 s''_1 b$，由此可得 $b_1 w' = b_1 s'_1 x' = s^*_1 s''_1 bx' = s^*_1 a_1 w \in W$。□

注记 5.6. 引理 5.5 可以扩展到有限个词的集合，即，如果 $w_1, \dots, w_i \in W$，那么存在 $a_1, \dots, a_n \in R$ 使得 $a_1 w_1 = a_2 w_2 = \cdots = a_n w_n \in W$。

引理 5.7. 设 $W \in \mathscr{W} \setminus \{1\}$、 $w \in W$ 和 $a \in R$。存在元素 $w' \in W$ 和 $b \in R$ ，使得 $w'a = bw$。

证明。 我们对 W 中词的长度使用归纳法进行证明。若 $W = S_1$，则该断言正是 Ore 条件。

假设该引理对长度为 k 的每个元素都成立。设 $W = S_1 \dots S_{k+1}$、 $\tilde{W} = S_2 \dots S_{k+1}$、 $w = s_1 \dots s_{k+1}$ 和 $x = s_2 \dots s_{k+1}$。根据归纳步骤，存在 $\tilde{}$，使得元素 $x' \in W$ 和 $b \in R$ 满足 $x'a = bx$。由于 S_1 是一个 Ore 集，因此存在 $s'_1 \in S_1$ 和 $b' \in R$ ，使得 $s'_1 b = b' s_1$，从而 $s'_1 x' a = s'_1 bx = b' s_1 x = b' w$。□

引理5.5 和5.7 使我们可以得出结论： $\mathscr{L}(W)$ 是一个滤子。在 $W \neq 1$ 的情况下，我们称 κ_W 为与预根相关联的 $\mathscr{L}(W)$。不难看出，对于每个可局部化半分次 R-模 M，下列等式成立

$$\kappa_W(M) = \{m \in M \mid \text{存在 } w \in W \text{ 使得 } wm = 0\} = \text{核}(M \to Q_W(M))。$$

根据 [50, 第 113], 页，全局覆盖是一个有限子集 $\{W_i \mid i \in I\}$ ，其中 $\mathscr{W}$ 满足 $\bigcap_{i \in I} \mathscr{L}(W_i) = \mathscr{L}(\kappa_+)$。对于 $W \in \mathscr{W}$，$\mathrm{Cov}(W)$ 定义为由 $\mathscr{W}$ 中形如 $\{W_i W \to W \mid i \in I\}$ 的态射组成的所有集合，其中 $\{W_i \mid i \in I\}$ 是一个全局覆盖。显然，$\{1\}$ 是一个全局覆盖，称为平凡覆盖。注意，图式条件保证至少存在一个非平凡的

全局覆盖。这一覆盖集不是 $\mathscr{W}$的格洛腾迪克拓扑，但满足类似的条件（命题 5.9），因此我们可以讨论$\mathscr{W}$上的层。基于这一原因，Van Oystaeyen 和 Willaert 将带有这些覆盖的范畴 $\mathscr{W}$称为非交换位点(参见 [51])。

下面引理的证明与分次环的情形类似 [50,引理 1]。为使本文完整，我们将其列出。

引理 5.8. 若 $\{W_i \mid i \in I\}$ 是全局覆盖，则对所有 $V \in \mathscr{W}$，

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{L}(W_iV) = \mathscr{L}(V).$$

证明. 若 $I \in \mathscr{L}(V)$，则存在 $v \in V$使得 $v \in I$。令 $w_i \in W_i$，我们有$w_iv \in W_iV$且 $w_iv \in I$，因此 $I \in \mathscr{L}($ $W_iV)$。由此，$\mathscr{L}(V) \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{L}(W_iV)$。

令 $I \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{L}(W_iV)$，对于每个 i，存在 $v_i \in V$ 和 $w_i \in W_i$，使得 $w_iv_i \in I$。由注 5.6，存在 $a_1, \ldots, a_n \in R$ 和 $v \in V$，使得 $v = a_iv_i$，对于每个 i。由引理 5.7，我们得到存在 $w_i' \in W_i$ 和 $b_i \in R$，满足 $w_i'a_i = b_iw_i$。由于 $w_i' \in \sum Rw_i'$ 和 $\{W_i \mid i \in I\}$ 是一个全局覆盖，存在元素 n、$t \in \mathbb{N}$，使得 $R^n_{\geq t} \subseteq \sum Rw_i'$。乘以 v，得到$\left(R^n_{\geq t}\right) v \subseteq I$。若 S 是 V 的首字母，则存在 $s \in S \cap R^n_{\geq t}$。最后，$sv \in I$ 和 $sv \in V$，因此 $I \in \mathscr{L}(V)$。□

命题 5.9。范畴 $\mathscr{W}$ 连同对任意元素 $W \in \mathscr{W}$ 的集合 Cov(W) 满足以下性质：

G_1：$\{W \to W\} \in$ Cov(W)，G_2：$\{W_i \to W \mid i \in I\} \in$ Cov(W) 且 $\forall i \in I$：$\{W_{ij} \to W_i \mid j \in I_i\} \in$ Cov(W_i)，则 $\{W_{ij} \to W_i \to U \mid i \in I, j \in I_i\} \in$ Cov(W)；
G_3：若 $\{W_iW \to W \mid i \in I\} \in$ Cov(W)，$W' \to W \in \mathscr{W}$，且若我们定义 $W_iW \times_W W' = U_iW'$，则 $\{W_iW \times_W W' \to W' \mid i \in I\} \in$ Cov(W')。

证明。 G_1 成立是因为 $\{1\}$ 是一个全局覆盖，G_2 直接由引理5.8以及 G_3 显然。□

定义 5.10和 5.11 分别在范畴 $\mathscr{W}$.中引入了预层和层的概念

定义 5.10。 $\mathscr{F}$ 上的一个预层 $\mathscr{F}$ 是一个从 $\mathscr{W}$到可局部化半分次范畴 $-R$的反变函子，并且对于所有 $W \in \mathscr{W}\backslash\{1\}$，$\mathscr{F}$在 W上的截面 $\mathscr{F}(W)$都是一个 SG $S^{-1}R$-模，其中 S 表示 W 的末字母，而 $\mathscr{F}(1)$是一个 SG$Q_{\kappa_+}(R)$-模。

由于 $\mathscr{F}(1)$表示整体截面，我们将其记为 $\Gamma_*(\mathscr{F})$。我们将 $\mathscr{F}(V \to W)$简记为 ρ^W_V: $\mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(V)$; 若 $W = 1$，则记作 ρ_V而非 ρ^1_V。

定义 5.11。 $\mathscr{F}$ 上的预层$\mathscr{W}$若满足以下两个性质，则称为层：

(i) 分离性：对于所有元素 $W \in \mathscr{W}$以及每个全局覆盖 $\{W_i \mid i \in I\}$，若 $m \in \mathscr{F}$ (W) 满足：对于每个 $i \in I$，$\rho^W_{W_iW}(m) = 0$属于 $\mathscr{F}(W_iW)$，则 $m = 0$。

(ii) 粘合：对于所有 $W \in \mathscr{W}$ 以及每个全局覆盖 $\{W_i \mid i \in I\}$，给定满足以下条件的 $(m_i) \in \prod_i \mathscr{F}(W_iW)$

$$\rho^{W_iW}_{W_iW_jW}(m_i) = \rho^{W_jW}_{W_iW_jW}(m_j), \quad \text{for all } (i,j) \in I \times I,$$

存在一个元素 $m \in \mathscr{F}(W)$，使得

$$\rho^{W}_{W_iW}(m) = m_i, \text{ for all } i \in I.$$

注记 5.12。预层 $\mathscr{F}$ 是层，当且仅当对于每个词 W 和每个全局覆盖 $\{W_i \mid i \in I\}$，$\mathscr{F}(W)$（箭头由 $\mathscr{F}$给出）都是该图表的极限

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(W_iW) & \longrightarrow & \mathscr{F}(W_iW_jW) \\ & \searrow\!\!\nearrow & \\ \mathscr{F}(W_jW) & \longrightarrow & \mathscr{F}(W_jW_iW) \end{array} \tag{5.1}$$

