随机死亡赛中的三队操纵紧界

Atanas Dinev 麻省理工学院，美国马萨诸塞州剑桥

S. Matthew Weinberg 普林斯
顿大学，普林斯顿，美国

2023年1月20日

arXiv:2301.07862v1 [cs.GT] 19 Jan 2023

摘要

考虑一场有 n 支队伍的循环赛，获胜者必须根据 $\binom{n}{2}$ 场两两对决的结果（可能以随机方式）选出。若没有任何一组 k 支队伍能够通过操纵它们之间的 $\binom{k}{2}$ 场两两对决，使其中一支队伍获胜的联合概率提高超过 α，则称该锦标赛规则为 k-SNM-α。先前的研究确定了多种简单的锦标赛规则，它们均满足 2-SNM-$1/3$ （随机单败淘汰赛制 [SSW17],随机擂台王制 [SWZZ20], 随机死亡赛 [DW21]）；在所有孔多塞一致规则中（即以概率 1 选出一支未被击败的队伍），该规则对于 $k = 2$ 是最优的。

我们的主要结果证明，随机死亡赛具有 3-策略无操纵性-($31/60$)，且这一界限是紧的（对于随机死亡赛而言）。这是首次对任何孔多塞一致锦标赛规则在至少三支操纵队伍的情况下进行紧确分析。我们的证明方法在这一领域颇具新意：我们明确找出了最容易被操纵的锦标赛，并直接证明其他任何锦标赛都不可能更容易被操纵。

除主要结果外，我们还证明，随机死亡赛会抑制女巫攻击（即某支队伍以多个自身副本进入锦标赛，并任意操纵这些副本之间比赛的结果）。具体而言，对于任意锦标赛以及任意一支 u 并非孔多塞获胜者的队伍，随着女巫身份数量趋于 ∞， u 或其某个女巫身份在随机死亡赛中获胜的概率趋于 0。

1 引言

考虑一场有 n 支队伍参赛、通过 $\binom{n}{2}$ 场两两对决争夺单一奖项的锦标赛。锦标赛规则是将这 $\binom{n}{2}$ 场比赛映射为一名获胜者的（可能是随机的）映射。与近期的一些研究 [AK10、APT10、SSW17、SWZZ20、DW21], 一致，我们研究满足某种公平性（即“更优秀”的队伍应当有更高的获胜概率）和不可操纵性（即队伍没有操纵比赛的动机）概念的规则。

更具体地说，先前的研究将 孔多塞一致性 （定义 2.4）视为锦标赛规则的一项理想性质：只要存在一支未被击败的队伍，孔多塞一致规则就会以概率 1 选出该队伍作为获胜者。另一项理想性质是 单调性 （定义 2.6）：任何队伍都无法通过故意输掉一场比赛，单方面提高自己获胜的概率。可以说，任何合理的锦标赛规则至少都应满足这两项基本性质，而这类简单规则也有许多。

[APT10, AK10] 进一步考察了以下类型的偏离：如果同一家公司赞助电子竞技赛事中的多支队伍，并希望最大限度地提高其中一支队伍赢得最高奖项的概率，会怎样？[1] 原则上，这些队伍可能会操纵它们之间比赛的结果

[1]类似 地，在传统体育锦标赛中，或许有多名运动员代表同一个国家或大学参赛 t.

以实现这一结果。具体而言，如果不存在任何一组 k 队伍能够成功操纵它们之间的 $\binom{k}{2}$ 两两对决，从而提高其中一支 k 队伍赢得锦标赛的概率，他们就称该锦标赛规则k为强非可操纵（k-SNM，定义 2.5）。遗憾的是，即使对于 $k = 2$, [APT10, AK10] 也证明，没有任何锦标赛规则能够同时满足孔多塞一致性和 2-SNM。

这促使近期研究 [SSW17、SWZZ20、DW21] 致力于设计孔多塞一致且尽可能不可操纵的锦标赛规则。具体而言， [SSW17] 将锦标赛规则定义为 k-SNM-α ，若不存在任何一组 k 队伍能够操纵彼此之间的 $\binom{k}{2}$ 两两对决，从而使这些 k 队伍中任意一支获胜的总概率提高超过 α （见定义 2.5）。这些研究设计了若干简单的孔多塞一致且 2-SNM-$1/3$ 的锦标赛规则；对于 $k = 2$ [SSW17] 而言，这是最优的。事实上，目前 $k = 2$领域的研究进展相当深入： [SSW17、SWZZ20、DW21] 各自都提出了一种新的 2-SNM-$1/3$ 锦标赛规则。 [SWZZ20] 研究了一种更强的公平性概念，并将其称为覆盖一致； [DW21] 则研究了概率锦标赛（更多讨论见第 1.3 节）。

然而，对于 $k > 2$，我们所知的要少得多 。事实上，只有 [SWZZ20] 分析了 $k > 2$ 的可操纵性。他们设计了一种对所有 k 都满足 k-SNM-$2/3$ 的规则，但该规则并非单调，而且尚不清楚他们对该规则的分析是否紧确。我们的主要结果对 $k = 3$ 时随机死亡赛 [DW21] 的可操纵性进行了紧确分析。我们指出，这项结果是：a）首次对 $k > 2$ 的任何孔多塞一致锦标赛规则进行紧确分析；b）首次证明存在一种单调锦标赛规则，对任意 $k > 2$ 和 $\alpha < 1$ 都满足 k-SNM-α ；c）迄今为止，对 $k = 3$ 的任何锦标赛规则（无论是否单调）所作的最强分析。我们将在下文第 1.1 节更详细地概述主要结果。

除了主要结果之外，我们还进一步考察了通过女巫攻击 进行的操纵（定义 2.9）。作为一个例子，设想某锦标赛规则被用作投票规则的代理，以选出一个提案（投票者对每一对提案进行正面对决，这些对决构成输入给锦标赛规则的两两对决）。提案者可能会试图通过女巫攻击来操纵协议，即提交同一提案的多个几乎相同的克隆。这会将原来的锦标赛（其中一个节点 u_1 对应于该提案）操纵成一个新增节点u_2、.....、 u_m对应女巫身份的新锦标赛。每个节点 $v \notin \{u_1, \ldots, u_m\}$ 要么击败所有女巫身份，要么一个也无法击败（因为女巫提案与原提案实际上完全相同）。由此产生的问题是：提案者能否通过操纵女巫身份之间的比赛获利？提案者提交尽可能多的女巫身份是否有利？我们首先证明，在参与随机死亡赛时，女巫身份无法通过操纵彼此之间的比赛获得任何收益。也许更令人惊讶的是，我们证明随机死亡赛是渐近强女巫攻击免疫：随着女巫身份的数量趋近于 ∞，女巫身份赢得 RDM 的集体概率趋近于零（除非原提案是孔多塞赢家，此时无论女巫身份的数量是多少，女巫身份获胜的概率都等于 $1 > 0$）。

1.1 我们的结果

如前所述，我们的主要结果是对随机死亡赛（RDM）在规模为 3 的联盟下的可操纵性进行精确分析。随机死亡赛是一条简单规则：随机均匀地选出两支尚未被淘汰的队伍，并淘汰它们一对一比赛中的负方。

非正式定理 1.1 （见定理 *4.1*）*RDM* 具有 *3*-策略无操纵性-$\frac{31}{60}$。*RDM* 不具有 *3*-策略无操纵性-α，其中 $\alpha < \frac{31}{60}$。

请注意，这是首次对任意 $k > 2$下的孔多塞一致锦标赛规则进行精确分析，也是首次证明存在一种单调、孔多塞一致的锦标赛规则，在任意 $k > 2$、 $\alpha < 1$下具有 k-策略无操纵性-α。还请注意，此前已知存在一种 3-策略无操纵性-α （非单调）孔多塞一致锦标赛规则时，最小的 α 是 $2/3$。

我们的第二个结果探讨女巫攻击造成的操纵。女巫攻击是指一支队伍从基础锦标赛 T出发，添加若干个 $m - 1$ 该队伍的克隆，从而创建一个新的

锦标赛 T'（他们可以任意控制其女巫身份之间的比赛，但每个女巫身份击败的队伍集合都与被克隆的队伍完全相同）（见定义 2.9）。如果对于任意锦标赛 T 和非孔多塞赢家的队伍 $u_1 \in T$，在 r下，该队伍通过女巫身份获胜的最大集体概率（在该队伍使用 m 个女巫身份进行的所有女巫攻击中取最大值）会随着 m 趋于无穷而趋于 0，我们就称锦标赛规则 r 为渐近强女巫攻击免疫（定义 2.10）。正式定义见第 2 节。

定理 1.2（非正式）（见定理 *5.3*）*RDM* 渐近强女巫攻击免疫。

1.2 技术亮点

此前证明某个锦标赛规则满足 2-SNM-$1/3$ 的所有工作都遵循类似的思路：对于任意 T，将操纵 $\{u, v\}$ 比赛可能提高获胜概率的情形，与操纵无济于事的两种情形进行耦合。利用这种耦合论证，或许可以证明，对于一个较小的常数 c，RDM 满足 3-策略无操纵性-($\frac{1}{2} + c$)。然而，鉴于定理 4.1 已证明 RDM 满足 3-策略无操纵性-$31/60$，很难想象这种耦合方法能够切实可行地得出精确答案。

我们的做法则截然不同：我们找出一个特定的 5 队锦标赛，以及 3 支队伍的操纵，使其获得 $31/60$，并直接证明这就是最坏情形。我们采用首步分析来实现这一思路，将 RDM 在一个 n 队锦标赛中进行的第一场比赛视为产生一个关于（$n-1$）队锦标赛的概率分布。

完整分析不可避免地需要仔细分析若干情形，但完全可以通过手工计算完成。尽管对于未来考虑规模更大的 k 或更复杂锦标赛规则的研究而言，这种做法或许不再适用，我们的方法仍有助于缩小潜在最坏情况示例的范围。

1.3 相关工作

关于锦标赛规则的文献浩如烟海，既包括社会选择理论领域的研究，也包括计算机科学界更广泛的研究 [Ban85, Fis77, FR92, GLM93, KSW17, KW15, Mil80, SW11]。《计算社会选择手册》对这一广阔领域作了出色的综述，我们无法在此全面概述 [Mou16]。我们的工作考虑的是最初由 [AK10, APT10], 提出、并由 [DW21, SSW17, SWZZ20], 继续研究的模型，下面将对此作更详细的概述。

[AK10, APT10] 最先研究了同时满足孔多塞一致和 2-SNM 的锦标赛规则，并证明此类规则不存在。他们还研究了满足 2-SNM 且近似孔多塞一致的锦标赛规则。 [SSW17] 最先提出研究满足孔多塞一致、但仅近似满足 2-SNM 的锦标赛规则。他们证明，随机单败淘汰赛制满足 2-SNM-$1/3$，且这一界是紧的。[2] [SWZZ20]证明，随机擂台王制（RKotH）满足 2-SNM-$1/3$, 而[3] DW [则证明，随机死亡赛满足 2-SNM-21] 。$1/3$SWZZ [进一步表明，RKotH 满足一种称为覆盖一致性的更强公平性概念；20] DW [则将他们的分析扩展到了概率锦标赛。总之，21] 相关研究的现状已相当成熟：已有多种满足 2-SNM-$k = 2$ 的锦标赛规则，也已知多种超越 $1/3$ SSW [初始模型的扩展。

