arXiv:2301.07924v1 [math.GT] 19 Jan 2023

平衡超椭圆旋转的正分解

GENKI OMORI

Abstract. 平衡超椭圆旋转是定义在一个阶为 $k \geq 3$ 的定向闭曲面上的周期映射。我们给出平衡超椭圆旋转的一个正分解。

1. Introduction

设 Σ_g 是一个亏格为 $g \geq 0$ 的连通定向闭曲面。对于 Σ_g 的子集 A，有序对 (Σ_g, A) 的映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g, A)$ 是保持 A 不变的 Σ_g 上保向自微分同胚的同伦类群。当 A 是由互不相同的 n 个点组成的集合时，我们将映射类群记作 $\mathrm{Mod}_{g,n}$。我们简记为 $\mathrm{Mod}_g = \mathrm{Mod}_{g,0}$。Dehn [5] 证明了 Mod_g 由 Dehn 扭转生成。众所周知，在 Mod_g 中，一个左手 Dehn 扭转可以表示为若干右手 Dehn 扭转的乘积。因此，每个 $f \in \mathrm{Mod}_g$ 都可以表示为右手 Dehn 扭转的乘积。我们称该乘积为 f 的正分解。

若存在整数 k 使得 $\varphi^k = 1$，则称 φ 在 Σ_g 上的自微分同胚为周期映射。许多研究者给出了周期映射的正分解，例如 Birman-Hilden [2], Gurtas [9–11], Hirose [14], Ishizaka [16], Kork- maz [18], 以及 Matsumoto [19]。Birman 和 Hilden [2] 给出了双曲 involution 的一个正分解。本文给出一个阶为 $k \geq 3$ 的周期映射的正分解。该映射是双曲 involution 的推广，称为平衡超椭圆旋转。

对于整数 $n \geq 1$ 和 $k \geq 2$，我们假设 $g = n(k-1)$。平衡超椭圆旋转 $\zeta = \zeta_{g,k}$ 是 Σ_g 上阶为 $k \geq 2$、具有 $2n+2$ 个不动点 $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, ..., $\widetilde{p}_{2n+2} \in \Sigma_g$ 的周期映射，如图 1 上半部分所示（精确定义见第 2.1 节）。当 $k = 2$、$\zeta = \zeta_{g,2}$ 时，它与双曲 involution 重合；对于 $k \geq 3$，平衡超椭圆旋转由 Ghaswala 和 Winarski [13] 引入。

设 $\widetilde{l}_i^l$ for $1 \leq i \leq 2n+1$ and $1 \leq l \leq k$ 是 Σ_g 上满足条件 $\partial \widetilde{l}_i^l = \{\widetilde{p}_i, \widetilde{p}_{i+1}\}$, $\zeta(\widetilde{l}_i^l) = \widetilde{l}_i^{l+1}$ for $1 \leq l \leq k-1$, and $\zeta(\widetilde{l}_i^k) = \widetilde{l}_i^1$ 的一条简单弧，如图2上方所示。我们考虑图2所示的 Σ_g 的一个微分同胚，并将 Σ_g 与图2下方所示的曲面视为同一对象。设 γ_i^l for $1 \leq i \leq 2n+1$ and $1 \leq l \leq k$ 是 Σ_g 上满足条件 $\zeta(\gamma_i^l) = \gamma_i^{l+1}$ for $1 \leq l \leq k-1$ 的一条简单闭曲线，如图3所示；设 α_i^l for $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq l \leq k-1$ 是 Σ_g 上满足条件 $\zeta(\alpha_i^l) = \alpha_i^{l+1}$ for $1 \leq l \leq k-1$ 的一条简单闭曲线，如图4所示。对于 Σ_g 上的一条简单闭曲线 γ，我们用 t_γ 表示沿 γ 的右手德恩扭转。对于 $f, h \in \mathrm{Mod}_g$，乘积 $hf \in \mathrm{Mod}_g$ 表示先施加 f；我们稍作滥用记号，用同一符号表示微分同胚及其同伦类。

Date: 2023年1月20日。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 57S05, 57M07, 57R22。

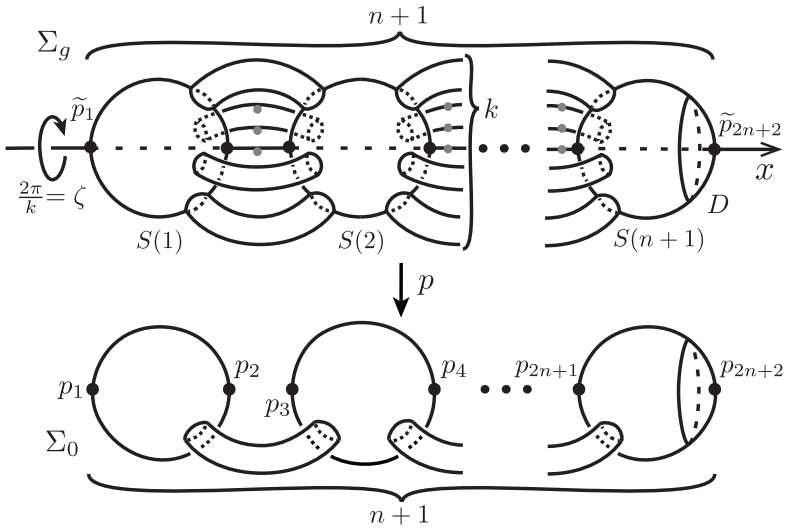

FIGURE 1. 平衡超椭圆覆盖映射 $p = p_{g,\ k}$ 上的平衡超椭圆旋转 $\zeta = \zeta_{g,\ k}$: $\Sigma_g \to \Sigma_0$。

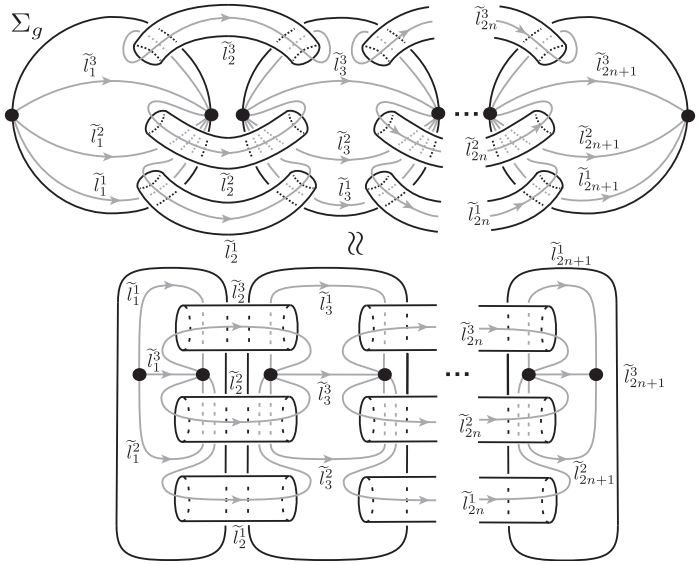

FIGURE 2. 当 $k = 3$ 时, Σ_g 的自然微分同胚。

Put

- $\widetilde{h}_{2i-1} = t_{\gamma^1_{2i-1}} t_{\gamma^1_{2i}} t_{\gamma^2_{2i-1}} t_{\gamma^2_{2i}} t_{\gamma^3_{2i-1}} \cdots t_{\gamma^{k-1}_{2i}} t_{\gamma^k_{2i-1}}$ for $1 \le i \le n$,
- $\widetilde{a}_i = t_{\alpha^1_i} t_{\alpha^2_i} \cdots t_{\alpha^{k-1}_i}$ for $1 \le i \le n$,
- $\widetilde{t}_{2n+1} = t_{\gamma^1_{2n+1}} t_{\gamma^2_{2n+1}} \cdots t_{\gamma^k_{2n+1}}$.