证明。假设 $\mathscr{F}$ 是层。设 M 是一个 SG R-模，带有态射 $f_i : M \to \mathscr{F}(W_iW)$，这些态射与态射 $\rho^{W_iW}_{W_iW_jW}$和 $\rho^{W_iW}_{W_jW_iW}$相容。考虑一个元素 $m \in M$。利用这种相容性，我们有 $\prod_i \mathscr{F}(W_iW)$中的元素（$f_i(m)$)满足等式

$$\rho^{W_iW}_{W_iW_jW} f_i(m) = \rho^{W_jW}_{W_iW_jW} f_j(m), \quad \text{for all } (i,j) \in I \times I.$$

由此，存在唯一的元素 $m' \in \mathscr{F}(W)$，使得对于每个 $i \in I$，$\rho^{W}_{W_iW}(m') = f_i(m)$。若将映射 β: $M \to \mathscr{F}(W)$ 定义为 $\beta(m) = m'$，则显然 β 是一个齐次 R-同态，并且它是唯一满足等式 $\rho^{W}_{W_iW} \circ \beta = f_i$的映射，对所有 $i \in I$均成立。因此，$\mathscr{F}(W)$ 是图表 (5.1) 的极限。

另一方面，假设 $\mathscr{F}(W)$ 是图表（5.1）的极限。令 $m \in \mathscr{F}(W)$ 满足 $\rho^{W}_{W_iW}(m) = 0$，对每个 $i \in I$。这意味着 $m \in \bigcap \mathrm{Ker}(\rho^{W}_{W_iW})$，并且根据关于 $\mathscr{F}(W)$ 的假设，$\bigcap \mathrm{Ker}(\rho^{W}_{W_iW}) = 0$，因此 $m = 0$。令

$$A := \{(m_i) \in \prod \mathscr{F}(W_iW) \mid \rho^{W_iW}_{W_iW_jW}(m_i) = \rho^{W_jW}_{W_iW_jW}(m_j), \text{ for all } (i,j) \in I \times I\}.$$

显然，A 是 $\prod \mathscr{F}(W_iW)$的一个 SG R-子模，这保证了存在唯一的齐次 R–同态 β: $A \to \mathscr{F}(W)$，使得对所有 $i \in I$ 均有 $\rho^{W}_{W_iW} \circ \beta = \pi_i$，其中 π_i 表示通常的投影。由此可立即得出，$\beta(m_i)$是满足粘合条件的元素。□

定义 5.13。设 M 是一个 LSG R-模。我们按以下方式定义预层 M：对于对象，$M(1) = Q_{\kappa_+}(M)$，而对于 $W \in \mathscr{W} \setminus \{1\}$，$M(W) = Q_W(M)$。现在，对于态射，若 $W \neq 1$，则将平凡态射赋给映射 $V \to W$，使得下图表交换

$$\begin{array}{ccc} Q_W(M) & \xrightarrow{\rho^W_V} & Q_V(M) \\ \uparrow & \nearrow & \\ M & & \end{array} \tag{5.2}$$

而对于态射 $W \to 1$，我们赋予复合映射

$$Q_{\kappa_+}(M) \to Q_W(Q_{\kappa_+}(M)) \to Q_W(M),$$

其中第一个箭头是自然映射，第二个箭头正是引理 5.2.

如果 $W = S_1 \dots S_n$ 和 $w \in W$，记作 $w = s_1 \dots s_n$，那么元素 $\frac{1}{s_n} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{s_1} \otimes m \in Q_W(M)$ 将记为 $\frac{m}{w}$。特别地，$\frac{m}{1}$ 表示 $1 \otimes m$ 在 $Q_S(M)$中、$1 \otimes 1 \otimes m$ 在 $Q_{ST}(M)$中，依此类推；具体指哪个元素取决于它所属的模。

以下两个引理的证明与 $\mathbb{N}$-分次环 [50, 中的引理 2 和 3]所采用的思路相同。

引理 5.14。给定元素 $\frac{m}{w} \in Q_W(M)$ 和 $a \in R$，存在 $w' \in W$，$b \in R$，使得 $w'a = bw$ 且 $a\frac{m}{w} = \frac{bm}{w'} \in Q_W(M)$。

证明。令 $W = S_1 \dots S_n$ 和 $w = s_1 \dots s_n$。我们考虑 $a_n = a$ 并递归地定义 a_i。更准确地说，对于一个元素 a_i，Ore 条件保证存在元素 $s_i' \in S_i$ 和 $a_{i-1} \in R$，使得 $s_i' a_i = a_{i-1} s_i$。因此，$a\frac{m}{w} = \frac{1}{s_n'} \otimes \dots \otimes \frac{1}{s_1'} \otimes a_0 m$。若定义 $b = a_0$ 和 $w' = s_1' \dots s_n'$，则断言成立。□

引理 5.15。若 $\frac{m}{w} = \frac{n}{1}$ 属于 $Q_W(M)$，其中 $n \in M$ 是某个元素，则存在 $\tilde{w} \in W$ 和 $r \in R$，使得 $\tilde{w} = rw$ 和 $\tilde{w}n = rm$。

证明。对词 $w = s_1 \dots s_n$ 的长度 n 作归纳。当 $n = 1$ 时，结论显然成立。假设对任意长度小于 n 的词，断言均成立。令 $W' = S_1 \dots S_{n-1}$ 和 $w' = s_1 \dots s_{n-1}$。于是 $\frac{1}{s_n} \otimes \frac{m}{w'} = 1 \otimes \frac{n}{1} \in S_n^{-1}(Q_{W'})$，因此存在元素 a、$b \in R$，使得 $a\frac{m}{w'} = b\frac{n}{1} = \frac{bn}{1} \in Q_{W'}(M)$ 且 $as_n = b \in S_n$。根据引理 5.14，存在元素 $w'' \in W'$ 和 $c \in R$，满足 $w''a = cw'$ 和 $\frac{cm}{w''} = a\frac{m}{w'} = \frac{bn}{1}$。由归纳假设，存在 $w''' \in W'$ 和 $d \in R$，使得 $w''' = dw''$ 和 $w'''bn = dcm$，因此，若考虑 $\tilde{w} = w'''b$ 和 $x = dc$，则断言成立。□

设 $\{W_i \mid i \in I\}$ 是一个全局覆盖。图表的极限

$$\begin{array}{ccc} Q_W(Q_{W_i}(M)) & \longrightarrow & Q_W(Q_{W_j}(Q_{W_i}(M))) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ Q_W(Q_{W_j}(M)) & \longrightarrow & Q_W(Q_{W_i}(Q_{W_j}(M))) \end{array} \tag{5.3}$$

记作 $\widehat{\Gamma_W(M)}$。注意，由于极限的泛性质，对于族 $\{M \to Q_{W_i} \mid i \in I\}$，存在唯一的态射 $\varphi\colon M \to \Gamma_1(M)$。这个态射在下面的引理中十分重要。

引理 5.16。设 $\varphi\colon M \to \Gamma_1(M)$ 为上文所述的态射。那么 余核(φ)是 κ_+-扭的。

证明。设 $\xi = \left(\frac{m_i}{w_i}\right)_i \in \Gamma_1(\widehat{M})$，其中 $w_i \in W_i$ 且 $\frac{1}{w_i} \otimes 1 \otimes m_i = 1 \otimes \frac{1}{w_j} \otimes m_j \in Q_{W_i}(Q_{W_j}(M))$，对所有 i, j 均成立。固定 j。于是 $\frac{1 \otimes m_i}{w_i} = \frac{\frac{1}{w_j} \otimes m_j}{1} \in Q_{W_i}$，由引理 5.15 可知，存在元素 $w_i' \in W_i$ 和 $a_i \in R$，使得 $w_i' = a_i w$ 且 $w_i'(\frac{1}{w_j} \otimes m_j) = a_i(1 \otimes m_i)$，也就是说，$w_i'(\frac{m_j}{w_j}) = \frac{a_i m_i}{1} \in Q_{W_j}(M)$。令 $I := \sum_{i \in I} R w_i'$，显然 $I \in \bigcap_i \mathscr{L}(W_i) = \mathscr{L}(\kappa_+)$。这样一来，存在元素 $t_j, n_j \in \mathbb{N}$，使得