然而，对于 $k > 2$，目前所知要少得多。 [SSW17] 给出了一个简单的例子，证明不存在任何对任意 $\varepsilon > 0$ 都满足 k-SNM-$\frac{k-1-\varepsilon}{2k-1}$ 的规则，但目前尚无已知规则能在任何 $k > 2$ 下达到这一界限。事实上， [SWZZ20] 表明该界限并不紧，并为 $k \to \infty$证明了一个更强的下界。例如，他们主要结果的一个推论是，不存在 939-SNM-$1/2$ 锦标赛规则。他们还设计了一种非单调锦标赛规则，对所有 k 都满足 k-SNM-$2/3$ 。除这些结果外，此前没有关于大小为 $k > 2$ 的操纵集合的研究。相比之下，我们的工作首次对任意孔多塞一致锦标赛规则给出了紧

[2]随机单败淘汰赛制会以随机方式将队伍逐一安排进单败淘汰赛制中，随后“进行”该赛制下的所有比赛，以确定获胜者。[3]随机擂台王制会逐一选出一位“擂主”，并淘汰所有被擂主击败的队伍，直到只剩下一支队伍。

确分析，并首次证明，任意单调且孔多塞一致的锦标赛规则对任意 $k > 2$，$\alpha < 1$ 都满足 k-SNM-α。

关于我们对女巫攻击的研究，社会选择理论中早已以组合一致性之名研究过类似的克隆操纵。 [LLL96] 提出了锦标赛中队伍的一种分解方式，将队伍划分为若干连通分量，其中每个连通分量内的所有队伍相对于该分量之外的队伍而言都是彼此的克隆。 [LLL96] 将一种确定性锦标赛规则定义为组合一致的，当且仅当该规则从最佳连通分量中选出最佳队伍[4]。尤其是，组合一致性意味着，失败的队伍无法通过引入自身或其他队伍的克隆而获胜。 [LLL96] 证明，Banks、未覆盖集、TEQ 和最小覆盖集都是组合一致的，而顶循环、Slater 规则和 Copeland 规则则不是。此后，研究者持续探讨组合一致性 的计算与公理化方面。[EFS12] 研究了投票偏好背景下克隆集的结构性质及其计算方面。在概率社会选择领域， [BBS16] 给出了组合一致性 和人口一致性 这两条公理的概率扩展，并对同时满足两者的¨概率社会选择规则进行了唯一刻画。在计分规则领域， [Ozt20] 研究了组合一致性 与强化性 （强于人口一致性）之间的不相容性，并将组合一致性分解为四条更弱的公理。本文研究随机死亡赛中的女巫攻击。我们对女巫攻击的研究与先前关于相关概念组合一致性 的工作有以下不同之处：(i) 我们关注随机锦标赛规则（RDM）；(ii) 我们研究操纵者创建自身克隆（而非其他队伍克隆）的情形；(iii) 我们探讨此类操纵的渐近行为（定义 2.10，定理 5.3）。

1.4 文章结构

第 2 节介绍定义和预备知识，并正式定义随机死亡赛（RDM）。第 3 节介绍 RDM 规则的一些基本性质和示例，并回顾关于两个操纵者的已有研究。第 4 节证明 RDM 中 3 个队伍的可操纵性至多为 $\frac{31}{60}$，并证明该界是紧的。第 5 节介绍我们关于锦标赛中女巫攻击的主要结果。第 6 节总结全文。

2 预备知识

本节将介绍本文中使用的记号，并与先前研究 [DW21、SSW17、SWZZ20] 保持一致。

定义 2.1（锦标赛）一个由 n 个队伍参加的（循环赛制）锦标赛 T 是一个包含 n 个顶点的完全有向图，其边表示两支队伍之间比赛的结果。如果连接队伍 i 和队伍 j 的边从 i 指向 j，则队伍 i 战胜队伍 j。

定义 2.2（锦标赛规则）锦标赛规则 r 是一个函数，它将锦标赛 T 映射为队伍上的一个分布，其中 $r_i(T) := \Pr(r(T) = i)$ 表示在规则 r 下，队伍 i 被宣布为锦标赛 T 获胜者的概率。我们使用简写 $r_S(T) := \sum_{i \in S} r_i(T)$ 表示在规则 r 下，集合 S 中的某支队伍被宣布为锦标赛 T 获胜者的概率。

定义 2.3（S-相邻）如果对于所有满足 $\{i, j\} \not\subseteq S$ 的 i、j，i 在 T 中击败 j，当且仅当 i 在 T' 中击败 j，则称两个锦标赛 T、T' 是 S-相邻的。

换言之，如果队伍 S能够操纵彼此之间比赛的结果，从而得到一个新的锦标赛 T'，那么两个锦标赛 T, T' 就是 S- 相邻的。

[4]完整严谨的数学定义请参见定义 10, [LLL96]

定义 2.4（孔多塞一致）如果队伍 i 在锦标赛 T 中（根据 T）击败了其他所有队伍，那么它就是该锦标赛的孔多塞赢家。若对于每个拥有孔多塞赢家 i的锦标赛 T，锦标赛规则 r 都会使该赢家以概率 *1* 获胜，则该规则是孔多塞一致的 $r_i(T) = 1$（只要 T 有孔多塞赢家，该队伍就以概率 *1* 获胜）。

定义 2.5（操纵锦标赛）对于一个队伍集合 S、一个锦标赛 T和一条锦标赛规则 r，我们将 $\alpha_S^r(T)$ 定义为 S 通过操纵T 使其成为一个与 S相邻的 T'，所能获得的最大获胜概率。也就是说：

$$\alpha_S^r(T) = \max_{T':\ T' \text{ is } S\text{-adjacent to } T} \{r_S(T') - r_S(T)\}$$

对于一条锦标赛规则 r，定义 $\alpha_{k,\ n}^r =$上确界$_{T,\ S:|S|=k,\ |T|=n}\{\alpha_S^r(T)\}$。最后，定义

$$\alpha_k^r = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{k,n}^r = \sup_{T,S:|S|=k} \{\alpha_S^r(T)\}$$

如果 $\alpha_k^r \le \alpha$，我们称 r 在概率 α 下是 k-强非操纵的，或称为 k-*SNM*-α。

直观来说，$\alpha_{k,\ n}^r$ 表示由 k 支队伍组成的群体通过操纵它们之间的比赛，在有 n 支队伍的锦标赛中所能实现的集体获胜概率最大增幅。而 α_k^r 表示由 k 支队伍组成的群体通过操纵它们之间的比赛，在所有锦标赛中所能实现的获胜概率最大增幅。

锦标赛规则另外两项自然且理想的性质是单调性和匿名性 ity.

定义 2.6（单调性）锦标赛规则 r 是单调的，若 T、T' 相邻于 $\{u, v\}$，且 u 在 T中击败 v，那么 $r_u(T) \ge r_u(T')$

定义 2.7（匿名性）锦标赛规则 r 是匿名的，若对于每个锦标赛 T、每个排列 σ以及所有 i、$r_{\sigma(i)}(\sigma(T)) = r_i(T)$

下面定义本文关注的锦标赛规则。

定义 2.8（随机死亡赛）给定一个包含 n 支队伍的锦标赛 T，随机死亡赛规则（*RDM*）会均匀随机地选取两支队伍（不重复），并让它们进行比赛。随后淘汰负方，并在剩余队伍中重复这一过程，总共进行 $n-1$ 轮，直至只剩下一支队伍，该队伍即为获胜者。

下面定义锦标赛 T上的女巫攻击概念，以及锦标赛规则 r的渐近强女巫攻击免疫（ASSP）性质；这两者都会在我们的第 5 节讨论中用到。

定义 2.9（女巫攻击）给定一个锦标赛 T、一支队伍 $u_1 \in T$和一个整数 m，将满足以下性质的锦标赛集合定义为 $Syb(T, u_1, m)$ T'：

1. T' 中的队伍集合由 $u_2 \ldots$、u_m 以及 T中的所有队伍组成。*2.* 如果 a、b是 T中的队伍，那么在 T'中，a 击败 b，当且仅当在 T中，a 击败 b。*3.* 如果 $a \ne u_1$ 是 T和 $i \in [m]$中的一支队伍，那么在 T' 中，u_i 击败 a，当且仅当在 T中，u_1 击败 a。*4.* 对于每个 $i \ne j$，u_i 与 u_j 之间的比赛结果可以任意设定。

直观地说，$Syb(T,\ u_1,\ m)$ 是 u_1 在 T中进行的、涉及 m 个女巫身份的所有女巫攻击的集合。每种女巫攻击都是一个锦标赛 $T' \in Syb(T,\ u_1,\ m)$，它通过从 T出发并创建 m 个 u_1 的女巫身份得到（同时将 u_1 计作其自身的一个女巫身份）。每个女巫身份在 $T \setminus u_1$ 中击败的队伍集合都相同，而女巫身份之间的比赛 u_1，.....，u_m 可以任意安排。女巫身份之间比赛的每一种可能结果都会产生一个新的锦标赛 $T' \in Syb(T,\ u_1,\ m)$（这意味着 $Syb(T,\ u_1,\ m)$ 包含 $2\binom{m}{2}$ 个锦标赛）。

定义 2.10（渐近强女巫攻击免疫）若对于任意锦标赛 T，任何非孔多塞赢家的队伍 $u_1 \in T$，锦标赛规则 r 均满足……，则称其为渐近强女巫攻击免疫（*ASSP*）。

$$\lim_{m\to\infty} \max_{T'\in Syb(T,u_1,m)} r_{u_1,\ldots,u_m}(T') = 0$$

非正式地说，定义 2.10 声称：如果在对 T 发动的、含有 m 个女巫身份的最有利女巫攻击中，女巫获胜的概率会随着 m 趋于 ∞而趋于零，那么 r 就是渐近强女巫防护。

3 RDM 的基本性质及示例

本节将介绍 RDM 的一些基本性质，以及几个关于小型锦标赛的示例。后续分析中我们会引用这些示例。在全文中，我们用 r表示 RDM，它将是我们唯一考察的锦标赛规则。接下来，我们陈述一个首步分析观察结果，它将贯穿全文的分析。对于本节余下部分，给定一场比赛 e，用 $T|_e$ 表示将 e中的负方淘汰后得到的锦标赛。令 $S|_e = S \setminus x$，其中 x是 e中的负方。令 d_x 表示 x 输给的队伍数量，令 $T \setminus x$ 表示从 T中移除队伍 x 后得到的锦标赛。

观察 3.1（首步分析）设 S 是锦标赛 T中的一个队伍子集。那么

$$r_S(T) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_e r_{S|_e}(T|_e) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_x d_x r_{S\setminus x}(T \setminus x)$$

（如果 $S = \{v\}$，那么我们定义 $r_{S\setminus v}(T \setminus v) = 0$；如果 $x \notin S$，那么 $S \setminus x = S$）

证明。 第一个等式来自这样一个事实：在进行 e 后，我们剩下锦标赛 $T|_e$，并对第一轮中所有可能的 e 求和。为证明第二个等式，注意对于任意 x，项 $r_{S\setminus x}(T \setminus x)$ 在 $\sum_e r_{S|_e}(T|_e)$ 中恰好出现 d_x 次，因为 x 恰好输掉 d_x 场比赛。 ■