本文的主定理如下。

定理1.1. 令 $\zeta = \zeta_{g,k}$ 为 Σ_g 上满足 $g = n(k-1)$ 且具有 $n \ge 1$ 和 $k \ge 3$的平衡超椭圆旋转。那么关系

$$\zeta = \widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} \widetilde{a}_n \cdots \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1$$

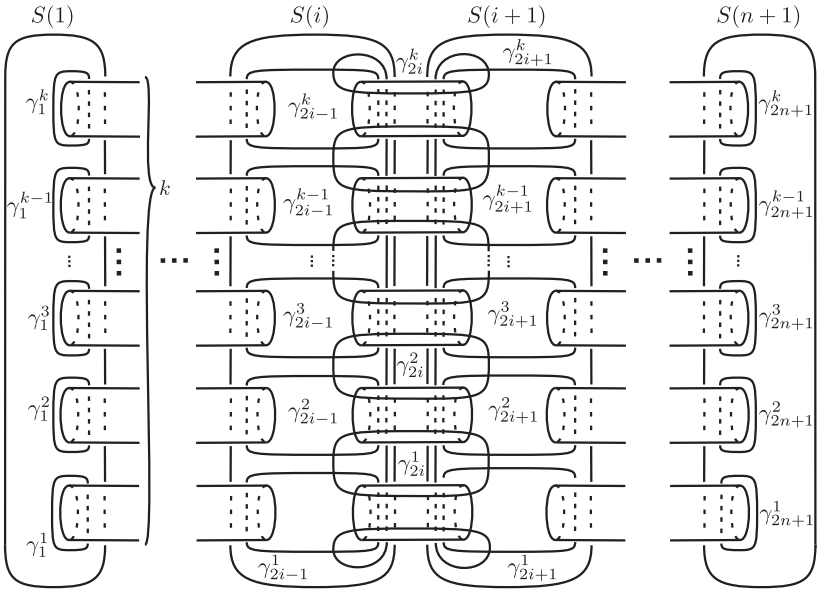

FIGURE 3. 在 Σ_g 上的简单闭曲线，适用于 $1 \leq i \leq 2n+1$ 和$1 \leq l \leq k$。

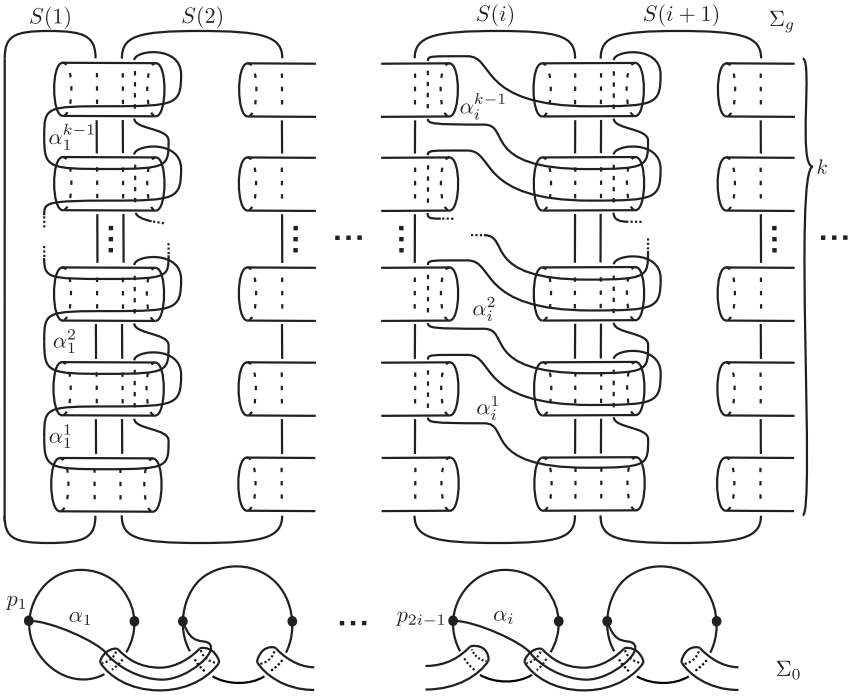

FIGURE 4. 在 Σ_g 上的简单闭曲线，适用于 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq l \leq k-1$。

在模g中成立。

我们将在第3节证明定理1.1。作为应用，我们将在第4节考察与关系 $(\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1)^k = 1$ 对应的 2维球面上的 Lefschetz 纤维化的拓扑性质。

2. Preliminaries

2.1. 平衡超椭圆覆盖空间。 本节回顾 [15] 第 2.1 节中平衡超椭圆覆盖空间和平衡超椭圆旋转的定义。对于整数 $n \geq 1$ 和 $k \geq 2$，其中 $g = n(k-1)$，我们如下描述曲面 Σ_g。我们取 $\mathbb{R}^3$ 中的单位二球面 $S^2 = S(1)$，并通过沿 x 轴平移，得到 n 个两两不相交的平行副本 $S(2)$ $S(3)\ldots$, $S(n+1)$，使得它们是 $S(1)$ 的副本

$$\max\big(S(i) \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\})\big) < \min\big(S(i+1) \cap (\mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\})\big)$$

对于 $1 \leq i \leq n$（见图 1）。设 ζ 是 $\mathbb{R}^3$ 在 x-轴上的 $(-\frac{2\pi}{k})$ 旋转。接着，我们从 $S(i)$ 中为 $2 \leq i \leq n$ 移除 $2k$ 个互不相交的开圆盘，并从 $S(i)$ 中为 $i \in \{1, n+1\}$ 移除 k 个互不相交的开圆盘；这些圆盘在 ζ 的作用下逐点保持不变。然后，如图 1 所示，用 k 个圆环连接打孔后的 $S(i)$ 的边界分支与打孔后的 $S(i+1)$ 的边界分支，使得对于每个 $1 \leq i \leq n$，这些 k 个圆环的并在 ζ 的作用下保持不变。由于打孔后的 $S(1) \cup S(2) \cup \cdots \cup S(n+1)$ 与附加的 $n \times k$ 个圆环的并与 $\Sigma_{g=n(k-1)}$ 微分同胚，我们将这个并视为 Σ_g。

根据上述构造，ζ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的作用诱导出 Σ_g 上的作用。我们称 $\zeta_{g,k} = \zeta|_{\Sigma_g} \colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ Σ_g 上的平衡超椭圆旋转，并简记为 $\zeta_{g,k} = \zeta$。当 $k = 2$ 时，$\zeta_{g,2}$ 与双曲 involution 重合。

注意，商空间 $\Sigma_g/\langle\zeta\rangle$ 与 Σ_0 微分同胚，且商映射 $p = p_{g,k} \colon \Sigma_g \to \Sigma_0$ 是一个在 Σ_0 中具有 $2n+2$ 个分歧点的分歧覆盖映射。我们称分歧覆盖映射 $p \colon \Sigma_g \to \Sigma_0$ 为平衡超椭圆覆盖映射。用 $\widetilde{p}_1$, $\widetilde{p}_2$, $\ldots$, $\widetilde{p}_{2n+2} \in \Sigma_g$ 表示 ζ 的不动点，使得对于 $1 \leq i \leq 2n+1$, $\widetilde{p}_i < \widetilde{p}_{i+1}$ 属于 $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$；用 $p_i \in \Sigma_0$ 表示 $1 \leq i \leq 2n+2$ 下 $\widetilde{p}_i$ 的像（即 p_1, p_2, $\ldots$, $p_{2n+2} \in \Sigma_0$ 是 p 的分歧点）；并用 $\mathcal{B}$ 表示分歧点集合 p_1, p_2, $\ldots$, p_{2n+2}。

2.2. Birman-Hilden 对应。 本节回顾 Birman-Hilden 对应 [3]。对于 $g = n(k-1) \geq 1$，若定义在 Σ_g 上的保向自微分同胚 φ 关于 $\zeta = \zeta_{g,k}$ 满足 $\varphi\langle\zeta\rangle\varphi^{-1} = \langle\zeta\rangle$，则称其为对称的。平衡超椭圆映射类群（或对称映射类群）$\mathrm{SMod}_{g;k}$ 是 Mod_g 的子群，由可由对称微分同胚表示的元素构成。$\mathrm{SMod}_{g;2}$ 称为双曲映射类群。Birman 和 Hilden [4] 证明，$\mathrm{SMod}_{g;k}$ 与 Σ_g 上对称微分同胚的对称同伦类群一致。

若存在定义在 Σ_g 上的保向自微分同胚 $\widetilde{\varphi}$，使得 $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi \circ p$，即下图交换，则称定义在 Σ_0 上的保向自微分同胚 φ 关于 $p = p_{g,k}$ 是可提升的：

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_g & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} & \Sigma_g \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Sigma_0 & \xrightarrow[\varphi]{} & \Sigma_0. \end{array}$$

令 $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{2n+2}\}$，并将 $\mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 视为 $\mathrm{Mod}(\Sigma_0, \mathcal{B})$。可提升映射类群 $\mathrm{LMod}^{2n+2;k}$ 是 $\mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 的子群，由可由可提升微分同胚表示的元素组成。对于 $k = 2$，根据 Birman 和 Hilden [2]，有 $\mathrm{LMod}^{2n+2;2} = \mathrm{Mod}_{0,2n+2}$。由于对称微分同胚保持 $\widetilde{\mathcal{B}} = p^{-1}(\mathcal{B}) \subset \Sigma_g$，因此有自然同态 $\theta\colon \mathrm{SMod}_{g;k} \to \mathrm{LMod}^{2n+2;k}$。根据 Birman 和 Hilden [3],，我们有以下引理。