$R^{n_j}_{\geq t_j} \subseteq I$，这表明 $(R^{n_j}_{\geq t_j})\frac{m_j}{w_j}$包含于映射$M \to Q_{W_j}(M)$的直接像中，也就是说，$(R^{n_j}_{\geq t_j})\frac{m_j}{w_j} \subseteq \mathrm{Im}(M \to Q_{W_j}(M))$。若 $n := \max\{n_i \mid i \in I\}$且 $t := \max\{t_i \mid i \in I\}$，则不难看出，这一推理对每个元素 j都成立。

设 $a \in R^n_{\geq t}$。则 $a\xi = (\frac{n_i}{1})_i$，其中存在一些元素 $n_i \in M$，使得 $1 \otimes 1 \otimes n_i = 1 \otimes 1 \otimes n_j$ 属于 $Q_{W_i}(Q_{W_j}(M))$，对任意 i, j 均成立。固定 i。引理 5.15 保证，对每个 j，都存在元素 $\tilde{w}_j \in W_i$ 和 $x_j \in R$，使得 $\tilde{w}_j = x_j$ 且 $\tilde{w}_j \frac{n_j}{1} = x_j \frac{n_i}{1}$。现在，根据注 5.6，我们可以找到元素 $w_i^* \in W_i$，使得对所有 j，都有 $w_i^* \frac{n_i}{1} = w_i^* \frac{n_j}{1}$。因此，$w_i^* a\xi = \varphi(w_i^* n_i)$。如上所述，通过定义 $J = \sum_{i \in I} Rw_i^*$，存在元素 $t'(a)$ 和 $n'(a)$（注意，所有元素都依赖于 a），使得$\left(R^{n'(a)}_{\geq t'(a)}\right) a\xi \subseteq \varphi(M)$。由于 R 是左诺特环，$R^n_{\geq t}$ 是有限生成的，生成元可取为元素 $a_1, \ldots a_r$。通过定义 $n' = \max\{n(a_k) \mid 1 \leq k \leq r\}$ 和$t' = \max\{t'(a_k) \mid 1 \leq k \leq r\}$，我们得到 $\left(R^{n+n'}_{\geq t+t'}\right)\xi \subseteq \varphi(M)$，即余核$(\varphi)$ 是κ_+-挠的，由此证明完成。□

⌒命题 5.17。预层 M 是一个层。

⌒证明。固定一个全局覆盖 $\{W_i \mid i \in I\}$，并令 $\varphi : M \to \Gamma_1(M)$ 为引理 5.16 中构造的映射⌒。来看一下 $\Gamma_1(M) \cong Q_{\kappa_+}(M) = M$ (1)。由于对于族 $\{Q_{\kappa_+}(M) \to Q_{W_i} \mid i \in I\}$，极限的泛性质保证⌒存在唯一的态射 $\phi\colon Q_{\kappa_+}(M) \to \Gamma_1(M)$，我们得到如下交换图表

(5.4)
$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma_1(\widehat{M}) & \longrightarrow & Q_{W_i}(M) \longrightarrow Q_{W_j}(Q_{W_i}(M)) \\ & \overset{\varphi}{\nearrow} & \uparrow{\scriptstyle \phi} & \overset{\phi_i}{\nearrow} & \\ M & \longrightarrow & Q_{\kappa_+}(M) & & \end{array}$$

显然，核$(\phi) \subseteq \bigcap$核$(\phi_i) = \bigcap \kappa_{W_i}(Q_{\kappa_+}(M)) = \kappa_+(Q_{\kappa_+}(M)) = 0$。另一方面，由于像$(\varphi) \subseteq$ 像(ϕ)，且 $\Gamma_1(M)/$像(φ) 是 κ_+-挠的（引理⌒5.16），因此 $\Gamma_1(M)/$像(ϕ) 也是 κ_+-挠的。此外，若 S_i 是 W_i 的末字母，则 $Q_{W_i}(M)$ 是 κ_{S_i}-挠无的，因此它也是 κ_+-挠无的。这样，$\Gamma_1(M)$ 是由 κ_+-挠无对象构成的极限，显然⌒$\Gamma_1(M)$ 也是 κ_+-挠无的。由于我们有短正合列

$$0 \to Q_{\kappa_+}(M) \to \Gamma_1(\widehat{M}) \to \Gamma_1(\widehat{M})/\mathrm{Im}(\phi) \to 0,$$

⌒由此可得 $Q_{\kappa_+}(M) \cong \Gamma_1(M)$[16, 命题 3。4]。

最后，回想起 Q_W 是一个与有限极限相交换的正合函子，若 $W \neq 1$，则有

$$\Gamma_W(\widehat{M}) \cong Q_W(\Gamma_1(\widehat{M})) \cong Q_W(Q_{\kappa_+}(M)) \cong Q_W(M) = \widehat{M}(W).$$

⌒因此，根据备注 5.12 我们得出 M 是一个层。 □

接下来，我们定义仿射覆盖和拟凝聚层的概念。

定义 5.18。仿射 覆盖是 $\mathcal{O}$ 的有限子集 $\{T_i \mid i \in I\}$，满足$\bigcap_{i \in I} \mathscr{L}(T_i) = \mathscr{L}($ $\kappa_+)$。

定义 5.19。 层 $\mathscr{F}$ 是拟凝聚的，当且仅当存在一个仿射覆盖 $\{T_i \mid i \in I\}$，并且对于每个 $i \in I$，存在一个 SG $T_i^{-1}R$-模 M_i，使得对于范畴 $\mathscr{W}$ 中的所有态射 $V \to W$，都有如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(T_iW) & \xrightarrow{\rho_{T_iV}^{T_iW}} & \mathscr{F}(T_iV) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_W(M_i) & \longrightarrow & Q_V(M_i) \end{array} \tag{5.5}$$

其中，竖直映射是 LSG 中的同构 $-R$ and $Q_1(*) := Q_{\kappa_+}(*)$. $\mathscr{F}$ 称为凝聚，如果进一步所有 M_i 都是有限生成 SG $T_i^{-1}R$-模。

注 5.20。 注意，对范畴 LSG $-R$中的每个对象，层 M 都是拟凝聚的。若 M 是有限生成 SG 模，则 M 是凝聚的。

下面命题的证明与 [50, 定理1]的证明类似。为使本文完整，我们在此给出证明。

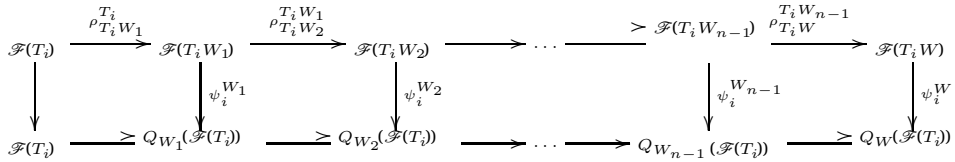
命题 5.21。 若 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{W}$ 上的拟凝聚层，且 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 表示其全局截面 $\mathscr{F}(1)$，则 $\mathscr{F}$ 同构于 $\Gamma_*(\mathscr{F})$，即与 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 相关联的层。

证明。首先请注意，我们可以假设 M_i 是 κ_+-闭的，因为如果并非如此，则可以用 $Q_{\kappa_+}(M_i)$ 替换它，此时交换图 5.5 成立。我们要证明，对于所有 $W \in \mathscr{W}$，都有 $\mathscr{F}(W) \cong Q_W(\Gamma_*(\mathscr{F}))$。若 $W \neq 1$，则由注记 5.12 以及 Q_W 与有限极限可交换这一事实（记住，Q_W是一个正合函子），可知 $\mathscr{F}(W)$ 是图表 (5.1) 的极限，而 $Q_W(\Gamma_*(\mathscr{F}))$ 是图表的极限

$$\begin{array}{ccc} Q_W(\mathscr{F}(W_i)) & \longrightarrow & Q_W(\mathscr{F}(W_iW_j)) \\ & \searrow\!\!\!\nearrow & \\ Q_W(\mathscr{F}(W_j)) & \longrightarrow & Q_W(\mathscr{F}(W_jW_i)) \end{array} \tag{5.6}$$