作为首步分析的第一个例子，我们将展示，添加输给其他所有队伍的队伍，并不会改变获胜者的概率分布。

引理 3.2 设 T 是一个锦标赛，且 $u \in T$ 输给所有队伍。那么对于所有 $v \neq u$，都有 $r_v(T) = r_v(T \setminus u)$。

证明。 我们对 $|T|$ 使用归纳法证明该命题。若 $|T| = 2$，则显然 $r_v(T) = r_v(T \setminus u) = 1$。假设该结论对所有满足 $|T'| < |T| = n$ 的锦标赛 T' 都成立，接下来证明它对 T 也成立。根据首步分析（观察 3.1），我们有

$$r_v(T) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_e r_v(T|_e) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{x\neq v} d_x r_v(T \setminus x)$$

其中队伍 x 在 T中输掉了 d_x 场比赛。根据归纳假设，对于 $x \neq u$，v 和 $d_u = n-1$，有 $r_v(T\setminus x) = r_v(T\setminus\{x,u\})$。因此，

$$\begin{aligned} r_v(T) &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{x\neq v} d_x r_v(T \setminus x) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \Big(\sum_{x\notin\{u,v\}} d_x r_v(T \setminus \{x,u\}) + (n-1) r_v(T \setminus u) \Big) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \Big(\binom{n-1}{2} r_v(T \setminus u) + (n-1) r_v(T \setminus u) \Big) = r_v(T \setminus u) \end{aligned}$$

其中在倒数第二行，我们使用了 $\sum_{x\notin\{u,v\}} d_x r_v(T\setminus\{x,u\}) = \binom{n-1}{2} r_v(T\setminus u)$，这由首步分析（观察 3.1）得出；此外， x 在 $T\setminus u$ 中输掉了 d_x 场比赛，因为 u 输给了 T中的每一支队伍

■

作为引理 3.2 的一个自然推论，我们证明，在 $n+1$ 支队伍的锦标赛中，可操纵性最强的锦标赛至少与在 n 支队伍的锦标赛中可操纵性最强的锦标赛一样容易被操纵。

引理 3。**3** $\alpha^r_{k,n} \le \alpha^r_{k,n+1}$

证明。 证明见附录 A.1。 ■

现在我们展示 RDM 的另一个自然性质，它是孔多塞一致（定义 2.4）的推广，即如果一组队伍 S 赢得了对其余所有队伍的比赛，那么 S 中的一支队伍总会获胜。

引理 3.4 设 T 是一个锦标赛， $S\subseteq T$ 是一组队伍，且 S 中的每支队伍都击败 $T\setminus S$中的每支队伍。那么， $r_S(T) = 1$。

证明。 证明见附录 A.1。 ■

由引理 3.4 可知，RDM 是孔多塞一致的。正如预期，RDM 也是单调的（见定义 2.6）。

引理 3.5 *RDM* 是单调的。

证明。 证明见附录 A.1。 ■

引理 3.2 告诉我们，增加一支输给所有其他队伍的队伍，不会改变其他队伍获胜的概率分布。引理 3.2、3.3、3.4 和 3.5 将有助于我们在第 4 节和第 5 节进行后续分析。现在，我们来看几个锦标赛的例子，并说明如何运用首步分析（观察 3.1）计算其中获胜者的概率分布。

1. 设 $T = \{a,b,c\}$，其中 a 击败 b， b 击败 c，且 c 击败 a。根据 RDM 的对称性，我们有$r_a(T) = r_b(T) = r_c(T) = \frac{1}{3}$。

2. 令 $T = \{a,b,c\}$，其中 a 击败了 b和 c。那么显然， $r_a(T) = 1$，且 $r_b(T) = r_c(T) = 0$。

3. 根据引理 3.2，可知，唯一一个其概率分布无法约化为 3 支队伍上的分布的 4 支队伍锦标赛如下： $T = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，其中 a_i在,2,3 场比赛中击败 a_{i+1}， a_4 击败 a_1， a_1 击败 a_3，且 a_2 击败 a_4。结合引理 3.2，利用我们在 (1) 和 (2) 中计算的结果，通过首步分析可得

$$
\begin{aligned}
r_{a_1}(T) &= \frac{1}{6}(r_{a_1}(T\setminus a_2) + 2r_{a_1}(T\setminus a_3) + 2r_{a_1}(T\setminus a_4)) = \frac{1}{6}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+2) = \frac{1}{2}\\
r_{a_2}(T) &= \frac{1}{6}(r_{a_2}(T\setminus a_1) + 2r_{a_2}(T\setminus a_3) + 2r_{a_2}(T\setminus a_4)) = \frac{1}{6}(1+\frac{2}{3}) = \frac{5}{18}\\
r_{a_3}(T) &= \frac{1}{6}(r_{a_3}(T\setminus a_1) + r_{a_3}(T\setminus a_2) + 2r_{a_3}(T\setminus a_4)) = \frac{1}{6}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{18}\\
r_{a_4}(T) &= \frac{1}{6}(r_{a_4}(T\setminus a_1) + r_{a_4}(T\setminus a_2) + 2r_{a_4}(T\setminus a_3)) = \frac{1}{6}(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}) = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

上述例子在我们的分析中非常重要，因为：a) 我们将在后文第 4.1 节的下界示例中用到它们；b) 它们简要说明了首步分析。

在下一个小节中，我们回顾 RDM 中双队操纵的既有结果，这些结果也将有助于我们在第 4 节中处理主要结果。

3.1 回顾：RDM 中双队操纵的紧界

[DW21]（定理 5.2）证明，RDM 是 2-SNM-$\frac{1}{3}$，且这一界是紧的，即 $\alpha_2^{RDM} = \frac{1}{3}$。我们将在第 4 节中依赖这一结果。

定理 3.6（*[DW21]*中的定理 *5.2*）$\alpha_2^{RDM} = \frac{1}{3}$。

[SSW17]（定理 3.1）证明，对于孔多塞一致规则，界 $\frac{1}{3}$ 是所能达到的最佳界。

定理 3.7（*[SSW17]*中的定理 *3.1*）不存在满足以下条件的孔多塞一致锦标赛规则：该规则定义在 n 参与者（对于 $n \geq 3$）上，且对 $\alpha < \frac{1}{3}$ 是 *2-SNM-*α

我们证明以下一个有用的推论，它将在第 4 节中派上用场。

推论 3.8 设 T 为一个锦标赛，u、$v \in T$ 为两支队伍，且至多存在一场比赛，其中 $\{u, v\}$ 中的一支队伍输给了 $T \setminus \{u, v\}$中的一支队伍。那么

$$r_{u,v}(T) \geq \frac{2}{3}$$

证明。如果 u和 v击败了 $T \setminus \{u, v\}$中的每一支队伍，那么根据引理 3.4，$r_{u,\,v}(T) = 1 \geq \frac{2}{3}$。不失一般性，假设存在一支队伍 t 击败 u，输给 v，而其他所有队伍都输给 u 和 v。令 T' 与 T相邻（关于 $\{u, v\}$），使得 v是 T'中的孔多塞赢家。显然，由于 RDM 是孔多塞一致的，我们有 $r_{u,\,v}(T') = 1$。根据定理 3.6，我们有 $r_{u,\,v}(T') - r_{u,\,v}(T) \leq \frac{1}{3}$。因此可得 $r_{u,\,v}(T) \geq \frac{2}{3}$，证毕。 ■

4 主要结果：$\alpha_3^{RDM} = 31/60$

本节的目标是证明，3 支队伍无法将其获胜概率提高超过$\frac{31}{60}$，并且这一界是紧的。我们证明以下定理

定理 4.1 $\alpha_3^{RDM} = \frac{31}{60}$。

我们的证明分为两部分：

- 下界：$\alpha_3^{RDM} \geq \frac{31}{60}$，为此我们给出一个锦标赛 T 以及一个大小为 3 的集合 S，该集合可以通过操纵将其获胜概率提高 $\frac{31}{60}$。
- 上界：$\alpha_3^{RDM} \leq \frac{31}{60}$，为此我们给出一个证明，表明对于任意锦标赛 T，没有任何大小为 3 的集合 S能够将其获胜概率提高超过 $\frac{31}{60}$，即 RDM 是 3-策略无操纵性-$\frac{31}{60}$。

4.1 下界

令 r 表示 RDM。用 B_x 表示队伍 x 击败的队伍集合。考虑如下锦标赛 $T = \{u, v, w, a, b\}$（如图 1 所示）：

$$B_a = \{u, v, b\}, B_b = \{u, v\}, B_u = \{v, w\}, B_v = \{w\}, B_w = \{a, b\}$$

该锦标赛也显示在图 1 中。令 $S = \{u, v, w\}$。根据首步分析（观察 3.1），并利用我们在第 3 节中关于 4 支队伍锦标赛的知识，我们可以写出

$$\begin{aligned} r_{u,v,w}(T) &= \frac{1}{10}(3r_{u,w}(T \setminus v) + 2r_{u,v}(T \setminus w) + 2r_{u,v,w}(T \setminus b) + r_{u,v,w}(T \setminus a) + 2r_{v,w}(T \setminus u)) = \\ &= \frac{1}{10}(3 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) + 2 \times 0 + 2 \times (\frac{5}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6}) + (\frac{5}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{6}) + 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{6})) = \\ &= \frac{1}{10}(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{29}{60} \end{aligned}$$

现在假设 u 和 v 在与 w的比赛中故意输掉。也就是说， T' 与 T是 S-相邻的，其中在 T'中， w 击败u 和 v ，且其他所有比赛的结果都与 T 中相同。那么，由于 w 是孔多塞赢家，$r_{u,\ v,\ w}(T')$ $= r_w(T')\ = 1$。因此，

$$\alpha_3^{RDM} \geq r_{u,v,w}(T') - r_{u,v,w}(T) = 1 - \frac{29}{60} = \frac{31}{60}$$

因此， $\alpha_3^{RDM} \geq \frac{31}{60}$ 正如所愿。

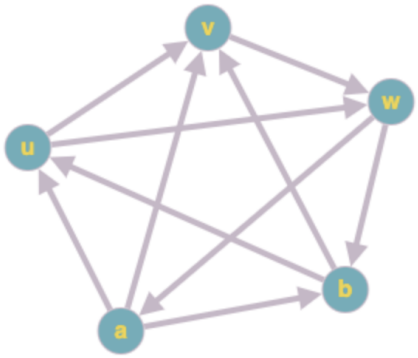

图 1：锦标赛 T，其中 $S = \{u, v, w\}$ 通过操纵获得了 31 60 的收益— n.