引理 2.1. 对于 $n \geq 1$ 和 $k \geq 2$，若满足 $g = n(k-1)$，则有以下正合列：

$$1 \longrightarrow \langle \zeta \rangle \longrightarrow \mathrm{SMod}_{g;k} \xrightarrow{\theta} \mathrm{LMod}_{2n+2;k} \longrightarrow 1. \tag{2.1}$$

2.3. 平衡超椭圆覆盖映射的可提升元素。假设 $k \geq 3$ 在第 2.3 节中。本节中，我们在 Σ_0 上为 $p = p_{g,\,k}$ 引入第 2.2 节中 [15] 的一些可提升微分同胚。令 l_i ($1 \leq i \leq 2n+1$) 为 Σ_0 上的一条定向简单弧，其端点为 p_i 和 p_{i+1}，如图 5 所示。置 $L = l_1 \cup l_2 \cup \cdots \cup l_{2n+1}$。对于 Σ_0 上相对于 $\mathcal{B}$ 的微分同胚 φ，其同伦类由 φ 对 L 的像相对于 $\mathcal{B}$ 的同伦类决定。我们通过某个 Σ_0 的微分同胚，将 Σ_0 与图 5 下方的曲面等同起来。

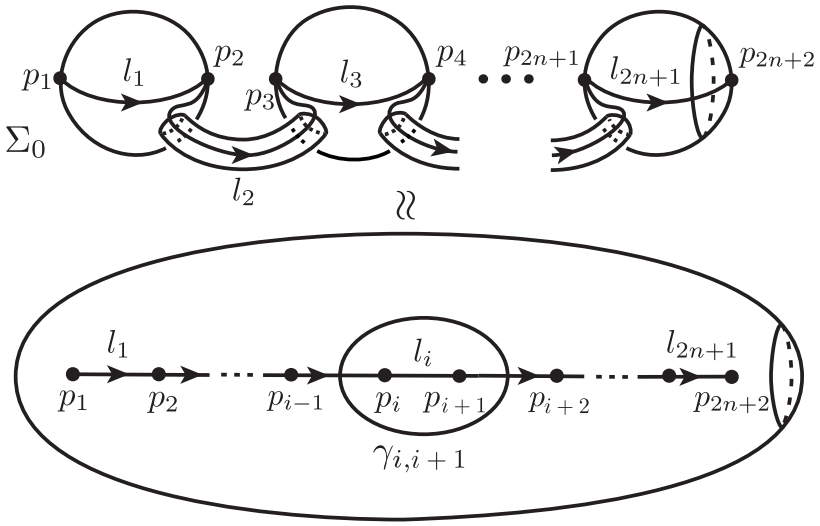

FIGURE 5. Σ_0 的一个自然微分同胚、弧 l_1，l_2、……、l_{2n+1}，以及 Σ_0 上的一条简单闭曲线 $\gamma_{i,\,j}$，用于 $1 \leq i < j \leq 2n+2$。

设 l 是 Σ_0 上的一条简单弧，其端点位于 $\mathcal{B}$ 中。l 在 Σ_0 中的一个正则邻域 $\mathcal{N}$ 微分同胚于一个二维圆盘。因此，半扭转 $\sigma[l]$ 是 Σ_0 上的一个自微分同胚，其描述为如图 6 所示，在 $\mathcal{N}$ 中对 l 进行逆时针半旋转的结果。$\sigma[l]$ 称为沿 l 的半扭转。我们对 $1 \leq i \leq 2n+1$ 定义 $\sigma_i = \sigma[l_i]$。众所周知，$\mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 由 σ_1、σ_2、……、σ_{2n+1} 生成（例如参见 [7] 第 9.1.4 节）。由于 $\mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 自然作用于 $\mathcal{B}$，我们得到满同态

$$\Psi\colon \mathrm{Mod}_{0,2n+2} \to S_{2n+2}$$

由 $\Psi(\sigma_i) = (i\ i+1)$ 给出，其中 S_{2n+2} 是 $2n+2$ 阶对称群。

设 $\mathcal{B}_o = \{p_1,\ p_3,\ \ldots,\ p_{2n+1}\}$ 和 $\mathcal{B}_e = \{p_2,\ p_4,\ \ldots,\ p_{2n+2}\}$。若 S_{2n+2} 中的元素 σ 满足 $\sigma(\mathcal{B}_o) = \mathcal{B}_o$，则称其为保奇偶性；若满足 $\sigma(\mathcal{B}_o) = \mathcal{B}_e$，则称其为反转奇偶性。若 $\mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 中的元素 f 满足 $\Psi(f)$ 具有保奇偶性（分别具有反转奇偶性），则称其具有保奇偶性（分别具有反转奇偶性）。令 W_{2n+2} 为 S_{2n+2} 中由保奇偶性或反转奇偶性的元素构成的子群。Ghaswala 和 Winarski [12] 证明了以下引理。

引理 2.2 ([12]中的引理 3.6)。令 LMod_{2n+2} 表示平衡超椭圆覆盖映射 $p_{g,k}$ 关于 $n \geq 1$ 和 $k \geq 3$（其中 $g = n(k-1)$）的可提升映射类群。则有

$$\mathrm{LMod}_{2n+2} = \Psi^{-1}(W_{2n+2}).$$

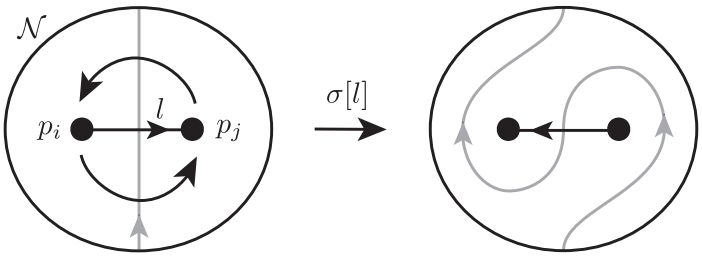

FIGURE 6. 沿着 l的半扭转 $\sigma[l]$ 。

引理 2.2 表明，映射类 $f \in \mathrm{Mod}_{0,2n+2}$ 关于$p_{g,k}$ 可提升，当且仅当 f 保奇偶性或反转奇偶性（特别地，当$k \geq 3$时， Σ_0 上的微分同胚是否可提升并不取决于 k）。因此，在表示 $k \geq 3$ 的可提升映射类群时，我们省略“k”（即，对于 $k \geq 3$，将 $\mathrm{LMod}^{2n+2;k} = \mathrm{LMod}^{2n+2}$ 记作）。下面介绍一些显式的可提升元素。

***Dehn*扭转** t_i。令$\gamma_{i,i+1}$ 为 $1 \leq i \leq 2n+1$ 上的一条简单闭曲线，使得$\gamma_{i,i+1}$ 围住点 p_i 和 p_{i+1}，如图 5 所示。于是，对 $1 \leq i \leq 2n+1$，我们定义$t_i = t_{\gamma_{i,i+1}}$。由于 $\Psi(t_i) = 1 \in W_{2n+2}$，由引理 2.2 可得，对于 $1 \leq i \leq 2n+1$，$t_i \in \mathrm{LMod}^{2n+2}$。

半扭转 a_i。令 α_i 为 $1 \leq i \leq n$ 上的一条简单弧，其端点分别为 p_{2i-1}和 p_{2i+1}，如图 7 所示。于是，对 $1 \leq i \leq n$，我们定义 $a_i = \sigma[\alpha_i]$。注意，对于 $1 \leq i \leq n$，有$a_i = \sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i}^{-1}$。由于对于 $1 \leq i \leq n$， $\Psi(a_i) = (2i-1\ 2i+1)$，映射类 a_i 保奇偶性，且由引理 2.2 可得 $a_i \in \mathrm{LMod}^{2n+2}$。

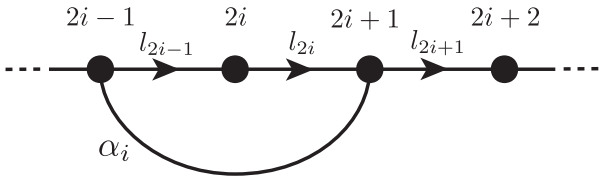

FIGURE 7. 一条关于 Σ_0的 α_i，用于 $1 \leq i \leq n$。

半旋转 h_i。令 $\mathcal{N}$为（$\Sigma_0 - \mathcal{B}$）$\cup\{p_i,\ p_{i+1},\ p_{i+2}\}$ 中 $1 \leq i \leq 2n$的正则邻域。$\mathcal{N}$微分同胚于一个二维圆盘。于是，我们将 Σ_0 上的自微分同胚记为h_i，它如图 8 所示，是在 $\mathcal{N}$中对 $l_i \cup l_{i+1}$ 进行逆时针半旋转所得。注意，对于 $1 \leq i \leq 2n$，$h_i = \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i$。由于对于 $1 \leq i \leq 2n$， $\Psi(h_i) = (i\ i+2)$，根据引理 2.2，映射类 h_i 保奇偶性，且 $h_i \in \mathrm{LMod}^{2n+2}$。