注意，我们有同构 $\mathscr{F}(T_i) \cong Q_{\kappa_+}(M_i) = M_i$，并且根据图表 5.5，对于每个 W，都存在一个同构 ψ_i^W: $Q_W(\mathscr{F}(T_i)) \to \mathscr{F}(T_iW)$。如果 $W = S_1 \dots S_n$和 $W_t := S_1 \dots S_t$，那么我们得到以下交换图

(5.7)



由于 $Q_{W_t}(\mathscr{F}(T_i))$ 是一个 $S_t^{-1}R$-模，因此 $\mathscr{F}(T_iW_t)$ 也是如此。对于元素 $s_t \in S_t$，我们可以乘以 s_t^{-1}，由此，上图表的交换性保证

(5.8)

$$\psi_i^W\left(\frac{1}{s_n} \otimes \cdots \otimes \frac{1}{s_1} \otimes m\right) = s_n^{-1}\rho_{T_iW}^{T_iW_{n-1}}(s_{n-1}^{-1}\rho_{T_iW_{n-1}}^{T_iW_{n-2}}(\dots s_2^{-1}\rho_{T_iW_2}^{T_iW_1}(s_1^{-1}\rho_{T_iW_1}^{T_i}(m))\dots)).$$

另一方面，我们有

$$\mathscr{F}(T_iT_jW) \cong Q_{T_jW}(\mathscr{F}(T_i)) = Q_W(Q_{T_j}(\mathscr{F}(T_i))) \cong Q_W(\mathscr{F}(T_iT_j)).$$

若将上述同构写作 $\psi_{ij}^W\colon Q_W(\mathscr{F}(T_iT_j)) \to \mathscr{F}(T_iT_jW)$，利用与上图类似的图表可以看出

$$\psi_{ij}^W\left(\frac{1}{s_n}\otimes\cdots\otimes\frac{1}{s_1}\otimes m\right) = s_n^{-1}\rho_{T_iT_jW}^{T_iT_jW_{n-1}}(s_{n-1}^{-1}\rho_{T_iT_jW_{n-1}}^{T_iT_jW_{n-2}}(\ldots s_2^{-1}\rho_{T_iT_jW_2}^{T_iT_jW_1}(s_1^{-1}\rho_{T_iT_jW_1}^{T_i}(m))\ldots)). \tag{5.9}$$

注意，$\rho_{T_iT_jW_t}^{T_iW_t}$ 和 $\rho_{T_jT_iW_t}^{T_iW_t}$ 都是 $S_t^{-1}R$-线性的，其中 $t=1,\ldots,n$，因为它们都是 R-模之间的 $S_t^{-1}R$-同态。由此，表达式 (5.8) 和 (5.9) 蕴含以下两个图表 (5.10) 的交换性

$$\begin{array}{ccc} Q_W(\mathscr{F}(T_i)) & \xrightarrow{Q_W\left(\rho_{T_iT_j}^{T_i}\right)} & Q_W(\mathscr{F}(T_iT_j)) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{ij}} \\ \mathscr{F}(T_iW)) & \xrightarrow{\rho_{T_iT_jW}^{T_iW}} & \mathscr{F}(T_iT_jW) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Q_W(\mathscr{F}(T_i)) & \xrightarrow{Q_W\left(\rho_{T_jT_i}^{T_i}\right)} & Q_W(\mathscr{F}(T_jT_i)) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{ji}} \\ \mathscr{F}(T_iW) & \xrightarrow{\rho_{T_jT_iW}^{T_iW}} & \mathscr{F}(T_jT_iW) \end{array}$$

因此，很明显，图表 (5.12) 和 (5.6) 必须具有同构的极限，也就是说，$\mathscr{F} \cong Q_W(\mathscr{F}(\Gamma_*))$。此外，对于一个态射 $V \to W$，映射 ρ_V^W 由映射 $\rho_{T_iV}^{T_iW}$ 和 $\rho_{T_iT_jV}^{T_iT_jW}$ 确定，这表明图表

$$\begin{array}{ccc} Q_W(\Gamma_*(\mathscr{F})) & \longrightarrow & Q_v(\Gamma_*(\mathscr{F})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F}(W) & \xrightarrow{\rho_v^w} & \mathscr{F}(V) \end{array}$$

是交换的。

对于 $W=1$，我们需要证明 $\Gamma_*(\mathscr{F}) \cong Q_{\kappa_+}(\Gamma_*(\mathscr{F}))$。由于 $\mathscr{F}(T_i)$ 和 $\mathscr{F}(T_iT_j)$ 是 κ_+-无挠的（$\mathscr{F}(T_i) \cong M_i$ 且 $\mathscr{F}(T_iT_j) \cong T_j^{-1}(\mathscr{F}(T_i))$），因此 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 是 κ_+-无挠的，因为它是由 κ_+-无挠对象构成的极限。下面证明 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 是 κ_+-内射的。根据 [16, 命题 3.2]，只需证明：对于所有 $I \in \mathscr{L}(\kappa_+)$，每个 R-同态 $f\colon I \to \Gamma_*(\mathscr{F})$ 都可以延拓为一个 R-同态 $g\colon R \to \Gamma_*(\mathscr{F})$。

由于 $\mathscr{F}(T_i)$ 是 κ_+-内射的，映射 $\rho_{T_i} \circ f$ 可以延拓为映射 $g_i\colon R \to \mathscr{F}(T_i)$。若 $x_i = g_i(1)$，则对于每个 $r \in R$，$g_i(r) = rx_i$。特别地，对于每个 $a \in I$，我们有 $a\rho_{T_iT_j}^{T_i}(x_i) = \rho_{T_iT_j}^{T_i}(\rho_{T_i}(f(a))) = \rho_{T_iT_j}^{T_j}(\rho_{T_j}(f(a))) = \rho_{T_iT_j}^{T_j}(x_j)$，这表明存在一个元素 $x \in \Gamma_*(\mathscr{F})$，使得对于每个 i，$\rho_{T_i}(x) = x_i$。注意，映射 $g\colon I \to \Gamma_*(\mathscr{F})$ 定义为 $g(r) = rx$，是 f 的延拓，因此我们得到 $\Gamma_*(\mathscr{F}) = Q_{\kappa_+}(\Gamma_*(\mathscr{F}))$。□

定理 5.22。拟凝聚层范畴等价于范畴 (R,κ_+) – 可局部化半分次。

证明。设 $\mathscr{F}$ 是一个拟凝聚层。根据命题 5.21 证明的最后一部分，我们有 $\Gamma_*(\mathscr{F})$ 是 (R,κ_+) – 可局部化半分次中的一个对象。此外，若 M 属于 (R,κ_+) – 可局部化半分次，则 $M \cong Q_{\kappa_+}(M)$。由此，□ 和 Γ_*□ 是

范畴 (R,κ_+) – 可局部化半分次 与拟凝聚层范畴之间的函子，它们由命题 5.17 和 5.21证明为等价。□

最后，我们来到了本文最重要的结果：半分次环的*Serre-Artin-Zhang-Verevkin* 定理。

定理 5.23。（Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理）。凝聚层范畴等价于$\mathrm{Proj}(R)$。