4.2 上界

假设我们有一个包含 $n \geq 3$ 个顶点的锦标赛 T，且 $S = \{u, v, w\}$ 是由 3 个（互不相同的）队伍组成的集合，其中 S 将是操纵者队伍的集合。令 I 为这样的比赛集合：来自 S 的队伍负于来自 $T \setminus S$ 的队伍。我们对 $\alpha_k^{RDM} \leq \frac{31}{60}$ 的证明将采用以下策略

- 在第 4.2.1 节和第4.2.2节中，我们通过考察首场比赛可能出现的情形，引入第一步分析框架。在每种情形下，比赛的负方都会被淘汰，剩下的锦标赛中队伍数量将减少一支。我们将 T 中的每场比赛与 T' 中对应的比赛配对，并分别对以下各情形中的操纵收益进行界定（在第 4.2.2 节的分析中，这些情形分别对应于各项 A， B 和 C）。

  – 第一场比赛由 S 中的两支队伍进行（此类比赛有 3 场）。– 第一场比赛由 S 中的一支队伍和 $T \setminus S$ 中的一支队伍进行，且 S 中的队伍在比赛中落败（此类比赛有 $|I|$ 场）。– 第一场比赛是上述两种情形以外的任意一场比赛

- 在第4.2.3节中，我们证明如果 $|I| \leq 4$，那么 $\alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{31}{60}$ （即操纵者集合通过操纵所能获得的收益不超过31 60 ）。
- 在第4.2.4节中，我们证明，如果 T 是 n 个顶点上的最易被操纵的锦标赛（即 $\alpha_S^{RDM}(T) = \alpha_{3\ n}^{RDM}$ ），那么 $\alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{|I|+7}{3}$ $(|I|+3)$
- 在第4.2.5节中，我们结合上述事实，完成定理 4.1 的证明

我们首先介绍一些将在本节中用到的记号。假设 T' 和 T是 S-相邻的。回顾第 3 节，对于一场比赛 $e = (i,\ j)$， $T|_e$ 是淘汰 e 中的负方后得到的锦标赛。此外， d_x 表示队伍 x 在 T 中输给的队伍数量。对于 $x \in S$，令 ℓ_x表示在 T 中考察时， x 对阵 S 中的一支队伍时输掉的比赛场数，并令 ℓ'_x 表示

x 对阵 S 中的一支队伍时输掉的比赛场数（在 T'中考察）。令 d_x^* 表示 $T \setminus S$ 中 x 输给的队伍数量。注意，由于 T和 T' 是 S-相邻的，因此在 T'中考察时， $x \in S$ 恰好输给 $T' \setminus S$中的 d_x^*支队伍。令 $G = I \cup \{uv, vw, uw\}$为由 S 中的队伍输掉的比赛构成的集合。

4.2.1 首步分析框架

注意，在 RDM 的第一轮中，会从 $\binom{n}{2}$ 场比赛中均匀随机地选出一场比赛 e 。如果$e \in G$，那么剩下的是 $T \setminus x$，其中 x 会在 e 中输给某个 $x \in S$。如果 $e \notin G$，那么剩下的是 $T|_e$，且 S 中的所有队伍仍在锦标赛中。对于 $x \in S$，有 ℓ_x 场比赛中它们输给来自 S 的队伍，以及 d_x^* 场比赛中它们输给来自 $T \setminus S$的队伍。考虑这些情形并使用首步分析（观察 3.1），可得

$$r_{u,v,w}(T) = \frac{1}{\binom{n}{2}}\Bigg[\sum_{x\in\{u,v,w\}} \ell_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T \setminus x) + d_u^* r_{v,w}(T \setminus u) + d_v^* r_{u,w}(T \setminus v) + d_w^* r_{v,u}(T \setminus w) + \sum_{e\notin G} r_{u,v,w}(T|_e)\Bigg]$$

由于 T和 T'是 S-相邻的，每个 $x \in S$恰好输给 d_x^*，队伍构成 $T' \setminus S$，因此我们也可以类似地写出

$$r_{u,v,w}(T') = \frac{1}{\binom{n}{2}}\Bigg[\sum_{x\in\{u,v,w\}} \ell'_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T' \setminus x) + d_u^* r_{v,w}(T' \setminus u) + d_v^* r_{u,w}(T' \setminus v) + d_w^* r_{v,u}(T' \setminus w) + \sum_{e\notin G} r_{u,v,w}(T'|_e)\Bigg]$$

将上述两个表达式相减，得到

$$\begin{aligned} &r_{u,v,w}(T') - r_{u,v,w}(T) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}}\Bigg[\sum_{x\in\{u,v,w\}} \ell'_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T' \setminus x) - \ell_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T \setminus x) + d_u^*(r_{\{v,w\}}(T' \setminus u) - r_{\{v,w\}}(T \setminus u)) \\ &+ d_v^*(r_{\{u,w\}}(T' \setminus v) - r_{\{u,w\}}(T \setminus v)) + d_w^*(r_{\{v,u\}}(T' \setminus w) - r_{\{v,u\}}(T \setminus w)) \\ &+ \sum_{e\notin G} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e)\Bigg] \end{aligned}$$

因此，

$$r_{u,v,w}(T') - r_{u,v,w}(T) = \frac{1}{\binom{n}{2}}(A + B + C) \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \sum_{x\in\{u,v,w\}} \ell'_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T' \setminus x) - \ell_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T \setminus x) \\ B &= \sum_{x\in S} d_x^*(r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T' \setminus x) - r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T \setminus x)) \\ C &= \sum_{e\notin G} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e) \end{aligned}$$

4.2.2 A、B 和 C的上界

现在，我们证明关于项 A、B 和 C（定义见第4.2.1节）的一些界，这些界将在后文派上用场。回顾一下，I 表示这样的比赛集合：来自 S 的队伍输给来自 $T \setminus S$ 的队伍。我们先在以下引理中给出 A 的界。

引理4.2 对于所有 S-相邻的 T和 T'，我们有$A \leq \frac{7}{3}$。此外，若 $|I| \leq 1$，则 $A \leq 1$。

证明。 证明见附录 A.2。 ■

接下来，我们给出项 B的如下界。

引理 4.3 对于所有 S-相邻的 T、T'，我们有

$$B \leq \frac{d_u^* + d_v^* + d_w^*}{3} = \frac{|I|}{3}$$

此外，若 $|I| \leq 1$，则 $B = 0$

证明。 证明见附录 A.2。 ■

我们再引入一些记号。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $M_n(a_1, a_2, a_3)$ 为三支队伍 $\{u, v, w\}$ 通过操纵规模为 n 的锦标赛 T所能达到的最大获胜概率增益；在该锦标赛中，恰有 a_i 支队伍位于 $T \setminus S$，且其中每支队伍恰好击败 i 支 S 队伍。形式化地，

$$M_n(a_1, a_2, a_3) = \max \Big\{ r_S(T') - r_S(T) | T, T' \text{ are } S\text{-adjacent}, |T| = n, |S| = 3, \\ a_i \text{ teams in } T \setminus S \text{ beat exactly } i \text{ teams in } S \Big\}$$

此外，令 L_i 为 $T \setminus S$ 中每支恰好击败 i 支 S 队伍的队伍集合。令 Q 为这样的比赛集合：其中两支来自 L_i 的队伍相互比赛，或来自 L_i 的队伍输给来自 S 的队伍，适用于 $i = 1,2,3$。注意，$|Q| = 2a_1 + a_2 + \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_3}{2}$ 中有 a_i 支队伍时，其中每支队伍都击败了来自 S 的 i 支队伍。

使用新的记号后，我们现在可以证明对项 C的一个界。回顾一下，

$$C = \sum_{e \notin G} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e)$$

其中，$G = I \cup \{uv, vw, uw\}$ 是队伍 S中的队伍输掉的比赛集合。于是，我们对 C有如下界。

引理 4.4 对于所有 S-相邻的 T和 T'，都有 C 至多为

$$(2a_1 + \binom{a_1}{2}) M_{n-1}(a_1 - 1, a_2, a_3) + (a_2 + \binom{a_2}{2}) M_{n-1}(a_1, a_2 - 1, a_3) + \binom{a_3}{2} M_n(a_1, a_2, a_3 - 1) \\ + \sum_{e \notin G \cup Q} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e)$$

证明。 证明见附录 A.2。 ■

4.2.3 情形 $|I| \leq 4$

我们在以下引理中总结当 $|I| \leq 4$ 时的结论

引理 4.5 设 T 为一场锦标赛，S 为一个由 *3* 支队伍组成的集合。假设 S 中的某支队伍输给 $T \setminus S$ 中的某支队伍的比赛至多有 *4* 场（即 $|I| \leq 4$）。那么 $\alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{31}{60}$

$(a_1,\ a_2,\ a_3)$	$f(a_1,a_2,a_3)$
(0,0,0)	0
(1,0,0)	$\frac{1}{6}$
(2,0,0)	$\frac{23}{60}$
(3,0,0)	$\frac{407}{900}$
(4,0,0)	$\frac{4499}{9450}$
(0,1,0)	$\frac{1}{2}$
(0,2,0)	$\frac{31}{60}$
(1,1,0)	$\frac{1}{2}$
(2,1,0)	$\frac{131}{260}$
(0,0,1)	0
(1,0,1)	$\frac{11}{27}$

表 1： $M_n(a_1,\ a_2,\ a_3)$ 的上界

证明。 我们将根据表 1 中给出的 (a_1,a_2,a_3) 和 $f(a_1,a_2,a_3)$ 的取值，对 $n \in \mathbb{N}$ 进行归纳法，证明 $M_n(a_1,a_2,a_3) \leq f(a_1,a_2,a_3)$。注意，当 S 中的某支队伍与 $T \setminus S$中的某支队伍之间至多进行 4 场比赛，且 S 中的队伍输掉这些比赛时，就属于表中针对 (a_1,a_2,a_3) 所示的某一种情形。

1. 基础情形 我们的基础情形是 $n = 3$。如果处于 3 支队伍的情形，那么 S 以概率 1 获胜，因此 S 通过操纵所能获得的最大收益显然为 0，这满足表中所有的界。

2. 归纳步骤 假设对于表 1 中的所有 $k < n$ 以及 $a_1,\ a_2,\ a_3$， $M_k(a_1,\ a_2,\ a_3) \leq f(a_1,\ a_2,\ a_3)$均成立。我们将证明该命题对 $k = n$成立。注意，由表 1 可知， f 关于每个变量都是单调的，即如果对 $i = 1,\ 2,\ 3$有 $a_i' \leq a_i$，那么

$$f(a_1',a_2',a_3') \leq f(a_1,a_2,a_3) \tag{2}$$

假设 $e \notin G \cup Q$[5]。那么，由于 $e \notin G$， S 仍然属于 $T|_e$。对于锦标赛 H，定义$t(H) = (a_1',\ a_2',\ a_3')$，其中 H中恰有 a_i'支队伍属于 $H \setminus \{u,v,w\}$，且这些队伍恰好击败了$\{u,v,w\}$中的 i。显然，我们有 $t(T|_e) = (a_1',\ a_2',\ a_3')$，其中 $a_i' \leq a_i$。根据 f在式 (2) 中的单调性以及归纳假设，可得

$$r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e) \leq M_{n-1}(a_1',a_2',a_3') \leq f(a_1',a_2',a_3') \leq f(a_1,a_2,a_3)$$

由于 $|G \cup Q| = 3(1 + a_1 + a_2 + a_3) + \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_3}{2}$，我们有

$$\sum_{e \notin G \cup Q} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e) \leq \left(\binom{n}{2} - 3(1+a_1+a_2+a_3) - \binom{a_1}{2} - \binom{a_2}{2} - \binom{a_3}{2}\right) f(a_1,a_2,a_3)$$

此外，根据归纳假设，我们有

$$\begin{aligned} M_{n-1}(a_1-1,a_2,a_3) &\leq f(a_1-1,a_2,a_3) \\ M_{n-1}(a_1,a_2-1,a_3) &\leq f(a_1,a_2-1,a_3) \\ M_{n-1}(a_1,a_2,a_3-1) &\leq f(a_1,a_2,a_3-1) \end{aligned}$$