3. 定理证明

本节中，我们证明定理1.1。在本节中，始终假设$n \geq 1$、 $k \geq 3$和 $g = n(k-1)$。首先，我们有如下命题。

命题3.1。该关系

$$h_1 h_3 \cdots h_{2n-1} t_{2n+1} a_n \cdots a_2 a_1 = 1$$

在LMod^{2n+2}中成立。

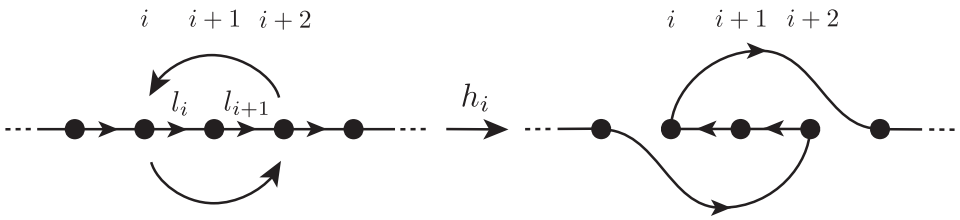

FIGURE 8. h_i 在 Σ_0上的 $1 \leq i \leq 2n$ 映射类。

证明。回想一下，关于 $\mathcal{B}$ 的 Σ_0 上的微分同胚 φ 的同伦类，由 φ 将 $L = l_1 \cup l_2 \cup \cdots \cup l_{2n+1}$ 映到相对于$\mathcal{B}$ 的像的同伦类决定。根据图9中的论证，我们有 $h_1 h_3 \cdots h_{2n-1} t_{2n+1} a_n \cdots a_2 a_1(l_i) = l_i \text{for} 1 \leq i \leq 2n+1$。因此，我们在 LMod_{2n+2} 中有 $h_1 h_3 \cdots h_{2n-1} t_{2n+1} a_n \cdots a_2 a_1 = 1$，命题3.1 得证。 □

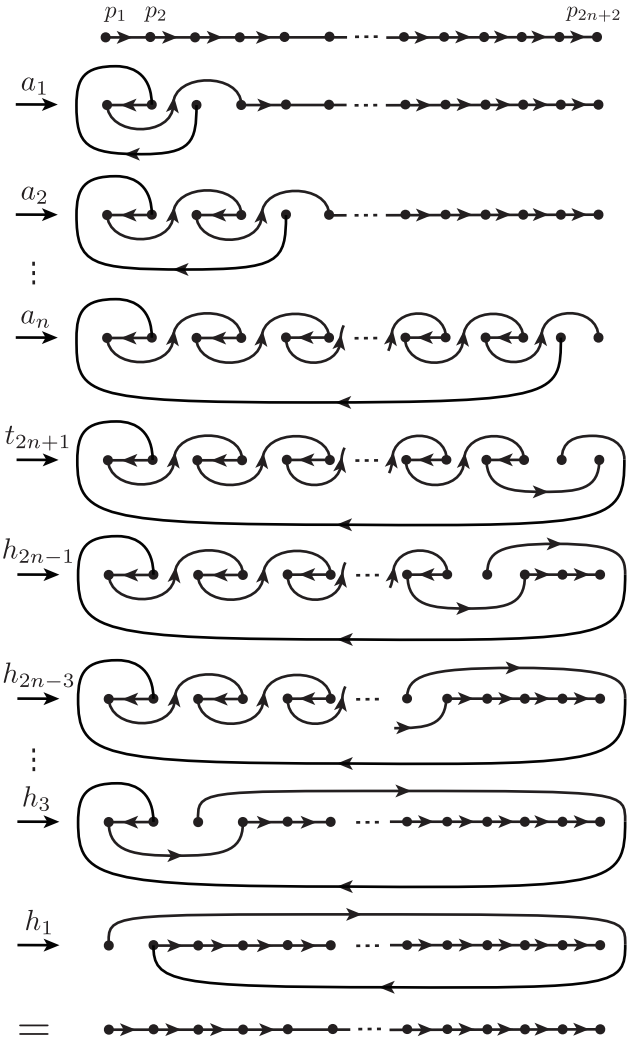

FIGURE 9. $h_1 h_3 \cdots h_{2n-1} t_{2n+1} a_n \cdots a_2 a_1$ (l_i) 的 $= l_i$ 证明，适用于 $1 \leq i \leq 2n+1$。

回顾一下， Σ_g 上的简单闭曲线 γ_i^l 对应于 $1 \le i \le 2n+1$ 和 $1 \le l \le k$， α_i^l 对应于$1 \le i \le n$ 和 $1 \le l \le k-1$ （见图 3 和图 4），以及映射类

- $\widetilde{h}_{2i-1} = t_{\gamma^1_{2i-1}} t_{\gamma^1_{2i}} t_{\gamma^2_{2i-1}} t_{\gamma^2_{2i}} t_{\gamma^3_{2i-1}} \cdots t_{\gamma^{k-1}_{2i}} t_{\gamma^k_{2i-1}}$ for $1 \le i \le n$,
- $\widetilde{a}_i = t_{\alpha^1_i} t_{\alpha^2_i} \cdots t_{\alpha^{k-1}_i}$ for $1 \le i \le n$,
- $\widetilde{t}_{2n+1} = t_{\gamma^1_{2n+1}} t_{\gamma^2_{2n+1}} \cdots t_{\gamma^k_{2n+1}}$.

定理*1.1*的证明。根据 [15], 中的引理6.3、6.4和6.6，映射类$\widetilde{h}_{2i-1}$、$\widetilde{a}_i$和 t_{2n+1} 分别是相对于 p的 h_{2i-1}、 a_i和 t_{2n+1} 的提升（也就是说，我们有 $\theta(\widetilde{h}_{2i-1}) = h_{2i-1}$、 $\theta(\widetilde{a}_i) = a_i$和 $\theta(\widetilde{t}_{2n+1}) = t_{2n+1}$）。由于根据命题3.1，$h_1 h_3 \cdots h_{2n-1} t_{2n+1} a_n \cdots a_2 a_1 = 1$属于 LMod_{2n+2}，由引理2.1中的正合列(2.1)，存在 $0 \le l \le k-1$ 使得$\widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} \widetilde{a}_n \cdots \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1 = \zeta^l$。因此，要完成定理1.1的证明，只需证明$\widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} \widetilde{a}_n \cdots \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1(\gamma^1_{2n+1}) = \gamma^2_{2n+1}$。

由于 $\widetilde{a}_i$ 对应于 $1 \le i \le n-1$ 的支撑与 γ^1_{2n+1} 不相交，而 α^l_n 对于 $2 \le l \le k-1$ 不与 γ^1_{2n+1}相交，因此我们有

$$\widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} \widetilde{a}_n \cdots \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1(\gamma^1_{2n+1}) = \widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} t_{\alpha^1_n}(\gamma^1_{2n+1}).$$

根据图10中的论证，我们有$\widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} t_{\alpha^1_n}(\gamma^1_{2n+1}) = \gamma^2_{2n+1}$。由于$\widetilde{\ }$ $1 \le i \le n-1$ 的 h_{2i-1} 的支撑与 γ^2_{2n+1}不相交，我们有 $\widetilde{h}_1 \widetilde{h}_3 \cdots \widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} \widetilde{a}_n \cdots \widetilde{a}_2 \widetilde{a}_1(\gamma^1_{2n+1}) = \gamma^2_{2n+1}$。因此，我们完成了定理1.1的证明。□