证明。 由定理5.22可知，只需证明 M 属于$\mathrm{Proj}(R)$ 当且仅当$\widehat{}$且仅当 M 是凝聚的。

我们固定一个覆盖 $\{T_i \mid i \in I\}$。若 M 是 Proj(R)中的一个元素，则存在 $m_1, \ldots, m_k \in M$，使得 M/N 是 κ_+- 挠的，且 $N = \langle m_1, \ldots, m_k\rangle^{\mathsf{SG}}$。令 $f_i : M \to T_i^{-1}M$ 为典范映射。显然，$\langle \frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_k}{1}\rangle_R^{\mathsf{SG}} = f_i(N)$，并且$T_i^{-1}M$-子模 $J_i = \langle \frac{m_1}{1}, \ldots, \frac{m_k}{1}\rangle_{T_i^{-1}R}^{\mathsf{SG}}$满足关系 $f_i(N) \subseteq J_i$。令 $m \in M$。由于 M/N是 κ_+-挠的，存在 $I \in \mathscr{L}(\kappa_+)$使得 $Im \subseteq N$。利用 T_i 非平凡这一点，可得$t_i \in I \cap T_i$，从而 $t_i m \in N$，这表明 $\frac{t_i m}{1} \in f_i(N)$。由于 J_i是一个 $T_i^{-1}R$-模，且 $\frac{t_i m}{1} \in J_i$，因此 $J_i = T_i^{-1}M$，也就是说， $T_i^{-1}M$是有限生成的 SG $T_i^{-1}R$-模。

假设每个 $t_i^{-1}M$ 都是有限生成的 SG $T_i^{-1}R$-模。注意，如果 $T_i^{-1}M = \langle \frac{m_{1,i}}{s_{1\,i}}, \ldots, \frac{m_{t_i,i}}{s_{t_i\,i}}\rangle_{T_i^{-1}R}^{\mathsf{SG}}$，那么 $T_i^{-1}M = \langle \frac{m_{1,1}}{1}, \ldots, \frac{m_{t_i,1}}{1}\rangle_{T_i^{-1}R}^{\mathsf{SG}}$。由于 i ~~的元~~素只~~有有限~~多个，因此并集 $\bigcup_{i\in I}\{m_{1,i}, \ldots, m_{t_i,i}\}$ 也是有限的，记作 $\{m_1, \ldots, m_k\}$。如果我们定义 $N = \langle m_1, \ldots, m_k\rangle^{\mathsf{SG}}$，那么显然 $T_i^{-1}N$ 是 $T_i^{-1}M$ 的 SG $T_i^{-1}R$-子模，从而 $T_i^{-1}N = T_i^{-1}M$。

对于元素 $m \in M$，由于$\frac{m}{1} \in T_i^{-1}N$，存在元素 $n_i \in N$ 和 $t_i \in T_i$ 使得 $\frac{m}{1} = \frac{n_i}{t_i}$。因此，存在 c_i、 $d_i \in R$，使得 $c_i m = d_i n_i$ 和 $c_i = d_i t_i \in T_i$，从而 $c_i m \in N$。利用对每个 $i \in I$ 都有 $c_i \in T_i$，且 $\{T_i \mid \in I\}$ 是一个仿射覆盖，可得 $I = \sum Rc_i \in \mathscr{L}(\kappa_+)$。我们得出 $Im \subseteq N$，因此 M/N 是 κ_+-挠的。□

接下来，我们将证明，半分次情形中的图式性概念推广了连通且 $\mathbb{N}$分次代数情形中的相应概念，该概念由 Van Oystaeyen 和 Willaert 引入并研究 [49, 50, 52, 53, 59]。

注 5.24。考虑一个正分次左诺特环 R。显然， $R_+ = R_{\geq 1}$。注意，如果 R 由一次元素生成，那么 $R_{\geq t} = (R_+)^t$，这表明 $\mathscr{L}(\kappa_+) = \{I \lhd_l R \mid$ 存在 $n \in \mathbb{N}$，使得 $(R_+)^n \subseteq I\}$。另一方面，LSG 模恰好就是相同的 $\mathbb{N}$分次模，而良左 Ore 集与齐次左 Ore 集一致。这样，本文提出的示性环概念推广了 Van Oystaeyen 和 Willaert [50]引入的相应概念。最后但同样重要的是，请注意，在 $\mathbb{N}$分次情形中，R 的左诺特性意味着 (R,κ_+) – LSG 的有限生成对象是诺特的，这表明定理 5.23 推广了 [50, 定理 3]。

接下来，我们给出一些例子，以说明我们的定理5.23在非$\mathbb{N}$-分次环的情形下，其中 [50, 定理 3] 无法应用。

例 5.25. (i) 考虑域 $\Bbbk$ 上特征为 $\Bbbk$ 的第一 Weyl 代数 $A_1(\Bbbk) = \Bbbk\{x,y\}/\langle yx - xy - 1\rangle$。众所周知， $A_1(\Bbbk)$

是一个非-$\mathbb{N}$-分次环，集合 $\{x^n y^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ 是 $A_1(\Bbbk)$ 的 $\Bbbk$-基，且 $A_1(\Bbbk)$ 是一个诺特环。由于 $x^p, y^p \in Z(A_1(\Bbbk))$，显然 $\{x^{pk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{y^{pk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是良左 Ore 集。此外，若 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$，则 $A_1(\Bbbk)x^{pk_1} + A_1(\Bbbk)y^{pk_2}$ 是 $A_1(\Bbbk)$ 的一个双边理想，它是一个左SG子模，因此 $A_1(\Bbbk)_{\geq pk_1+pk_2} \subseteq A_1(\Bbbk)x^{pk_1} + A_1(\Bbbk)y^{pk_2}$。因此，$A_1(\Bbbk)$ 是一个概形代数，定理 5.23 成立。

(ii) 类似地，可以证明，当 $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$ 时，n 阶 Weyl 代数 $A_n(\Bbbk)$ 具有图式性。(iii) 众所周知，约当平面 $\Bbbk\{x, y\}/\langle yx - xy - y^2\rangle$ 在 $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$ 时是图式的，因为集合 $\{x^{pk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 和 $\{y^{pk} \mid k \in \mathbb{N}\}$ 是良左 Ore 集。

对于 Gallego 和 Lezama 引入的斜 PBW 扩张[15] (参见[36, 38])，它们是非$\mathbb{N}$分次环的例子，命题 5.26 给出了保证其图式性的充分条件。

命题 5.26。设 $A = \sigma(R)\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ 是左诺特环 R 上的双射斜PBW扩张，具有通常的半分次，即对每个 i 和每个 $r \in R$，$\deg(x_i) = 1$ 且 $\deg(r) = 0$。如果对每个 i，都存在 $m_i \geq 1$ 使得 $x_i^{m_i} \in Z(A)$，那么 A 具有图式性。

证明。由 [14, 定理 3.1。5]可知，A 是左诺特的。由于 $x_i^{m_i} \in Z(A)$，因此 $\{x_i^{m_i m} \mid m \in \mathbb{N}\}$ 对每个i都是非平凡的良左 Ore 集。下面验证这些集合满足图式性条件。设 $t_i \in \mathbb{N}$。则$\sum_{i=1}^n Rx_i^{m_i t_i}$是一个双边理想，也是 SG 子模 A。此外，如果 $t := \sum m_i t_i$那么 $\bigoplus_{m \geq t} R_m \subseteq \sum_{i=1}^n Rx_i^{m_i t_i}$，因此 $R_{\geq t} \subseteq \sum_{i=1}^n Rx_i^{m_i t_i}$。 □

例 5.27 和5.28 表明，Lezama 关于 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理提出的理论与本文发展的理论彼此独立。

例 5.27。命题 5.26 保证，若 R 是左诺特非交换环，则 $A = R[x]$ 是图式的，因此定理5.23 对A成立。请注意，这一结果无法从 Lezama 提出的理论中得到 [27, 29]，因为它不满足 Lezama 的假设 (C4)，该假设要求$A_0 = R$ 是交换环。请注意，在 $\Bbbk$-代数$R = M_n(\Bbbk)$这一特殊情形下，由于 R 不连通，它不满足 Van Oystaeyen 和 Willaert 给出的图式性定义（定义 2.6），并且按 Lezama 的定义也不是有限半分次代数 [29, 定义 2。4]。然而，从我们的观点来看，该代数是图式的，且定理5.23 成立。

例 5.28. 考虑 A，它是由以下关系定义的三维斜多项式代数

$$yz = zy, \quad xz = zx, \quad \text{and} \quad yx = xy - z.$$

这个代数满足 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理[14, 例 18.5.15 (v)] 遵循 Lezama 提出的思路 [27, 29]