[5]回想一下， G 是指某支来自 S 的队伍输掉的比赛集合，而 Q 是指两支来自 L_i 的队伍之间进行的比赛，或某支来自 L_i 的队伍输给来自 S 的队伍时所进行的比赛集合（参见引理 4.4 之前的讨论）

因此，根据引理 4.4，并结合上述不等式，我们有

$$C \le (2a_1 + \binom{a_1}{2}) f(a_1-1,a_2,a_3) + (a_2 + \binom{a_2}{2}) f(a_1,a_2-1,a_3) + \binom{a_3}{2} f(a_1,a_2,a_3-1)$$
$$+ (\binom{n}{2} - 3(1+a_1+a_2+a_3) - \binom{a_1}{2} - \binom{a_2}{2} - \binom{a_3}{2}) f(a_1,a_2,a_3)$$

由引理 4.3 可得

$$B \le \frac{d_u^* + d_v^* + d_w^*}{3} = \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{3} = \frac{|I|}{3}$$

结合上述界并代入（1），得到

$$r_{u,v,w}(T') - r_{u,v,w}(T) \le \frac{1}{\binom{n}{2}}(A + B + C) \le$$
$$\le \frac{1}{\binom{n}{2}} \Bigg[A' + B' + (2a_1 + \binom{a_1}{2}) f(a_1-1,a_2,a_3) + (a_2 + \binom{a_2}{2}) f(a_1,a_2-1,a_3)$$
$$+ \binom{a_3}{2} f(a_1,a_2,a_3-1) + (\binom{n}{2} - 3(1+a_1+a_2+a_3) - \binom{a_1}{2} - \binom{a_2}{2} - \binom{a_3}{2}) f(a_1,a_2,a_3) \Bigg]$$

其中，若 $|I| \le 1$，则 $A' = 1$；若 $|I| \ge 2$，则 $A' = \frac{7}{3}$ 和 $B' = \frac{|I|}{3}$。由引理4.2 和引理 4.3 可知。由于右侧仅取决于（a_1，a_2，a_3），我们可以对所有 n 队伍的锦标赛取最大值，从而得到

$$M_n(a_1,a_2,a_3) \le \frac{1}{\binom{n}{2}} \Bigg[A' + B' + (2a_1 + \binom{a_1}{2}) f(a_1-1,a_2,a_3) + (a_2 + \binom{a_2}{2}) f(a_1,a_2-1,a_3)$$
$$+ \binom{a_3}{2} f(a_1,a_2,a_3-1)$$
$$+ (\binom{n}{2} - 3(1+a_1+a_2+a_3) - \binom{a_1}{2} - \binom{a_2}{2} - \binom{a_3}{2}) f(a_1,a_2,a_3) \Bigg] \quad (\Delta)$$

现在，将公式（Δ）应用于表 1 中的每种情形。我们在正文中展示（a_1，a_2，a_3）∈{(0，0，0)，(1，0，0)，(0，2，0)} 的计算过程以说明该方法，并将表 1 中其他情形的计算留至附录 A.2。注意，只有当（a_1，a_2，a_3）=(0，2，0)时，操纵者才能达到31 60。—

情形 1 (a_1,a_2,a_3) =(0,0,0). 根据引理 3.4 可知，$M_n(0,0,0) = 0 = f(0,0,0)$，因此无论 S内部进行何种比赛，来自 S 的队伍都以概率 1 获胜。

情形 2 (a_1,a_2,a_3) =(1,0,0). 在这种情形下，$|I| = 1$。因此，通过应用 Δ，结合 $A' = 1$和 $B = 0$，我们得到

$$M_n(1,0,0) \le \frac{1}{\binom{n}{2}}(1 + 2f(0,0,0) + (\binom{n}{2} - 6)\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} = f(1,0,0)$$

情形 3 (a_1，a_2，a_3) =(0，2，0)。应用 Δ，我们得到

$$M_n(0,2,0) \le \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{4}{3} + (2+1)f(0,1,0) + (\binom{n}{2} - 10)f(0,2,0))$$
$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{11}{3} + \frac{3}{2} + (\binom{n}{2} - 10)\frac{31}{60})$$
$$= \frac{31}{60} + \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{22+9}{6} - \frac{31}{6}) = \frac{31}{60} = f(0,2,0)$$

情形 4 $(a_1, a_2, a_3) = (2, 0, 0)$。参见附录 A.2。情形 5 $(a_1, a_2, a_3) = (3, 0, 0)$。参见附录 A.2。情形 6 $(a_1, a_2, a_3) = (4, 0, 0)$。参见附录 A.2。情形 7 $(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 0)$。参见附录 A.2。情形8 $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 0)$。参见附录 A.2。情形9 $(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 0)$。参见附录 A.2。情形10 $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1)$。参见附录 A.2。情形 11 $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 1)$。参见附录 A.2。

至此，归纳过程以及表 1 中各界的证明均已完成。注意，对于表 1 中的所有 a_1, a_2, a_3，$f(a_1, a_2, a_3) \leq \frac{31}{60}$，且当 $(a_1, a_2, a_3) = (0,2,0)$ 时可达到此界；也就是说，有 2 支队伍恰好击败了 S 中的两支队伍，这与第 4.1 节中的最优示例相同。因此，如果 S 中的某支队伍输给 $T \setminus S$ 中某支队伍的比赛至多有 4 场，那么 $\alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{31}{60}$。引理得证。 ■

4.2.4 最易操纵锦标赛的一般上界

引理 4.6 假设 $\alpha_S^{RDM}(T) = \alpha_{3,n}^{RDM}$。令 I 为 S 中某支队伍输给 $T \setminus S$ 中某支队伍的比赛集合。那么

$$\alpha_{3,n}^{RDM} = \alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{|I|+7}{3(|I|+3)}$$

证明。 设 T 和 T' 是在 n 个顶点上的 S-相邻锦标赛，使得 $S = \{u, v, w\}$ 和

$$\alpha_{3,n}^{RDM} = \alpha_S^{RDM}(T) = r_S(T') - r_s(T)$$

也就是说，T 是在 n 个顶点上的“最坏”示例。由 (1) 可得

$$\alpha_{3,n}^{RDM} = \frac{1}{\binom{n}{2}}(A + B + C)$$

其中 A，B 和 C 定义于第4.2.1节。由引理4.2可得

$$A \leq \frac{7}{3}$$

由引理 4.3 可得

$$B \leq \frac{d_u^* + d_v^* + d_w^*}{3} = \frac{|I|}{3}$$

设 $e \notin G$。注意到，$T'|_e$ 和 $T|_e$ 都是在 $n-1$ 个顶点上的锦标赛，并且根据 G 的定义，u，v，w 在 $T'|_e$ 和 $T|_e$ 中均未被淘汰。此外，$T'|_e$ 和 $T|_e$ 是 S-相邻的。因此，对于每个 $e \notin G$，由引理3.3可得

$$r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e) \leq \alpha_{3,n-1}^{RDM} \leq \alpha_{3,n}^{RDM}$$

将上述结果应用于 C 中的每一项，并利用 $|G| = 3 + |I|$ 这一事实，可得

$$C \leq (\binom{n}{2} - (3 + |I|))\alpha_{3,n}^{RDM}$$

利用上述 3 个界，我们得到

$$\begin{aligned} & \alpha_{3,n}^{RDM} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{|I|}{3} + (\binom{n}{2} - (3 + |I|))\alpha_{3,n}^{RDM}) \\ \iff & (|I|+3)\alpha_{3,n}^{RDM} \leq \frac{|I|+7}{3} \\ \iff & \alpha_{3,n}^{RDM} = \alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{|I|+7}{3(|I|+3)} \end{aligned}$$

如所需。 ■

4.2.5 定理 4.1 的证明

假设 T 是具有 n 个顶点的最易被操纵的锦标赛，即它满足 $\alpha_S^{RDM}(T) = \alpha_{3,n}^{RDM}$。若 $|I| \leq 4$，则由引理 4.5 可得

$$\alpha_{3,n}^{RDM} = \alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{31}{60}$$

如果 $|I| \geq 5$，那么根据引理 4.6

$$\alpha_{3,n}^{RDM} = \alpha_S^{RDM}(T) \leq \frac{|I|+7}{3(|I|+3)} \leq \frac{5+7}{3(5+3)} = \frac{1}{2}$$

其中上文用到了 $\frac{x+7}{3(x+3)}$ 关于 $x \geq 5$ 是递减的。结合上述各界，我们得到 $\alpha_{3,n}^{RDM} \leq \frac{31}{60}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，

$$\alpha_k^{RDM} = \max_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{k,n}^{RDM} \leq \frac{31}{60}$$

这证明了上界，并完成了定理 4.1 的证明。

5 锦标赛中的女巫攻击

5.1 锦标赛中的女巫攻击主要结果

回想一下我们在引言中的动机。设想用某种锦标赛规则作为投票规则的代理，以选出一项提案。各项提案两两比较，这就构成了最终锦标赛中的两两对决。提案者可以通过女巫攻击操纵协议，提交许多几乎相同、相对于其他提案实力也几乎相等的提案。提案者可以选择操纵其两项提案之间的正面对决结果，以最大化自己的某项提案被选中的概率。在锦标赛 T 中，他的提案对应一个队伍 u_1，而女巫攻击所产生的锦标赛 T' 是 $Syb(T, u_1, m)$ 的一个成员（回想定义 2.9）。本节要回答的问题是：（1）女巫身份能否通过操纵自己的比赛，成功提高其整体获胜概率？（2）对提案者而言，创建尽可能多的女巫身份是否有利？

我们首先关心的问题是，女巫身份组成的任何群体能否通过操纵比赛，成功提高自己的获胜概率。结果是否定的。我们先证明，非女巫身份队伍获胜的概率，不取决于女巫身份之间的比赛结果。

引理 5.1 存在一个函数 q，其输入为整数 m、锦标赛 T、队伍 $u_1 \in T$ 和队伍 $v \in T \setminus u_1$，并具有以下性质。对于所有 $T' \in Syb(T, u_1, m)$，我们有

$$r_v(T') = q(m, T, u_1, v)$$

其中，对 u_1 的依赖关系编码为其与 T 其余成员比赛的结果。

证明。 完整证明见附录 A.3。 ■

注意，根据引理 5.1 $r_v(T') = q(m, T, u_1, v)$ 与选择哪一个锦标赛 $T' \in Syb(T, u_1, m)$ 无关。现在，我们证明第一个预告的结果：无论女巫攻击中有多少女巫身份，都无法通过操纵彼此之间的比赛来提高获胜概率。

定理 5.2 设 T 为一场锦标赛，$u_1 \in T$ 为一个队伍，m 为一个整数。设 $T_1' \in Syb(T, u_1, m)$。令 $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$。则

$$\alpha_S^{RDM}(T_1') = 0$$

证明。 设 T_1' 和 T_2' 是 S-相邻的。根据定义 2.9， $T_2' \in Syb(T, u_1, m)$。因此，根据引理 5.1， $r_v(T_1') = r_v(T_2') = q(m, T, u_1, v)$ 对所有 $v \in T \setminus u_1$ 均成立。利用这一点，我们得到

$$r_S(T_1') = 1 - \sum_{v \in T \setminus u_1} r_v(T_1') = 1 - \sum_{v \in T \setminus u_1} r_v(T_2') = r_S(T_2')$$