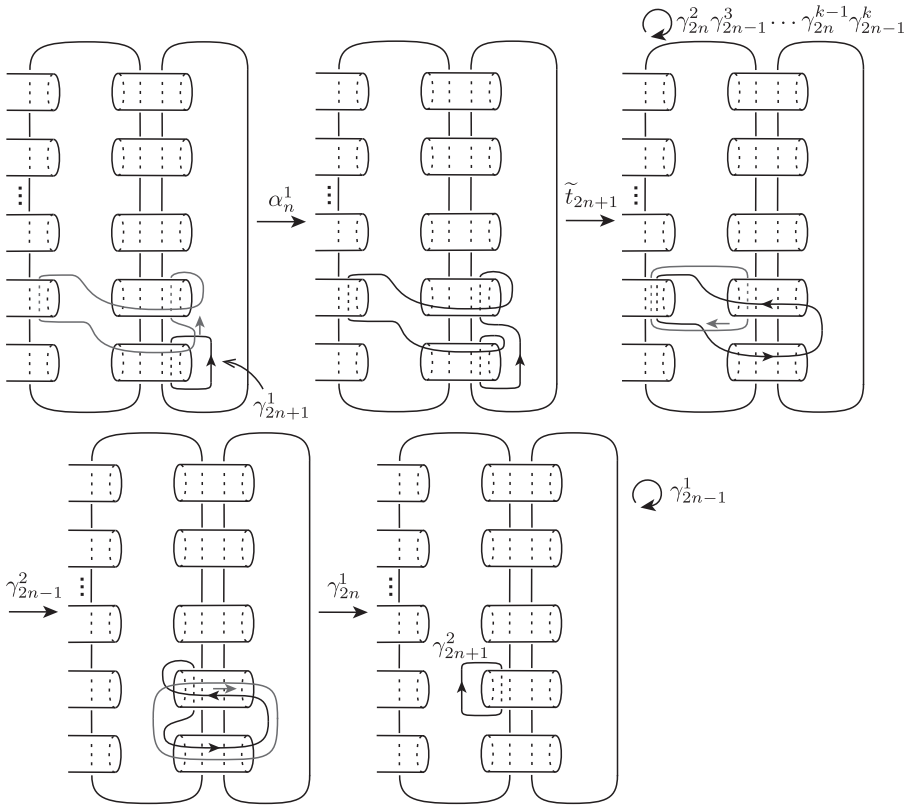

FIGURE 10. $\widetilde{h}_{2n-1} \widetilde{t}_{2n+1} t_{\alpha^1_n}(\gamma^1_{2n+1}) = \gamma^2_{2n+1}$的证明。我们在此图中用 γ 表示沿 γ 的右手德恩扭转 t_γ。

4. Examples of Lefschetz fibrations

在本节中，我们假设对于 $n \geq 1$ 和 $k \geq 3$，有 $g = n(k-1)$。本节中，我们考察 Mod_g 中关系 $(\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1)^k = 1$ 所对应的 Lefschetz纤维化的拓扑性质。首先，我们回顾 Lefschetz纤维化的定义及其基本性质（详情见 [8]）。

设 X 为一个连通定向闭光滑四维流形， S^2 为一个定向 2维球面。那么，光滑映射 $f\colon X \to S^2$ 是一个亏格为 g 的 Lefschetz纤维化，如果f有有限多个临界点 x_1、...、$x_m \in X$，且它们的像互不相同，并且$f|_{X-\{x_1,\ldots,x_m\}}$是 Σ_g在 $S^2 - \{f(x_1)、\ldots\ldots、f(x_m)\}$上的纤维丛；此外，对每个 $1 \leq i \leq m$，f在 x_i 和 $f(x_i)$ 附近的某些局部复坐标中可表示为 $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$，这些坐标与 X 和 S^2的定向相容。取一个基点 $y \in S^2 - \{f(x_1)、\ldots\ldots、f(x_m)\}$，并通过某个微分同胚将原像 $f^{-1}(y)$ 与 Σ_g 等同。每个奇异纤维 $f^{-1}(f(x_i))$ 都是将正则纤维 Σ_g 中的一条简单闭曲线 c_i “收缩”到一点而得到的。我们称 Σ_g 中的简单闭曲线 c_i 为 f的消失圈。

对于以 y 为基点的 $S^2 - \{f(x_1)\ldots, f(x_m)$ 上的简单光滑闭曲线 γ，拉回丛 $\gamma^* f$ 可由 $\Sigma_g \times [0,1]$ 通过沿 Σ_g 上的保定向微分同胚 φ 粘合 $\Sigma_g \times \{0\}$ 和 $\Sigma_g \times \{1\}$ 而得到。于是我们得到良定义的反同态 $\Phi\colon \pi_1(S^2 - \{f(x_1)\ldots, f(x_m)\}, y) \to \mathrm{Mod}_g$，其定义为 $\Phi(\gamma) = [\varphi] \in \mathrm{Mod}_g$，并称 Φ 为 f 的单值化表示。设 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ 是以 y 为基点的 S^2 上的简单闭曲线，使得 γ_i 逆时针环绕 $f(x_i)$，且 $\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_m = 1$ 属于 $\pi_1(S^2 - \{f(x_1)\ldots, f(x_m)\}, y)$。众所周知，对于 $1 \leq i \leq m$，有 $\Phi(\gamma_i) = t_{c_i}$。因此我们得到一个正关系

$$t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1} = 1 \text{ in } \mathrm{Mod}_g.$$

反过来，对于 Mod_g 中的正关系词 $t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1}$，我们可以构造一个定义在 S^2 上的 Lef- schetz 纤维化，其消失圈为 c_1， c_2、.. . 、 c_m。根据 Kas [17] 和 Matsumoto [19], , 若 $g \geq 2$，亏格为 g 的 Lefschetz纤维化的同构类由相应的 Dehn 扭转正关系词决定，且相差至多同时共轭

$$t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1} \sim t_{\varphi(c_m)}\cdots t_{\varphi(c_2)}t_{\varphi(c_1)} \text{ for } \varphi \in \mathrm{Mod}_g$$

以及初等变换

$$t_{c_m}\cdots t_{c_{i+2}}t_{c_{i+1}}t_{c_i}t_{c_{i-1}}\cdots t_{c_1} \sim t_{c_m}\cdots t_{c_{i+2}}t_{t_{c_{i+1}}(c_i)}t_{c_{i+1}}t_{c_{i-1}}\cdots t_{c_1},$$
$$t_{c_m}\cdots t_{c_{i+2}}t_{c_{i+1}}t_{c_i}t_{c_{i-1}}\cdots t_{c_1} \sim t_{c_m}\cdots t_{c_{i+2}}t_{c_i}t_{t_{c_i}^{-1}(c_{i+1})}t_{c_{i-1}}\cdots t_{c_1}.$$

~ ~ ~ ~回想一下，根据定理1.1，Mod_g 中的 $\zeta = h_1h_3\cdots h_{2n-1}t_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1$ 可表示为右手 Dehn 扭转的乘积。由于 $\zeta^k = 1$，我们有 $(\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1)^k = 1$ 属于 Mod_g。令 $f_{g,k}\colon X_{g,k} \to S^2$ 为与正关系词 $(\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1)^k$ 相对应的、亏格为 $g = n$ 的 Lefschetz纤维化 $(k-1)$。

对于一个亏格为 g 的 Lefschetz纤维化 $f\colon X \to S^2$，我们用 $\chi(X)$ 表示 X 的欧拉示性数。于是可以看出，$\chi(X) = -4(g-1) + s$，其中 s 是 f 的奇异纤维数。因此，我们有以下命题。

命题4.1. 对于满足 $g = n(k-1)$ 的 $n \geq 1$ 和 $k \geq 3$，有

$$\chi(X_{g,k}) = (3n+1)k^2 - 6nk + 4n + 4.$$

4.1. 的单连通性$X_{g,k}$。在本小节中，我们证明$X_{g,k}$是单连通的。对于亏格为 g的 Lefschetz纤维化 $f\colon X \to S^2$，若映射$s\colon S^2 \to X$ 满足 $f \circ s = \mathrm{id}_{S^2}$，且[$s(S^2)$] 在 $H_2(X;\mathbb{Z})$中的自交数为 -1，则称其为 f 的（-1）-截面。令 Mod_g^1 为 Σ_g 上逐点固定 Σ_g 中圆盘 D 的自微分同胚之同痕类群。那么我们有自然的

满同态 $\mathcal{F}\colon \mathrm{Mod}_g^1 \to \mathrm{Mod}_g$，称为遗忘映射。众所周知，对于对应于 Mod_g中正关系词 $t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1}$的 Lefschetz纤维化 $f\colon X \to S^2$，若关系 $t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1}=1$在 Mod_g中关于 $\mathcal{F}$提升为 Mod_g^1中的关系 $t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1}=t_{\partial D}$，则 f有一个（-1）-截面。利用这一事实，我们得到以下引理。

引理 4.2. 对于 $n\geq 1$ 和 $k\geq 3$，若 $g=n(k-1)$，则 *Lefschetz*纤维化$f_{g,k}\colon X_{g,k}\to S^2$ 具有一个(-1)-截面。