不难看出，以下关系成立：

$$y^n x = xy^n - ny^{n-1}z, \quad \text{and} \quad yx^n = x^n y - nx^{n-1}z, \quad n > 0.$$

若 $\operatorname{char}(\Bbbk) = p > 0$，则 x^p，y^p，$z \in Z(A)$，因此命题 5.26 表明A 是图式的。

接下来，考虑 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ 的情形。我们来证明 $A''_n = \{az^n \mid a \in \Bbbk, n \in \mathbb{N}\}$。为此，考虑 $\alpha \in A''_n$。那么 α 是一个次数为 n 的齐次元素，因此

$$\alpha = \sum_{i+j\le n} a_{i,j} x^i y^j z^{n-i-j}.$$

由于

$$\begin{aligned}
\alpha x &= \sum_{i+j\le n} a_{i,j} x^i y^j x z^{n-i-j} \\
&= \sum_{i+j\le n} a_{i,j} x^i (xy^j - jy^{j-1}z) z^{n-i-j} \\
&= \sum_{i+j\le n} a_{i,j} x^{i+1} y^j z^{n-i-j} - \sum_{i+j\le n} j a_{i,j} x^i y^{j-1} z^{n-i-j+1},
\end{aligned}$$

元素 αx 是次数为 $n+1$ 的齐次元素，因此对于每个 i, j，$ja_{i,\,j} = 0$。同理，对于元素 $y\alpha$，我们得到对于每个 i, j，$ia_{i,\,j} = 0$。这些事实表明，唯一的非零系数恰好是 $a_{0,\,0}$，因此 $\alpha = a_{0,\,0} z^n$。这表明 $A''_n = \{az^n \mid a \in \Bbbk, n \in \mathbb{N}\}$。

现在，我们来证明 A 不是图式的。由于 $z \in Z(A)$，因此 $S = \{az^k \mid a \in \Bbbk^*, k \in \mathbb{N}\}$ 是一个良左 Ore 集。注意，对于所有 $m \in \mathbb{N}, x^m \in A_{\ge m} \backslash Rz$，因此 S 不满足图式性条件。此外，根据上述推理，显然 S 包含 A 的任何其他良左 Ore 集，因此如果 S 不满足图式性条件，那么其他任何集合也都不会满足。

最后，命题 5.29 给出了断言具有两个不定元的斜 PBW 扩张是图式的必要条件。

命题 5.29。 设 $A = \sigma(\Bbbk)\langle x, y\rangle$ 是定义在 $\Bbbk$ 上、由下述关系确定的斜 PBW 扩张

$$yx = dxy + ex + fy + g, \quad d, e, f, g \in \Bbbk. \tag{5.11}$$

A 是图式的，当且仅当满足以下情形之一：

(1) $yx = dxy$（量子平面）。(2) $yx = xy + g$，其中 $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$。(3) $yx = dxy + g$，其中 $d \ne 1$ 和 $d^p = 1$ 对某个 $p \in \mathbb{N}$ 成立。

证明。 我们将证明分成四部分。

(a) 设 $P := dx + f$, $Q := ex + g$, $\overline{P} := dy + e$ 和 $\overline{Q} := fy + g$。注意，二项式定理对 P 和 $\overline{P}$ 成立，即

$$P^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} d^{i-k} f^k x^{i-k}, \quad \text{and} \quad \overline{P}^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} d^{i-k} e^k y^{i-k}, \text{ for all } i > 0,$$

and that $yx = Py + Q = x\overline{P} + \overline{Q}$.

让我们来看一下 x 和 y之间的一些交换性关系。

对于 $n \geq 1$，有以下恒等式

$$yx^n = P^n y + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q, \text{ and} \tag{5.12}$$

$$y^n x = x\overline{P}^n + \sum_{i=0}^{n-1} \overline{P}^{n-1-i} y^i \overline{Q} \tag{5.13}$$

成立。

情形 $n = 1$ 显然。假设断言对 n成立。那么

$$\begin{aligned} yx^{n+1} &= \left(P^n y + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q \right) x \\ &= P^n (Py + Q) + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^{i+1} Q \\ &= P^{n+1} y + (P^n + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^{i+1}) Q \\ &= P^{n+1} y + \sum_{i=0}^{n} P^{n-i} x^i Q, \end{aligned}$$

这就完成了证明。类似地，我们可以证明另一个等式。(b) 对于 $n > 0$，我们写作 $\Delta_n := \sum_{i=0}^{n-1} d^i$。

我们来说明，如果 $\xi = ax^n$ （分别地， $\xi = ay^n$）属于 R_n'' 且 $a \neq 0$，那么 $f = 0$ （分别地， $e = 0$）。在 $Q \neq 0$ （分别地，$\overline{Q} \neq 0$）的情形下，可推出 $\Delta_n = 0$。

等式

$$\begin{aligned} y\xi &= ayx^n \\ &= a \left(P^n y + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q \right) \\ &= a \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^{n-k} f^k x^{n-k} y + \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q \right), \end{aligned}$$

证明元素 $y\xi$ 是次数为 $n+1$ 的齐次元素，并且含有 y 的单项式满足：若 $k \neq 0$，则 $a\binom{n}{k} d^{n-k} f^k = 0$。特别是，若 $k = n$，则 $af^n = 0$，由此可得 $f = 0$。

现在，对于其他单项式，显然它们构成一个次数小于 $n+1$ 的多项式元素，这表明

$$a \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q = 0.$$

由于 $f = 0$、 $P = dx$，因此

$$0 = a \sum_{i=0}^{n-1} P^{n-1-i} x^i Q = a \left(\sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i} \right) x^{n-1} Q.$$

因此，若 $Q \neq 0$，则

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} d^i = \Delta_n.$$

当 ay^n 时的证明是类似的。

(c) 设 $n \geq 1$ 和

$$\xi = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i} \in R''_n.$$

我们来证明，若 $\overline{Q} \neq 0$（分别为 $Q \neq 0$）且 $\xi \neq a_n x^n$（分别为 $\xi \neq a_0 y^n$），则存在某个 $0 \leq k \leq n$，使得 $e = 0$（分别为 $f = 0$）且 $\Delta_k = 0$。

注意，ξx 是一个次数为 $n+1$ 的齐次元素。我们有以下等式：

$$\begin{aligned} \xi x &= a_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i y^{n-i} x \\ &= a_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \left(x\overline{P}^{n-i} + \sum_{j=0}^{n-1-i} \overline{P}^{n-1-i-j} y^j \overline{Q} \right) \\ &= a_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(a_i x^{i+1} \overline{P}^{n-i} + a_i x^i \sum_{j=0}^{n-1-i} \overline{P}^{n-1-i-j} y^j \overline{Q} \right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

假设存在 $0 \leq i \leq n-1$ 使得 $a_i \neq 0$，并令$t := \min \{0 \leq i \leq n \mid a_i \neq 0\}$。那么

$$\xi x = a_n x^{n+1} + \sum_{i=t}^{n-1} \left(a_i x^{i+1} \overline{P}^{n-i} + a_i x^i \sum_{j=0}^{n-1-i} \overline{P}^{n-1-i-j} y^j \overline{Q} \right).$$

注意，当 $i = t$ 时，x 的指数最低，并且我们有

$$a_t x^t \sum_{j=0}^{n-1-t} \overline{P}^{n-1-t-j} y^j \overline{Q}$$

是一个次数小于 $n+1$ 且不含其他 ξx 项的多项式元素，因此该多项式必为零元素。由于 $a_t \neq 0$，可得

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1-t} \overline{P}^{n-1-t-j} y^j \right) \overline{Q} = 0.$$

利用 $\overline{Q} \neq 0$，可得 $\sum_{j=0}^{n-1-t} \overline{P}^{n-1-t-j} y^j = 0$。因此，