因此，对于所有 S-相邻的 T_1'， T_2'， $r_S(T_1') = r_S(T_2')$，这就得到了所需结果。 ■

定理 5.2 表明，任意数量的女巫身份都无法通过操纵来提高它们集体获胜的概率。这引出了一个问题：提案者向锦标赛提交大量（几乎）相同的提案，以最大限度地提高其中一个提案被选中的概率，是否有利可图。我们证明，随机死亡赛会抑制这种行为。当 u_1 是 T 中的孔多塞赢家时，根据引理 3.4，女巫将以概率 1 获胜。我们证明，若 u_1 不是 T 中的孔多塞赢家，则当 m 趋于无穷大时，在针对 u_1 的所有女巫攻击中，任一女巫获胜的最大概率趋于 0。换言之，RDM 是渐近强抗女巫攻击的（回顾定义 2.10）。

在陈述第二个主要定理之前，我们先回顾一些记号。设 $u_1 \in T$ 是一支队伍（不是孔多塞赢家）。设 A 为 T 中被 u_1 击败的队伍集合，并设 B 为击败 u_1 的队伍集合。令 $T' \in Syb(T, u_1, m)$ 和 $v \in T \setminus u_1$。根据引理 5.1，对于所有 $T' \in Syb(T, u_1, m)$，都有 $r_v(T') = q(m, T, u_1, v)$。此外，根据引理 5.1，

$$r_{u_1,\ldots,u_m}(T') = 1 - \sum_{v \in T \setminus u_1} r_v(T') = 1 - \sum_{v \in T \setminus u_1} q(m, T, u_1, v) \tag{3}$$

and

$$r_A(T') = \sum_{v \in A} q(m, T, u_1, v) \tag{4}$$

注意，（3）和（4）右侧的各项仅取决于 T， u_1 和 m。因此，我们可以定义函数

$$h(m, T, u_1) = r_{u_1,\ldots,u_m}(T')$$
$$g(m, T, u_1) = r_A(T')$$

and

$$p(m, T, u_1) = h(m, T, u_1) + g(m, T, u_1)$$

（这里， $p(m, T, u_1)$ 是女巫身份或来自 A 的队伍获胜的集体总概率）

现在我们可以证明第二个主要结果了。也就是说，RDM 是渐近强女巫攻击免疫的（定义 2.10）。在给出结果（定理 5.3）之前，我们先说明一些直观理由，解释为什么 RDM 应当具有渐近强女巫防护。注意，女巫身份获胜的唯一方式，是 B 中的所有队伍都在所有女巫身份之前被淘汰。 B 中的队伍只能被 A 中的队伍淘汰。然而，随着 m 增大，女巫身份会变多，因此直观上， A 中的队伍更有可能在 B 中的队伍之前全部输掉锦标赛。当 A 中不再有队伍，而 B 中至少还有一支队伍时，女巫身份就不可能获胜。事实上，这一直觉还意味着比 RDM 具有渐近强女巫防护更强的结论：女巫身份与来自 A 的队伍的集体获胜概率（记作 $p(m, T, u_1)$）会随着 m 趋于 ∞ 而收敛到 0（或者说，来自 B 的队伍获胜的概率趋于 1）。这一理念也隐含在定理 5.3 证明的技术细节之中。

定理 5.3 随机死亡赛是渐近强女巫攻击免疫的。事实上，一个更强的结论成立，即如果 $u_1 \in T$ 不是孔多塞赢家，那么

$$\lim_{m \to \infty} p(m, T, u_1) = 0$$

证明。 完整证明见附录 A.3。 ■

5.2 一个直观主张的反例

我们将利用定理 5.3 证明，RDM 不满足定义 2.6 中单调性的更强版本。首先，我们推广第 3 节给出的单调性定义。

定义 5.4（强单调）设 r 为一条锦标赛规则。设 T，并设 $C \cup D$ 是将 T 中的队伍划分为两个不相交集合的任意一种方式。若对于每个 $(u, v) \in C \times D$，只要 T' 与 T 是 $\{u, v\}$-相邻的，且 u 在 T' 中击败了 v，就有 $r_C(T') \geq r_C(T)$，则称锦标赛规则 r 是强单调的。

直观地说，如果将 C 中的一支队伍与 D 中的一支队伍之间的比赛结果翻转，使其有利于 C 中的队伍，从而让 C 受益，那么我们就称 r 是强单调的。注意，如果 $|C| = 1$，这就是通常的单调性定义（定义 2.6），根据引理 3.5，RDM 满足这一性质。然而，RDM 并非强单调，尽管强单调性似乎是一种直观上应当具备的性质。

主张 5.5 *RDM* 不具有强单调性

证明。反设 RDM 具有强单调性。从一个三环竞赛图 T 开始，其中 a_1 击败 b，b 击败 c，且 c 击败 a_1。令 $T' \in Syb(T, a_1, m)$ 表示 a_1 对 T 发动的一次女巫攻击，其中有 m 个女巫身份。设这些女巫身份为 $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，其中 a_i 在 T' 中击败 a_j，对 $i < j$ 均如此。根据定理 5.3，我们可以令 m 足够大，使得 $r_C(T') < \frac{1}{6}$。假设 C 中除 a_1 以外的所有女巫身份都在与 b 的所有比赛中故意输掉，并将由此得到的锦标赛记作 T''。那么，如果 RDM 具有强单调性，就有 $r_C(T'') \leq r_C(T') < \frac{1}{6}$（从 T'' 开始，反复应用强单调性）。注意，从 T'' 开始，对 a_i 反复应用引理 3.2，并从锦标赛中移除 a_i，依次令 $i = m$ 为 $m-1$、.....、2，就会得到锦标赛 T；而 T'' 中获胜者的概率分布将与 T 中相同。因此，$r_C(T'') \geq r_a(T'') = r_a(T) = \frac{1}{3}$，但 $r_a(T'') < \frac{1}{6}$，这与我们关于 RDM 具有强单调性的假设矛盾。 ■

6 结论与未来工作

我们采用一种新颖的首步分析，精确确定使 RDM 具有 3-策略无操纵性的最小 α α。具体而言，我们的主要结果表明 $\alpha_3^{RDM} = \frac{31}{60}$。请注意，这是针对任意 $k > 2$ 的任何孔多塞一致锦标赛规则进行的首个紧确分析，也是首个对任意 $k > 2$，$\alpha < 1$ 都满足 k-策略无操纵性的单调、孔多塞一致锦标赛规则 α。我们还首次研究了通过女巫攻击进行操纵的问题，并证明 RDM 渐近强女巫攻击免疫。

我们的技术方法为分析最坏情形示例虽复杂但可处理的 RDM（或其他锦标赛规则）的可操纵性开辟了可能性。例如，优雅的耦合论证虽然适用于 $k = 2$，但不太可能得到 $31/60$ 的紧确界；而我们的方法能够大幅缩小最坏情形示例的搜索空间，并通过可处理的情形分析确认某个特定的 5 队锦标赛达到紧确界。我们的方法也可用于分析 RDM 在 $k > 3$ 下的可操纵性，或分析其他锦标赛规则。不过，未来研究仍需克服显著的技术障碍，才能使大型 k 的分析保持可处理性，或处理递归步骤更复杂的锦标赛规则。尽管如此，我们的技术为此类分析提供了一条清晰的路径，而此前并不存在这样的路径。

参考文献

[AK10] Alon Altman 和 Robert Kleinberg。不可操纵的随机锦标赛选拔。载于*AAAI*人工智能会议论文集，第 24 卷，2010 年。[APT10] Alon Altman、Ariel D Procaccia 和 Moshe Tennenholtz。锦标赛中的不可操纵选拔。载于社会选择的计算基础，*07.03. - 12.03.2010*，达格施图尔研讨会论文集*Dagstuhl Seminar Proceedings*第 10101 卷。德国达格施图尔 Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2010 年。

[Ban85] J. S. Banks。复杂投票结果与议程控制。《社会选择与福利》，1(4):295–306，1985年。[BBS16] Florian Brandl、Felix Brandt 和 Hans Georg Seedig。一致的概率社会选择。《计量经济学》，84(5):1839–1880，2016 年。[DW21] Kimberly Ding 和 S Matthew Weinberg。概率环境下近似策略无操纵的锦标赛规则。载于第 12 届理论计算机科学创新会议（ITCS），LIPIcs。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021 年。[EFS12] Edith Elkind、Piotr Faliszewski 和 Arkadii Slinko。选民偏好中的克隆结构。载于第 13 届 ACM电子商务会议论文集，第 496–513 页，2012 年。[Fis77] Peter C. Fishburn。孔多塞社会选择函数。《SIAM应用数学杂志》，33(3):469–489，1977 年。[FR92] David C. Fisher 和 Jennifer Ryan。广义“剪刀、石头、布”游戏的最优策略。《美国数学月刊》，99(10):935–942，1992 年。[GLM93] Laffond G.、Jean-Franc¸ois Laslier 和 Le Breton M.。锦标赛博弈的两党集合。《博弈与经济行为》，5(1):182–201，1993 年。[KSW17] Michael P Kim、Warut Suksompong 和 Virginia Vassilevska Williams。谁能赢得单败淘汰赛？《SIAM离散数学杂志》，31(3):1751–1764，2017 年。[KW15] Michael P Kim 和 Virginia Vassilevska Williams。为王者、弱者等安排锦标赛。《第二十四届国际人工智能联合会议》，2015 年。[LLL96] Gilbert Laffond、Jean Lain´e 和 Jean-Franc¸ois Laslier。组合一致的锦标赛解与社会选择函数。《社会选择与福利》，13(1):75–93，1996 年。[Mil80] Nicholas R. Miller。锦标赛和多数投票的新解集：投票理论的进一步图论方法。《美国政治学杂志》，24(1):68–96，1980 年。[Mou16] Herv´e Moulin。《计算社会选择手册》。剑桥大学出版社，2016 年。.. .[Ozt20] Z Emel Ozt¨urk。计分规则的一致性：对组合一致性的重新考察。《国际博弈论杂志》，49(3):801–831，2020 年。[SSW17] Jon Schneider、Ariel Schvartzman 和 S Matthew Weinberg。孔多塞一致且近似策略无操纵的锦标赛规则。载于第 8 届理论计算机科学创新会议（ITCS）论文集，2017 年。[SW11] Isabelle Stanton 和 Virginia Vassilevska Williams。为较弱选手操纵锦标赛对阵表。载于 IJCAI 论文集——国际人工智能联合会议，第 22 卷，第 357 页，2011 年。[SWZZ20] Ariel Schvartzman、S Matthew Weinberg、Eitan Zlatin 和 Albert Zuo。近似策略无操纵的锦标赛规则：论大型操纵集合与覆盖一致性。第 11 届理论计算机科学创新会议（ITCS 2020），2020 年 1 月 12–14 日，美国华盛顿州西雅图，第 151 卷 LIPIcs，第 3:1–3:25 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020 年。