证明。我们将圆盘 D 视为 $\widetilde{p}_{2n+2}\in\Sigma_g$ 的一个小圆盘邻域，该邻域在 ζ 下保持不变（ $\widetilde{p}_{2n+2}$的定义见第 2.1 节）。令 ζ' 为 Σ_g 上的一个自微分同胚，它描述了一个（$-\frac{2\pi}{k}$）-旋转的结果，并如图 11 所示逐点固定圆盘 D。根据定义，我们有$\mathcal{F}(\zeta')=\zeta\in\mathrm{Mod}_g$ 和 ${\zeta'}^k=t_{\partial D}\in\mathrm{Mod}_g^1$。映射类 $\widetilde{h}_{2i-1}$、 $\widetilde{a}_i$和 $\widetilde{t}_{2n+1}$ 可自然地视为 Mod_g^1 中的元素；通过与图10类似的论证，我们可以证明 $\zeta'=\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1$属于 Mod_g^1（参见该乘积在弧（ $l_{2n+1}^1\cup l_{2n+1}^2$） $-\mathrm{int}D$上的作用）。因此我们有

$$(\widetilde{h}_1\widetilde{h}_3\cdots\widetilde{h}_{2n-1}\widetilde{t}_{2n+1}\widetilde{a}_n\cdots\widetilde{a}_2\widetilde{a}_1)^k=(\zeta')^k=t_{\partial D}\in\mathrm{Mod}_g^1$$

且该 Lefschetz纤维化 $f_{g,k}$ 具有一个（-1）-截面。引理 4.2 的证明至此完成。□

对于具有截面的 Lefschetz纤维化，全空间的基本群可由以下引理计算（详见 [8]）。

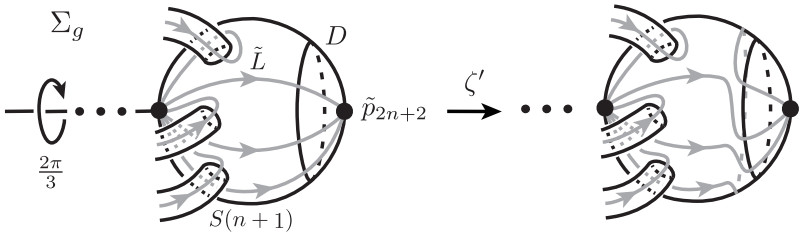

FIGURE 11. 对于 $k=3$， Σ_g 上的微分同胚 ζ'。

引理 4.3。设 $f\colon X\to S^2$ 是一个亏格为 g、对应于 Mod_g 中正关系词 $t_{c_m}\cdots t_{c_2}t_{c_1}$ 的 *Lefschetz*纤维化。则如果 f具有截面，那么 $\pi_1(X)$ </style} 同构于 (Σ_g) 关于 $\pi_1(X)$ 中 $\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$ 的正规闭包所得的商群。

利用引理 4.3，我们得到以下命题。

命题 4.4。 $\pi_1(X_{g,k})=\{1\}$，即 $X_{g,k}$ 是单连通的。

证明。首先，通过自然微分同胚，将 Σ_g 与图 12 右侧的曲面相对应。我们取一个基点 $y\in\Sigma_g$ 以及生成元 $c_{i,l}$，作为图 13 中$1\leq i\leq 2n$ 和 $1\leq l\leq k-1$ 的生成元，其中属于 $\pi_1(\Sigma_g,y)$。令 N 为 $\pi_1(\Sigma_g,y)$ 中 $\{\gamma_{2i-1}^l\mid 1\leq i\leq n+1,\ 1\leq l\leq k\}\cup\{\gamma_{2i}^l\mid 1\leq i\leq n,\ 1\leq l\leq k-1\}\cup\{\alpha_i^l\mid 1\leq i\leq n,\ 1\leq l\leq k-1\}$ 的正规闭包。根据引理 4.3， $\pi_1(X_{g,k})$ 与 $\pi_1(\Sigma_g,y)/N$同构。因此，要完成命题 4.4 的证明，只需证明 $c_{i,l}\in N$ 对于 $1\leq i\leq 2n$ 和 $1\leq l\leq k-1$成立。

作为 $\pi_1(\Sigma_g, y)$ 中的元素，我们有 $\gamma_{2i}^{l} = c_{2i,l}$，$\gamma_{2i-1}^{1} = c_{2i-1,1}$，以及 $\gamma_{2i-1}^{k} = c_{2i-1,k-1}$，其中对应于 $1 \le i \le n$ 和 $1 \le l \le k-1$。因此，这些元素属于 N。记$\delta_{1,l} = c_{1\,l}^{-1}(c_{2n,l-1} \cdots c_{4,l-1}c_{2,l-1})c_{1,l-1}(c_{2}^{-1}{}_{,l-1}c_{4}^{-1}{}_{,l-1} \cdots c_{2n}^{-1}{}_{,l-1})$ 分别为 $2 \le l \le k-2$ 和

$$\delta_{i,l} = c_{2i-1,l}^{-1}\delta_{i-1,l}(c_{2n,l-1} \cdots c_{2i+2,l-1}c_{2i,l-1})c_{2i-1,l-1}(c_{2i,l-1}^{-1}c_{2i+2,l-1}^{-1} \cdots c_{2n,l-1}^{-1})$$

对于 $2 \le i \le n$和 $2 \le l \le k-2$。注意，$\delta_{i,l}$对于 $1 \le i \le n$和 $2 \le l \le k-2$，可由一条以 y 为基点、位于 Σ_g 上的定向简单闭曲线表示，如图14所示。我们可以看到，$\gamma_{1,l} = \delta_{1,l}$ 和 $\gamma_{2i-1,l} = \delta_{i-1,l}\delta_{i\,l}^{-1}$,对于 $2 \le i \le n$ 和 $2 \le l \le k-2$。因此，我们证明了

$c_{1,2},\ c_{1,3}, \ldots,\ c_{1,k-2},\ c_{3,2},\ c_{3,3}, \ldots,\ c_{3,k-2}, \ldots,\ c_{2n-1,2},\ c_{2n-1,3}, \ldots,\ c_{2n-1,k-2} \in N$归纳地成立。因此，所有 $c_{i,l}$都属于 N，我们由此完成了命题 4.4 的证明。□

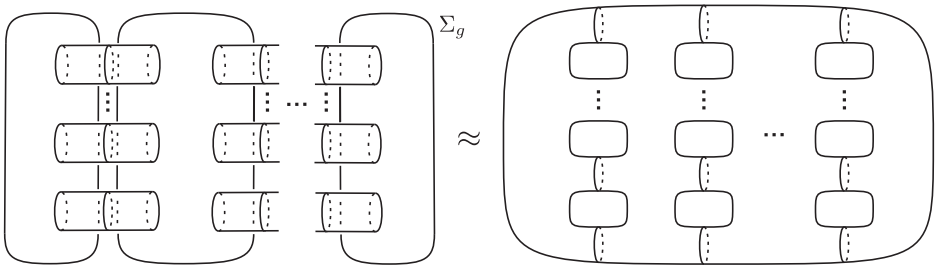

FIGURE 12. Σ_g的一个自然微分同胚。

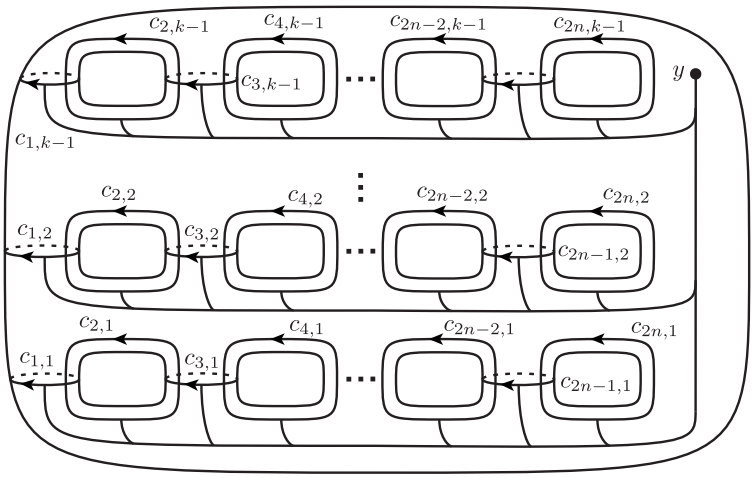

FIGURE 13. $c_{i,\ l}$ 对于 $1 \le i \le 2n$ 和 $1 \le l \le k-1$，在 Σ_g上以 y为基点的闭曲线。

4.2. 的自旋性$X_{g,\ k}$。在本小节中，我们证明以下命题。

命题 4.5。对于 $n \ge 1$ 和 $k \ge 3$ 且满足 $g = n(k-1)$，$X_{g,k}$ 没有自旋结构。

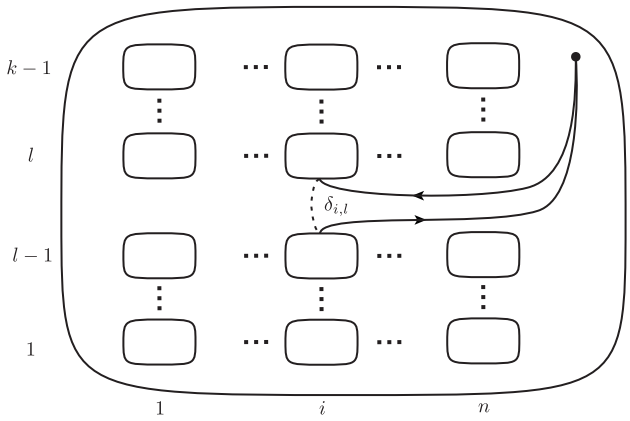

FIGURE 14. 一条闭曲线 $\delta_{i,\,l}$ 对于 $1 \le i \le n$ 和 $2 \le l \le k-2$ 在 Σ_g以 y为基点。