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=0}^{n-1-t} \overline{P}^{n-1-t-j} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1-t} \left(\sum_{k=0}^{n-1-t-j} \binom{n-1-t-j}{k} d^{n-1-t-j-k} e^k y^{n-1-t-j-k} \right) y^j \qquad (5.15) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1-t} \sum_{k=0}^{n-1-t-j} \binom{n-1-t-j}{k} d^{n-1-t-j-k} e^k y^{n-1-t-k}.
\end{aligned}
$$

当 $j = 0$ 和 $k = n-1-t$ 时，可得到单项式 y^0 的系数，这意味着

$$\binom{n-1-t}{n-1-t} d^{n-1-t-0-(n-1-t)} e^{n-t-1} = e^{n-t-1} = 0,$$

由此 $n-1 \neq t$ 和 $e = 0$，将其代入表达式（5.15）可得

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1-t} d^{n-1-t-j} y^{n-1-t},$$

因此

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1-t} d^{n-1-t-j} = \sum_{j=0}^{n-1-t} d^j = \Delta_{n-t}.$$

存在 $n > 0$ 使得 $\Delta_n = 0$ 的条件具有递归性，因此将其称为条件 U。不难看出，当且仅当以下条件之一成立时，该条件得到满足：

- $d = 1$ 且 $\mathrm{char}(\Bbbk) = p > 0$。
- $d \neq 1$ 并且存在 $p > 0$ 使得 $d^p = 1$。

(d) 根据上述分析，我们可以确定由关系式（5.11）定义的斜 PBW 扩张的图式性。

首先，注意到如果 $d = 0$，部分 (c) 推出 $A'' = \Bbbk$，因为条件 U 不成立。因此，斜 PBW 扩张 A 不是图式的。下面考虑 $d \neq 0$。显然，情形 $e = f = g = 0$ 表明 A 是图式的。我们来看看这三个元素之一非零且条件 U 不成立时会发生什么。

设 $\xi \in A''_n$，其中 $n > 1$。如果 $g \neq 0$，那么 $Q \neq 0 \neq \overline{Q}$，并且根据部分 (c)，有 $\xi = a_n x^n = a_0 y^n$，由此可得 $\xi = 0$，因此 $A'' = \Bbbk$，这表明 A不是图式的。如果 $e \neq 0$，那么 $Q \neq 0$，而部分 (c) 推出 $\xi = a_0 y^n$，由此可得 $\xi = 0$ （部分 (b)）。在这种情况下，A 不是图式的。类似地，如果 $f \neq 0$，那么 A 不是图式的。

来看 条件 U 成立的情形（取满足此条件的 p 的较小值），且 e、f、g 中有两个非零。若 $e \neq 0 \neq f$，则由部分 (c) 可得 $\xi = 0$，因此 A 不是图式的。现在，若 $e \neq 0 \neq g$ 且 $f = 0$，则可推出 $x^p \in Z(R)$。另一方面，$Q \neq 0 \neq \overline{Q}$，因此部分 (c) 表明 $\xi = a_n x^n$，其中 $p \mid n$。这样一来，$A'' = \{ax^{pk} \mid a \in \Bbbk, k \in \mathbb{N}\}$，于是 $S = \{ax^{pk} \mid a \in \Bbbk^*, k \in \mathbb{N}\}$ 是最大左 Ore 集；并且由于 S 不满足

图式性条件（这是由于 y 的幂），显然 A 不是图式的。类似地，可以验证，若 $f \neq 0 \neq g$ 且 $e = 0$，则 A 不是图式的。

现在，让我们考察 条件 *U* 成立且只有一个元素非零的情形。如果 $e \neq 0$ 且 $f = 0 = g$，那么 $\overline{Q} = 0$，因此方程5.14 可以写成

$$\xi x = a_n x^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} a_i d^{n-i-k} e^k x^{i+1} y^{n-i-k}.$$

注意到， i 的每个值只对应于 x的一个幂，并且当$k \neq 0$ 时， $x^{i+1}y^{n-i-k}$ 的次数小于 $n+1$。这些事实表明，对于每个 $0 \leq i \leq n-1$ 以及所有 $0 < k \leq n-i$，都有$\binom{n-i}{k} a_i d^{n-i-k} e^k = 0$。特别地，如果 $k = 1$ ，那么 $a_i = 0$，从而 $\xi = a_n x^n$。部分 (b)意味着$p \mid n$，因此，出于与上述情形 $e \neq 0 \neq g$ 和 $f = 0$中相同的原因， A 不是图式的。类似地，如果 $f \neq 0$ 和 $e = 0 = g$，则可推出A 不是图式的。

最后，如果条件 *U* 成立，且 $g \neq 0$ 与 $e = 0 = f$，那么很容易看出 x^p, $y^p \in Z(R)$，由此 A 是图式的。

□

备注 5.30. 命题 5.29 表明，图式环上存在并非图式的 Ore 扩张。这与命题 2.8一致。

6. 结论与未来工作

本文在半分次对象的背景下定义了图式环的概念，并通过一些非$\mathbb{N}$分次代数阐释了定理 5.23 。为在这一更一般的框架下获得图式代数的新例子，我们有必要推广 Van Oystayen 和 Willaert [53, 引理 2] 所表述的判据：如果 R 是一个 $\mathbb{N}$分次 $\Bbbk$-代数，其中心 $Z(R)$是诺特的，并且 R 是一个有限生成的 $Z(R)$-模，那么R 就是图式的。该判据的重要性可从 [13] 看出，作者们在其中研究了由齐次二次关系定义、由 Golovashkin 和 Maksimov 构造的高阶斜 *Ore* 多项式的图式性 [17, 18]。由于这些代数不是$\mathbb{N}$分次的，对其图式性的研究将对其他非交换环族至关重要。

现在，考虑到 Willaert [59] 研究了满足图式性条件的 $\mathbb{N}$-分次代数所需的最少 Ore 集数量，并将其称为图式维数，因此一个自然的任务是在半分次环的背景下研究这一概念。此外，这些环未来研究的一个重要课题是 Van Oystayen 和 Willaert [52, 53]发展的 Čech 上同调。

参考文献

[1] J. Alev 和 F. Dumas，《某些量子代数的分式域》，《代数学杂志》170 (1) (1994) 229–265。[2] V. A. Artamonov，《斜 PBW 扩张的导子》。《数学与统计通讯》3 (4) (2015) 449–457。[3] M. Artin，《量子平面的几何》，载于《当代数学》，美国数学会，第 124 卷，1992 年，第 1–15 页。