A 省略的证明

A.1 第 3 节中省略的证明

引理3.3 的证明。 考虑一场包含 n 个顶点的锦标赛 T，以及一个大小为 k 的集合 S，使得 S 可以操纵它们之间的比赛，将其变为锦标赛 T'，从而使其获胜概率增加 $\alpha^r_{k,\ n}$，即

$$\alpha^r_S(T) = r_S(T') - r_S(T) = \alpha^r_{k,n}$$

令 u 为一支新的队伍，它输给 T 中的所有队伍。由引理 3.2 可得 $r_S(T') = r_S(T' \cup u)$ 且 $r_S(T) = r_S(T \cup u)$。因此，

$$\alpha^r_{k,n+1} \geq r_S(T' \cup u) - r_S(T \cup u) = r_S(T') - r_S(T) = \alpha^r_{k,n}$$

□

引理 3.4 的证明。 反设存在某个 $v \in T \setminus S$ 在 RDM 的某次执行过程中获胜。考虑最后一支队伍 $u \in S$ 被某支队伍 u' 淘汰的那一轮。显然，$u' \notin S$，因此它无法淘汰 u，这就产生了矛盾。□

引理 3.5 的证明 若 u 在 T' 中击败 v，则 $r_u(T) = r_u(T')$。假设 v 在 T' 中击败 u。考虑 RDM 在 T' 中的一种执行过程 E，其中 u 获胜。注意，这种执行过程不可能包含比赛 $(u,\ v)$，因为 u 会在 v 之前被淘汰。因此，E 也是 RDM 在 T 中的一种有效执行过程。这就建立了从 T' 中 u 获胜的有效执行过程到 T 中 u 获胜的有效执行过程的单射映射。因此，$r_u(T) \geq r_u(T')$。□

A.2 第 4 节中省略的证明

引理4.2 的证明 我们声称存在某个 $x^* \in \{u, v, w\}$，使得 $\min(\ell_{x^*},\ \ell'_{x^*}) \geq 1$。事实上，$(\ell_u,\ \ell_v,\ \ell_w)$ 和 $(\ell'_u,\ \ell'_v,\ \ell'_w)$ 的可能取值为 $(1,\ 1,\ 1)$ 或 $\{2, 1, 0\}$ 的某种排列。因此，由于 $(\ell_u,\ \ell_v,\ \ell_w)$ 和 $(\ell'_u,\ \ell'_v,\ \ell'_w)$ 中各至少有 2 个非零项，它们必定有一个非零项重合。这意味着存在某个 $x^* \in \{u, v, w\}$，使得 $\min(\ell_{x^*},\ \ell'_{x^*}) \geq 1$。令 $\{u, v, w\} \setminus x^* = \{y^*, z^*\}$。根据定理 3.6，我们有

$$r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) - r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*) \leq \frac{1}{3} \tag{5}$$

利用上述结果以及 $\ell'_{x^*} + \ell'_{y^*} + \ell'_{z^*} = 3$ 这一事实，我们得到以下界

$$\begin{aligned}
A = &\sum_{x \in \{u,v,w\}} \ell'_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T' \setminus x) - \ell_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T \setminus x) \leq \\
&\leq \ell'_{x^*} r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) - \ell_{x^*} r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*) + \ell'_{y^*} r_{\{u,v,w\}\setminus y^*}(T' \setminus y^*) \\
&+ \ell'_{z^*} r_{\{u,v,w\}\setminus z^*}(T' \setminus z^*) \leq \\
&\leq r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) - r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*) + (\ell'_{x^*} - 1) r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) \\
&+ \ell'_{y^*} r_{\{u,v,w\}\setminus y^*}(T' \setminus y^*) + \ell'_{z^*} r_{\{u,v,w\}\setminus z^*}(T' \setminus z^*) \leq \\
&\leq r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) - r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*) + (\ell_{x^*} - 1) + \ell_{y^*} + \ell_{z^*} \leq \text{ (by (5))} \\
&\leq \frac{1}{3} + 3 - 1 = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

其中，在第二行中，我们使用了 $\ell_{x^*} \geq 1$ 得到 $-\ell_{x^*} r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*) \leq -r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T \setminus x^*)$；在第三行中，我们使用了 $\ell'_{x^*} \geq 1$ 得到 $(\ell'_{x^*} - 1) r_{\{u,v,w\}\setminus x^*}(T' \setminus x^*) \leq (\ell'_{x^*} - 1)$。因此，

$$A \leq \frac{7}{3}$$

假设 $|I|\leq 1$。那么，对于每个 $x\in S$，至多存在一场比赛，其中 $\{u,v,w\}\setminus x$ 中的一支队伍输给了 $(T\setminus x)\setminus(S\setminus x)$ 中的一支队伍。因此，根据推论 3.8，$r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T\setminus x)\geq\frac{2}{3}$。此外，显然有 $r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T'\setminus x)\leq 1$。因此，

$$A=\sum_{x\in\{u,v,w\}}\ell'_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T'\setminus x)-\ell_x r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T\setminus x)\leq \ell'_u+\ell'_v+\ell'_w-\frac{2}{3}(\ell_u+\ell_v+\ell_w)=3-\frac{2}{3}\times 3=1$$

因此，

$$A\leq 1$$

当 $|I|\leq 1$ 时，正如所需。 □

P引理 4.3 的证明 根据定理 3.6，对于 $\{u,v,w$ 的所有排列 (x,y,z)，我们有 $\}$

$$r_{\{z,y\}}(T'\setminus x)-r_{\{z,y\}}(T\setminus x)=r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T'\setminus x)-r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T\setminus x)\leq\alpha_2^{RDM}=\frac{1}{3}$$

对总和中的 3 项分别应用上述结果 B，即可得到

$$B=\sum_{x\in S}d_x^*(r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T'\setminus x)-r_{\{u,v,w\}\setminus x}(T\setminus x))\leq\frac{d_u^*+d_v^*+d_w^*}{3}=\frac{|I|}{3}$$

假设 $|I|\leq 1$。若 $|I|=0$，则 $d_u^*=d_v^*=d_w^*=0$，因此 $B=0$。假设 $|I|=1$，并且不失一般性地设队伍 $a\notin S$击败了 u，而 $\{u,v,w\}$ 赢得了与 S 之外队伍的所有其他比赛（特别是 v,w 击败了 t）。那么 $d_v^*=d_w^*=0$。因此，

$$B=d_u^*(r_{v,w}(T'\setminus u)-r_{v,w}(T\setminus u))=0$$

因为 $r_{v,w}(T'\setminus u)=r_{v,w}(T\setminus u)=1$，根据引理 3.4，由于 v,w 在$T'\setminus u$ 和 $T\setminus u$中都击败了 $\{v,w\}$ 之外的每支队伍。□

引理 4.4 的证明 对于锦标赛 H，其中 u，v，$w\in H$，定义 $t(H)=(a'_1,\ a'_2,\ a'_3)$，其中在$H$中，恰有 a'_i支队伍，而 $H\setminus\{u,v,w\}$ 中的每支队伍恰好击败 $\{u,v,w\}$ 中$i=1$，2，3支队伍中的 i 支。假设 $e\in Q$。那么，对于 e，有三种情形：

- 假设 e 是一场由 L_1 中的两支队伍进行的比赛，或者是由 L_1 中的某支队伍与 $\{u,v,w\}$ 中它输给的两支队伍之一进行的比赛。那么显然，$t(T|_e)=(a_1-1,\ a_2,\ a_3)$，因此

$$r_{u,v,w}(T'|_e)-r_{u,v,w}(T|_e)\leq M_{n-1}(a_1-1,a_2,a_3)$$

  注意，这样的比赛有 $\binom{a_1}{2}+2a_1$ 场。

- 现在假设 e 是 L_2 中两支队伍之间的一场比赛，或者是 L_2 中某支队伍与 $\{u,v,w\}$ 中唯一一支会输给它的队伍之间的一场比赛。那么，显然，$t(T|_e)=(a_1,\ a_2-1,\ a_3)$。因此，

$$r_{u,v,w}(T'|_e)-r_{u,v,w}(T|_e)\leq M_{n-1}(a_1,a_2-1,a_3)$$

  共有 $\binom{a_2}{2}+a_2$ 场这样的比赛。

- 最后，如果 e 是 L_3 中两支队伍之间的一场比赛，那么 $t(T|_e)=(a_1,\ a_2,\ a_3-1)$。因此，

$$r_{u,v,w}(T'|_e)-r_{u,v,w}(T|_e)\leq M_{n-1}(a_1,a_2,a_3-1)$$

  这样的比赛有 $\binom{a_3}{2}$ 场。

因此，应用上述三个界，我们得到

$$C = \sum_{e \notin G} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e) \leq$$
$$\leq (2a_1 + \binom{a_1}{2}) M_{n-1}(a_1 - 1, a_2, a_3) + (a_2 + \binom{a_2}{2}) M_{n-1}(a_1, a_2 - 1, a_3)$$
$$+ \binom{a_3}{2} M_n(a_1, a_2, a_3 - 1) + \sum_{e \notin G \cup Q} r_{u,v,w}(T'|_e) - r_{u,v,w}(T|_e))$$

如所期望的。注意， $|Q| = 2a_1 + a_2 + \binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \binom{a_3}{2}$。 □

注 A.1 注意，在引理 *4.4* 中，通过同时考虑不同集合 L_i 和 L_j 之间针对 $i \neq j$的比赛，可以为 C 得到更好的界。这或许有助于在表 *1* 中得到更精确的上界。不过，就我们的目的而言，上述界已足够。

引理 4.5 证明中省略的情形

情形 *4*： $(a_1, a_2, a_3) = (2, 0, 0)$。应用 Δ，得到

$$M_n(2,0,0) \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + (4+1)f(1,0,0) + (\binom{n}{2} - 10)f(2,0,0)) =$$
$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}(3 + \frac{5}{6} + (\binom{n}{2} - 10)\frac{23}{60}) = \frac{23}{60} = f(2,0,0)$$

情形 *5*： $(a_1, a_2, a_3) = (3, 0, 0)$。应用 Δ，得到

$$M_n(3,0,0) \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{3}{3} + (6+3)f(2,0,0) + (\binom{n}{2} - 15)f(3,0,0)) =$$
$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{10}{3} + 9 \times \frac{23}{60} + (\binom{n}{2} - 15)\frac{407}{900}) =$$
$$= \frac{407}{900} + \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{200 + 207}{60} - \frac{407}{60}) = \frac{407}{900} = f(3,0,0)$$

情形 *6* $(a_1, a_2, a_3) = (4, 0, 0)$。应用 Δ，得到

$$M_n(4,0,0) \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{4}{3} + (2 \times 4 + 6)f(3,0,0) + (\binom{n}{2} - 21)f(4,0,0)) =$$
$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{11}{3} + 14 \times \frac{407}{900} + (\binom{n}{2} - 21)\frac{4499}{9450}) =$$
$$= \frac{4499}{9450} + \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{3300 + 4098 + 1600}{900} - \frac{8998}{900}) = \frac{4499}{9450} = f(4,0,0)$$

情形 *7* $(a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 0)$。应用 Δ 后，我们得到

$$M_n(0,1,0) \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + f(0,0,0) + (\binom{n}{2} - 6)f(0,1,0)) =$$
$$= \frac{1}{\binom{n}{2}}(\frac{7}{3} + \frac{2}{3} + (\binom{n}{2} - 6)\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = f(0,1,0)$$