为证明此命题，我们使用 Stipsicz [20]给出的关于 Lefschetz纤维化在 S^2 或二维圆盘 D^2 上的自旋性的充要条件。映射q: $H_1(\Sigma_g;\,\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ 是一个二次型，如果对于任意$c,\ c' \in H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}_2)$，都有 $q(c+c') = q(c) + q(c') + c\cdot c'$，其中 $\cdot$ 是交叉型。对于在 D^2上的 Lefschetz纤维化，我们有以下命题。

命题 4.6 ([20])。设 f: $X \to D^2$ 是亏格为 g 的 *Lefschetz*纤维化，其正则纤维为 $\Sigma_g = f^{-1}(y)$，消失圈为 $c_1, c_2, \dots, c_m \subset \Sigma_g$。那么，$X$存在自旋结构，当且仅当存在一个二次型 q: $H_1(\Sigma_g;\,\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$，使得对每个 $1 \le i \le m$，都有 $q(c_i) = 1 \in \mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$。

命题 4.6 表明，具有分离消失圈的 Lefschetz纤维化不存在自旋结构。设 f: $X \to S^2$ 是亏格为 g的 Lefschetz纤维化，其正则纤维为 $\Sigma_g = f^{-1}(y)$。同调类 $\gamma \in H_2(X;\,\mathbb{Z})$ 是 Σ_g的对偶类，如果 $[\Sigma_g]\cdot\gamma = 1 \in \mathbb{Z}$。对于某个以 y为中心、半径较小的圆盘邻域 U，记 $\nu(\Sigma_g) = f^{-1}(U)$。那么，限制映射 $f|_{X-\nu(\Sigma_g)}$: $X-\nu(\Sigma_g) \to S^2 - U \approx D^2$ 是一个以 D^2为底空间的 Lefschetz纤维化。对于底空间为 S^2的 Lefschetz纤维化，有如下命题。

命题 4.7 ([20])。设 f: $X \to S^2$ 是一个亏格为 g、具有正则纤维 $\Sigma_g = f^{-1}(y)$的 *Lefschetz*纤维化。那么，当且仅当 $X-\nu(\Sigma_g)$是自旋的，并且对于 Σ_g的某个对偶类 $\gamma \in H_2(X;\mathbb{Z})$，$\gamma\cdot\gamma \equiv 0$ 模 2 时，X才具有自旋结构。

设 $\Sigma_g = f_{g,k}^{-1}(y)$ 是 $f_{g,k}$: $X_{g,k} \to S^2$的正则纤维。回想一下，$f_{g,k}$ 的消失圈为 γ_{2i-1}^l $(1 \le i \le n+1,\ 1 \le l \le k)$、$\gamma_{2i}^l$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le l \le k-1)$ 和 α_i^l $(1 \le i \le n,\ 1 \le l \le k-1)$（另见图 3 和图 4）。下面我们常用同一符号表示消失圈及其同调类。对于命题 4.5，下面的引理适用于 $k \ge 3$ 为奇数或 $n \ge 2$ 为偶数的情形。

引理 4.8. 若 $k \ge 3$ 为奇数或 $n \ge 2$ 为偶数，则 $X_{g,\,k}$ 不具有自旋结构。

证明。设 q: $H_1(\Sigma_g;\,\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ 是一个二次型，使得对于 $f_{g,\,k}$: $X_{g,\,k} \to S^2$ 的每个消失圈 γ，都有 $q(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}_2$。根据命题 4.6 和 4.7，只需证明当 $k \ge 3$ 为奇数或 $n \ge 2$ 为偶数时，不存在这样的二次型。

首先，我们假设 $k \ge 3$ 为奇数。作为一个 $\mathbb{Z}_2$-同调类，我们有 $\gamma_1^1 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_1^k = 0 \in H_1(\Sigma_g;\,\mathbb{Z}_2)$。由于 $\gamma_1^l \cdot \gamma_1^{l'} = 0 \in \mathbb{Z}_2$对 $1 \le l,\ l' \le k$成立，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= q(\gamma_1^1 + \gamma_1^2 + \cdots + \gamma_1^k) \\ &= q(\gamma_1^1) + q(\gamma_1^2) + \cdots + q(\gamma_1^k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= k \\ &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

这就产生了矛盾，由此可知，当 $k \geq 3$ 为奇数时，不存在二次型q: $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ 使得对于$f_{g,k}$的每个消失圈 γ，都有 $q(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}_2$成立: $X_{g,k} \to S^2$。

接下来，我们假设 $n \geq 2$ 是偶数。作为一个 $\mathbb{Z}_2$-同调类，我们有 $\gamma_1^1 + \gamma_3^1 + \cdots + \gamma_{2n+1}^1 = 0 \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$。由于 $1 \leq i, i' \leq n+1$的 $\gamma_{2i-1}^1 \cdot \gamma_{2i'-1}^1 = 0 \in \mathbb{Z}_2$，我们有

$$\begin{aligned} 0 &= q(\gamma_1^1 + \gamma_3^1 + \cdots + \gamma_{2n+1}^1) \\ &= q(\gamma_1^1) + q(\gamma_3^1) + \cdots + q(\gamma_{2n+1}^1) \\ &= n+1 \\ &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

这与假设矛盾，因此我们看到，当 $n \geq 2$ 为偶数时，不存在二次型q: $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$，使得对$f_{g,k}$中的每个消失圈 γ，都有 $q(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}_2$: $X_{g,k} \to S^2$。引理 4.8 的证明至此完成。□

命题 4.5 由引理 4.8 和下一个引理得证。

引理 4.9。如果 $k \geq 4$ 为偶数且 $n \geq 1$ 为奇数，那么 $X_{g,k}$ 没有自旋结构。

证明。首先，我们证明 $X_{g,k} - \nu(\Sigma_g)$ 具有自旋结构。由于 $\{\gamma_i^l \mid 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq l \leq k-1\}$是 $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ 的一组基， $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ 上的二次型由 γ_i^l 的像确定。对于任意 $1 \leq i \leq 2n$ 和 $1 \leq l \leq k-1$，我们将二次型 q: $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$记为 $q(\gamma_i^l) = 1$。根据命题 4.6，要证明 $X_{g,k} - \nu(\Sigma_g)$ 具有自旋结构，只需证明 $q(\gamma_i^k) = 1$（当 $1 \leq i \leq 2n$, $q(\gamma_{2n+1}^l) = 1$，当 $1 \leq l \leq k$，以及 $q(\alpha_i^l) = 1$（当 $1 \leq i \leq n$ 且 $1 \leq l \leq k-1$）。

作为一个 $\mathbb{Z}_2$-同调类，我们有 $\gamma_i^k = \gamma_i^1 + \cdots + \gamma_i^{k-1}$，其中 $1 \leq i \leq 2n$。由于$\gamma_i^l \cdot \gamma_i^{l'} = 0 \in \mathbb{Z}_2$，其中 $1 \leq l, l' \leq k-1$，我们有

$$\begin{aligned} q(\gamma_i^k) &= q(\gamma_i^1 + \cdots + \gamma_i^{k-1}) = q(\gamma_i^1) + \cdots + q(\gamma_i^{k-1}) \\ &= k-1 \\ &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

同理，作为一个 $\mathbb{Z}_2$-同调类，我们有 $\gamma_{2n+1}^l = \gamma_1^l + \gamma_3^l + \cdots + \gamma_{2n-1}^l$，其中 $1 \leq l \leq k$。由于 $\gamma_{2i-1}^l \cdot \gamma_{2i'-1}^l = 0 \in \mathbb{Z}_2$，其中 $1 \leq i, i' \leq n+1$，我们有

$$\begin{aligned} q(\gamma_{2n+1}^l) &= q(\gamma_1^l + \gamma_3^l + \cdots + \gamma_{2n-1}^l) = q(\gamma_1^l) + q(\gamma_3^l) + \cdots + q(\gamma_{2n-1}^l) \\ &= n \\ &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