[4] M. Artin、J. Tate 和 M. Van den Bergh，椭圆曲线自同构相关的一些代数，载于《格罗滕迪克纪念文集》第 I 卷，《数学进展丛书》，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，86，1990 年，第 33–85 页。[5] M. Artin 和 J. J. Zhang，《非交换射影概形》，《数学进展》109 (2) (1994) 228–287。[6] V. V. Bavula，广义魏尔代数及其表示，《圣彼得堡数学杂志》4 (1) (1992) 71–92。[7] A. Bell 和 K. Goodearl，微分算子环上的一致秩与庞加莱-伯克霍夫-维特扩张，《太平洋数学杂志》131 (1) 13–37。[8] A. D. Bell 和 S. P. Smith，某些三维斜多项式环，威斯康星大学密尔沃基分校，预印本，1990。[9] G. Benkart，下上代数与泛包络代数的 Witten 变形，载于 S. Geun Hahn、H. Chul Myung 和 E. Zelmanov 编，《代数研究新进展》，《当代数学》第 224 卷，美国数学会，普罗维登斯，1999 年，第 29–45 页。[10] G. Benkart 和 T. Roby，下上代数，《代数学杂志》209 (1) (1998) 305–344。[11] F. Calderón 和 A. Reyes，霍普夫-伽罗瓦扩张与非交换环之间的一些相互作用，《Univ. Sci.》27 (2) (2022) 58–161。[12] T. Cassidy 和 M. Vancliff，分次克利福德代数与完全交的推广，《伦敦数学学会杂志》(2) 81 (1) (2010) 91–112。（勘误：90 (2) (2014) 631–636。）[13] A. Chacón 和 A. Reyes，关于由齐次二次关系生成的某些高阶 Ore 多项式的图式性，已投稿（2022）。[14] W. Fajardo、C. Gallego、O. Lezama、A. Reyes、H. Suárez 和 H. Venegas，《斜 PBW 扩张：环与模论性质、矩阵与格罗布纳方法及其应用》，《代数与应用》第 28 卷，施普林格，Cham，2020。[15] C. Gallego 和 O. Lezama，σ-PBW 扩张的理想的格罗布纳基，《交换代数通讯》39 (1) (2010) 50–75。[16] O. Goldman，《商环与商模》，《代数学杂志》13 (1) (1969) 10–47。[17] A. V. Golovashkin 和 V. M. Maksimov，由齐次二次关系生成的高阶斜 Ore 多项式，《俄罗斯数学调查》53 (2) (1998) 384–386。[18] A. V. Golovashkin 和 V. M. Maksimov，关于由齐次二次关系生成的斜多项式代数，《数学科学杂志》（纽约）129 (2) (2005) 3757–3771。[19] A. Grothendieck 和 J. Dieudonné，《代数几何原理 II》，高等科学研究所数学出版物 8 (1961) [20] R. Hartshorne，《代数几何》，《数学研究生教材》第 52 卷，施普林格-维拉格，纽约、海德堡、柏林，1977。[21] E. Hashemi、Kh. Khalilnezhad 和 A. Alhevaz，(Σ, Δ)-相容斜 PBW 扩张环，《庆北数学杂志》57 (3) (2017) 401–417。[22] A. P. Isaev、P. N. Pyatov 和 V. Rittenberg，扩散代数，《物理学杂志 A》34 (29) (2001) 5815–5834。[23] D. A. Jordan 和 I. Wells，某些迭代斜多项式环自同构的不变量，《爱丁堡数学学会会刊》(2) 39 (3) (1996) 461–472。[24] D. A. Jordan，下上代数与双斜多项式环，《代数学杂志》228 (1) (2000) 311–346。[25] E. Kirkman、I. M. Musson 和 D. S. Passman，诺特下上代数，《美国数学会会刊》127 (11) (1999) 3161–3167。[26] O. Lezama，有限半分次环的点模计算，《交换代数通讯》48 (2) (2020) 866–878。[27] O. Lezama，斜 PBW 扩张与半分次环背景下的一些开放问题，《数学与统计通讯》9 (3) (2021) 347–378。[28] O. Lezama 和 J. Gómez，有限半分次环与代数的 Koszul 性和点模，《Symmetry》11 (7) (2019) 1–22。[29] O. Lezama 和 E. Latorre，半分次环的非交换代数几何，《国际代数与计算杂志》27 (4) (2017) 361–389。[30] H. Li 和 F. Van Oystaeyen，Zariskian 滤过，《数学专著》丛书第 2 卷，施普林格科学出版社，1996。[31] Y. I. Manin，《非交换几何专题》，M. B. Porter 讲座，莱斯大学，普林斯顿大学出版社，新泽西州，1991。

[32] O. Ore，《非交换域中的线性方程》，《数学年刊》 (2) 32 (3) (1931) 463–477. [33] O. Ore，《非交换多项式理论》，《数学年刊》 (2) 34 (3) (1933) 480–508. [34] I. T. Redman，I 型三维斜多项式代数的齐次化，《Comm. Algebra》27 (11) (1999) 5587–5602. [35] A. Reyes，斜 PBW 扩张上的 Armendariz 模，《Comm. Algebra》47 (3) (2019) 1248–1270.[36] A. Reyes 和 C. Rodríguez，斜庞加莱-伯克霍夫-维特扩张上的 McCoy 条件，《数学与统计通讯》9 (1) (2021) 1–21. [37] A. Reyes 和 C. Sarmiento，三维斜多项式代数与扩散代数的微分光滑性，《Internat. J. Algebra Comput.》32 (3) (2022) 529–559. [38] A. Reyes 和 H. Suárez，斜 PBW 扩张的根与 Köthe 猜想，《数学与统计通讯》9 (2) (2021) 119–138. [39] A. Reyes 和 H. Suárez，弱相容环上的斜庞加莱-伯克霍夫-维特扩张，《J. Algebra Appl.》19 (12) (2020) 2050225-1–50225-21. [40] V. Rittenberg 和 D. Wyler，广义超代数，《Nucl. Phys. B》139 (3) (1978) 189–202. [41] A. Rosenberg，《非交换代数几何与量子代数的表示》，《数学及其应用》，第 330 卷，Kluwer Academic Publishers，1995.[42] J. P. Serre，《相干代数层》，《数学年刊》 (2) 61 (2) (1955) 197–278. [43] S. P. Smith，与 $\mathfrak{sl}(2)$ 的包络代数相似的一类代数，《美国数学会汇刊》322 (1) (1991) 285–314. [44] B. Stenström，《商环：环论方法导论》，施普林格，1975. [45] H. Suárez、A. Chacón 和 A. Reyes，关于 NI 与 NJ 斜 PBW 扩张，《Comm. Algebra》50 (8) (2022) 3261–3275. [46] H. Suárez、A. Reyes 和 Y. Suárez，齐次化斜 PBW 扩张，《Arab. J. Math.》(施普林格) (2022). [47] A. B. Tumwesigye、J. Richter 和 S. Silvestrov，PBW 扩张中的中心化子，载于 S. Silvestrov、A. Malyarenko 和 M. Rancic（编），《代数结构与应用》。SPAS 2017。《施普林格数学与统计学论文集》第 317 卷，施普林格，2020，第 469–490 页。 [48] F. Van Oystaeyen，关于分次环与商模，《Comm. Algebra》6 (18) (1978) 1923–1959.[49] F. Van Oystaeyen，《结合代数的代数几何》，《纯粹与应用数学》，CRC Press Taylor & Francis Group，2000.[50] F. Van Oystaeyen 和 L. Willaert，图式代数的格洛腾迪克拓扑、凝聚层与塞尔定理，《J. Pure Appl. Algebra》104 (1–3) (1995) 109–122. [51] F. Van Oystaeyen 和 L. Willaert，图式代数的量子位点，《Comm. Algebra》24 (1) (1996) 209–222. [52] F. Van Oystaeyen 和 L. Willaert，图式代数的上同调，《J. Algebra》185 (1) (1996) 74–84. [53] F. Van Oystaeyen 和 L. Willaert，图式代数的例子与量子截面，《J. Pure Appl. Algebra》120 (2) (1997) 195–211. [54] M. Vancliff，正则代数背景下代数与几何的相互作用，载于《MSRI 出版物》67 (2015) 371–390. [55] M. Vancliff 和 K. Van Rompay，点概形为非奇异二次曲面的四维正则代数，见 P^3，《Comm. Algebra》28 (5) (2000) 2211–2242. [56] P. Veerapen，《分次克利福德代数与分次斜克利福德代数及其在 Artin-Schelter 正则代数分类中的作用》，《Adv. Appl. Clifford Algebr.》27 (3) (2017) 2855–2871.[57] A. B. Verevkin，射影概形上的凝聚层范畴的非交换类比，《美国数学会译丛》(2) 151 (1992). [58] A. B. Verevkin，塞尔内射层，《Mat. Zametki》52 (1992) 35–41. [59] L. A. Willaert，图式代数的新维数，载于《环、霍普夫代数与布劳尔群》，Caenepeel, S.、Verschoren, A.（编），《纯粹与应用数学讲义》，施普林格，1998，第 325–332 页。 [60] J. J. Zhang 和 J. Zhang，双 Ore 扩张，《J. Pure Appl. Algebra》212 (12) (2008) 2668–2690.[61] A. S. Zhedanov，Askey–Wilson 多项式的隐藏对称性，《Theoret. and Math. Phys.》89 (2) (1991) 1146–1157.

哥伦比亚国立大学 - 波哥大校区当前地址：大学校园电子邮件地址：anchaconca@unal.edu.co

哥伦比亚国立大学 - 波哥大校区现地址：大学校园电子邮件地址：mareyesv@unal.edu.co