情形8 $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 1,\ 0)$。应用 Δ 后，我们得到

$$\begin{aligned} M_n(1,1,0) &\le \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{7}{3}+\frac{3}{3}+2f(0,1,0)+f(1,0,0)+\left(\binom{n}{2}-9\right)f(1,1,0)\right) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{10}{3}+\frac{2}{2}+\frac{1}{6}+\left(\binom{n}{2}-9\right)\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{27}{6}-\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} = f(1,1,0) \end{aligned}$$

情形9 $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (2,\ 1,\ 0)$。应用 Δ，我们得到

$$\begin{aligned} M_n(2,1,0) &\le \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{3}+(4+1)f(1,1,0)+f(2,0,0)+\left(\binom{n}{2}-13\right)f(2,1,0)\right) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{11}{3}+\frac{5}{2}+\frac{23}{60}+\left(\binom{n}{2}-13\right)\frac{131}{260}\right) = \\ &= \frac{131}{260}+\frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{393}{60}-\frac{131}{20}\right) = \frac{131}{260} = f(2,1,0) \end{aligned}$$

情形10 $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 0,\ 1)$。在这种情形下，一个顶点 t 击败 $u,\ v,\ w$，而输给其他所有人。根据对称性，无论 $u,\ v,\ w$ 之间的比赛结果如何，其中一支队伍获胜的概率都相同。因此，$M(0,\ 0,\ 1) = 0 = f(0,\ 0,\ 0)$。

情形11 $(a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 0,\ 1)$。应用 Δ，我们得到

$$\begin{aligned} M_n(1,0,1) &\le \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{3}+f(0,0,1)\left(\binom{n}{2}-9\right)f(1,0,1)\right) = \\ &= \frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{7}{3}+\frac{4}{3}+\left(\binom{n}{2}-9\right)\frac{11}{27}\right) = \frac{11}{27}+\frac{1}{\binom{n}{2}}\left(\frac{11}{3}-\frac{11}{3}\right) = \frac{11}{27} = f(1,0,1) \end{aligned}$$

□

A.3 第5节中省略的证明

引理 5.1 的证明 我们将构造 q，并通过对数量 $|T|+m$ 进行归纳法来证明该命题。作为基础情形，假设 $|T|+m \le 3$。为了定义 q，我们需要 $|T| \ge 2$，这意味着 $m = 1$ 和 $|T| = 2$。在这种情形下，$T' = T \in Syb(T, u_1, 1)$ 中只有一个锦标赛。只需定义 $q(1, T, u_1, v) = r_v(T)$。假设对于所有满足 $|T|+m < N$ 的 T、$u_1 \in T$、$v \in T \setminus u_1$ 和 m，我们已经定义了 $q(m, T, u_1, v)$；并且对于所有满足前述约束的参数的 $T' \in Syb(T, u_1, m)$，都有 $r_v(T') = q(m, T, u_1, v)$。

我们现在构造 q，并同时证明该引理对所有满足 $m + |T| = N$ 的情形成立。设 T、$u_1 \in T$、$v \in T \setminus u_1$、$m \in \mathbb{N}$ 满足 $m + |T| = N$。若 $m = 1$，结论显然成立，因为只有一个锦标赛 $T' = T \in Syb(T, u_1, m)$，因此 $q(1,\ u_1,\ T,\ v) = r_v(T) = r_v(T')$。假设 $m \ge 2$ 且 $T' \in Syb(T, u_1, m)$。令 A 为 $T \setminus u_1$ 中被 u_1 击败的队伍集合，并令 B 为 $T \setminus u_1$ 中击败 u_1 的队伍集合。假设 $|A| = a \ge 0$ 且 $|B| = b \ge 0$。如果首场比赛是一支来自 B 的队伍与一名女巫之间的比赛，或是两名女巫之间的比赛，那么一名女巫会被淘汰，所得锦标赛属于 $Syb(T, u_1, m-1)$（可能需要重新标记 u_1）。根据

归纳假设， v获胜的概率为 q（$m-1$， T， u_1， v）。这样的比赛有 $\binom{m}{2}+bm$ 场。如果进行了一场 $t \in T \setminus \{v, u_1\}$ 落败的比赛，那么所得锦标赛属于Syb（$T \setminus t$， u_1， m）。因此，根据归纳假设， v在所得锦标赛中获胜的概率为q（m， $T \setminus t$， u_1， v）。如果 d_t是 T中会输给 t的队伍数量，那么当$t \in A$时，这样的比赛有 $d_t + m - 1$场；当 $t \in B$时，这样的比赛有 d_t 场。如果 v落败，那么它显然以概率0获胜。因此，根据首步分析，我们有

$$r_v(T') = \frac{\binom{m}{2}+bm}{\binom{m+a+b}{2}} q(m-1, T, u_1, v) + \sum_{t \in A \setminus v} \frac{d_t + m - 1}{\binom{m+a+b}{2}} q(m, T \setminus t, u_1, v) + \sum_{t \in B \setminus v} \frac{d_t}{\binom{m+a+b}{2}} q(m, T \setminus t, u_1, v)$$

注意到， d_t 仅取决于 T内的比赛。因此，右侧的所有项仅取决于T， u_1， m和 v，这就完成了归纳法，并给出了将 q(m， T， u_1， v)定义为上述表达式的方法。此外，由于 $T' \in Syb$(T， u_1， m)是任意的，我们得到，对于所有$T' \in Syb$(T， u_1， m)， r_v(T') = q(m， T， u_1， v)。

□

定理 5.3 的证明 设 T 为一个锦标赛， $u_1 \in T$ 为一支并非孔多塞赢家的队伍。如定义 2.10 所示，我们需要证明

$$\lim_{m \to \infty} \max_{T' \in Syb(T, u_1, m)} r_{u_1, \ldots, u_m}(T') = 0$$

注意到

$$\max_{T' \in Syb(T, u_1, m)} r_{u_1, \ldots, u_m}(T') = h(m, T, u_1)$$

并且 h(m， T， u_1) $\leq p$(m， T， u_1)，因此只需证明更强的结论 $\lim_{m \to \infty} p$(m， T， u_1) = 0

回顾一下， A (B)表示 u_1 在 T中击败（输给）的队伍集合。我们通过对 $|A|$进行归纳法来证明该结论。若 $|A|$= 0，则显然 $T \setminus u_1$ 仅由 B的队伍构成，它们击败 u_1、……、 u_m，因此，根据引理 3.4，对于所有 m， p(m， T， u_1) = 0 。设 $|A| = a \geq 1$ 且 $|B| = b \geq 1$ （u_1 不是孔多塞赢家）。假设该结论对所有满足 $|A| = a' < a$的 T 和 u_1 都成立。由上文可知 $|T| \geq 3$。对于队伍 v ，记 d_v 为它在 T中输给的队伍数量。与引理 5.1 的证明类似，通过首步分析可得以下关系

$$p(m, T, u_1) = \frac{\binom{m}{2}+bm}{\binom{m+a+b}{2}} p(m-1, T, u_1) + \sum_{v \in B} \frac{d_v}{\binom{n+a+b}{2}} p(m, T \setminus v, u_1) + \sum_{v \in A} \frac{d_v + m - 1}{\binom{m+a+b}{2}} p(m, T \setminus v, u)$$

注意，若 $v \in B$，则 $d_v \leq a + b$ ，因为 v 击败了 u_1的女巫身份、 $|B| \leq b$的女巫身份，而 p(m， $T \setminus v$， u_1) ≤ 1。因此，

$$\sum_{v \in B} \frac{d_v}{\binom{m+a+b}{2}} p(m, T \setminus v, u_1) \leq \frac{b(a+b)}{\binom{m+a+b}{2}} \leq \frac{C}{m^2}$$

对于某个 $C = C$(a， b)。我们还知道，对于每个 $v \in A$， u_1都会输给 $T \setminus v$ 中至少一支队伍（ B 中的一支队伍）。因此，根据归纳假设，$\lim_{m \to \infty} p$(m， $T \setminus v$， u_1) = 0 对所有 $v \in A$ 都成立。令 $\epsilon > 0$，由于 A 不依赖于 m，我们可以选择 N，使得对于 $m > N$， p(m， $T \setminus v$， u_1) $< \epsilon$对所有 $v \in A$ 都成立。另请注意，$\sum_{v \in A} d_v + m - 1 \leq ma + \binom{a+b+1}{2} \leq Dm$，其中 D 是一个依赖于a 和 b的常数。因此，综合以上观察，对于所有足够大的 n ，我们得到

$$p(m, T, u) \leq \frac{\binom{m}{2}+bm}{\binom{m+a+b}{2}} p(m-1, T, u_1) + \frac{mD}{\binom{m+a+b}{2}} \epsilon + \frac{C}{m^2}$$

根据引理 A.2，函数 $\binom{m}{2}+bm\binom{m+1+b}{2}$ 在 $b \geq 1$ 时关于 b 单调递减。我们利用这一事实以及 $a \geq 1$ 来证明 $\binom{m}{2}+bm\binom{m+a+b}{2} \leq \binom{m}{2}+m\binom{m+2}{2}$。我们还利用 $mD\binom{m+a+b}{2}\epsilon \leq \frac{F}{m}\epsilon$ 对某个常数 F 成立这一点。因此，通过对上式取上界，我们得到

$$p(m,T,u_1) \leq \frac{\binom{m}{2}+m}{\binom{m+2}{2}}p(m-1,T,u)+\frac{F}{m}\epsilon+\frac{C}{m^2} = \frac{\binom{m+1}{2}}{\binom{m+2}{2}}p(m-1,T,u_1)+\frac{F}{m}\epsilon+\frac{C}{m^2}$$

因此，

$$\binom{m+2}{2}p(m,T,u_1) \leq \binom{m+1}{2}p(m-1,T,u_1)+Sm\epsilon+Q$$

其中 S,Q 是仅取决于锦标赛 T 的某些常数，并且上述结论在 $m > N$充分大时成立。将上述不等式重复 $m-N$次，并将它们作为望远镜求和相加，可得

$$\binom{m+2}{2}p(m,T,u_1) \leq \binom{N+1}{2}p(N-1,T,u_1)+S'\epsilon m^2+Q(m-N)$$

因此

$$p(m,T,u_1) \leq \frac{\binom{N+1}{2}p(N-1,T,u)}{\binom{m+2}{2}}+\frac{S'\epsilon m^2}{\binom{m+2}{2}}+\frac{Q(m-N)}{\binom{m+2}{2}}$$

T第一项和第三项在 $m \to \infty$时趋于 0，第二项趋于 $2S'\epsilon$。因此，

$$\lim_{m\to\infty} p(m,T,u_1) \leq 2S'\epsilon$$

现在，令 $\epsilon \to 0$，即可得到所需结果。 □

引理 A.2 函数 $\binom{m}{2}+bm\binom{m+1+b}{2}$ 在 $b \in \mathbb{Z}$ 上递减，其中 $b \geq 1$

证明。 事实上，可以证明对于 $b \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\frac{\binom{m}{2}+bm}{\binom{m+1+b}{2}} \geq \frac{\binom{m}{2}+(b+1)m}{\binom{m+2+b}{2}} \\
\iff &\frac{m-1+2b}{(m+b+1)(m+b)} \geq \frac{m-1+2b+2}{(m+2+b)(m+b+1)} \\
\iff &(m-1+2b)(m+2+b) \geq (m+b)(m+2b+1) \\
\iff &2b \geq 2
\end{aligned}$$

对于 $b \geq 1$，该结论成立。■