作为一个 $\mathbb{Z}_2$-同调类，我们还有$\alpha_i^l = \gamma_{2i}^l + \gamma_{2i-1}^{l+1}$，其中 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq l \leq k-1$。由于 $\gamma_{2i}^l \cdot \gamma_{2i-1}^{l+1} = 1 \in \mathbb{Z}_2$，我们有

$$\begin{aligned} q(\alpha_i^l) &= q(\gamma_{2i}^l + \gamma_{2i-1}^{l+1}) = q(\gamma_{2i}^l) + q(\gamma_{2i-1}^{l+1}) + \gamma_{2i}^l \cdot \gamma_{2i-1}^{l+1} \\ &= 1+1+1 \\ &= 1 \quad \text{in } \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

因此， q: $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ 是一个二次型，使得对于 $f_{g,k}$: $X_{g,k} \to S^2$ 的每个消失圈 γ， $q(\gamma) = 1 \in \mathbb{Z}_2$；根据命题 4.6， $X_{g,k} - \nu(\Sigma_g)$ 具有自旋结构。

根据这一事实和命题 4.7， $X_{g,k}$ 存在自旋结构，当且仅当对某个 Σ_g的对偶类 $\gamma \in H_2(X; \mathbb{Z})$，有 $\gamma \cdot \gamma \equiv 0$ 模 2。根据引理 4.2，

Lefschetz纤维化 $f_{g,\ k}\colon X_{g,\ k}\to S^2$ 有一个 (-1)-截面 $\ s\colon S^2\to X_{g,\ k}$。由于 $\ s(S^2)$ 与正则纤维 $\ \Sigma_g$ 横截于一点，同调类$[s(S^2)]\in H_2(X_{g,\ k};\mathbb{Z})$ 是 $\ \Sigma_g$ 的对偶类，且 $\ [s(S^2)]\cdot[s(S^2)]=-1\equiv 1\neq 0$ 模 2。对偶类的模 2 自交数不依赖于对偶类的选取，因为 $X_{g,\ k}-\nu(\Sigma_g)$ 存在自旋结构。因此，$\ \Sigma_g$ 的任意对偶类的模 2 自交数均为 1。由此，根据命题 4.7，$\ X_{g,\ k}$ 不存在自旋结构，我们也就完成了引理 4.9 的证明。

□

注4.10。当 $\ n=1$，即 $\ g=k-1\geq 2$ 时，Lefschetz纤维化$f_{g,k}\colon X_{g,k}\to S^2$ 对应于正关系词 $(\widetilde{h}_1\widetilde{t}_3\widetilde{a}_1)^k$。于是我们注意到，$\ k=g+1$ 和

$$\begin{aligned}\widetilde{h}_1&=t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k},\\ \widetilde{t}_3&=\widetilde{t}_1=t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_1^2}\cdots t_{\gamma_1^k},\\ \widetilde{a}_1&=t_{\alpha_1^1}t_{\alpha_1^2}\cdots t_{\alpha_1^{k-1}}.\end{aligned}$$

由于对于 $\ 1\leq l\leq k-1$，$\ t_{\gamma_1^{l+1}}(\alpha_1^l)\ =\gamma_2^l$，经初等变换可得

$$\begin{aligned}&(\widetilde{h}_1\widetilde{t}_3\widetilde{a}_1)^{g+1}\\ =\ &\Big((t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})(t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_1^2}\underbrace{t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_1^k}}_{\rightarrow}\cdot t_{\alpha_1^1}t_{\alpha_1^2}\cdots t_{\alpha_1^{k-1}})\Big)^{g+1}\\ \sim\ &\Big((t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})(t_{\gamma_1^1}\underline{t_{\gamma_1^2}t_{\alpha_1^1}}\cdot\underline{t_{\gamma_1^3}t_{\alpha_1^2}}\cdots\underline{t_{\gamma_1^k}t_{\alpha_1^{k-1}}})\Big)^{g+1}\\ \sim\ &\Big((t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})(t_{\gamma_1^1}t_{t_{\gamma_1^2}(\alpha_1^1)}t_{\gamma_1^2}\cdot t_{t_{\gamma_1^3}(\alpha_1^2)}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{t_{\gamma_1^k}(\alpha_1^{k-1})}t_{\gamma_1^k})\Big)^{g+1}\\ =\ &\Big((t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})(t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})\Big)^{g+1}\\ =\ &(t_{\gamma_1^1}t_{\gamma_2^1}t_{\gamma_1^2}t_{\gamma_2^2}t_{\gamma_1^3}\cdots t_{\gamma_2^{k-1}}t_{\gamma_1^k})^{2g+2}.\end{aligned}$$

因此，对于 $\ n=1$ 和 $\ k\geq 3$，满足 $\ g=n(k-1)$ 的 Lefschetz纤维化 $f_{g,k}\colon X_{g,\ k}\to S^2$ 与一个亏格为 $\ g$、对应于 $(2g+1)$ 链关系的 Lefschetz纤维化同构。然后，根据 [6]，中的命题3.10，$\ X_{g,k}$ 的符号等于 $-2g(g+2)$；根据 [1] 中的引理10，$\ f_{g,k}\colon X_{g,k}\to S^2$ 可由 $\mathbb{CP}^2\sharp\overline{\mathbb{CP}}^2$ 沿某条光滑代数曲线作双重分支覆盖得到。

致谢：作者谨向 Hisaaki Endo 致以诚挚谢意，感谢他的鼓励和宝贵建议。作者也感谢 Takahiro Oba 提出的意见和宝贵建议。作者获得了日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 JP19K23409 和 JP21K13794。

References

[1] A. Akhmedov，N. Monden，*Constructing Lefschetz fibrations via daisy substitutions*，《京都数学杂志》**56** (2016)，第3期，501–529页。[2] J. S. Birman，H. M. Hilden，*On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces* 1969 ，《黎曼曲面理论进展》（会议论文集，纽约州斯托尼布鲁克，），《数学研究年刊》66，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，81–115页，1971年。[3] J. S. Birman，H. M. Hilden，*Lifting and projecting homeomorphisms*，《巴塞尔数学档案》**23** (1972)，428–434页。[4] J. S. Birman，H. M. Hilden，*On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces*，《数学年刊》（第2辑）**97** (1973)，424–439页。[5] M. Dehn，*Die Gruppe der Abbildungsklassen*，《数学学报》**69** (1938)，135–206页。[6] H. Endo，S. Nagami，*Lefschetz fibrations Signature of relations in mapping class groups and non-holomorphic* **357** 2005 3179 3199 ，美国数学会汇刊（），–。

[7] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, 2012年。[8] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, 数学研究生教材**20**, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999年。[9] Y. Z. Gurtas, *Positive Dehn twist expressions for some new involutions in the mapping class group II* 0404311 ,

arXiv:math/。[10] Y. Z. Gurtas, *Positive Dehn twist expressions for some elements of finite order in the mapping class group* 0501385 ,

arXiv:math/。[11] Y. Z. Gurtas, *Positive Dehn Twist Expression for a $\mathbb{Z}_3$ action on Σ_g*, arXiv:0808.0752。[12] T. Ghaswala, R. R. Winarski, *The liftable mapping class group of balanced superelliptic covers* **23** 2017 133 164 , 《纽约数学杂志》 () , –。[13] T. Ghaswala, R. R. Winarski, *Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres*, 《密歇根数学杂志》**66** (2017), 第4期, 885–890页。[14] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4*, 《大阪数学杂志》**47** (2010), 385–421页。[15] S. Hirose, G. Omori, *Finite presentations for the balanced superelliptic mapping class groups*, arXiv:2203.13413。[16] M. Ishizaka, *Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families*, 《马德里康普顿斯数学评论》**20** (2007), 483–495页。[17] A. Kas, *On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration*, 《太平洋数学杂志》**89** (1980), 第1期, 89–104页。[18] M. Korkmaz, *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations*, 《国际数学研究通知》(2001), 115–128页。[19] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach*, 载于《拓扑学与 Teichmüller 空间》（卡廷库尔塔, 1995）, 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇, 123–148页, 1996年。[20] A. I. Stipsicz, *Spin structures on Lefschetz fibrations*, 《伦敦数学会通报》**33** (2001), 第4期, 466–472页。[21] B. Wajnryb, *Mapping class group of a surface is generated by two elements*, 《拓扑学》**35** (1996), 第2期, 377–383页。

(Genki Omori) Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, 2641 Yamazaki, Noda-shi, Chiba, 278-8510 Japan*Email address*: omori genki@ma.noda.tus.ac.jp